République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen -
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de

Master en Mathématique

.

Option : Analyse des EDP et Applications

Théme de Mémoire

Problèmes elliptiques avec exposant critique de Sobolev et poids

Présenté par :

M^r ***Zekri Abdelkrim***

Soutenu le : 30 juin 2013

devant le Jury :

M. Dib. H.	Professeur, Université de Tlemcen	**Président**
M. Abdellaoui. B.	M.C (A), Université de Tlemcen	**Examinateur**
M. Bouguima. S.M.	Professeur, Université de Tlemcen	**Examinateur**
Mme. Nasri. Y.	M.C (A), Université de Tlemcen	**Examinateur**
M. Bouchekif. M.	Professeur, Université de Tlemcen	**Encadreur**

Année Universitaire

2012 – 2013

Dédicaces

Tout d'abord je remercie le DIEU tout clément pour ce qu'il m'a offert.

Je dédie ce mémoire :

A mes très chers parents.

A mes frères : Mouhamed et Salah.

A mes soeurs : Hafida et son mari Ahmed, Houria et son mari Abdeldjelile, et Naïma.

A toute ma famille.

A tous mes amis sans éxception .

A mes collègues : Mahmoud, Bouchnak, banzouba, Omar, Abdelkader, Zazoua, Hacini, Lotfi, Anwar, Soufiane, Yassine, Ismail, Hamra, et Faycal .
Et les autres collègues de ma promotion et du département .

A tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie .

A tous mes enseignants.

Remerciéments

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confance durant toutes mes années d'études.

Je remercie mes parents d'être si patients, si généreux et tellement merveilleux, ils ont toujours été une source de motivation d'encouragements et de beaucoup de bonheur.

Je souhaite aussi adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

En effet, je voudrai remercier mon université, ma famille, mon encadreur et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de mon mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur **Bouchekif**, qui, en tant que mon encadreur, s'est toujours montré à l'écoute tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi que pour son aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Merci à mes professeurs et enseignants d'avoir été là, de nous avoir énormémnt appris par la qualité des enseignements qu'ils nous ont prodigués.

J'adresse mes remerciements aussi à notre chef de département de mathématiques, Mr Benmiloud MEBKHOUT.

Mes remerciements vont également à monsieur **H. Dib** Professeur à l'U.A.B.B, qui a accepté de présider le jury.

C'est, encore, un grand plaisir pour moi, d'adresser mes plus sincères remerciements à : Mr **B. Abdellaoui** M.C.A à l'U.A.B.B, Mr **S. M. Bouguima** Professeur à l'U.A.B.B, et madame **Y. Nasri** M.C.A à l'U.A.B.B, d'avoir accepter de faire partie de jury.

Table des Matières

Introduction

L'objet de ce mémoire est d'étudier des problèmes elliptiques faisant intervenir l'exposant critique de Sobolev et des fonctions poids.

Dans notre travail, on considère deux types de problèmes :

• Problème elliptique critique dont l'opérateur principal contient une fonction poids.

• Problème elliptique semilinéaire avec nonlinéarité critique à coefficients poids.

La caractérisation de ces problèmes est la présence de l'exposant critique de Sobolev qui provoque la perte de "compacité", et la présence des fonctions poids dont les graphes affectent l'existence de la solution "ground state" et la multiplicité des solutions.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le chapitre 1, on rappelle quelques définitions et résultats préliminaires, Le chapitre 2 est destiné à l'étude d'existence des solutions du modèle suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u) = u^{q-1} + \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $p : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement positive avec $p \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, λ est un paramètre réel, et $q = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev pour l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Le cas où le poids p est une fonction constante a été étudié par H. Brezis et L. Nirenberg [6]. La question soulevée dans ce chapitre est la suivante : que se passe t-il lorsque p est une fonction non constante?. Les résultats obtenus sont dûs à R. Hadiji et H.Yazidi [12] .

Dans le chapitre 3, on s'intéresse à l'existence des solutions du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x) \left|u\right|^{q-2} u + g(x) \left|u\right|^{2^*-2} u & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$, $1 \leq q < 2$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$, $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$, Ω un domaine borné de bord $\partial\Omega$ régulier, et f, g sont des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.

Sous des hypothèses convenables sur f et g, on montre l'existence d'une solution à moindre énergie (appelée ground state) et de k solutions correspondant aux k maximums du poids g. Ces résultats sont dûs à Huei-li Lin [7] .

Chapitre 1

Résultats préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle les principaux résultats utilisés dans ce mémoire.

1.1 Espaces de Banach

Soit E un espace de Banach réel.

Définition 1.1.1 *Une suite* $(x_n) \in E$ *converge faiblement vers* x *si pour tout* $f \in E'$ *(le dual topologique de E),* $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. *On note alors* $x_n \rightharpoonup x$.

Théorème 1.1.2 *[4]. Si* $x_n \rightharpoonup x$, *alors* $\|x_n\|$ *est bornée et*

$$\|x\| \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \|x_n\| .$$

Définition 1.1.3 E *est réflexif si* $I(E) = E$, *où* $I : E \longrightarrow (E')'$ *est l'injection canonique définie comme suit :*

$$\textit{pour } x \in E, \qquad I(x) : E' \longrightarrow \mathbb{R} : y^* \longmapsto y^*(x).$$

Théorème 1.1.4 ***(Eberlein - Shmulyan)[4].*** *Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si toute suite bornée* (u_n) *de E contient une sous suite* $(u_n)_k$ *convergeant faiblement dans E.*

1.2 Espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert.

Définition 1.2.1 *L'espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) \quad = \quad \Big\{u \in L^p(\Omega) \ ; \ \exists\ g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que } \int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\phi \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, ..., N\Big\}$$

On pose $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.
Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *on note*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad et \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right).$$

Théorème 1.2.2 *[4].* $W^{1,p}(\Omega)$, *muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
Il est de plus séparable pour $1 \leq p < \infty$ *et réflexif pour* $1 < p < \infty$.

Théorème 1.2.3 *[4].* $H^1(\Omega)$ *muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2},$$

est un espace de Hilbert séparable.

Définition 1.2.4 *On définit* $H_0^1(\Omega)$ *comme la fermeture de* $C_c^\infty(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$.

Remarque 1.2.5 *On a* $H^1(\mathbb{R}^N) = H_0^1(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 1.2.6 ***(Immersions de Sobolev)[4].*** *Soit* Ω *un domaine borné de classe* C^1, *on a*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) \quad où\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} & si\ p < N, \\ L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, \infty) & si\ p = N, \\ C(\overline{\Omega}) & si\ p > N, \end{cases}$$

avec injections continues, et

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*) & si\ p < N, \\ \\ L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, \infty) & si\ p = N, \\ \\ C(\overline{\Omega}) & si\ p > N, \end{cases}$$

avec injections compactes.

Théorème 1.2.7 ***(Inégalité de Poincaré)[4].*** *Soit Ω un ouvert borné. Il existe une constante C telle que*

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

De plus, la meilleure constante C pour cette inégalité est $\frac{1}{\lambda_1}$(où λ_1 est la première valeur propre du Laplacien).

Lemme 1.2.8 ***(Inégalité de Hardy)[2].*** *Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t + N > 0$, on a pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$*

$$\int_\Omega |u|^t |u|^2 \, dx \leq (\frac{2}{N+t})^2 \int_\Omega |x \cdot \nabla u|^2 |x|^t \, dx.$$

La constante $(\frac{2}{N+t})^2$ est optimale et n'est jamais atteinte.

1.3 Identité de Pohozaev

Lemme 1.3.1 ***(Identité de Pohozaev)[11].*** *Soit u une solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & dans\ \Omega, \\ \\ u > 0 & dans\ \Omega, \\ \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

où g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Alors

$$2N \int_\Omega G(u) - (N-2) \int_\Omega g(u)u = \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2,$$

où $G(u) = \int_0^u g(s)ds$ et $\nu = \nu(x)$ est le vecteur normal extérieur unitaire à $\partial\Omega$ en x.

Définition 1.3.2 *On dit que Ω est étoilé par rapport à un point a si pour tout $x \in \Omega$, $\{(1-t)a + tx : t \in [0,1]\} \subset \Omega$.*

Lemme 1.3.3 ***(Lemme de Brézis-Lieb)[5].*** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(u_n)_n \subset L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$. Si $(u_n)_n$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ et $u_n \longrightarrow u$ p.p dans Ω, alors*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (\|u_n\|_{L^p}^p - \|u_n - u\|_{L^p}^p) = \|u\|_{L^p}^p .$$

Théorème 1.3.4 ***(Principe du maximum fort).*** *Soit Ω un domaine borné. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant $-\Delta u \leq 0$ et si u atteint un maximum positif à l'intérieur de Ω, alors u est constante sur Ω.*

1.4 Multiplicateurs de Lagrange

Définition 1.4.1 *Soit E un espace de Banach, $F \in C^1(E, \mathbb{R})$ et un ensemble de contraintes:*

$$S := \{v \in E; F(v) = 0\} .$$

On suppose que pour tout $u \in S$, on a $F'(u) \neq 0$. Si $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ on dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de J sur S s'il existe $u \in S$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $J(u) = c$ et $J'(u) = \lambda F'(u)$. Le point u est un point critique de J sur S et le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange pour la valeur critique c (ou le point critique u).

Proposition 1.4.2 *[10]. Sous les hypothèses et les notations de la définition 1.4.1, on suppose que $u_0 \in S$ est tel que $J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

1.5 Condition de Palais-Smale

Définition 1.5.1 *Soient E un espace de Banach et $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, $\beta \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau β) $(PS)_\beta$, si toute suite $(u_n)_n$ de E telle que*

$$\begin{cases} J(u_n) \longrightarrow \beta & \text{dans } \mathbb{R}, \\ J'(u_n) \longrightarrow 0 & \text{dans } E', \end{cases}$$

contient une sous suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Définition 1.5.2 *Soit E un espace topologique. on dit que $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi continue inférieurement (s.c.i) si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $[J \leq \lambda] := \{x \in E;\ J(x) \leq \lambda\}$ est fermé.*

Lemme 1.5.3 ***(Principe variationnel d'Ekland)[9].*** *Soit (E, d) un espace métrique complet, et $F : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i, bornée inférieurement, et $\neq +\infty$. Alors*
pour tout $\epsilon, \delta > 0$, $u \in E$ tels que

$$F(u) \leq \inf_E F + \epsilon,$$

il existe $v \in E$ tel que

$$F(v) < F(w) + \frac{\epsilon}{\delta} d(v, w) \qquad \forall w \neq v.$$

De plus, on a $F(v) \leq F(u)$, $d(u, v) \leq \delta$.

Chapitre 2

Problème elliptique critique dont l'opérateur principal contient une fonction poids

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie le problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u) = u^{q-1} + \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $p : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement positive avec $p \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, λ est un paramètre réel, et $q = \frac{2N}{N-2}$ est appelé exposant critique de Sobolev pour l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Dans [6], Brezis et Nirenberg traitent le cas où p est une fonction constante. Ils ont montré l'existence d'au moins une solution de (2.1.1) pour $0 < \lambda < \lambda_1$ et $N \geq 4$. Lorsque $N = 3$ et Ω une boule, ils ont prouvé l'existence de solutions pour tout $\lambda \in (\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1)$, où λ_1 est la première valeur propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.
Par contre quand $\lambda \geq \lambda_1$, le problème (2.1.1) n'admet pas de solution. *Lorsque* $\lambda \leq 0$ et Ω est un domaine étoilé, le problème (2.1.1) n'admet pas de solution d'aprés l'identité de Pohozaev.

L'objet de ce chapitre est de généraliser les résultats de Brezis et Nirenberg [6] au cas où le poids $p \neq 1$. Ce travail a été réalisé par R. Hadiji et H.Yazidi [12]. On se propose de détailler les résultats de ce travail sous les hypothèses suivantes:
On considère $p_0 = \min \left\{p(x), x \in \overline{\Omega}\right\}$ et on suppose que $p^{-1}(\{p_0\}) \cap \Omega \neq \emptyset$.
Soit $a \in p^{-1}(\{p_0\}) \cap \Omega$, on suppose que, dans un voisinage de a, p se comporte comme suit :

$$p(x) = p_0 + \beta_k |x-a|^k + |x-a|^k \theta(x), \tag{2.1.2}$$

avec $k > 0$, $\beta_k > 0$ et $\theta(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a.
Si $0 < k \leq 2$ on ajoute la condition supplémentaire suivante :

$$k\beta_k \leq \frac{\nabla p(x) \cdot (x-a)}{|x-a|^k} \ p.p \ x \in \Omega. \tag{2.1.3}$$

Les résultats obtenus sont :

Théorème 2.1.1 *On suppose que* $p \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *vérifie* (2.1.2). *Soit* λ_1^{div} *la première valeure propre de l'opérateur* $-\operatorname{div}(p(x)\nabla .)$ *sur* Ω *avec condition de Dirichlet homogène. On a*
1) *Si* $N \geq 4$ *et* $k > 2$, *alors pour tout* $\lambda \in]0, \lambda_1^{\mathrm{div}}[$ *il existe une solution de* (2.1.1).
2) *Si* $N \geq 4$ *et* $k = 2$, *alors il existe une constante* $\widetilde{\gamma}(N) = \frac{(N-2)N(N+2)}{4(N-1)}\beta_2$ *telle que pour tout* $\lambda \in]\widetilde{\gamma}(N), \lambda_1^{\mathrm{div}}[$ *il existe une solution de* (2.1.1).
3) *Si* $N = 3$ *et* $k \geq 2$, *alors il existe une constante* $\gamma(k) > 0$ *telle que pour tout* $\lambda \in]\gamma(k), \lambda_1^{\mathrm{div}}[$ *le problème* (2.1.1) *admet une solution.*
4) *Si* $N \geq 3$ *et* $0 < k < 2$ *et* p *vérifie la condition* (2.1.3) *alors il existe* $\lambda^* \in [\widetilde{\beta_k}\frac{N^2}{4}, \lambda_1^{\mathrm{div}}[$, *où* $\widetilde{\beta_k} = \beta_k \min[(diam(\Omega)^{k-2}, 1]$, *tel que pour tout* $\lambda \in]\lambda^*, \lambda_1^{\mathrm{div}}[$, *le problème* (2.1.1) *admet une solution.*
5) *Si* $N \geq 3$ *et* $k > 0$, *alors pour tout* $\lambda \leq 0$ *le problème* (2.1.1) *n'a pas de solution minimisante.*
6) *Si* $N \geq 3$ *et* $k > 0$, *alors le problème* (2.1.1) *n'admet pas de solution pour tout* $\lambda \geq \lambda_1^{\mathrm{div}}$.

On obtient également grâce à l'identité de Pohozaev, des résultats de non existence pour le problème (2.1.1) dans le cas où Ω est un domaine étoilé.
Pour $p \in C^1(\overline{\Omega})$ ou $p \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et $\nabla p(x) \cdot (x-a) \geq 0$ $p.p$ $x \in \Omega$:
Posons

$$\alpha(p) := \frac{1}{2} \inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega \nabla p(x) \cdot (x-a) |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega |u|^2 \, dx}.$$

On a $\alpha(p) \in [-\infty, +\infty[$.

Théorème 2.1.2 *On suppose que $\alpha(p) > -\infty$. Le problème* (2.1.1) *n'admet pas de solution pour $\lambda \leq \alpha(p)$ avec Ω un domaine étoilé par rapport à a.*

2.2 Préliminaires

• **Étude de** $\alpha(p)$

Proposition 2.2.1 ***1)*** *Si $p \in C^1(\Omega)$ et s'il existe $b \in \Omega$ tel que $\nabla p(b) \cdot (b - a) < 0$, alors $\alpha(p) = -\infty$.*
2) *Si $p \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfait* (2.1.2) *et $\nabla p(x) \cdot (x - a) \geq 0$ p.p $x \in \Omega$, on a*
2.a) *Si $k > 2$ et $p \in C^1(\Omega)$, alors $\alpha(p) = 0$ pour tout $N \geq 3$.*
2.b) *Si $0 < k \leq 2$ et p satisfait la condition* (2.1.3) *alors pour tout $N \geq 3$ on a*

$$\frac{k}{2}\beta_k(\frac{N+k-2}{2})^2(diam\Omega)^{k-2} \leq \alpha(p).$$

Démonstration : On commence par **1).** Posons $q(x) = \nabla p(x) \cdot (x - a)$, pour tout $x \in \Omega$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$, et

$$\begin{cases} \varphi = 1 & \text{si } x \in B(0,r), \\ \\ \varphi = 0 & \text{si } x \notin B(0,2r), \end{cases}$$

où $0 < r < 1$.
On pose $\varphi_j(x) = \varphi(j(x-b))$ pour $j \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} \alpha(p) &\leq \frac{1}{2}\frac{\int_\Omega q(x)\left|\nabla\varphi_j(x)\right|^2 dx}{\int_\Omega \left|\varphi_j(x)\right|^2 dx} \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{\int_{B(b,\frac{2r}{j})} q(x)\left|\nabla\varphi_j(x)\right|^2 dx}{\int_{B(b,\frac{2r}{j})} \left|\varphi_j(x)\right|^2 dx}. \end{aligned}$$

Utilisant le changement de variable $y = j(x-b)$, on trouve

$$\alpha(p) \leq \frac{j^2}{2}\frac{\int_{B(0,2r)} q(\frac{y}{j}+b)\left|\nabla\varphi(y)\right|^2 dy}{\int_{B(0,2r)} \left|\varphi(y)\right|^2 dy}.$$

Appliquant le théorème de la convergence dominée, on obtient

$$\alpha(p) \leq \frac{j^2}{2}\left[q(b)\frac{\int_{B(0,2r)} \left|\nabla\varphi(y)\right|^2 dy}{\int_{B(0,2r)} \left|\varphi(y)\right|^2 dy} + o(1)\right].$$

Faisant tendre $j \longrightarrow \infty$, on obtient le résultat.

Maintenant on montre **2.a).** Utilisant (2.1.2) et comme $p \in C^1(\Omega)$, dans un voisinage V de a, on écrit

$$p(x) = p_0 + \beta_k |x-a|^k + \theta_1(x), \tag{2.2.1}$$

avec $\theta_1 \in C^1(\Omega)$ telle que

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{\theta_1(x)}{|x-a|^k} = 0. \tag{2.2.2}$$

D'aprés (2.2.2), on déduit qu'il existe $0 < r < 1$, tel que

$$\theta_1(x) \leq |x-a|^k \qquad \forall x \in B(a, 2r). \tag{2.2.3}$$

Soient φ définie comme precédemment, et $\varphi_j(x) = \varphi(j(x-a))$ pour $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq \alpha(p) \leq \frac{1}{2} \frac{\int_\Omega \nabla p(x) \cdot (x-a) \left|\nabla \varphi_j(x)\right|^2 dx}{\int_\Omega \left|\varphi_j(x)\right|^2 dx}.$$

Utilisant (2.2.1), on a

$$0 \leq \alpha(p) \leq \frac{k\beta_k}{2} \frac{\int_{B(a,\frac{2r}{j})} |x-a|^k \left|\nabla \varphi_j(x)\right|^2 dx}{\int_{B(a,\frac{2r}{j})} \left|\varphi_j(x)\right|^2 dx} + \frac{1}{2} \frac{\int_{B(a,\frac{2r}{j})} \nabla \theta_1(x) \cdot (x-a) \left|\nabla \varphi_j(x)\right|^2 dx}{\int_{B(a,\frac{2r}{j})} \left|\varphi_j(x)\right|^2 dx}.$$

Utilisant le changement de variable $y = j(x-a)$, et intégrant par parties le second terme, on obtient

$$0 \leq \alpha(p) \leq \frac{k\beta_k}{2j^{k-2}} \frac{\int_{B(0,2r)} |y|^k |\nabla \varphi(y)|^2 dy}{\int_{B(0,2r)} |\varphi(y)|^2 dy} + \frac{j}{2} \frac{\int_{B(0,2r)} \theta_1(\frac{y}{j}+a) \nabla(y |\nabla \varphi(y)|^2) dy}{\int_{B(0,2r)} |\varphi(y)|^2 dx}.$$

Et d'aprés (2.2.3), on a

$$0 \leq \alpha(p) \leq \frac{k\beta_k}{2j^{k-2}} \frac{\int_{B(0,2r)} |y|^k |\nabla \varphi(y)|^2 dy}{\int_{B(0,2r)} |\varphi(y)|^2 dy} + \frac{1}{2j^{k-1}} \frac{\int_{B(0,2r)} |y|^k \nabla(y |\nabla \varphi(y)|^2) dy}{\int_{B(0,2r)} |\varphi(y)|^2 dx}.$$

Donc, pour $k > 2$ on déduit que $\alpha(p) = 0$.

Montrons **2.b).** Puisque p satisfait (2.1.3), on a pour tout $u \in H_0^1 \backslash \{0\}$,

$$\frac{\int_\Omega \nabla p(x) \cdot (x-a) |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega |u(x)|^2 dx} \geq k\beta_k \frac{\int_\Omega |x-a|^k |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega |u(x)|^2 dx}.$$

En appliquant le lemme (1.2.8) pour $0 < k = 2 + t \leq 2$, on trouve

$$\frac{\int_\Omega \nabla p(x) \cdot (x-a) \left|\nabla u(x)\right|^2 dx}{\int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx} \geq k\beta_k (\frac{N+k-2}{2})^2 (diam\Omega)^{k-2}.$$

Ce qui est implique que $\alpha(p) \geq k\beta_k(\frac{N+k-2}{2})^2(diam\Omega)^{k-2}$. ■

On note par

$$U_{a,\epsilon}(x) = \frac{1}{(\epsilon + \left|x-a\right|^2)^{\frac{N-2}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \epsilon > 0,$$

une fonction extrémale pour l'inégalité de Sobolev.
On pose

$$u_{a,\epsilon}(x) = \phi(x) U_{a,\epsilon}(x), \; x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.2.4}$$

où $\phi \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$ une fonction fixée telle que $0 \leq \phi \leq 1$, et $\phi \equiv 1$ au voisinage de a.

D'aprés [6], on a:

$$\left\|\nabla u_{a,\epsilon}\right\|_2^2 = \frac{K_1}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O(1), \tag{2.2.5}$$

$$\left\|u_{a,\epsilon}\right\|_q^2 = \frac{K_2}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O(\epsilon), \tag{2.2.6}$$

et

$$\left\|u_{a,\epsilon}\right\|_2^2 = \begin{cases} \frac{K_3}{\epsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O(1) & \text{si } N \geq 5 \\ \\ \frac{\omega_4}{2}\left|\log \epsilon\right| + O(1) & \text{si } N = 4 \end{cases} \tag{2.2.7}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes positives avec $\frac{K_1}{K_2} = S$, ω_4 est la surface de S^3 et $K_3 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|x|^2)^{N-2}} dx$.

2.3 Existence des solutions

Soit la fonctionnelle Q_λ définie sur $H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ par

$$Q_\lambda(u) = \frac{\int_\Omega p(x) \left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx}{\left\|u\right\|_q^2}. \tag{2.3.1}$$

Posons

$$S_\lambda(p) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} Q_\lambda(u). \tag{2.3.2}$$

On remarque que

$$S_\lambda(p) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega), \|u\|_q=1} \int_\Omega p(x) |\nabla u(x)|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx.$$

On pose

$$S = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_q=1}} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx,$$

la meilleure constante de Sobolev pour l'injection $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.
La méthode utilisée pour la preuve du théorème 2.1.1 est la suivante : Premièrement on montre que $S_\lambda(p) < p_0 S$, on montre alors que l'infimum $S_\lambda(p)$ est atteint.
Avant de donner la preuve, on a besoin des propriétées auxiliaires.

Lemme 2.3.1 *Si $S_\lambda(p) < p_0 S$ pour $\lambda > 0$, alors l'infimum dans* (2.3.2) *est atteint.*

Démonstration : Soit $\{u_j\} \subset H_0^1$ une suite minimisante pour (2.3.2), c,à,d:

$$\|u_j\|_q = 1, \tag{2.3.3}$$

et

$$\int_\Omega p(x) |\nabla u_j(x)|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega |u_j(x)|^2 \, dx = S_\lambda(p) + o(1), \text{ quant } j \longrightarrow \infty. \tag{2.3.4}$$

La suite (u_j) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, d'aprés (2.3.4), on a

$$\int_\Omega p(x) |\nabla u_j(x)|^2 \, dx = S_\lambda(p) + \lambda \int_\Omega |u_j(x)|^2 \, dx + o(1).$$

Utilisant l'injection de $L^q(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, il existe une constante positive C_1 telle que

$$\int_\Omega p(x) |\nabla u_j(x)|^2 \, dx \leq S_\lambda(p) + \lambda C_1 \|u_j\|_q^2 + o(1).$$

Utilisant le fait que

$$\|u_j\|_q = 1,$$

on obtient

$$\int_\Omega p(x) |\nabla u_j(x)|^2 \, dx \leq S_\lambda(p) + \lambda C_1 + o(1).$$

Puisque $0 < p_0 \leq p(x)$ pour tout $x \in \Omega$, on déduit que

$$\int_\Omega |\nabla u_j(x)|^2 \, dx \leq \frac{S_\lambda(p) + \lambda C_1}{p_0} + o(1).$$

D'où le résultat.
Donc on peut extraire une sous-suite, encore notée $\{u_j\}$, telle que

$$\begin{array}{ccll} u_j & \rightharpoonup & u & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ u_j & \longrightarrow & u & \text{fortement dans } L^2(\Omega), \\ u_j & \longrightarrow & u & \text{p.p dans } \Omega, \end{array}$$

avec $\|u\|_q \leq 1$. Posons $v_j = u_j - u$, alors

$$\begin{array}{ccll} v_j & \rightharpoonup & 0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ v_j & \longrightarrow & 0 & \text{fortement dans } L^2(\Omega), \\ v_j & \longrightarrow & 0 & \text{p.p dans } \Omega. \end{array}$$

Utilisant (2.3.3), la définition de S et le fait que $\min\limits_{\overline{\Omega}} p(x) = p_0 > 0$, on a

$$\int_\Omega p(x) \, |\nabla u_j(x)|^2 \, dx \geq p_0 S.$$

D'aprés (2.3.4), il résulte que $\lambda \|u\|_2^2 \geq p_0 S - S_\lambda(p) > 0$ et donc $u \neq 0$.
Utilisant toujours (2.3.4) on obtient

$$\int_\Omega p(x) \, |\nabla u(x)|^2 \, dx + \int_\Omega p(x) \, |\nabla v_j(x)|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx = S_\lambda(p) + o(1), \tag{2.3.5}$$

D'autre part, d'aprés le lemme de Brézis-Lieb on a

$$\|u + v_j\|_q^q = \|u\|_q^q + \|v_j\|_q^q + o(1),$$

(puisque v_j est bornée L^q et $v_j \longrightarrow 0$ $p.p$). Par (2.3.3), on trouve

$$1 = \|u\|_q^q + \|v_j\|_q^q + o(1),$$

donc

$$1 \leq \|u\|_q^2 + \|v_j\|_q^2 + o(1),$$

et

$$1 \leq \|u\|_q^2 + \frac{1}{p_0 S} \int_\Omega p(x) \, |\nabla v_j(x)|^2 \, dx + o(1). \tag{2.3.6}$$

On distingue deux cas:
a) $S_\lambda(p) > 0$, correspond à $0 < \lambda < \lambda_1^{\text{div}}$,
b) $S_\lambda(p) \leq 0$, correspond à $\lambda \geq \lambda_1^{\text{div}}$.

Dans le cas **a**) on conclut d'aprés (2.3.6) que

$$S_\lambda(p) \leq S_\lambda(p)\, \|u\|_q^2 + \left(\frac{S_\lambda(p)}{p_0 S}\right) \int_\Omega p(x)\, |\nabla v_j(x)|^2\, dx + o(1). \tag{2.3.7}$$

Conbinant (2.3.5) et (2.3.7), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_\Omega p(x)\, |\nabla u(x)|^2\, dx - \lambda \int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \int_\Omega p(x)\, |\nabla v_j(x)|^2\, dx \\ \leq \quad & S_\lambda(p)\, \|u\|_q^2 + \left(\frac{S_\lambda(p)}{p_0 S}\right) \int_\Omega p(x)\, |\nabla v_j(x)|^2\, dx + o(1). \end{aligned}$$

Donc

$$\int_\Omega p(x)\, |\nabla u(x)|^2\, dx - \lambda \int_\Omega |u(x)|^2\, dx \leq S_\lambda(p)\, \|u\|_q^2 + \left[\frac{S_\lambda(p)}{p_0 S} - 1\right] \int_\Omega p(x)\, |\nabla v_j(x)|^2\, dx + o(1).$$

Puisque $S_\lambda(p) < p_0 S$, on déduit

$$\int_\Omega p(x)\, |\nabla u(x)|^2\, dx - \lambda \int_\Omega |u(x)|^2\, dx \leq S_\lambda(p)\, \|u\|_q^2, \tag{2.3.8}$$

ceci montre que u est un minimun de $S_\lambda(p)$.

Dans le cas **b**), puisque $\|u\|_q^2 \leq 1$,on a $S_\lambda(p) \leq S_\lambda(p)\, \|u\|_q^2$. On obtient (2.3.8) d'aprés (2.3.5). ■

Lemme 2.3.2 *a) Pour $N \geq 4$, on a*

$$S_\lambda(p) < p_0 S \quad \textit{pour tout} \quad \lambda > 0 \textit{ et pour } k > 2.$$

b) Pour $N = 4$ et $k = 2$, on a

$$S_\lambda(p) < p_0 S \quad \textit{pour tout} \quad \lambda > 4\beta_2.$$

c) Pour $N \geq 5$ et $k = 2$, on a

$$S_\lambda(p) < p_0 S \quad \textit{pour tout} \quad \lambda > \frac{(N-2)N(N+2)}{4(N-1)}\beta_2.$$

d) Pour $N = 3$ et $k \geq 2$, on a

$$S_\lambda(p) < p_0 S \quad \textit{pour tout} \quad \lambda > \gamma(k) \textit{ où } \gamma(k) \textit{ est une constante positive.}$$

Démonstration : Nous allons estimer le quotient $Q_\lambda(u)$ défini dans (2.3.1), avec $u = u_{a,\epsilon}$.
On affirme que, pour $\epsilon \longrightarrow 0$, on a

$$\epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2 dx \leq \tag{2.3.9}$$

$$\begin{cases} p_0 K_1 + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) & \text{si } N \geq 4 \text{ et } N-2 < k, \\ p_0 K_1 + A_k \epsilon^{\frac{k}{2}} + o(\epsilon^{\frac{k}{2}}) & \text{si } N \geq 4 \text{ et } N-2 > k, \\ p_0 K_1 + \frac{(N-2)^2(\beta_{N-2}+M)\omega_N \epsilon^{\frac{N-2}{2}} \left|\log \epsilon\right|}{2} + o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}} \left|\log \epsilon\right|) & \text{si } N > 4 \text{ et } k = N-2, \\ p_0 K_1 + 2\beta_2 \omega_4 \epsilon \left|\log \epsilon\right| + o(\epsilon \left|\log \epsilon\right|) & \text{si } N = 4 \text{ et } k = 2, \end{cases}$$

avec $K_1 = (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^2}{(1+|y|^2)^N} dy$, $A_k = (N-2)^2 \beta_k \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^{k+2}}{(1+|y|^2)^N} dy$ et M une constante positive.

Vérification de (2.3.9)
On a

$$\begin{aligned} \int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2 dx \; &= \; \int_\Omega \frac{p(x) \left|\nabla \phi(x)\right|^2}{(\epsilon + |x-a|^2)^{N-2}} dx + (N-2)^2 \int_\Omega \frac{p(x)\phi(x)^2 \left|x-a\right|^2}{(\epsilon + |x-a|^2)^N} dx \\ &\quad - 2(N-2) \int_\Omega \frac{p(x)\phi(x)\nabla\phi(x)(x-a)}{(\epsilon + |x-a|^2)^{N-1}} dx \;. \end{aligned}$$

Puisque $\phi \equiv 1$ au voisinage de a, on suppose que $\phi \equiv 1$ sur $B(a,l)$ avec $l > 0$ petit. Donc on obtient $\left|\nabla \phi\right|^2 \equiv 0$ sur $B(a,l)$ et $\nabla \phi(x) \cdot (x-a) = 0$ sur $B(a,l)$.
On a

$$\int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2 dx = \int_{\Omega \backslash B(a,l)} \frac{p(x) \left|\nabla \phi(x)\right|^2}{(\epsilon + |x-a|^2)^{N-2}} dx \tag{2.3.10}$$

$$+(N-2)^2 \int_\Omega \frac{p(x)\phi(x)^2 \left|x-a\right|^2}{(\epsilon + |x-a|^2)^N} dx - 2(N-2) \int_{\Omega \backslash B(a,l)} \frac{p(x)\phi(x)\nabla\phi(x)(x-a)}{(\epsilon + |x-a|^2)^{N-1}} dx \;.$$

Donc, en appliquant le théorème de convergence dominée, (2.3.10) devient

$$\int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2 dx = (N-2)^2 \int_\Omega \frac{p(x)\phi(x)^2 \left|x-a\right|^2}{(\epsilon + |x-a|^2)^N} dx + O(1).$$

Utilisant (2.1.2), on a

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{\Omega}p(x)\left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^{2}dx &= (N-2)^2p_0\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{B(a,l)}\frac{\left|x-a\right|^{2}}{(\epsilon+\left|x-a\right|^{2})^{N}}dx\\
&+(n-2)^2\beta_k\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{B(a,l)}\frac{\left|x-a\right|^{k+2}}{(\epsilon+\left|x-a\right|^{2})^{N}}dx\\
&+(n-2)^2\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{B(a,l)}\frac{\left|x-a\right|^{k+2}\theta(x)}{(\epsilon+\left|x-a\right|^{2})^{N}}dx\\
&+(n-2)^2\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{\Omega\backslash B(a,l)}\frac{p(x)\phi(x)^2\left|x-a\right|^{2}}{(\epsilon+\left|x-a\right|^{2})^{N}}dx\\
&+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).
\end{aligned}$$

On applique le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{\Omega}p(x)\left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^{2}dx &= (N-2)^2p_0\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{B(a,l)}\frac{\left|x-a\right|^{2}}{(\epsilon+\left|x-a\right|^{2})^{N}}dx\\
&+(N-2)^2\beta_k\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{B(a,l)}\frac{\left|x-a\right|^{k+2}}{(\epsilon+\left|x-a\right|^{2})^{N}}dx\\
&+(N-2)^2\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{B(a,l)}\frac{\left|x-a\right|^{k+2}\theta(x)}{(\epsilon+\left|x-a\right|^{2})^{N}}dx+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{\Omega}p(x)\left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^{2}dx &= (N-2)^2p_0\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\left|x-a\right|^{2}}{(\epsilon+\left|x-a\right|^{2})^{N}}dx\right.\\
&\left.-\int_{\mathbb{R}^N\backslash B(a,l)}\frac{\left|x-a\right|^{2}}{(\epsilon+\left|x-a\right|^{2})^{N}}dx\right]\\
&+(N-2)^2\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\left|x-a\right|^{k+2}(\beta_k+\theta(x))}{(\epsilon+\left|x-a\right|^{2})^{N}}dx\right.\\
&\left.-\int_{\mathbb{R}^N\backslash B(a,l)}\frac{\left|x-a\right|^{k+2}(\beta_k+\theta(x))}{(\epsilon+\left|x-a\right|^{2})^{N}}dx\right]+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).
\end{aligned}$$

On distingue les deux cas :

1. cas $N\geq 4$ **et** $k>0$**, avec** $k\neq 2$ **si** $N=4$.
On considère les trois sous cas :

1.1. si $N-2>k$,
Utilisant un changement de variable simple $y=\frac{x-a}{\sqrt{\epsilon}}$ et appliquant le théorème de la convergence dominée, on trouve

$$\begin{aligned}\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2dx &= (N-2)^2p_0\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|y|^2}{(1+|y|^2)^N}dx\\ &+(N-2)^2\epsilon^{\frac{k}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|y|^{k+2}(\beta_k+\theta(a+\sqrt{\epsilon}y))}{(1+|y|^2)^N}dx+o(\epsilon^{\frac{k}{2}}).\end{aligned}$$

Le fait que $\theta(x)\longrightarrow 0$, lorsque $x\longrightarrow a$, on a

$$\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2dx=p_0K_1+A_k\epsilon^{\frac{k}{2}}+o(\epsilon^{\frac{k}{2}}),$$

avec $K_1=(N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|y|^2}{(1+|y|^2)^N}dy$ et $A_k=(N-2)^2\beta_k\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|y|^{k+2}}{(1+|y|^2)^N}dy$.

1.2. si $N-2<k$,

$$\begin{aligned}\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2dx &= p_0K_1+(N-2)^2\beta_k\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{B(a,l)}\frac{|x-a|^{k+2}}{(\epsilon+|x-a|^2)^N}dx\\ &+(N-2)^2\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{B(a,l)}\frac{|x-a|^{k+2}\theta(x)}{(\epsilon+|x-a|^2)^N}dx+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).\end{aligned}$$

Soit $\xi>0$, tel que $B(a,\xi)\subset B(a,l)$, donc

$$\begin{aligned}\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2dx &= p_0K_1+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}})\\ &+(N-2)^2\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\left[\int_{B(a,\xi)}\frac{|x-a|^{k+2}(\beta_k+\theta(x))}{(\epsilon+|x-a|^2)^N}dx\right.\\ &\left.+\int_{B(a,l)\setminus B(a,\xi)}\frac{|x-a|^{k+2}(\beta_k+\theta(x))}{(\epsilon+|x-a|^2)^N}dx\right]\end{aligned}$$

Par un changement de variable simple, $y=x-a$, on obtient

$$\begin{aligned}\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2dx &= p_0K_1+(N-2)^2\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{B(0,\xi)}\frac{|y|^{k+2}(\beta_k+\theta(a+y))}{(\epsilon+|y|^2)^N}dy\\ &+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).\end{aligned}$$

Utilisant la définition de θ obtenue dans (2.1.2), il existe une constante positive M telle que

$$\begin{aligned}\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2dx &\le p_0K_1+(N-2)^2\epsilon^{\frac{N-2}{2}}(\beta_k+M)\int_{B(0,\xi)}\frac{|y|^{k+2}}{(\epsilon+|y|^2)^N}dy\\ &+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).\end{aligned}$$

Appliquant le théorème de convergence dominée, on déduit que

$$\epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2 dx \leq p_0 K_1 + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

1.3. si $k = N-2$,

$$\begin{aligned}\epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2 dx &= p_0 K_1 + (N-2)^2 \beta_{N-2} \epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{B(a,l)} \frac{|x-a|^N}{(\epsilon + |x-a|^2)^N} dx \\ &\quad + (N-2)^2 \epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{B(a,l)} \frac{|x-a|^N \theta(x)}{(\epsilon + |x-a|^2)^N} dx + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).\end{aligned}$$

En utilisant les étapes précédentes, on trouve

$$\begin{aligned}\epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2 dx &= p_0 K_1 + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) \\ &\quad + (N-2)^2 \epsilon^{\frac{N-2}{2}} \left[\int_{B(a,\xi)} \frac{|x-a|^N (\beta_{N-2} + \theta(x))}{(\epsilon + |x-a|^2)^N} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{B(a,l)\setminus B(a,\xi)} \frac{|x-a|^N (\beta_{N-2} + \theta(x))}{(\epsilon + |x-a|^2)^N} dx \right]\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2 dx &= p_0 K_1 + (N-2)^2 \epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{B(a,\xi)} \frac{|x-a|^N (\beta_{N-2} + \theta(x))}{(\epsilon + |x-a|^2)^N} dx \\ &\quad + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).\end{aligned}$$

Et d'aprés la définition de θ, on a

$$\begin{aligned}\epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2 dx &\leq p_0 K_1 + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) \qquad (2.3.11) \\ &\quad + (N-2)^2 (\beta_{N-2} + M) \epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{B(a,\xi)} \frac{|x-a|^N}{(\epsilon + |x-a|^2)^N} dx.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{B(a,\xi)} \frac{|x-a|^N}{(\epsilon + |x-a|^2)^N} dx &= \omega_N \epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_0^\xi \frac{r^{2N-1}}{(\epsilon + r^2)^N} dr \\ &= \frac{\omega_N \epsilon^{\frac{N-2}{2}}}{2N} \int_0^\xi \frac{((\epsilon + r^2)^N)'}{(\epsilon + r^2)^N} dr + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}})\end{aligned}$$

et

$$\epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{B(a,\xi)} \frac{|x-a|^N}{(\epsilon+|x-a|^2)^N} dx = \frac{\omega_N \epsilon^{\frac{N-2}{2}}}{2} |\log \epsilon| + o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}} |\log \epsilon|). \quad (2.3.12)$$

On remplace (2.3.12) dans (2.3.11), on obtient

$$\epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_\Omega p(x) |\nabla u_{a,\epsilon}(x)|^2 dx \leq p_0 K_1 + \frac{(N-2)^2(\beta_{N-2}+M)\omega_N \epsilon^{\frac{N-2}{2}}}{2} |\log \epsilon| + o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}} |\log \epsilon|).$$

2. cas $N = 4$ **et** $k = 2$.

On suppose dans ce cas que la condition sur θ : $\int_{B(a,1)} \frac{\theta(x)}{|x-a|^4} dx < \infty$ est vérifie. On a

$$\begin{aligned} \int_\Omega p(x) |\nabla u_{a,\epsilon}(x)|^2 dx &= \int_\Omega \frac{p(x) |\nabla \phi(x)|^2}{(\epsilon+|x-a|^2)^2} dx + 4 \int_\Omega \frac{p(x)\phi(x)^2 |x-a|^2}{(\epsilon+|x-a|^2)^4} dx \\ &\quad -4 \int_\Omega \frac{p(x)\phi(x)\nabla\phi(x)(x-a)}{(\epsilon+|x-a|^2)^3} dx \ . \end{aligned}$$

Utilisant (2.1.2), et le fait que $\phi \equiv 1$ au voisinage de a, il résulte que

$$\begin{aligned} \int_\Omega p(x) |\nabla u_{a,\epsilon}(x)|^2 dx &= 4p_0 \int_{B(a,l)} \frac{|x-a|^2}{(\epsilon+|x-a|^2)^4} dx + 4\beta_2 \int_{B(a,l)} \frac{|x-a|^4}{(\epsilon+|x-a|^2)^4} dx \\ &\quad +4 \int_{B(a,l)} \frac{|x-a|^4 \theta(x)}{(\epsilon+|x-a|^2)^4} dx + O(1), \\ &= \frac{4p_0}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{|y|^2}{(1+|y|^2)^4} dy + 4 \int_{B(a,l)} \frac{(\beta_2+\theta(x)) |x-a|^4}{(\epsilon+|x-a|^2)^4} dx + O(1). \end{aligned}$$

Puisque $\int_{B(a,1)} \frac{\theta(x)}{|x-a|^4} dx < \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B(a,l)} \frac{|x-a|^4 \theta(x)}{(\epsilon+|x-a|^2)^4} dx &= \int_{B(a,1)} \frac{|x-a|^4 \theta(x)}{(\epsilon+|x-a|^2)^4} dx - \int_{B(a,1)\setminus B(a,l)} \frac{|x-a|^4 \theta(x)}{(\epsilon+|x-a|^2)^4} dx \\ &= O(1). \end{aligned}$$

Et par conséquent

$$\int_\Omega p(x) |\nabla u_{a,\epsilon}(x)|^2 dx = \frac{4p_0}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{|y|^2}{(1+|y|^2)^4} dy + 4\beta_2 \int_{B(a,l)} \frac{|x-a|^4}{(\epsilon+|x-a|^2)^4} dx + O(1).$$

Soit $R_i > 0$, $i = 1, 2$ tels que

$$\int_{|x-a|\leq R_1} \frac{|x-a|^4}{(\epsilon+|x-a|^2)^4} dx \leq \int_{B(a,l)} \frac{|x-a|^4}{(\epsilon+|x-a|^2)^4} dx \leq \int_{|x-a|\leq R_2} \frac{|x-a|^4}{(\epsilon+|x-a|^2)^4} dx.$$

On sait que

$$\begin{aligned}\int_{|x-a|\leq R} \frac{|x-a|^4}{(\epsilon+|x-a|^2)^4}dx &= \omega_4 \int_0^R \frac{r^7}{(\epsilon+r^2)^4}dr,\\ &= \frac{1}{8}\omega_4 \int_0^R \frac{((\epsilon+r^2)^4)\prime}{(\epsilon+r^2)^4}dr - \omega_4 \int_0^R \frac{r\epsilon^3+3r^3\epsilon^2+3\epsilon r^5}{(\epsilon+r^2)^4}dr,\\ &= \frac{1}{2}\omega_4 |\log\epsilon| + O(1).\end{aligned}$$

D'où, on a

$$\int_\Omega p(x)\,|\nabla u_{a,\epsilon}(x)|^2\,dx = \frac{p_0K_1}{\epsilon} + 2\beta_2\omega_4 |\log\epsilon| + O(1),$$

où $K_1 = 4\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^2}{(1+|y|^2)^4}dy$.

On écrit (2.3.9), sous la forme :

$$\epsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_\Omega p(x) \quad | \quad \nabla u_{a,\epsilon}(x)\,|^2\,dx \leq \tag{2.3.13}$$

$$\begin{cases} p_0K_1 + o(\epsilon) & \text{si } N\geq 5, \text{ et } k>2,\\ p_0K_1 + A_2\epsilon + o(\epsilon) & \text{si } N\geq 5, \text{ et } k=2,\\ p_0K_1 + A_k\epsilon^{\frac{k}{2}} + o(\epsilon^{\frac{k}{2}}) & \text{si } N\geq 4, \text{ et } k<2,\\ p_0K_1 + o(\epsilon) & \text{si } N=4, \text{ et } k>2,\\ p_0K_1 + 2\beta_2\omega_4\epsilon \mid \log\epsilon \mid + o(\epsilon \mid \log\epsilon \mid) & \text{si } N=4, \text{ et } k=2. \end{cases}$$

En combinant (2.3.13),(2.2.6) et (2.2.7), on obtient

$$S_\lambda(p) \quad \leq \quad Q_\lambda(u_{a,\epsilon}) \leq \tag{2.3.14}$$

$$\begin{cases} p_0S - \lambda\frac{K_3}{K_2}\epsilon + o(\epsilon) & \text{si } N\geq 5, \text{ et } k>2,\\ p_0S - (\lambda - C)\frac{K_3}{K_2}\epsilon + o(\epsilon) & \text{si } N\geq 5, \text{ et } k=2,\\ p_0S + A_k\epsilon^{\frac{k}{2}} + o(\epsilon^{\frac{k}{2}}) & \text{si } N\geq 4, \text{ et } k<2,\\ p_0S - \lambda\frac{\omega_4}{2K_2}\epsilon\,|\log\epsilon| + o(\epsilon\log\epsilon) & \text{si } N=4, \text{ et } k>2,\\ p_0S - \frac{\omega_4}{2K_2}(\lambda - 4\beta_2)\epsilon\,|\log\epsilon| + o(\epsilon\,|\log\epsilon|) & \text{si } N=4, \text{ et } k=2 \end{cases}$$

avec $C = \frac{A_2}{K_3} = \frac{\beta_2(N-2)N(N+2)}{4(N-1)}$.

Pour ϵ assez petit, a), b) et c) du lemme 2.3.2 se déduisent directement.

Maintenant on montre d) (cas $N = 3$ et $k \geq 2$). On estime le quotient

$$Q_\lambda(u) = \frac{\int_\Omega p(x) \left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \lambda \left\|u\right\|_2^2}{\left\|u\right\|_q^2}$$

avec

$$u(x) = u_{a,\epsilon}(r) = \frac{\phi(r)}{(\epsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}}, r = |x|, \epsilon > 0,$$

où ϕ est une fonction régulière fixée telle que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 1$ sur $\left\{x, |x-a| < \frac{R}{2}\right\}$ et $\phi = 0$ sur $\{x, |x-a| \geq R\}$, avec R une constante positive telle que $B(a, R) \subset \Omega$.

D'aprés [6], on a :

$$\|\nabla u_{a,\epsilon}\|_2^2 = \frac{K_1}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} + \omega_3 \int_0^R (\phi'(r))^2 dr + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}), \tag{2.3.15}$$

$$\|u_{a,\epsilon}\|_6^2 = \frac{K_2}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}), \tag{2.3.16}$$

$$\|u_{a,\epsilon}\|_2^2 = \omega_3 \int_0^R (\phi(r))^2 dr + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}), \tag{2.3.17}$$

On affirme que, pour $\epsilon \longrightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2 dx &= \frac{p_0 K_1}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} + \omega_3 \int_0^R (p_0 + \beta_k r^k)(\phi'(r))^2 dr \\ &\quad + \omega_3 k \beta_k \int_0^R (\phi(r))^2 r^{k-2} dr + o(1). \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

En effet, en utilisant (2.1.2), (2.3.15) et le fait que $\phi = 0$ sur $\{x, |x-a| \geq R\}$, on écrit

$$\begin{aligned} \int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2 dx &= \frac{p_0 K_1}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} + \omega_3 p_0 \int_0^R (\phi'(r))^2 dr \\ &\quad + \omega_3 \beta_k \int_0^R \left[\frac{(\phi'(r))^2}{\epsilon + r^2} - \frac{2r\phi(r)\phi'(r)}{(\epsilon + r^2)^2} + \frac{r^2(\phi(r))^2}{(\epsilon + r^2)^3}\right] r^{k+2} dr \\ &\quad + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Le fait que $\phi = 1$ sur $\left\{x, |x-a| < \frac{R}{2}\right\}$, $\phi'(0) = 0$ et $\phi(R) = 0$, on trouve

$$-2\int_0^R \frac{\phi(r)\phi'(r)r^{k+3}}{(\epsilon+r^2)^2}dr = (k+3)\int_0^R \frac{(\phi(r))^2 r^{k+2}}{(\epsilon+r^2)^2}dr - 4\int_0^R \frac{(\phi(r))^2 r^{k+4}}{(\epsilon+r^2)^3}dr.$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{a,\epsilon}(x)\right|^2 dx &= \frac{p_0 K_1}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} + \omega_3 p_0 \int_0^R (\phi'(r))^2 dr + \omega_3 \beta_k \int_0^R \frac{(\phi'(r))^2 r^{k+2}}{\epsilon + r^2} dr \\ &\quad -3\omega_3\beta_k \int_0^R \frac{(\phi(r))^2 r^{k+4}}{(\epsilon+r^2)^3}dr + (k+3)\omega_3\beta_k \int_0^R \frac{(\phi(r))^2 r^{k+2}}{(\epsilon+r^2)^2}dr \\ &\quad +O(\epsilon^{\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

Appliquant le théorème de la convergence dominée, on obtient le résultat.
Combinant (2.3.18), (2.3.16) et (2.3.17) , on obtient

$$\begin{aligned}Q_\lambda(u_{a,\epsilon}) &= p_0 S + \omega_3 \left[\int_0^R (p_0 + \beta_k r^k)(\phi'(r))^2 dr\right. \\ &\quad \left. + k\beta_k \int_0^R (\phi(r))^2 r^{k-2} dr - \lambda \int_0^R (\phi(r))^2 dr\right] \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{K_2} + O(\epsilon),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}Q_\lambda(u_{a,\epsilon}) &= p_0 S + O(\epsilon) \\ &\quad + \frac{\omega_3 \int_0^R (\phi(r))^2 dr}{K_2}\left[\frac{\int_0^R (p_0 + \beta_k r^k)(\phi'(r))^2 dr + k\beta_k \int_0^R (\phi(r))^2 r^{k-2} dr}{\int_0^R (\phi(r))^2 dr} - \lambda\right]\epsilon^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

Posons $D(k,\phi) = \frac{\int_0^R (p_0+\beta_k r^k)(\phi'(r))^2 dr + k\beta_k \int_0^R (\phi(r))^2 r^{k-2} dr}{\int_0^R (\phi(r))^2 dr}$ et $\gamma(k) = \inf_H D(k,\phi)$
avec H définie par

$$H = \left\{\begin{array}{c} \phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}),\ 0 \le \phi \le 1, \phi = 1 sur \left\{x, |x-a| < \frac{R}{2}\right\} \text{ et} \\ \phi = 0 sur \left\{x, |x-a| \ge R\right\} \end{array}\right\}.$$

Ce qui complète la démonstration. ■

Lemme 2.3.3 *Supposons $0 < k \le 2$. Alors il existe une constante $\widetilde{\beta_k}$, telle que $\widetilde{\beta_k} = \beta_k \min\left[(diam\Omega)^{k-2}, 1\right]$ telle que*

$$S_\lambda(p) = p_0 S \quad pour\ tout\ \lambda \in]-\infty, \widetilde{\beta_k}\frac{N^2}{4}] \tag{2.3.20}$$

et $S_\lambda(p)$ n'est pas atteint pour tout $\lambda \in]-\infty, \widetilde{\beta_k}\frac{N^2}{4}[$.

Démonstration : On sait d'aprés (2.3.14), que

$$S_\lambda(p) \leq Q_\lambda(u_{a,\epsilon}) \leq p_0 S + A_k \epsilon^{\frac{k}{2}} + o(\epsilon^{\frac{k}{2}}),$$

donc

$$S_\lambda(p) \leq p_0 S.$$

D'autre part, d'aprés la proposition 2.2.1 et théorème 2.1.2, on a pour $0 < k \leq 2$, et pour tout $\lambda \leq \frac{k}{2}\beta_k(\frac{N+k-2}{2})^2(diam\Omega)^{k-2}$, le problème (2.1.1) n'admet pas de solution. Donc on exclut le cas $S_\lambda(p) < p_0 S$, sinon on obtient une contradiction avec le lemme 2.3.1.
On conclut que pour $0 < k \leq 2$, on a

$$S_\lambda(p) = p_0 S \quad \text{pour tout } \lambda \leq \frac{k}{2}\beta_k(\frac{N+k-2}{2})^2(diam\Omega)^{k-2}. \tag{2.3.21}$$

Maintenant, on considère $\widetilde{p}$ définie par

$$\begin{cases} \widetilde{p}(x) = p(x) & \forall x \in \Omega \backslash B(a,r), \\ \widetilde{p}(x) = p_0 + \beta_k \left|x-a\right|^2 & \forall x \in B(a, \frac{r}{2}), \\ p(x) \geq \widetilde{p}(x) & \forall x \in B(a,r) \backslash B(a, \frac{r}{2}), \end{cases} \tag{2.3.22}$$

avec $r < 1$ une constante positive.

Puisque $0 < k \leq 2$, on a $|x-a|^k \geq |x-a|^2$ pour tout $x \in B(a,r)$ et $p(x) \geq \widetilde{p}(x)$ dans Ω.
Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|u\|_q = 1$, alors

$$\int_\Omega p(x) \left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx \geq \int_\Omega \widetilde{p}(x) \left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx,$$

donc

$$\int_\Omega p(x) \left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx \geq \int_\Omega (p_0 + \frac{1}{2}(\widetilde{p}(x) - p_0)) \left|\nabla u(x)\right|^2 dx$$

$$-\lambda \int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\widetilde{p}(x) - p_0) \left|\nabla u(x)\right|^2 dx. \tag{2.3.23}$$

On pose $\widetilde{\widetilde{p}} = p_0 + \frac{1}{2}(\widetilde{p}(x) - p_0)$.
D'aprés (2.1.3), on déduit que

$$p(x) - p_0 \geq \beta_k \left|x-a\right|^k p.p \ \text{ dans } \Omega. \tag{2.3.24}$$

Utilisant (2.3.22)et (2.3.24), on obtient $\widetilde{p}(x) - p_0 \geq \widetilde{\beta_k} |x-a|^2 \, p.p$ dans Ω, avec $\widetilde{\beta_k} = \beta_k \min \left[(diam\Omega)^{k-2}, 1 \right]$.

On applique le lemme 1.2.8, on trouve

$$\int_\Omega (\widetilde{p}(x) - p_0) |\nabla u(x)|^2 \, dx \geq \widetilde{\beta_k} \frac{N^2}{4} \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx.$$

L'inégalité (2.3.23), devient pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_p = 1$

$$\int_\Omega p(x) |\nabla u(x)|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \geq \int_\Omega \widetilde{\widetilde{p}}(x) |\nabla u(x)|^2 \, dx - (\lambda - \widetilde{\beta_k} \frac{N^2}{8}) \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx.$$

Donc, on trouve

$$S_\lambda(p) \geq \inf_{\|u\|_q^2 = 1} \left[\int_\Omega \widetilde{\widetilde{p}}(x) |\nabla u(x)|^2 \, dx - (\lambda - \widetilde{\beta_k} \frac{N^2}{8}) \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right].$$

D'autre part $\lambda - \widetilde{\beta_k} \frac{N^2}{8} \leq \frac{1}{2} \widetilde{\beta_k} \frac{N^2}{4}$ car $\lambda \leq \widetilde{\beta_k} \frac{N^2}{4}$, donc par (2.3.21), on conclut

$$\inf_{\|u\|_q = 1} \left[\int_\Omega \widetilde{\widetilde{p}}(x) |\nabla u(x)|^2 \, dx - (\lambda - \widetilde{\beta_k} \frac{N^2}{8}) \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right] = p_0 S,$$

d'où, on a (2.3.20).

Maintenant, supposons que l'infimum dans (2.3.20) est atteint par u_0. Soit δ tel que $\widetilde{\beta_k} \frac{N^2}{4} \geq \delta > \lambda$. On obtient

$$\begin{aligned} S_\delta(p) &\leq \frac{\int_\Omega p(x) |\nabla u_0(x)|^2 \, dx - \delta \int_\Omega |u_0(x)|^2 \, dx}{\|u\|_q^2} \\ &< \frac{\int_\Omega p(x) |\nabla u_0(x)|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega |u_0(x)|^2 \, dx}{\|u\|_q^2} \end{aligned}$$

et donc $S_\delta(p) < S_\lambda(p) = p_0 S$, ce qui est absurde car $S_\delta(p) = p_0 S$ pour $\delta \leq \widetilde{\beta_k} \frac{N^2}{4}$. ■

Lemme 2.3.4 *Il existe $\lambda^* \in]\widetilde{\beta_k} \frac{N^2}{4}, \lambda_1^{\text{div}}[$, tel que pour tout $\lambda \in [\lambda^*, \lambda_1^{\text{div}}[$ on a*

$$S_\lambda(p) < p_0 S.$$

Démonstration : La preuve est basée sur les propriétés de la fonction $\lambda \longmapsto S_\lambda(p)$. On a $S_{\lambda_1^{\text{div}}}(p) = 0$. En effet, soit φ_1 la fonction propre de $-\operatorname{div}(p\nabla.)$ associée à la valeur propre λ_1^{div}, on a

$$S_{\lambda_1^{\text{div}}} \leq \frac{\int_\Omega p(x)\left|\nabla\varphi_1(x)\right|^2 dx - \lambda_1^{\text{div}} \int_\Omega \left|\varphi_1(x)\right|^2 dx}{\left(\int_\Omega |\varphi_1(x)|^q dx\right)^{\frac{2}{q}}} = 0.$$

Or, $\lambda \longmapsto S_\lambda(p)$ est continue et $S_{\widetilde{\beta_k}\frac{N^2}{4}}(p) = p_0 S$. Alors en applique le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda^* \in]\widetilde{\beta_k \frac{N^2}{4}}, \lambda_1^{\text{div}}[$ tel que $0 < S_{\lambda^*}(p) < p_0 S$. Mais la fonction $\lambda \longmapsto S_\lambda(p)$ est décroissante, donc pour tout $\lambda \in [\lambda^*, \lambda_1^{\text{div}}[$, on a $S_\lambda(p) < p_0 S$. ■

2.3.5 Preuve du théorème 2.1.1

Concernant la preuve de $1), 2), 3)$ et $4)$ soit $u \in H_0^1(\Omega)$ obtenue par le lemme (2.3.1), tel que

$$\|u\|_q = 1 \quad \text{et} \quad \int_\Omega p(x)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx = S_\lambda(p).$$

On peut supposer que $u \geq 0$. Puisque u est un minimum de (2.3.2), il existe $\mu \in \mathbb{R}$ (d'aprés le théorème des multiplicateurs de Lagrange) tel que

$$-\operatorname{div}(p\nabla u) - \lambda u = \mu u^{q-1} \quad \text{sur } \Omega.$$

En fait $\mu = S_\lambda(p)$, et $S_\lambda(p) > 0$ car $\lambda < \lambda_1^{\text{div}}$. Il résulte que γu satisfait (2.1.1) pour $\gamma = (S_\lambda(p))^{\frac{1}{q-2}}$, on note que $u > 0$ dans Ω d'aprés le principe du maximum fort.

Démontrons le point 5) du théorème 2.1.1. D'aprés (2.3.14) et comme $\lambda \leq 0$ on a

$$p_0 S \leq S_\lambda(p) \leq Q_\lambda(u_{a,\epsilon}) \leq p_0 S + o(1).$$

D'où $S_\lambda(p) = p_0 S$ et l'infimum n'est pas atteint. En effet on suppose que $S_\lambda(p)$ est atteint pour $u \in H_0^1(\Omega)$, donc

$$S_\lambda(p) = \int_\Omega p(x)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx, \quad \text{avec } \|u\|_q = 1.$$

Utilisant le fait que S n'est pas atteint et $\lambda \leq 0$, on déduit

$$p_0 S < p_0 \int_\Omega \left|\nabla u(x)\right|^2 dx \leq S_\lambda(p) = p_0 S,$$

alors on obtient une contradiction.

Finalement on prouve le point 6) du théorème 2.1.1. Soit φ_1 la fonction propre de $-\operatorname{div}(p\nabla.)$ associée à la valeur propre λ_1^{div} avec $\varphi_1 > 0$ sur Ω. Supposons que u est une solution de (2.1.1). On a

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \operatorname{div}(p(x)\nabla u(x))\varphi_1(x)dx &= \lambda_1^{\text{div}} \int_\Omega u(x)\varphi_1(x)dx \\ &= \int_\Omega u^{q-1}(x)\varphi_1(x)dx + \lambda \int_\Omega u(x)\varphi_1(x)dx, \end{aligned}$$

donc

$$\lambda_1^{\text{div}} \int_\Omega u(x)\varphi_1(x)dx > \lambda \int_\Omega u(x)\varphi_1(x)dx$$

alors

$$\lambda_1^{\text{div}} > \lambda.$$

Ce qui complète la démonstration du théorème .

2.4 Résultats de non existence

Preuve de théorème 2.1.2.

La démonstration de théorème 2.1.2 est basée sur l'identité de Pohozaev. Supposons par absurde que u est une solution de (2.1.1). On multiplie (2.1.1) par $\nabla u(x)\cdot(x-a)$, puis on intègre sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega u^{q-1}\nabla u(x)\cdot(x-a)dx = -\frac{N-2}{2}\int_\Omega |u(x)|^q\,dx, \tag{2.4.1}$$

$$\lambda\int_\Omega u\nabla u(x)\cdot(x-a)dx = -\frac{N}{2}\lambda\int_\Omega |u(x)|^2\,dx, \tag{2.4.2}$$

et

$$\begin{aligned} \int_\Omega -\operatorname{div}(p(x)\nabla u(x))\nabla u(x)\cdot(x-a)dx = -\frac{N-2}{2}\int_\Omega p(x)\,|u(x)|^2\,dx \quad (2.4.3)\\ -\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla p(x)\cdot(x-a)\,|\nabla u(x)|^2\,dx \\ -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} p(x)(x-a)\cdot\nu\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 dx \end{aligned}$$

où ν est la normale extérieure à $\partial\Omega$.
Combinant (2.4.1), (2.4.2), et (2.4.3), on trouve

$$
\begin{aligned}
&-\frac{N-2}{2}\int_\Omega p(x)\,|u(x)|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla p(x)\cdot(x-a)\,|\nabla u(x)|^2\,dx\\
&-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} p(x)(x-a)\cdot\nu\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 dx=-\frac{N-2}{2}\int_\Omega |u(x)|^q\,dx-\frac{N}{2}\lambda\int_\Omega |u(x)|^2\,dx.
\end{aligned}
\tag{2.4.4}
$$

D'autre part, on multiplie (2.1.1) par $\frac{N-2}{2}u$ et on intègre par partie, on obtient

$$
\frac{N-2}{2}\int_\Omega p(x)\,|\nabla u(x)|^2\,dx=\frac{N-2}{2}\int_\Omega |u(x)|^q\,dx+\frac{N-2}{2}\lambda\int_\Omega |u(x)|^2\,dx.
\tag{2.4.5}
$$

Combinant (2.4.4) et (2.4.5), on obtient

$$
\lambda\int_\Omega |u(x)|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla p(x)\cdot(x-a)\,|\nabla u(x)|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} p(x)(x-a)\cdot\nu\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 dx=0.
$$

Et comme Ω est étoilé par rapport au point a, alors $(x-a)\cdot\nu>0$ sur $\partial\Omega$, et

$$
\lambda\int_\Omega |u(x)|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla p(x)\cdot(x-a)\,|\nabla u(x)|^2\,dx>0.
$$

Il résulte que

$$
\lambda>\frac{1}{2}\frac{\int_\Omega \nabla p(x)\cdot(x-a)\,|\nabla u(x)|^2\,dx}{\int_\Omega |u(x)|^2\,dx}
$$

D'où la contradiction.

Chapitre 3

Problème elliptique semilinéaire avec nonlinéarité critique à coefficients poids

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence des solutions du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x)\left|u\right|^{q-2} u + g(x)\left|u\right|^{2^*-2} u \qquad \text{dans } \Omega, \\ \\ u > 0 \qquad \text{dans } \Omega, \\ \\ u = 0 \qquad \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{E_λ}$$

où $\lambda > 0$, $1 \leq q < 2$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$, $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$, avec Ω un domaine borné de bord $\partial\Omega$ régulier, et f, g sont des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.

On suppose que f et g vérifient les hypothèses suivantes :
(h_1) $f, g \in C(\overline{\Omega})$, $f \geq 0$, $f \neq 0$ et $g > 0$.

(h_2) Il existe k points $a^1, a^2, ..., a^k$ dans Ω, tels que
$\bullet g(a^i) = \max_{x\in\Omega} g(x) = 1 \qquad$ pour $1 \leq i \leq k$.
$\bullet$ pour $\sigma > N$, $\quad g(x) - g(a^i) = O(\left|x - a^i\right|^\sigma)$ quand $x \longrightarrow a^i$ uniformèment en i.

(h_3) Choisissons $\rho_0 > 0$ tel que
$\bullet \overline{B_{\rho_0}(a^i)} \cap \overline{B_{\rho_0}(a^j)} = \emptyset \qquad$ pour $i \neq j$ et $1 \leq i, j \leq k$, et $\cup_{i=1}^k \overline{B_{\rho_0}(a^i)} \subset \Omega$, où $\overline{B_{\rho_0}(a^i)} = \left\{x \in \mathbb{R}^N;\ |x - a^i| \leq \rho_0\right\}$.

• Il existe une constante positive d_0 telle que $f(x) \geq d_0 > 0$ pour tout $x \in B_{\frac{\varrho_0}{2}}(a^i)$

On note par

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx}{(\int_\Omega |u(x)|^{2^*} \, dx)^{\frac{2}{2^*}}},$$

la meilleure constante de Sobolev pour l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.
On pose

$$\Lambda := (\frac{2-q}{2^*-q})^{\frac{2-q}{2^*-2}} (\frac{2^*-2}{(2^*-q)\,|f|_\infty})\, |\Omega|^{\frac{q-2^*}{2^*}}\, S^{\frac{N}{2}-\frac{N}{4}q+\frac{q}{2}} > 0. \tag{3.1.1}$$

Les principaux résultats sont

Théorème 3.1.1 *Si* $\lambda \in (0, \Lambda)$, *alors il existe au moins une solutions* u_λ *du problème* (E_λ)

Théorème 3.1.2 *Sous les hypothèses* $(h_1) - (h_3)$, *et* $\frac{N}{N-2} < q < 2$ *et* $N > 4$, *il existe une constante positive* $\Lambda^* \in (0, \Lambda)$, *telle que pour tout* $\lambda \in (0, \Lambda^*)$, *le problème* (E_λ) *admet* $(k+1)$ *solutions.*

3.2 Quelques résultats préliminaires

Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on définit la fonctionnelle d'énergie J_λ associée au problème (E_λ) par

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)\,|u|^q \, dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega g(x)\,|u|^{2^*} \, dx.$$

J est de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$. Les solutions de (E_λ) sont des points critiques de la fonctionnelle d'énergie J_λ.
On sait que la fonctionnelle d'énergie J_λ n'est pas bornée inférieurement sur $H_0^1(\Omega)$, par contre elle l'est sur la variété de Nehari définie par

$$M_\lambda = \left\{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}\,;\quad \langle J'_\lambda(u), u\rangle = 0\right\}, \tag{3.2.1}$$

où

$$\langle J'_\lambda(u), u\rangle = \|\nabla u\|_2^2 - \lambda\int_\Omega f(x)\,|u|^q \, dx - \int_\Omega g(x)\,|u|^{2^*} \, dx. \tag{3.2.2}$$

Nous avons les résultats suivants.

Lemme 3.2.1 *la fonctionnelle d'énergie J_λ est coercive et bornée inférieurement sur M_λ.*

Démonstration : Pour $u \in M_\lambda$, par (3.2.2), l'inégalité de Hölder ($p_1 = \frac{2^*}{2^*-q}$ et $p_2 = \frac{2^*}{q}$), et l'injection de Sobolev, on trouve

$$J_\lambda(u) = \frac{2^*-2}{2^*2} \|\nabla u\|_2^2 - \lambda(\frac{2^*-q}{2^*q}) \int_\Omega f(x) |u|^q \, dx \tag{3.2.3}$$

$$\geq \frac{1}{N} \|\nabla u\|_2^2 - \lambda(\frac{2^*-q}{2^*q}) |\Omega|^{\frac{2^*-q}{2^*}} S^{-\frac{q}{2}} \|\nabla u\|_2^q |f|_\infty . \tag{3.2.4}$$

D'où, J_λ est coercive et bornée inférieurement sur M_λ. ■

On définit

$$\Psi_\lambda(u) = \langle J'_\lambda(u), u \rangle .$$

Alors pour $u \in M_\lambda$,on trouve

$$\langle \Psi'_\lambda(u), u \rangle = 2 \|\nabla u\|_2^2 - \lambda q \int_\Omega f(x) |u|^q \, dx - 2^* \int_\Omega g(x) |u|^{2^*} dx$$

$$= (2-q) \|\nabla u\|_2^2 - (2^*-q) \int_\Omega g(x) |u|^{2^*} dx \tag{3.2.5}$$

$$= \lambda(2^*-q) \int_\Omega f(x) |u|^q \, dx - (2^*-2) \|\nabla u\|_2^2 . \tag{3.2.6}$$

On décompose M_λ en sous ensembles suivants :

$$M_\lambda^+ = \{u \in M_\lambda; \quad \langle \Psi'_\lambda(u), u \rangle > 0\} ;$$

$$M_\lambda^0 = \{u \in M_\lambda; \quad \langle \Psi'_\lambda(u), u \rangle = 0\} ;$$

$$M_\lambda^- = \{u \in M_\lambda; \quad \langle \Psi'_\lambda(u), u \rangle < 0\} .$$

En utilisant l'égalité (3.2.6), on trouve que $\int_\Omega f(x) |u|^q \, dx > 0$ pour $u \in M_\lambda^+$. Donc, on a les résultats suivants :

Lemme 3.2.2 *Si* $0 < \lambda < \Lambda$, *alors* $M_\lambda^0 = \emptyset$.

Démonstration : On suppose par absurde qu'il existe $\lambda_0 \in (0, \Lambda)$ tel que $M_{\lambda_0}^0 \neq \varnothing$. Alors pour $u \in M_{\lambda_0}^0$, d'aprés (3.2.5) et (3.2.6), on a

$$\|\nabla u\|_2^2 = \frac{2^* - q}{2 - q} \int_\Omega g(x) |u|^{2^*} dx = \lambda_0 (\frac{2^* - q}{2^* - 2}) \int_\Omega f(x) |u|^q dx.$$

Utilisant (h_2), l'inégalité de Hölder et l'injection de Sobolev, on trouve

$$\|\nabla u\|_2 \geq (\frac{2 - q}{2^* - q} S^{\frac{2^*}{2}})^{\frac{1}{(2^* - 2)}}$$

et

$$\|\nabla u\|_2 \leq (\lambda_0 \frac{2^* - q}{2^* - 2} |\Omega|^{\frac{2^* - q}{2^*}} S^{-\frac{q}{2}} |f|_\infty)^{\frac{1}{(2 - q)}}.$$

Donc

$$\lambda_0 \geq (\frac{2 - q}{2^* - q})^{\frac{2 - q}{2^* - 2}} (\frac{2^* - 2}{(2^* - q) |f|_\infty}) |\Omega|^{\frac{q - 2^*}{2^*}} S^{\frac{N}{2} - \frac{N}{4} q + \frac{q}{2}} = \Lambda,$$

d'où la contradiction. ■

Pour $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$, soit

$$t_{\max} := t_{\max}(u) = \left[\frac{(2 - q) \|\nabla u\|_2^2}{(2^* - q) \int_\Omega g(x) |u|^{2^*} dx} \right]^{\frac{1}{2^* - 2}} > 0.$$

Lemme 3.2.3 *Soit* $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$,
(i) si $\int_\Omega f(x) |u|^q dx = 0$, *alors il existe une unique constante positive* $t^- = t^-(u) > t_{\max}$ *telle que* $t^- u \in M_\lambda^-$ *et* $J_\lambda(t^- u) = \sup_{t \geq 0} J_\lambda(tu)$;
(ii) si $\int_\Omega f(x) |u|^q dx > 0$, *alors pour* $0 < \lambda < \Lambda$ *il existe des constantes uniques* $0 < t^+ = t^+(u)$, $0 < t^- = t^-(u)$ *avec* $t^+ < t_{\max} < t^-$ *telles que* $t^+ u \in M_\lambda^+$, $t^- u \in M_\lambda^-$, *et*

$$J_\lambda(t^+ u) = \inf_{0 \leq t \leq t_{\max}} J_\lambda(tu), \qquad J_\lambda(t^- u) = \sup_{t \geq t_{\max}} J_\lambda(tu).$$

pour $0 < \lambda < \Lambda$, du lemme (3.2.2), on déduit que $M_\lambda = M_\lambda^+ \cup M_\lambda^-$.
Soient

$$\alpha_\lambda = \inf_{u \in M_\lambda} J_\lambda(u); \qquad \alpha_\lambda^+ = \inf_{u \in M_\lambda^+} J_\lambda(u); \qquad \alpha_\lambda^- = \inf_{u \in M_\lambda^-} J_\lambda(u).$$

Lemme 3.2.4 *(i) si* $\lambda \in (0, \Lambda)$, *alors* $\alpha_\lambda \leq \alpha_\lambda^+ < 0$;
(ii) si $\lambda \in (0, \frac{q}{2}\Lambda)$, *alors* $\alpha_\lambda^- \geq d_0 > 0$ *pour une certaine constante* $d_0 = d_0(N, q, S, |\Omega|, \lambda, |f|_\infty)$.

Démonstration : (i) Soit $u \in M_\lambda^+$, d'aprés (3.2.5), on trouve

$$\frac{(2-q)}{(2^*-q)}\left\|\nabla u\right\|_2^2 > \int_\Omega g(x)\left|u\right|^{2^*} dx.$$

Alors

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= (\frac{1}{2}-\frac{1}{q})\left\|\nabla u\right\|_2^2 + (\frac{1}{q}-\frac{1}{2^*})\int_\Omega g(x)\left|u\right|^{2^*} dx \\ &< \left[(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}) + (\frac{1}{q}-\frac{1}{2^*})\frac{2-q}{2^*-q}\right]\left\|\nabla u\right\|_2^2 \\ &= -\frac{2-q}{qN}\left\|\nabla u\right\|_2^2 < 0. \end{aligned}$$

Par la définition de α_λ et α_λ^+, on déduit que $\alpha_\lambda \leq \alpha_\lambda^+ < 0$.

(ii) Soit $u \in M_\lambda^-$, d'aprés (3.2.5) et l'injection de Sobolev, on trouve

$$\frac{(2-q)}{(2^*-q)}\left\|\nabla u\right\|_2^2 < \int_\Omega g(x)\left|u\right|^{2^*} dx \leq S^{-\frac{2^*}{2}}\left\|\nabla u\right\|_2^{2^*}.$$

Ceci implique

$$\left\|\nabla u\right\|_2 > (\frac{2-q}{2^*-q})^{\frac{1}{(2^*-2)}} S^{\frac{N}{4}} \quad \text{pour tout } u \in M_\lambda^-. \tag{3.2.7}$$

En utilisant (3.2.4) et (3.2.7), on obtient

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \left\|\nabla u\right\|_2^q \left[\frac{1}{N}\left\|\nabla u\right\|_2^{2-q} - \lambda(\frac{2^*-q}{2^*q})\left|\Omega\right|^{\frac{2^*-q}{2^*}} S^{-\frac{q}{2}}\left|f\right|_\infty\right] \\ &> (\frac{2-q}{2^*-q})^{\frac{q}{(2^*-2)}} S^{\frac{qN}{4}}\left[\frac{1}{N}(\frac{2-q}{2^*-q})^{\frac{(2-q)}{(2^*-2)}} S^{\frac{(2-q)N}{4}} - \lambda(\frac{2^*-q}{2^*q})\left|\Omega\right|^{\frac{2^*-q}{2^*}} S^{-\frac{q}{2}}\left|f\right|_\infty\right]. \end{aligned}$$

D'où, si $\lambda \in (0, \frac{q}{2}\Lambda)$, alors

$$\text{pour tout } u \in M_\lambda^- \quad J_\lambda(u) \geq d_0(N, q, S, \left|\Omega\right|, \lambda, \left|f\right|_\infty).$$

■

3.3 Existence de solution de moindre énergie

Proposition 3.3.1 *(i) pour $\lambda \in (0, \Lambda)$, il existe une suite de $(PS)_{\alpha_\lambda}$ $(u_n) \subset M_\lambda$ pour J_λ;*
(ii) pour $\lambda \in (0, \frac{q}{2}\Lambda)$, on a $\alpha_\lambda^- > 0$ (lemme 3.2.4) et il existe une suite de $(PS)_{\alpha_\lambda^-}$ $(u_n) \subset M_\lambda^-$ pour J_λ.

3.3.2 Preuve du théorème 3.1.1

D'aprés la proposition 3.3.1 (i), il existe une suite minimisante $(u_n) \subset M_\lambda$ pour J_λ telle que $J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda + o_n(1)$ et $J'_\lambda(u_n) = o_n(1)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Puisque J_λ est coercive sur M_λ, alors (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Donc il existe une sous-suite (u_n) et $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{array}{ccl} u_n & \rightharpoonup & u_\lambda \text{ dans } H_0^1(\Omega), \\ u_n & \longrightarrow & u_\lambda \ \text{ p.p dans } \Omega, \\ u_n & \longrightarrow & u_\lambda \text{ dans } L^s(\Omega) \text{ pour tout } 1 \leq s < 2^*. \end{array}$$

Il est facile de vérifier que $J'_\lambda(u_\lambda) = 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

De plus $u_\lambda > 0$, en effet, d'aprés (3.2.3), on trouve

$$\lambda \int_\Omega f(x)\,|u_n|^q\,dx = \frac{q(2^*-2)}{2(2^*-q)}\,\|\nabla u_n\|_2^2 - \frac{2^*q}{2^*-q}J_\lambda(u_n) \geq -\frac{2^*q}{2^*-q}J_\lambda(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Faisant tendre $n \longrightarrow \infty$, on déduit que

$$\lambda\,|f|_\infty\,\|u_\lambda\|_q^q \geq \lambda \int_\Omega f(x)\,|u_\lambda|^q\,dx \geq -\frac{2^*q}{2^*-q}\alpha_\lambda > 0.$$

Donc, $u_\lambda \neq 0$, et par suite $u_\lambda \in M_\lambda$.

On va montrer que $u_n \longrightarrow u_\lambda$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$ et $J_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda$: Puisque $u_\lambda \in M_\lambda$, d'aprés (3.2.3), on a

$$\begin{array}{rcl} \alpha_\lambda & \leq & J_\lambda(u_\lambda) = \dfrac{1}{N}\,\|\nabla u_\lambda\|_2^2 - \lambda(\dfrac{2^*-q}{2^*q})\displaystyle\int_\Omega f(x)\,|u_\lambda|^q\,dx \\ & \leq & \displaystyle\liminf_{n\longrightarrow\infty}\left[\frac{1}{N}\,\|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda(\frac{2^*-q}{2^*q})\int_\Omega f(x)\,|u_n|^q\,dx\right] \\ & \leq & \displaystyle\liminf_{n\longrightarrow\infty} J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda. \end{array}$$

Il résulte que $J_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda$ et $\lim_{n\longrightarrow\infty}\|\nabla u_n\|_2^2 = \|\nabla u_\lambda\|_2^2$. Donc

$$\|\nabla(u_n - u_\lambda)\|_2^2 = \|\nabla u_n\|_2^2 - \|\nabla u_\lambda\|_2^2 + o_n(1) = o_n(1),$$

d'où, $u_n \longrightarrow u_\lambda$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$.
Donc puisque u_λ est non négative ($J_\lambda(u_\lambda) = J_\lambda(|u_\lambda|)$), et $u_\lambda \neq 0$, on conclut d'aprés le principe du maximum fort que $u_\lambda > 0$.

Remarque 3.3.3 *$u_\lambda \in M_\lambda^+$ et $J_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda = \alpha_\lambda^+$.*

Démonstration : On suppose par l'absurde que $u_\lambda \in M_\lambda^-$ ($M_\lambda^0 = \emptyset$ pour $\lambda \in (0, \Lambda)$). Puisque $\lambda \int_\Omega f(x) |u_\lambda|^q \, dx > 0$, d'aprés le lemme (3.2.3), il existe deux constantes positives $t_0^+ < t_{\max} < t_0^- = 1$ tels que $t_0^+ u_\lambda \in M_\lambda^+$, $t_0^- u_\lambda \in M_\lambda^-$ et

$$J_\lambda(t_0^+ u_\lambda) < J_\lambda(t_0^- u_\lambda) = J_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda,$$

d'où la contradiction. Donc, $u_\lambda \in M_\lambda^+$ et $J_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda = \alpha_\lambda^+$. ■

3.4 Existence des solutions multiples

Premièrement, on va montrer que J_λ vérifie la condition $(PS)_\beta$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour $\beta \in (-\infty, \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} - C_0 \lambda^{\frac{2}{2-q}})$, où C_0 est définie dans le lemme suivant

Lemme 3.4.1 *Si (u_n) est une suite de $(PS)_\beta$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour J_λ avec $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, alors $J'_\lambda(u) = 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$ et il existe une constante $C_0 = C_0(N, q, S, |\Omega|, |f|_\infty) > 0$ tel que $J_\lambda(u) \geq -C_0 \lambda^{\frac{2}{2-q}}$.*

Démonstration : Puisque (u_n) est une suite de $(PS)_\beta$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour J_λ avec $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, il est facile de vérifier que $J'_\lambda(u) = 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Alors on a $\langle J'_\lambda(u), u \rangle = 0$, donc $\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \int_\Omega f(x) |u|^q \, dx = \int_\Omega g(x) |u|^{2^*} \, dx$. D'aprés (3.2.4) et l'inégalité de Young ($p_1 = \frac{2}{q}$ et $p_2 = \frac{2}{2-q}$)

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{N} \|\nabla u\|_2^2 - \lambda (\frac{2^* - q}{2^* q}) |\Omega|^{\frac{2^*-q}{2^*}} S^{-\frac{q}{2}} \|\nabla u\|_2^q |f|_\infty \\ &\geq \frac{1}{N} \|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{N} \|\nabla u\|_2^2 - C_0 \lambda^{\frac{2}{2-q}} = -C_0 \lambda^{\frac{2}{2-q}}, \end{aligned}$$

où $C_0 = C_0(N, q, S, |\Omega|, |f|_\infty) > 0$. ■

Lemme 3.4.2 *J_λ satisfait la condition $(PS)_\beta$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour $\beta \in (-\infty, \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} - C_0 \lambda^{\frac{2}{2-q}})$, où C_0 est définie dans le lemme* 3.4.1.

Démonstration : Soit (u_n) une suite de $(PS)_\beta$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour J_λ telle que $J_\lambda(u_n) = \beta + o_n(1)$ et $J'_\lambda(u_n) = o_n(1)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned} |\beta| + o_n(1) + \frac{o_n(1) \|\nabla u_n\|_2}{2^*} &\geq J_\lambda(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle \\ &= \frac{2^* - 2}{2^* 2} \|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda (\frac{2^* - q}{2^* q}) \int_\Omega f(x) |u_n|^q \, dx \\ &\geq \frac{1}{N} \|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda (\frac{2^* - q}{2^* q}) |\Omega|^{\frac{2^*-q}{2^*}} S^{-\frac{q}{2}} \|\nabla u\|_2^q |f|_\infty , \end{aligned}$$

Il résulte que (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. D'où, il existe une sous suite (u_n) et $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{array}{lcl} u_n & \rightharpoonup & u \text{ dans } H_0^1(\Omega), \\ u_n & \longrightarrow & u \ \text{ p.p dans } \Omega, \\ u_n & \longrightarrow & u \text{ dans } L^s(\Omega) \text{ pour tout } 1 \leq s < 2^*. \end{array}$$

Alors on trouve :

$$\lambda \int_\Omega f(x)\, |u_n|^q \, dx = \lambda \int_\Omega f(x)\, |u|^q \, dx + o_n(1); \tag{3.4.1}$$

le fait que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, on en déduit que

$$\|\nabla(u_n - u)\|_2^2 = \|\nabla u_n\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2 + o_n(1); \tag{3.4.2}$$

Par un argument similaire à celui du lemme de Brézis-Lieb [5], on a

$$\int_\Omega g(x)\, |u_n - u|^{2^*} \, dx = \int_\Omega g(x)\, |u_n|^{2^*} \, dx - \int_\Omega g(x) \left| u^{2^*} \right| dx + o_n(1). \tag{3.4.3}$$

D'aprés le lemme 3.4.1, $J_\lambda'(u) = 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Puisque $J_\lambda(u_n) = \beta + o_n(1)$ et $J_\lambda'(u_n) = o_n(1)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, d'aprés (3.4.1) – (3.4.3), on déduit que

$$\frac{1}{2}\|\nabla(u_n - u)\|_2^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega g(x)\, |u_n - u|^{2^*} \, dx = \beta - J_\lambda(u) + o_n(1), \tag{3.4.4}$$

et

$$\|\nabla(u_n - u)\|_2^2 - \int_\Omega g(x)\, |u_n - u|^{2^*} \, dx = o_n(1).$$

Maintenant on suppose que

$$\|\nabla(u_n - u)\|_2^2 \longrightarrow l \quad \text{et} \quad \int_\Omega g(x)\, |u_n - u|^{2^*} \, dx \longrightarrow l \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty. \tag{3.4.5}$$

D'aprés la définition de S, on a

$$\|\nabla(u_n - u)\|_2^2 \geq S \, \|u_n - u\|_{L^{2^*}}^2 .$$

Alors $l \geq S l^{\frac{(N-2)}{2}}$. Si $l \neq 0 (l \geq S^{\frac{N}{2}})$, d'aprés le lemme 3.4.1, (3.4.4) et (3.4.5), on a

$$\beta = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}) l + J_\lambda(u) \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} - C_0 \lambda^{\frac{2}{2-q}},$$

d'où la contradiction. Alors, $l = 0$, et $u_n \longrightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. ■

Soit la fonction extrémale pour l'inégalité de Sobolev donnée par

$$U(x) = \frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}}{\left[1+|x|^2\right]^{\frac{N-2}{2}}} \tag{3.4.6}$$

et vérifie $\|\nabla U\|_2^2 = \|U\|_{2^*}^{2^*} = S^{\frac{N}{2}}$. pour chaque $1 \leq i \leq k$, soit $\eta_i \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \eta_i \leq 1$, $|\nabla \eta_i| \leq C$, et

$$\begin{cases} \eta_i(x) = 1 & \text{pour } |x-a^i| < \frac{\rho_0}{2}, \\ \\ \eta_i(x) = 0 & \text{pour } |x-a^i| > \rho_0. \end{cases}$$

Et

$$u_\epsilon^i(x) = \epsilon^{\frac{2-N}{2}} \eta_i(x) U(\frac{x-a^i}{\epsilon}) = \frac{C_1 \epsilon^{\frac{N-2}{2}} \eta_i(x)}{\left[\epsilon^2 + |x-a^i|^2\right]^{\frac{N-2}{2}}}, \tag{3.4.7}$$

avec $C_1 = [N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}$ et $\epsilon > 0$.

On suppose que $\frac{N}{(N-2)} < q < 2$ et $N > 4$.

Lemme 3.4.3 *Il existe $\tau > 0$ et $\Lambda_0 \in (0, \frac{q}{2}\Lambda)$ tels que si $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, alors*

$$\sup_{t \geq 0} J_\lambda(t u_\epsilon^i) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} - C_0 \lambda^{\frac{2}{2-q}} \qquad \textit{uniformément en } i,$$

avec $C_0 > 0$ obtenue dans le lemme 3.4.1 *et $\epsilon = \lambda^{\frac{1}{\tau}}$. en particulier, $0 < \alpha_\lambda^- < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} - C_0 \lambda^{\frac{2}{2-q}}$ pour tout $\lambda \in (0, \Lambda_0)$.*

Démonstration : Pour $\epsilon \longrightarrow 0$, les fonctions u_ϵ^i vérifient les estimations suivantes

$$\left\|u_\epsilon^i\right\|_{2^*}^2 = \left\|u_\epsilon^i\right\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^2 + O(\epsilon^N),$$

et

$$\left\|\nabla u_\epsilon^i\right\|_2^2 = \|\nabla U\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + O(\epsilon^{N-2}). \tag{3.4.8}$$

Pour $\epsilon < \frac{\rho_0}{2}$,

$$\begin{aligned} \left\|u_\epsilon^i\right\|_q^q &= \int_{B_{\frac{\rho_0}{2}}(a^i)} \left[\epsilon^{\frac{2-N}{2}} U(\frac{x-a^i}{\epsilon})\right]^q dx + O(\epsilon^{N-2}) \\ &\geq c\epsilon^\theta + O(\epsilon^{N-2}), \quad \text{avec } \theta = N - \frac{(N-2)q}{2}. \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Considérons la fonctionnelle J_0 définie sur $H_0^1(\Omega)$ par :

$$J_0(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega g(x)\,|u|^{2^*}\,dx.$$

Étape I. Montrons que $\sup_{t\geq 0} J_0(tu_\epsilon^i) \leq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2})$.
D'aprés (h_2), on trouve que pour $\epsilon \longrightarrow 0$

$$\left(\int_\Omega g(x)\,|u_\epsilon^i|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}} = \left\|u_\epsilon^i\right\|_{L^{2^*}}^2 = \|U\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^2 + O(\epsilon^N). \tag{3.4.10}$$

En utilisant (3.4.8) et (3.4.10), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\|\nabla u_\epsilon^i\|_{L^2}^2}{(\int_\Omega g(x)\,|u_\epsilon^i|^{2^*}\,dx)^{\frac{2}{2^*}}} &= \frac{\|\nabla U\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + O(\epsilon^{N-2})}{\|U\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^2 + O(\epsilon^N)} \\ &= S + O(\epsilon^{N-2}). \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Puisque

$$\max_{t\geq 0}(\frac{a}{2}t^2 - \frac{b}{2^*}t^{2^*}) = \frac{1}{N}(\frac{a}{b^{\frac{2}{2^*}}})^{\frac{N}{2}} \quad \text{pour tout } a > 0 \text{ et } b > 0,$$

d'aprés (3.4.11), on déduit que

$$\sup_{t\geq 0} J_0(tu_\epsilon^i) = \frac{1}{N}(\frac{\|\nabla u_\epsilon^i\|_{L^2}^2}{(\int_\Omega g(x)\,|u_\epsilon^i|^{2^*}\,dx)^{\frac{2}{2^*}}})^{\frac{N}{2}} \leq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2}).$$

Etape II. Choisissons $0 < \Lambda_1 < \frac{q}{2}\Lambda$ tel que

$$\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} - C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}} > 0 \quad \text{pour tout } \lambda \in (0,\Lambda_1). \tag{3.4.12}$$

D'aprés (h_1), on trouve

$$J_\lambda(tu_\epsilon^i) \leq \frac{t^2}{2}\left\|\nabla u_\epsilon^i\right\|_{L^2}^2 \quad \forall\ t \geq 0. \tag{3.4.13}$$

Puisque J_λ est continue sur $H_0^1(\Omega)$, $J_\lambda(0) = 0$, et $\{u_\epsilon^i\}$ est uniformément borné dans $H_0^1(\Omega)$ pour $0 < \epsilon < \min\left\{1, \frac{\rho_0}{2}\right\}$ (voir (3.4.8)), d'aprés (3.4.12) et (3.4.13), il existe $t_0 > 0$ (indépendant de ϵ) tel que pour tout $\lambda \in (0,\Lambda_1)$ et $0 < \epsilon < \min\left\{1, \frac{\rho_0}{2}\right\}$

$$\sup_{0\leq t\leq t_0} J_\lambda(tu_\epsilon^i) < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} - C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}} \qquad \text{uniformément en } i.$$

Appliquant les résultats de l'étape I, (h_3) et (3.4.9), on a pour $\frac{N}{(N-2)} < q < 2$ et $N > 4$,

$$\begin{aligned}
\sup_{t_0 \le t} J_\lambda(tu_\epsilon^i) &= \sup_{t_0 \le t}\left[J_0(tu_\epsilon^i) - \frac{t^q}{q}\lambda \int_\Omega f(x)\left|u_\epsilon^i\right|^q dx\right] \\
&\le \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2}) - \frac{t_0^q}{q}\lambda d_0 \int_{B_{\frac{\rho_0}{2}}(a^i)} \left|u_\epsilon^i\right|^q dx \\
&\le \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2}) - \frac{t_0^q}{q}\lambda \epsilon^\theta d_0 C(N,\rho_0),
\end{aligned}$$

d'où $\theta = N - \frac{(N-2)q}{2} > 0$. Soit $\frac{(2-q)\theta}{q} < \tau < N-2-\theta$. Alors $\tau + \theta < N-2$ et $\tau + \theta < \frac{2\tau}{(2-q)}$.
Fixons $\epsilon_0 > 0$ tel que $\epsilon_0 < \min\left\{1, \frac{\rho_0}{2}\right\}$, $\epsilon_0^\tau < \Lambda_1$ et

$$O(\epsilon^{N-2}) - \frac{t_0^q}{q}\epsilon^{\tau+\theta} d_0 C(N,\rho_0) < -C_0 \epsilon^{\frac{2\tau}{2-q}} \quad \text{pour tout } \epsilon \in (0,\epsilon_0).$$

On pose $\Lambda_0 = \epsilon_0^\tau$. pour tout $\lambda \in (0,\Lambda_0)$, soit $\epsilon = \lambda^{\frac{1}{\tau}} > 0$. Alors pour tout $\lambda \in (0,\Lambda_0)$

$$\sup_{0 \le t} J_\lambda(tu_\epsilon^i) < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} - C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}} \quad \text{uniformément en } i.$$

De plus, puisque $\int_\Omega f(x)\left|u_\epsilon^i\right|^q dx > 0$, d'aprés le lemme (3.2.3)(ii), il existe $(t_\epsilon^i)^- = (t_\epsilon^i)^-(u_\epsilon^i) > 0$ tel que $(t_\epsilon^i)^- u_\epsilon^i \in M_\lambda^-$ et

$$0 < \alpha_\lambda^- \le J_\lambda((t_\epsilon^i)^- u_\epsilon^i) \le \sup_{0\le t} J_\lambda(tu_\epsilon^i) < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} - C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}} \quad \text{pour tout } \lambda \in (0,\Lambda_0).$$

■

On sait que

$\overline{B_{\rho_0}(a^i)} \cap \overline{B_{\rho_0}(a^j)} = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $1 \le i,j \le k$,
et $\cup_{i=1}^k \overline{B_{\rho_0}(a^i)} \subset \Omega$, où $\rho_0 > 0$ et $g(a^i) = g_{\max}$. on définit $K = \{a^i;\ 1 \le i \le k\}$ et $K_{\frac{\rho_0}{2}} = \cup_{i=1}^k B_{\frac{\rho_0}{2}}(a^i)$. on suppose $\cup_{i=1}^k \overline{B_{\rho_0}(a^i)} \subset B_{r_0}(0)$ pour $r_0 > 0$. Soit $Q : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ définie par

$$Q(u) = \frac{\int_\Omega \chi(x)\left|u\right|^{2^*} dx}{\int_\Omega \left|u\right|^{2^*} dx},$$

où $\chi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $\chi(x) = x$ pour $|x| \le r_0$ et $\chi(x) = \frac{r_0 x}{|x|}$ pour $|x| > r_0$. d'aprés le lemme (3.2.3)(ii), on a $(t_\epsilon^i)^- u_\epsilon^i \in M_\lambda^-$. Alors, on obtient le résultat suivant

Lemme 3.4.4 *$Q((t_\epsilon^i)^- u_\epsilon^i) \longrightarrow a^i$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$. En particulier, il existe $0 < \epsilon^0 < \epsilon_0$ tel que si $\epsilon < \epsilon^0$, alors $Q((t_\epsilon^i)^- u_\epsilon^i) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$ pour tout $1 \leq i \leq k$.*

Démonstration : Pour chaque $1 \leq i \leq k$, on a

$$\begin{aligned}
Q((t_\epsilon^i)^- u_\epsilon^i) &= \frac{\int_\Omega \chi(x) \left| \epsilon^{\frac{2-N}{2}} \eta_i(x) U(\frac{x-a^i}{\epsilon}) \right|^{2^*} dx}{\int_\Omega \left| \epsilon^{\frac{2-N}{2}} \eta_i(x) U(\frac{x-a^i}{\epsilon}) \right|^{2^*} dx} \\
&= \frac{\int_\Omega \chi(\epsilon x + a^i) \eta_i(\epsilon x + a^i) \left| U(x) \right|^{2^*} dx}{\int_\Omega \eta_i(\epsilon x + a^i) \left| U(x) \right|^{2^*} dx} \\
&\longrightarrow a^i \quad \text{quand } \epsilon \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

il existe $0 < \epsilon^0$ tel que

$$Q((t_\epsilon^i)^- u_\epsilon^i) \in K_{\frac{\rho_0}{2}} \quad \text{pour tout } \epsilon < \epsilon^0 \text{ et pour tout } 1 \leq i \leq k.$$

■

On définit, pour chaque $1 \leq i \leq k$:

$$\begin{aligned}
O_\lambda^i &= \left\{ u \in M_\lambda^-; \ \left| Q(u) - a^i \right| < \rho_0 \right\}, \\
\partial O_\lambda^i &= \left\{ u \in M_\lambda^-; \ \left| Q(u) - a^i \right| = \rho_0 \right\},
\end{aligned}$$

$$\beta_\lambda^i = \inf_{u \in O_\lambda^i} J_\lambda(u) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\beta_\lambda^i} = \inf_{u \in \partial O_\lambda^i} J_\lambda(u). \tag{3.4.14}$$

On se propose de montrer que β_λ^i est une valeur critique d'une suite de (PS). Pour cela on a besoin des lemmes suivants.

Remarque 3.4.5 *Soit I la fonctionnelle d'énergie associée au problème suivant*

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} & \textit{dans } \Omega, \\ \quad u > 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \quad u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Elle est définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left| \nabla u \right|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega \left| u \right|^{2^*} dx,$$

et $\gamma(\Omega) = \inf_{u \in M(\Omega)} I(u)$, et $\alpha_0 = \inf_{u \in M_0} J_0(u)$
où

$$M(\Omega) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\} ; \quad \langle I'(u), u \rangle = 0 \right\},$$

et

$$M_0 = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\} ; \quad \langle J_0'(u), u \rangle = 0 \right\}$$

Lemme 3.4.6 *Soit (u_n) une suite de $(PS)_\beta$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour I. Alors il existe une sous-suite $\{u_n\}$, $l \in \mathbb{N}^*$, deux suites $(x_n^i)_{n=1}^{\infty}$ dans Ω, $\epsilon_n^i > 0$, fonctions $u \in H_0^1(\Omega)$, et $w^i \neq 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour tout $1 \leq i \leq l$ tels que*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon_n^i} dist(x_n^i, \partial\Omega) &\longrightarrow \infty \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty; \\
-\Delta u &= |u|^{2^*-2} u \qquad \text{dans } \Omega; \\
-\Delta w^i &= \left|w^i\right|^{2^*-2} w^i \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N; \\
u_n &= u + \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{1}{\epsilon_n^i}\right)^{\frac{N-2}{2}} w^i \left(\frac{x - x_n^i}{\epsilon_n^i}\right) + o_n(1) \qquad \text{dans } H_0^1(\mathbb{R}^N); \\
I(u_n) &= I(u) + \sum_{i=1}^{l} I_\infty(w^i) + o_n(1),
\end{aligned}$$

où $I_\infty(w^i) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla w^i\right|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} \left|w^i\right|^{2^*} dx.$

Utilisons ce lemme pour montrer le lemme (3.4.7). On sait que la constante de Sobolev S est independante du domaine et n'est jamais atteinte lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^N$. De plus, on a $\gamma(\Omega) = \gamma(\mathbb{R}^N) = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$.

Lemme 3.4.7 *Il existe $\delta_0 > 0$ tel que si $u \in M_0$ et $J_0(u) \leq \alpha_0 + \delta_0 = \gamma(\Omega) + \delta_0$, alors $Q(u) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$.*

Démonstration : Raisonons par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite (u_n) dans M_0 telle que $J_0(u_n) = \alpha_0 + o_n(1)$ quand $n \longrightarrow \infty$ et $Q(u) \notin K_{\frac{\rho_0}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Premièrement,on va montrer que $\alpha_0 = \gamma(\Omega)$. Puisque $g(x) \leq \max_{x\in\Omega} g(x) = 1$, alors $\gamma(\Omega) \leq \alpha_0$. D'aprés l'étape I du lemme (3.4.3), $\sup_{t\geq 0} J_0(tu_\epsilon^i) \leq \gamma(\Omega) + O(\epsilon^{N-2})$ uniformément en i. De manière similaire à celle du lemme (3.2.3), il existe une suite $(t_\epsilon^i) \subset \mathbb{R}_+^*$ telle que $t_\epsilon^i u_\epsilon^i \in M_0$ et

$$\alpha_0 \leq J_0(t_\epsilon^i u_\epsilon^i) = \sup_{t\geq 0} J_0(tu_\epsilon^i) \leq \gamma(\Omega) + O(\epsilon^{N-2}).$$

Pour $\epsilon \longrightarrow 0$, on trouve $\alpha_0 \leq \gamma(\Omega)$. Puis, il existe une suite $(s_n) \subset \mathbb{R}_+^*$ telle que $s_n u_n \in M(\Omega)$ et

$$\begin{aligned}
\gamma(\Omega) &\leq I(s_n u_n) \leq J_0(s_n u_n) \\
&\leq \sup_{s\geq 0} J_0(su_n) = J_0(u_n) = \alpha_0(= \gamma(\Omega)) + o_n(1).
\end{aligned}$$

Alors $s_n = 1 + o_n(1)$ et $I(s_n u_n) = \gamma(\Omega) + o_n(1)$. Toute suite minimisante dans $M(\Omega)$ de $\gamma(\Omega)$ est une suite de $(PS)_{\gamma(\Omega)}$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour I. Appliquant le lemme (3.4.6), on déduit qu'il existe $\epsilon_n > 0$, et $(u_n) \subset \Omega$ tels que $\frac{1}{\epsilon_n} dist(x_n, \partial\Omega) \longrightarrow \infty \quad$ quand $n \longrightarrow \infty$ et

$$s_n u_n(x) = (\epsilon_n)^{\frac{2-N}{2}} U\left(\frac{x - x_n}{\epsilon_n}\right) + o_n(1) \quad \text{dans } H_0^1(\mathbb{R}^N),$$

Il résulte que $(\epsilon)^{\frac{2-N}{2}} U\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ est solution du problème

$$\begin{aligned} -\Delta w &= w^{2^*-1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N; \\ w &> 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N; \\ w &\in H_0^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Puisque Ω est borné et $(u_n) \subset \Omega$, alors $\epsilon_n \longrightarrow 0$. Supposons que $x_n \longrightarrow x_0 \in \overline{\Omega}$ quand $n \longrightarrow \infty$. On affirme que $x_0 \in K$. D'aprés le théorème de la convergence dominée, on a

$$\begin{aligned} S^{\frac{N}{2}} &= \int_\Omega g(x) \left|u_n\right|^{2^*} dx + o_n(1) \\ &= \int_\Omega g(x) \left| \frac{1}{s_n} \left(\frac{1}{\epsilon_n}\right)^{\frac{N-2}{2}} U\left(\frac{x - x_n}{\epsilon_n}\right) \right|^{2^*} dx + o_n(1) \\ &= g(x_0) S^{\frac{N}{2}}, \qquad \text{donc, } x_0 \in K. \end{aligned}$$

Soit $\Omega_n = \{x;\ \epsilon_n x + x_n \in \Omega\}$. Puisque $\epsilon_n \longrightarrow 0$, $x_n \longrightarrow x_0 \in \overline{\Omega}$, et $\frac{1}{\epsilon_n} dist(x_n, \partial\Omega) \longrightarrow \infty \quad$ quand $n \longrightarrow \infty$, alors $\Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ quand $n \longrightarrow \infty$. Par le théorème de la convergence dominée, on a

$$\begin{aligned} Q(u_n) &= \frac{\int_\Omega \chi(x) \left|U\left(\frac{x-x_n}{\epsilon_n}\right)\right|^{2^*} dx}{\int_\Omega \left|U\left(\frac{x-x_n}{\epsilon_n}\right)\right|^{2^*} dx} \\ &= \frac{\int_\Omega \chi(\epsilon_n x + x_n) \left|U(x)\right|^{2^*} dx}{\int_\Omega \left|U(x)\right|^{2^*} dx} \longrightarrow x_0 \in K_{\frac{\rho_0}{2}} \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

d'où la contradiction. ■

Lemme 3.4.8 *Il existe $\Lambda^* \in (0, \Lambda_0)$ tel que si $\lambda \in (0, \Lambda^*)$ et $u \in M_\lambda^-$ avec $J_\lambda(u) \leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + \frac{\delta_0}{2}$ (δ_0 obtenue dans le lemme 3.4.7), alors $Q(u) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$.*

Démonstration : De manière similaire que celle dévelopée dans le lemme (3.2.3),on obtient l'existence d'une unique constante

$$s^u = \left(\frac{\|\nabla u\|_2^2}{\int_{\mathbb{R}^N} g(x) \left|u\right|^{2^*} dx} \right)^{\frac{1}{(2^*-2)}}$$

telle que $s^u u \in M_0$. On va montrer que $s^u < c$ pour $c > 0$ (independant de u et $\lambda \in (0, \Lambda_0)$). Premièrement, d'aprés (3.2.7), si $u \in M_\lambda^-$, alors

$$\|\nabla u\|_2^2 > \left(\frac{2-q}{2^*-q} \right)^{\frac{2}{(2^*-2)}} S^{\frac{N}{2}} = c_1 \quad \text{(independant de } u \text{ et } \lambda).$$

Pour $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, puisque J_λ est coercive sur M_λ et $J_\lambda(u) \leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + \frac{\delta_0}{2}$, alors d'aprés (3.2.4), on a $\|\nabla u\|_2^2 < c_2$ (independant de u et $\lambda \in (0, \Lambda_0)$). Puis, on affirme que $\|u\|_{2^*}^{2^*} > c_3 > 0$ où $c_3 = \frac{2-q}{2^*-q} c_1$ (independant de u et λ). Si $u \in M_\lambda^-$, d'aprés (3.2.5), on a

$$\frac{2-q}{2^*-q} < \frac{\int_{\mathbb{R}^N} g(x) \left|u\right|^{2^*} dx}{\|\nabla u\|_2^2} \leq \frac{\|u\|_{2^*}^{2^*}}{c_1}.$$

Donc, $s^u < c$ pour $c > 0$ (indépendant de u et $\lambda \in (0, \Lambda_0)$). Maintenant, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + \frac{\delta_0}{2} &\geq J_\lambda(u) = \sup_{t \geq 0} J_\lambda(tu) \geq J_\lambda(s^u u) \\ &= \frac{1}{2} \|s^u u\|_2^2 - \frac{1}{2^*} \int_\Omega g(x) \left|s^u u\right|^{2^*} dx - \frac{\lambda}{q} \int_\Omega f(x) \left|s^u u\right|^q dx, \\ &= J_0(s^u u) - \frac{\lambda}{q} \int_\Omega f(x) \left|s^u u\right|^q dx. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} J_0(s^u u) &\leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + \frac{\delta_0}{2} + \frac{\lambda}{q} \int_\Omega f(x) \left|s^u u\right|^q dx \\ &\leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + \frac{\delta_0}{2} + \frac{\lambda}{q} \left|f\right|_\infty S^{-\frac{q}{2}} \left|\Omega\right|^{\frac{2^*-q}{2^*}} \|\nabla (s^u u)\|_2^q \\ &< \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + \frac{\delta_0}{2} + \frac{\lambda}{q} c^q (c_1)^{\frac{q}{2}} \left|f\right|_\infty S^{-\frac{q}{2}} \left|\Omega\right|^{\frac{2^*-q}{2^*}}, \quad \text{où } \lambda = \epsilon^\tau. \end{aligned}$$

D'où, il existe $0 < \epsilon^* \leq \min\{\epsilon_0, \epsilon^0\}$ tel que $\Lambda^* = (\epsilon^*)^\tau$ et si $0 < \lambda < \Lambda^*$

$$J_0(s^u u) \leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + \delta_0, \quad \text{avec } s^u u \in M_0.$$

D'après le lemme (3.4.7), on obtient

$$Q(s^u u) = \frac{\int_\Omega \chi(x) \left|s^u u(x)\right|^{2^*} dx}{\int_\Omega \left|s^u u(x)\right|^{2^*} dx} \in K_{\frac{\rho_0}{2}} \qquad \text{pour tout } 0 < \lambda < \Lambda^*,$$

or $Q(u) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$ pour tout $0 < \lambda < \Lambda^*$. ■

Appliquant le lemme précédent, on trouve

$$\widetilde{\beta_\lambda^i} \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + \frac{\delta_0}{2} \qquad \text{pour tout } 0 < \lambda < \Lambda^*. \tag{3.4.15}$$

D'aprés le lemme (3.4.3), on a

$$\beta_\lambda^i \leq \alpha_\lambda^- < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} - C_0 \lambda^{\frac{2}{2-q}} \qquad \text{pour tout } 0 < \lambda < \Lambda^*. \tag{3.4.16}$$

Lemme 3.4.9 *Soit $u \in O_\lambda^i$, alors il existe $\eta > 0$ et une fonctionnelle différentiable $l : B(0, \eta) \subset H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tels que $l(0) = 1$, $l(v)(u - v) \in O_\lambda^i$ pour tout $v \in B(0, \eta)$ et*

$$\langle l'(0), \phi \rangle = \frac{\langle \Psi_\lambda'(u), \phi \rangle}{\langle \Psi_\lambda'(u), u \rangle} \qquad \textit{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega), \tag{3.4.17}$$

où $\Psi_\lambda(u) = \langle J_\lambda'(u), u \rangle$.

Lemme 3.4.10 *pour tout $1 \leq i \leq k$, il existe une suite de $(PS)_{\beta_\lambda^i}$ $(u_n^i) \subset O_\lambda^i$ pour J_λ.*

Démonstration : pour tout $1 \leq i \leq k$, d'aprés (3.4.15) et (3.4.16), on trouve

$$\beta_\lambda^i < \widetilde{\beta_\lambda^i} \qquad \forall\, 0 < \epsilon < \epsilon^*. \tag{3.4.18}$$

Alors

$$\beta_\lambda^i = \inf_{u \in O_\lambda^i \cup \partial O_\lambda^i} J_\lambda(u) \qquad \forall\, 0 < \epsilon < \epsilon^*.$$

Soit $(u_n^i) \subset O_\lambda^i \cup \partial O_\lambda^i$ une suite minimisante pour β_λ^i. Appliquant le Principe variationnel d'Ekland, il existe une sous-suite (u_n^i) telle que $J_\lambda(u_n^i) = \beta_\lambda^i + \frac{1}{N}$ et

$$J_\lambda(u_n^i) \leq J_\lambda(w) + \frac{1}{N}\left\|w - u_n^i\right\| \qquad \forall\ w \in O_\lambda^i \cup \partial O_\lambda^i. \tag{3.4.19}$$

En utilisant (3.4.18), on peut supposer que $u_n^i \in O_\lambda^i$ pour n assez grand. D'aprés le lemme 3.4.9, il existe $\eta_n^i > 0$ et une fonctionnelle différentiable $l_n^i : B(0, \eta_n^i) \subset H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tels que $l_n^i(0) = 1$, $l_n^i(v)(u_n^i - v) \in O_\lambda^i$ $\forall$ $v \in B(0, \eta_n^i)$. Soit $v_\sigma = \sigma v$ avec $\|v\| = 1$ et $0 < \sigma < \eta_n^i$. Alors $v_\sigma \in B(0, \eta_n^i)$ et $w_{\sigma,n}^i = l_n^i(v_\sigma)(u_n^i - v_\sigma) \in O_\lambda^i$. D'aprés (3.4.19) et par le théorème des valeurs intermédiaires, on trouve pour $\sigma \longrightarrow 0$

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\left\|w_{\sigma,n}^i - u_n^i\right\|_H}{n} & \geq & J_\lambda(u_n^i) - J_\lambda(w_{\sigma,n}^i) \\
& = & \left\langle J'_\lambda(t_0 u_n^i + (1-t_0)w_{\sigma,n}^i, u_n^i - w_{\sigma,n}^i\right\rangle \quad \text{où } t_0 \in (0,1) \\
& = & \left\langle J'_\lambda(u_n^i), u_n^i - w_{\sigma,n}^i\right\rangle + o(\left\|u_n^i - w_{\sigma,n}^i\right\|_H) \quad (J \in C^1) \\
& = & \sigma l_n^i(v_\sigma)\left\langle J'_\lambda(u_n^i), v\right\rangle + (1 - l_n^i(v_\sigma))\left\langle J'_\lambda(u_n^i), u_n^i\right\rangle + o(\left\|u_n^i - w_{\sigma,n}^i\right\|_H) \\
(l_n^i(v_\sigma) & \longrightarrow & l_n^i(0) = 1 \text{ quand } \sigma \longrightarrow 0) \\
& = & \sigma l_n^i(\sigma v)\left\langle J'_\lambda(u_n^i), v\right\rangle + o(\left\|u_n^i - w_{\sigma,n}^i\right\|_H),
\end{array}$$

où $\frac{o(\left\|u_n^i - w_{\sigma,n}^i\right\|_H)}{\left\|u_n^i - w_{\sigma,n}^i\right\|_H} \longrightarrow 0$ quand $\sigma \longrightarrow 0$. D'où,

$$\begin{array}{rcl}
\left|\left\langle J'_\lambda(u_n^i), v\right\rangle\right| & \leq & \dfrac{\left\|w_{\sigma,n}^i - u_n^i\right\|_H (\frac{1}{n} + |o(1)|)}{\sigma\left|l_n^i(\sigma v)\right|} \\
& \leq & \dfrac{\|u_n^i(l_n^i(\sigma v) - l_n^i(0)) - \sigma v l_n^i(\sigma v)\|_H (\frac{1}{n} + |o(1)|)}{\sigma\left|l_n^i(\sigma v)\right|} \\
& \leq & \dfrac{\|u_n^i\|_H \left|l_n^i(\sigma v) - l_n^i(0)\right| + \sigma\|v\|_H\left|l_n^i(\sigma v)\right|}{\sigma\left|l_n^i(\sigma v)\right|}\left(\dfrac{1}{n} + |o(1)|\right) \\
& \leq & C(1 + \left\|(l_n^i)'(0)\right\|)\left(\dfrac{1}{n} + |o(1)|\right),
\end{array}$$

avec $o(1) \longrightarrow 0$ quand $\sigma \longrightarrow 0$. Puisque on peut montrer que $\|(l_n^i)'(0)\| \leq c$ pour tout n, i (d'aprés (3.4.17)), alors $J'_\lambda(u_n^i) = o_n(1)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ quand $n \longrightarrow \infty$. ■

Preuve de théorème 3.1.2. D'aprés le lemme (3.4.10), il existe une suite de $(PS)_{\beta_\lambda^i}$ $(u_n^i) \subset O_\lambda^i$ pour J_λ pour chaque $1 \leq i \leq k$. Puisque J_λ satisfait la condition $(PS)_\beta$ pour $\beta \in (-\infty, \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} - C_0\lambda^{\frac{2}{2-q}})$, d'aprés (3.4.16),

J_λ admet au moins k points critiques dans M_λ^- pour $0 < \lambda < \Lambda^* = (\epsilon^*)^\tau$. Il résulte que le problème (E_λ) possède k solutions. Et par le théorème 3.1.1, le problème (E_λ) possède $(k+1)$ solutions.

Bibliographie

[1] D.M. Cao, H.S. Zhou, Multiple positive solutions of nonhomogeneous semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 126 (1996), 443–463.

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and . Polya, Inequalities. Cambridge University Press, 1952.

[3] G. Tarantello, On nonhomogeneous elliptic involving critical Sobolev exponent, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lin éaire 9 (1992), 281–304.

[4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Dunod, 1999.

[5] H. Brezis and E. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc. 88, 1983, 486-490.

[6] H. Brezis and L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure Appl. Math. 36, 1983, 437-477.

[7] Huei-li Lin, Positive solutions for nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent, Nonlinear Analysis 75, 2012, 2660-2671.

[8] K.J. Chen, H.C. Wang, A necessary and sufficient condition for Palais–Smale conditions, SIAM J. Math. Anal. 31 (1999), 154–165.

[9] M. Struwe, Variational methods applications to nonlinear partial differential equations and hamiltonian systems, Springer-Verlag 1999.

[10] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, 1993.

[11] R. S. J. Pohozaev, Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Doklady 6, 1965, 1408-1411.

[12] R. Hadiji, H. Yazidi, Problem with critical Sobolev exponent and with weight, Chinese Ann. Math, 3 (2007), 327-352.

[13] T.S. Hsu, H.L. Lin, Four positive solutions of semilinear elliptic equations involving concave and convex nonlinearities in $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 365 (2010), 758–775.

[14] T.F. Wu, On semilinear elliptic equations involving concave–convex nonlinearities and sign-changing weight function, J. Math. Anal. Appl. 318 (2006), 253–270.