
Estimation de la variabilité du module de réaction pour l'étude du comportement des semelles filantes sur sol élastique : Application à partir des modèles existants

S. Imanzadeh¹, A. Denis¹, A. Marache¹

¹Université de Bordeaux – UMR 5295 I2M - Département GCE, Av. des facultés, 33405 Talence cedex, France.

S.imanzadeh@ghymac.u-bordeaux1.fr

RÉSUMÉ. Différents modèles pour l'étude du comportement des semelles filantes sur sol élastique sont disponibles. Le paramètre commun, à l'ensemble de ces modèles, est le module de réaction du sol (k_s) dont la valeur est obtenue à partir de modèles semi-empiriques. L'objectif de cette étude est d'estimer la variabilité de k_s pour chaque modèle semi-empirique afin de déterminer les paramètres de sol et de structure les plus influents, classer ces modèles et ainsi mieux appréhender l'influence de la variabilité de k_s sur l'estimation des tassements, efforts tranchants et moments fléchissants d'une semelle filante. Les méthodes FOSM et SOSM ont été successivement utilisées. Il est ainsi démontré que le coefficient de variation de k_s peut, pour ces modèles, être ramené à une expression unique faisant intervenir, avec des poids différents, les coefficients de variations de chacun des paramètres de sol et de structure.

ABSTRACT. Different models for the study of spread footing behavior on elastic soil are available. The common parameter for all of these models is the modulus of soil reaction (k_s). It can be obtained from different semi-empirical models, where different parameters are taken into account. The main goal of this study is to estimate the variability of k_s for each semi-empirical model to determine the parameters of soil and structure the most influent, ranking these models in order to be able to show the influence of the reaction modulus variability on the estimation of settlements, shear forces and bending moments of a spread footing. FOSM and SOSM Methods were successively used according to non-linear semi-empirical models. It is shown that the coefficient of variation of k_s can be obtained, for these models, by a unique expression including coefficients of variation of soil and structure parameters with different weights.

MOTS-CLÉS: variabilité, méthodes FOSM et SOSM, module de réaction du sol, coefficient de variation

KEYWORDS: variability, FOSM and SOSM methods, modulus of soil reaction, coefficient of variation

1. Introduction

Les propriétés physiques et mécaniques d'un sol présentent toutes une certaine variabilité naturelle dont l'origine vient de la complexité des processus géologiques naturels mis en jeu (érosion, transport, dépôt, compaction, transformation physico-chimique,...) qui mènent à la constitution d'un sol. A cette variabilité se rattache une incertitude sur chacun des paramètres usuellement utilisés pour quantifier la variabilité naturelle : moyenne, variance et fonction de covariance dans le cas d'une approche spatialisée de la variabilité naturelle.

D'une manière générale, les incertitudes peuvent être classées en deux grandes catégories : les incertitudes aléatoires ou actives et les incertitudes épistémiques ou passives [Lacasse et Nadim 1996, Uzielli 2008]. Les incertitudes aléatoires englobent principalement la variabilité naturelle d'une propriété (variabilité spatiale et temporelle). Les incertitudes épistémiques sont constituées de trois incertitudes, à savoir l'incertitude de modèle, de mesure et de statistique. Les incertitudes épistémiques résultent toutes d'un manque d'information. Elles peuvent donc être, en théorie, réduites en se procurant des informations supplémentaires sur le processus à modéliser, la variable à mesurer ou en augmentant le nombre de données pour diminuer l'incertitude statistique.

Ces incertitudes, qui existent également dans le cas des matériaux de structure, sont prises en compte en considérant chaque paramètre comme une variable aléatoire modélisée par une distribution de probabilité qui, introduite dans un calcul de dimensionnement d'ouvrages, permet d'obtenir l'incertitude attachée à ce dimensionnement.

Dans le cas du dimensionnement des fondations superficielles, les modèles à un ou deux paramètres sont utilisés pour l'étude de l'interaction sol-structure sur sol élastique. Le paramètre commun à ces modèles est le module de réaction du sol (k_s) qui dépend de paramètres mécaniques du sol et de paramètres mécaniques et géométriques de la structure.

L'objectif de cette étude est d'estimer la variabilité du module de réaction pour l'étude du comportement longitudinal de semelles filantes telles que celles utilisées pour les maisons individuelles où ce comportement est le plus souvent négligé.

Si les propriétés du sol peuvent être différentes d'un point à l'autre d'un site (variabilité naturelle), elles sont considérées comme constantes sous l'emprise de la semelle de fondation. Les paramètres relatifs à la fondation sont également pris constants pour une même semelle filante. Ils peuvent prendre des valeurs différentes selon les conditions de réalisation de la fondation.

Dans cette étude, on s'intéresse uniquement à l'incertitude qui peut être due à la variabilité naturelle et à l'incertitude des mesures pour les propriétés du sol, et aux incertitudes dues à la réalisation de la fondation pour les paramètres de structures. Les méthodes FOSM (First Order Second Moment) et SOSM (Second Order Second

Moment) ont été successivement utilisées pour déterminer le coefficient de variation du module de réaction du sol et évaluer l'influence de chacun des paramètres de sol et de structure.

2. Module de réaction du sol, différentes expressions

Différents modèles pour l'étude de l'interaction sol-structure sur sol élastique sont disponibles tels que le modèle de Winkler à un paramètre [Winkler 1965] et le modèle de Kerr à trois paramètres [1965]. Le paramètre commun à ces modèles d'interaction sol-structure est le module de réaction du sol (k_s). Ce module est calculé à partir de différents modèles semi-empiriques ; de nombreuses expressions, environ une douzaine, existent dans la littérature en fonction des applications traitées [Elachachi et al. 2004, Sadrekarimi 2009].

Les quatre modèles semi-empiriques (Biot, Vlassov, Vesic et Menard) retenus pour cette étude et utilisés classiquement dans le cadre du dimensionnement des semelles filantes afin d'obtenir une valeur du module de réaction du sol (k_s) sont présentés dans le tableau (1).

Auteur	Modèle semi-empirique	Application
Biot (1937)	$k_s = \frac{0.95}{b} \cdot \left(\frac{12E_s b^3}{E_c h^3} \right)^{0.108} \cdot \frac{E_s}{1 - \nu_s^2}$	Poutres infinies reposant sur un sol élastique.
Vlassov (1960)	$k_s = \frac{E_s (1 - \nu_s)}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} \left(\frac{\mu}{2b} \right)$	Poutres et plaques reposant sur demi-espace élastique ($\mu=1$)
Vesic (1961)	$k_s = \frac{0.65}{b} \cdot \sqrt[12]{\frac{12E_s b^3}{E_c h^3}} \cdot \frac{E_s}{1 - \nu_s^2}$	Poutres infinies reposant sur un sol élastique.
Menard (Cassan 1978)	$\frac{1}{k_s} = \frac{b}{9 \cdot E_s} \cdot \lambda_c + \frac{2 \cdot B_0}{9 \cdot \alpha \cdot E_s} \cdot \left(\lambda_d \cdot \frac{b}{B_0} \right)^\alpha$	Poutres et plaques reposant sur un demi-espace élastique ($E_{PMT} = \alpha \cdot E_s$)

Tableau 1: Modèles semi-empiriques proposés pour le calcul du module de réaction du sol (k_s).

E_{PMT} : Module pressiométrique ou module de Ménard, μ : Paramètre sans dimension, B_0 : Largeur de référence de la fondation, α : Coefficient rhéologique ou de structure, λ_c et λ_d : Facteurs de forme géométrique de la fondation.

Le calcul de k_s est fonction des paramètres de sol tels que le module du sol (E_s) et le coefficient de Poisson du sol (ν_s), de paramètres liés à la géométrie de la fondation (largeur (b) et hauteur (h)) et d'une propriété mécanique de la fondation, le module d'Young du béton de la fondation (E_c). Les relations entre le module de réaction du sol et les paramètres (E_c , ν_s , b , h) sont non-linéaires pour l'ensemble des modèles, linéaires avec le paramètre E_s pour les modèles de Menard et Vlassov et non-linéaires pour les modèles de Vesic et Biot (tableau 1).

Afin de comparer les modèles semi-empiriques entre eux supposons une semelle filante de 0,5 m de largeur (b), de 0,3 m de hauteur (h), de 10 m de longueur, de module d'Young de la fondation E_c (20000 MPa) et de paramètre $\mu = 1$. Pour cette fondation, la valeur de $\alpha = 0,5$, la largeur de référence de la fondation (B_0) est égale à 0,60 m et les facteurs de forme géométrique de la fondation λ_c et λ_d sont respectivement égaux à 1,50 et 2,65 (déterminés en fonction du rapport entre la longueur et la largeur de la fondation).

Le coefficient de réaction, pour un coefficient de Poisson de 0,3, présente des valeurs comprises entre 0,875 et 63 MN.m^{-3} pour des modules E_s compris entre 1 et 30 MPa (figure 1). Le modèle de Menard donne les valeurs de k_s les plus grandes et le modèle de Vesic les plus faibles. La différence absolue entre les valeurs de k_s est d'autant plus grande que le module d'élasticité du sol est grand. La multitude des modèles souligne la difficulté pour le praticien du choix d'une valeur de coefficient de réaction.

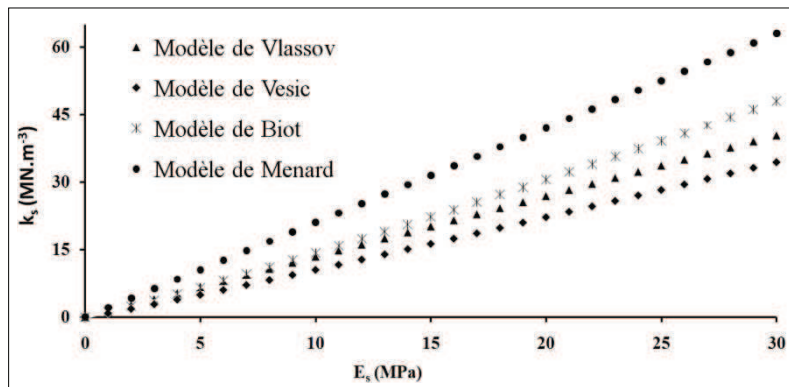


Figure 1: Evolution du coefficient de réaction du sol (k_s) en fonction du module du sol (E_s) pour les quatre modèles semi-empiriques étudiés.

L'incertitude sur Le coefficient de réaction du sol va être traduite en terme de variance par les méthodes FOSM et SOSM.

3. Méthodes FOSM et SOSM

Les méthodes de calcul de variance utilisées dans cette étude s'appuient sur le premier ordre (FOSM) et le second ordre (SOSM) des séries de Taylor.

Pour l'application des Méthode FOSM et SOSM, les hypothèses suivantes ont été considérées : les paramètres ne sont pas corrélés entre eux et la distribution de probabilité attachée à chacun des paramètres est symétrique (hypothèse pour la méthode SOSM).

L'approximation de premier ordre pour la variance, méthode FOSM, est donnée par l'équation (1) [Harr 1987] :

$$V[f(x)] = [f'(\bar{x})]^2 V[x] \quad [1]$$

où $f(x)$ est la fonction étudiée, \bar{x} est la moyenne des variables d'entrée, $f'(\bar{x})$ est la dérivée première de $f(x)$, $V[x]$ est la variance des variables d'entrée, $V[f(x)]$ est la variance de la fonction étudiée. Les variances obtenues pour chaque variable peuvent être additionnées pour calculer la variance de la fonction dépendant de toutes les variables d'entrée. Les variances des variables d'entrée sont obtenues à partir de données expérimentales ou à partir d'un jugement d'expert.

Lorsque la fonction $f(x)$ est non-linéaire, les termes d'ordres supérieurs des séries de Taylor sont nécessaires pour en estimer plus précisément la variance. Dans ce cas, l'approximation de second ordre pour la variance, méthode SOSM, se présente sous la forme de l'équation (2) [Harr 1987] :

$$V[f(x)] = [f'(\bar{x})]^2 V[x] + \frac{1}{4} [f''(\bar{x})]^2 V^2[x] [\beta(2) - 1] + \beta(1) V^{1.5}[x] f'(\bar{x}) [f''(\bar{x})] \quad [2]$$

où $f''(\bar{x})$ est la dérivée seconde de la fonction $f(x)$, $\beta(1)$ et $\beta(2)$ sont respectivement les coefficients d'asymétrie et de kurtosis. Lorsque la distribution de probabilité est symétrique, alors $\beta(1) = 0$. Avec $\lambda = \beta(2) - 1$, l'équation (2) devient:

$$V[f(x)] = [f'(\bar{x})]^2 V[x] + \frac{1}{4} [f''(\bar{x})]^2 V^2[x] \lambda \quad [3]$$

4. Application des méthodes FOSM et SOSM au coefficient de réaction du sol

Le coefficient de réaction du sol (k_s) est fonction des paramètres de sol (E_s , ν_s) et de structure (b , h , E_c). L'origine des incertitudes diffère en fonction de ces paramètres. Une synthèse de l'origine de ces incertitudes est présentée dans le tableau (2). Les incertitudes, dont nous ne ferons pas de distinction sur l'origine par la suite, seront quantifiées au travers du coefficient de variation CV (rapport de l'écart-type à la moyenne).

Les équations (1) et (3), exprimées en terme de variance, sont réécrites en terme de coefficient de variation (équation (4) pour la méthode FOSM et équation (5) pour la méthode SOSM) :

$$CV_{k_s}^2(x_i) = \sum_i^n \left(\frac{\partial k_s}{\partial x_i} \cdot \frac{\bar{x}_i}{k_s} \right)^2 \cdot CV_{x_i}^2 \quad [4]$$

$$CV_{k_s}^2(x_i) = \sum_i^n \left(\frac{\partial k_s}{\partial x_i} \cdot \frac{\bar{x}_i}{k_s} \right)^2 \cdot CV_{x_i}^2 + \sum_i^n \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 k_s}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\bar{x}_i^2}{k_s} \right)^2 \cdot \lambda \cdot CV_{x_i}^4 \quad [5]$$

où $CV_{k_s}(x_i)$ est le coefficient de variation de k_s pour les i variables d'entrée (x_i), CVx_i est le coefficient de variation de la variable d'entrée i , \bar{x}_i la moyenne de la variables d'entrée i , \bar{k}_s est la moyenne du module de réaction et n est le nombre de variables.

Paramètre	Incertitude aléatoire	Incertitude épistémique		Gamme possible du coefficient de variation %
	Variabilité naturelle	Incertitude de mesure	Incertitude de réalisation	
E_s	*	*		[5-50]
v_s	*	*		[2-10]
b			*	[2-10]
h			*	[2-10]
E_c			*	[2-10]

Tableau 2: Origine des incertitudes sur les paramètres du sol et de structure et gamme possible du coefficient de variation pour chacun des paramètres.

5. Résultats et discussion

Dans cette partie, l'influence de la variabilité des paramètres du sol, de la géométrie et des propriétés mécaniques de la fondation sur le coefficient de réaction (k_s) va être étudiée pour chaque modèle semi-empirique en utilisant successivement les méthodes FOSM et SOSM. Les coefficients de variation de k_s , pour chaque paramètre pris indépendamment pour les différents modèles, sont obtenus à partir des équations (4) et (5).

En utilisant la méthode FOSM, le coefficient de variation de k_s peut, pour les quatre modèles empiriques, être ramené à une expression unique faisant intervenir, avec des poids différents (η_{x_i}), les coefficients de variations de chacun des paramètres de sol et de structure (équation 6). Les valeurs η_{x_i} dépendent de chaque modèle semi-empirique.

$$CV_{k_s} = \left[(\eta_{E_s} CV_{E_s})^2 + (\eta_b CV_b)^2 + (\eta_{v_s} CV_{v_s})^2 + (\eta_h CV_h)^2 + (\eta_{E_c} CV_{E_c})^2 \right]^{0,5} \quad [6]$$

5.1. Estimation de l'influence des paramètres du sol sur le coefficient de variation de k_s

La relation entre le module du sol (E_s) et le module de réaction (k_s) qui est linéaire pour les modèles de Menard et Vlassov, et non-linéaire pour les modèles de Vesic et Biot amène à des coefficients $\eta_{E_s} = 1$ pour les modèles de Menard et Vlassov et $\eta_{E_s} = 1,1$ pour les modèles de Vesic et Biot, soit un coefficient de variation de k_s 10% plus grand que pour les deux modèles précédents.

La variabilité naturelle du coefficient de Poisson du sol n'est généralement pas prise en compte et une valeur déterministe, issue d'un jugement d'expert, est le plus souvent considérée. Toutefois, l'incertitude de ce paramètre ne peut pas être négligée dans les trois modèles où se paramètre intervient, notamment dans le cas du modèle de Vlassov, dont l'expression pour η_{v_s} est la suivante :

$$\eta_{v_s} = \frac{2v_s^2(2 - v_s)}{(1 - 2v_s)(1 - v_s^2)} \quad [7]$$

Pour un intervalle compris entre 0,15 et 0,35 pour le coefficient de Poisson, le coefficient η_{v_s} varie de 0,12 à 1,5 (figure 2).

Dans le cas des modèles de Vesic et Biot l'influence de ce paramètre est moins importante. Ces deux modèles donnent la même expression pour le coefficient η_{v_s} :

$$\eta_{v_s} = \frac{2v_s^2}{1 - v_s^2} \quad [8]$$

Le coefficient η_{v_s} pour le même intervalle de 0,15 à 0,35 pour le coefficient de Poisson varie seulement de 0,05 à 0,28.

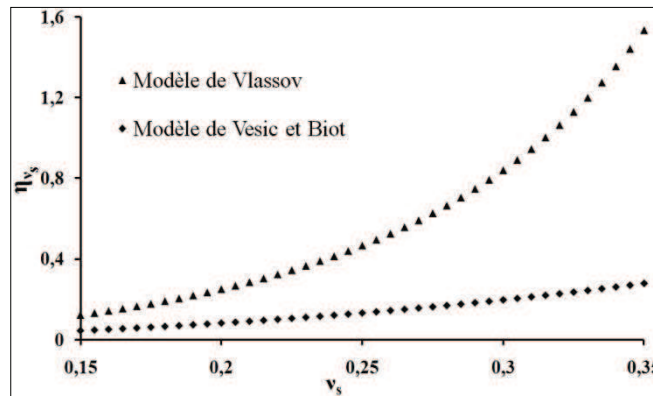


Figure 2 : Evolution du coefficient η_{v_s} en fonction de v_s pour les modèles semi-empiriques étudiés (méthode FOSM).

5. 2. Estimation de l'influence des paramètres de structure sur le coefficient de variation de k_s

La largeur de la fondation (b) intervient dans les quatre modèles, sa hauteur (h) et le module d'Young du béton uniquement dans les modèles de Vesic et Biot. Pour

le paramètre (b), nous obtenons un coefficient $\eta_b = 0,75, 0,675$ et 1 respectivement pour les modèles de Vesic, Biot et Vlassov. Quant au modèle de Menard le coefficient η_b est une fonction de b :

$$\eta_b = 0,5 \cdot \frac{830\sqrt{b} + 1401}{415\sqrt{b} + 1401} \quad [9]$$

L'influence de la variabilité de ce paramètre sur la variabilité de k_s est plus importante pour le modèle de Vlassov, puis pour Vesic et Biot (ces deux estimations étant proches) et enfin pour celui de Menard.

En ce qui concerne la hauteur (h), nous obtenons un coefficient $\eta_h = 0,25$ et 0,324 respectivement pour les modèles de Vesic et Biot. L'influence de la variabilité du paramètre (h) sur le coefficient de réaction (k_s) est plus importante pour le modèle de Biot que pour le modèle de Vesic mais reste deux à trois fois moins importante que l'influence apportée par le paramètre (b).

Pour le module d'Young du béton, les modèles de Vesic et Biot donnent un coefficient η_{E_c} très similaire aussi est-il possible d'en donner un coefficient moyen $\eta_{E_c} = 0,1$. La valeur de CV_{E_c} dépend de la qualité du béton. Même pour des bétons dont les propriétés d'une semelle à l'autre seront très différentes ($CV_{E_c} = 20\%$) l'incertitude sur le coefficient de réaction due à ce paramètre reste faible (2%). On peut donc d'ores et déjà négliger l'incertitude apportée par ce paramètre dans l'estimation du coefficient de variation de k_s .

Le tableau de synthèse (tableau 3) présente l'ensemble des relations obtenues par la méthode FOSM et précise, pour une même valeur de CV_{x_i} , les paramètres les plus influents sur l'estimation de la variabilité de k_s .

η_{x_i}	Modèles semi-empiriques			
	Menard	Vlassov	Vesic	Biot
η_{E_s}	1 ***	1 ***	1,083 ***	1,108 ***
η_b	$0,5 \cdot \frac{830\sqrt{b} + 1401}{415\sqrt{b} + 1401}$ **	1 ***	0,75 **	0,6750 **
η_{v_s}	-	$\frac{2v_s^2(2 - v_s)}{(1 - 2v_s)(1 - v_s^2)}$ ***	$\frac{2v_s^2}{1 - v_s^2}$ **	$\frac{2v_s^2}{1 - v_s^2}$ **
η_h	-	-	0,25 **	0,324 **
η_{E_c}	-	-	0,0833 *	0,108 *

Tableau 3 : Coefficient η_{x_i} obtenu pour chaque paramètre des modèles semi-empiriques (méthode FOSM). * : Peu influent, ** : Influent, *** : Très influent

Dans la mesure où les coefficients de variation de b, v_s et h restent inférieurs à 10% (tableau 2), les termes de second ordre calculés par la méthode SOSM, peuvent

être négligés. La méthode FOSM seule est suffisante pour une estimation correcte du coefficient de variation de k_s .

5.3. Synthèse

L'utilisation de la méthode FOSM à partir des coefficients de variation de chacun des paramètres permet de limiter le nombre de paramètres nécessaires à la détermination du coefficient de variation de k_s (Tableau 3). Ainsi, le coefficient de variation de k_s obtenu par cette méthode n'est plus directement fonction des paramètres E_s , E_c et h , mais seulement de leur coefficient de variation.

L'équation (6) donne, pour les quatre modèles semi-empiriques, des expressions pour une détermination du coefficient de variation du module de réaction du sol. Afin de simplifier ces expressions, une linéarisation est proposée pour des valeurs de b comprises entre 0,3 et 1,5 m pour le modèle de Menard (équation 10) et des valeurs de v_s comprises entre 0,25 et 0,35 pour les modèles de Vlassov (équation 11), Vesic (équation 12) et Biot (équation 13).

$$CV_{k_s} = [CV_{E_s}^2 + ((0,05b + 0,56). CV_b)^2]^{0,5} \quad [10]$$

$$CV_{k_s} = [CV_{E_s}^2 + CV_b^2 + ((10,4v_s - 2,22). CV_{v_s})^2]^{0,5} \quad [11]$$

$$CV_{k_s} = [(1,083 . CV_{E_s})^2 + (0,75 . CV_b)^2 + (0,2 . CV_{v_s})^2 + (0,25 . CV_h)^2]^{0,5} \quad [12]$$

$$CV_{k_s} = [(1,108 . CV_{E_s})^2 + (0,675 . CV_b)^2 + (0,2 . CV_{v_s})^2 + (0,324 . CV_h)^2]^{0,5} \quad [13]$$

L'erreur entre les coefficients de variations de k_s issus des modèles linéarisés et ceux issus des modèles complets est en moyenne inférieure à 1%. Au delà d'une valeur de CV_{E_s} de 0,2, le modèle de Biot donne le coefficient de variation de k_s le plus grand et le modèle de Menard, qui ne prend en compte que l'incertitude amenée par le paramètre (b) en plus de celle amenée par E_s , la valeur la plus faible.

6. Conclusions

Dans le cadre de l'étude du comportement des semelles filantes sur sol élastique, l'estimation des incertitudes sur les tassements, moments fléchissants et efforts tranchants passe préalablement par une estimation de l'incertitude sur le coefficient de réaction du sol (k_s).

Quatre modèles semi-empiriques de détermination du module k_s ont été étudiés en considérant d'une part les incertitudes amenées par la variabilité naturelle des

propriétés du sol et les incertitudes de mesures et, d'autre part, par les incertitudes liées à la réalisation de la fondation.

Les méthodes FOSM et SOSM successivement utilisées pour déterminer le coefficient de variation du module de réaction du sol ont permis d'évaluer l'influence de chacun des paramètres. Il apparaît ainsi, que le module d'Young du sol (E_s), la largeur de la fondation (b), le coefficient de Poisson (ν_s) puis la hauteur de la fondation (h) sont, par ordre décroissant, les paramètres les plus influents. L'incertitude amenée par la variabilité du module de rigidité du béton peut être négligée de même que les termes de second ordre obtenus par la méthode SOSM.

Ceci conduit à proposer, pour chacun des modèles, des expressions simplifiées prenant en compte le minimum de paramètres pour une détermination du coefficient de variation du module de réaction du sol. Ces différentes expressions pourront maintenant être introduites dans différents modèles de comportement afin de déterminer l'incertitude sur les tassements, les moments fléchissants et les efforts tranchants de semelles filantes reposant sur un sol élastique.

Bibliographie

- Biot, M. A., *Bending of Infinite Beams on an Elastic Foundation*, J. Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech., 1937, Eng., 59: A1-7.
- Cassan M., *Les essais in situ en mécanique de sol*, Tome II, Editions Eyrolles, Paris, 1978.
- Elachachi S.M., Breyse D., Houy L., « Longitudinal variability of soils and structural response of sewer networks », *Computers and Geotechnics*, Vol. 31, 2004, p. 625-641.
- Harr, M.E., « Reliability Based Design in Civil Engineering », *Dover Publications Inc.*, 1987
- Kerr AD., *A study of a new foundation model*, Acta Mech 1965, I/ 2:135-47.
- Lacasse, S., and Nadim, F., « Uncertainties in characterizing soil properties », *In Proceedings of Uncertainty '96. Geotechnical Special Publication*, 1996, 58, Vol. 1, pp. 49-75.
- Sadrekarimi J., Akbarzad M., « Comparative Study of Methods of Determination of Coefficient of Subgrade Reaction » *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, Vol. 14, Bund. E.
- Uzielli, M., Nadim, F., Lacasse, S., Kaynia, A.M., « A conceptual framework for quantitative estimation of physical vulnerability to landslides » *Engineering Geology*, 2008, 102, pp. 251-256.
- Vesic, A. B. « Beams on Elastic Subgrade and Winkler's Hypothesis, » *Proc. 5th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 1961, Paris: 845-850.
- Vlassov VZ, Leontiev NN., *Beams, plates and shells on an elastic foundation*, [in Russian] Moscow, USSR: Fizmatgiz, 1960
- Winkler E., *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit*, 1867, Prag, Dominicus.