Chapitre III

Résolution de l'équation de transfert radiatif

III-1 Introduction

Le rayonnement total émis par un plasma résulte de la contribution de plusieurs processus. Certains donnent un spectre discret on les appelle les raies d'autre émettent dans un intervalle très large c'est le spectre continue (la fréquence ν est alors une variable continue).

L'équation de transfert radiatif apparaît comme une équation de transport de rayonnement (elle est souvent comparé à l'équation de Boltzmann) cette équation permet d'évaluer la part du rayonnement qui s'échappe du plasma sans être absorbé. Bien sur le rayonnement n'est pas totalement absorbé le plasma ne se comporte pas donc comme un corps noir il n'est pas non plus considérer comme un milieu optiquement mince. Au cours de ce chapitre nous allons résoudre cette équation dans un modèle simplifié : le plasma est supposé isotherme donc le profil radial de température est rectangulaire.

III-2 Généralités sur le rayonnement

III-2-1 Le rayonnement

Pour décrire le rayonnement, deux théories se sont longtemps confrontées. D'après la théorie ondulatoire, toute radiation peut être considérée comme la superposition d'ondes électromagnétiques. Quand à la théorie corpusculaire, elle est basée sur l'idée que la lumière est composée de particules, les photons, qui se propagent le long des rayons lumineux. On considère aujourd'hui qu'à chaque photon est associée une onde électromagnétique. C'est ce que l'on appelle la dualité onde particule : chaque photon qui compose la lumière transporte une énergie individuelle E proportionnelle à la fréquence de son onde associée ν suivant la relation de Planck :

$$E = h\nu \qquad (III-1)$$

Où h est la constante de Planck $\left(h = 6{,}620755.10^{-34}\, J.s\right)$, E est exprimée en Joule (J), et ν est exprimée en Hertz (Hz ou s^{-1}).

III-1-2 Grandeurs caractéristiques

III-1-2-1 Flux énergétique

Nous avons vu au paragraphe précédent que chacun des photons constituant la lumière se déplace en transportant de l'énergie. Le débit d'énergie qui en résulte à chaque instant, par unité de temps, est appelé flux énergétique ou encore puissance du rayonnement à l'instant considéré. Il s'exprime en Watt, et se note Fe .

III-1-2-2 Intensité

Pour caractériser la quantité de rayonnement émis dans une direction de l'espace, nous introduisons la notion d'angle solide, qui représente une unité d'angle dans l'espace, et qui a pour unité le stéradian (sr). Nous pouvons alors définir l'intensité I du rayonnement dans une direction donnée, exprimée en ($W.sr^{-1}$), comme le flux énergétique rayonné par unité d'angle solide dans la direction considérée (cf. figure III.2) :

$$I(\theta, \phi) = \frac{dFe\ (\theta, \phi, d\Omega)}{d\Omega} \qquad (III-4)$$

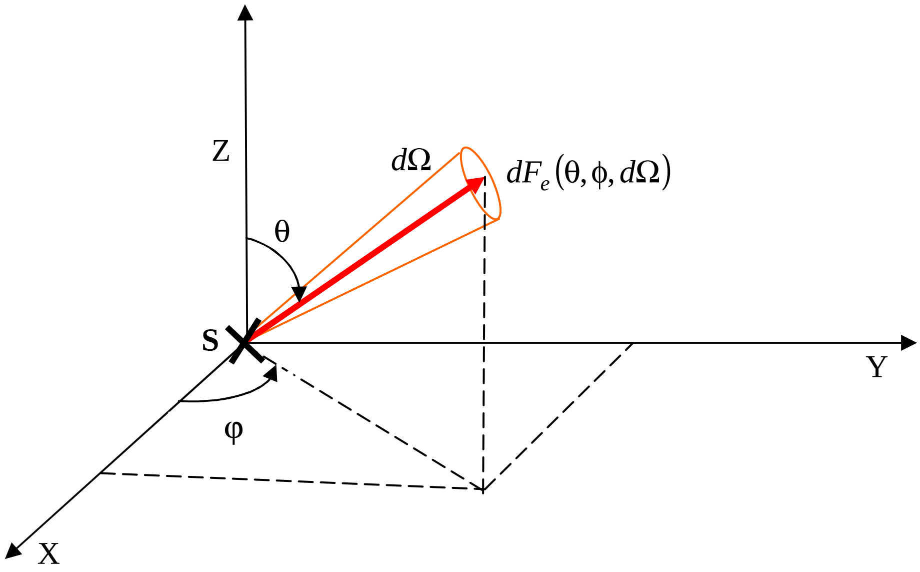

Figure III.2 - Intensité d'une source lumineuse S.

III-1-2-3 Luminance

Par définition, pour une source étendue finie, la luminance en un point $\vec{r}$ est l'intensité rayonnée par unité de surface dA, exprimée en ($W.m^{-2}.sr^{-1}$). Il s'agit donc du flux d'énergie rayonné par une unité de surface, par unité d'angle solide (cf. figure III.3) [8] :

$$L(\theta,\phi) = \frac{dI(\theta,\phi)}{dA\cos\theta_A} = \frac{d^2Fe(\theta,\phi,d\Omega_A)}{d\Omega_A dA\cos\theta_A} \qquad (III-5)$$

Lorsque l'on s'intéresse plus spécifiquement au rayonnement émis avec une longueur d'onde donnée, on parle de luminance spectrale, qui est égale à la luminance par unité de longueur d'onde $d\lambda$, que l'on exprime en ($W.m^{-2}.sr^{-1}.m^{-1}$)
On peut aussi introduire la luminance spectrale en fonction de la fréquence :

$$L_\nu d\nu = L_\lambda d\lambda \qquad (III-6)$$

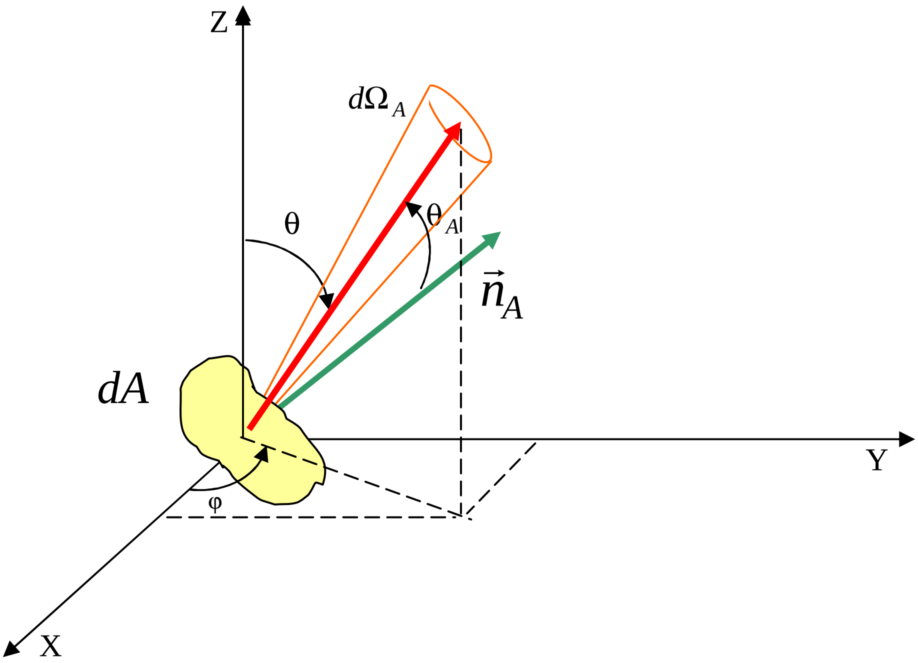

Figure III.3 - Paramètres de définition de la luminance d'une source étendue finie.

III-2 Émission et absorption

Dans un milieu rayonnant, les propriétés locales d'émission et d'absorption du rayonnement en un élément de volume dV sont décrites respectivement par les coefficients d'émission et d'absorption de ce milieu en dV. Ils tiennent compte du rayonnement émis par cet élément de volume ainsi que du rayonnement reçu par dV, et ce dans chacune des directions de l'espace.

La quantité d'énergie rayonnée par l'ensemble du plasma est caractérisée par la grandeur émissivité. Définissons ces trois notions clés, fondamentales pour la suite de ce travail. Notons que le rayonnement des plasmas que nous étudions étant considéré comme isotrope (chaque élément du plasma émet de la lumière dans toutes les directions de l'espace, avec la même intensité), nous pouvons simplifier notre étude en considérant une seule direction de propagation.

III-2-1 **Coefficient d'absorption spectral**

Le coefficient d'absorption spectral $k_\lambda(r,T)$ représente la part du rayonnement qui a été émis par une unité de volume centrée en r qui sera absorbée à cette longueur d'onde λ et à la température T au cours de sa propagation dans le plasma.

On l'exprime en (m^{-1}). En $r+dr$ l'atténuation de la luminance émise en s'écrit (figure III.3) :

$$L_\lambda(r+dr,T)=-k_\lambda(r,T)dr.L_\lambda(r,T) \qquad (III-7)$$

Si le terme $k_\lambda(r,T)$ est constant par rapport à r et à T , l'intégration de cette expression conduit à l'expression classique de l'absorption, qui rend bien compte de la non linéarité de ce phénomène :

$$L_\lambda = L_{\lambda_0} \exp[-k_R] \qquad (III-8)$$

Où k_R est l'épaisseur optique, R étant l'épaisseur de plasma traversée.

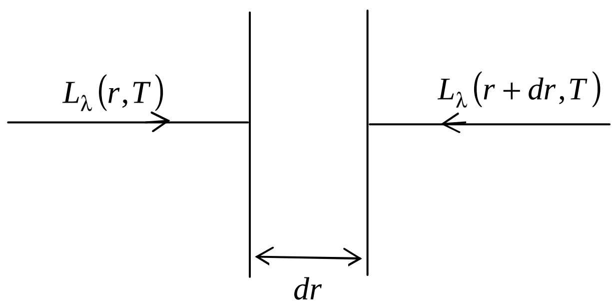

Figure III.3 - Variation de la luminance le long d'un trajet lumineux.

Par ailleurs, nous introduisons le coefficient $k'_\lambda(r)$, qui représente le coefficient d'absorption spectral au point r corrigé de l'émission spectrale induite (cette dernière étant considérée comme une absorption négative). Dans des conditions d'ETL , le coefficient généralisé d'absorption s'écrit k' est défini par :

$$k'_{\lambda}(r) = k_{\lambda}(r)\left[1 - \exp\left(-\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)\right] \qquad (III-9)$$

III-2-2 **Coefficient d'émission spectral**

Le coefficient d'émission spectral, $\varepsilon_{\lambda}(r,T)$, représente la puissance rayonnée par un élément de volume dV suivant une direction $d\Omega$ de l'espace, par unité de longueur d'onde $d\lambda$, à la température T. Il s'exprime donc en ($W.m^{-3}.sr^{-1}.m^{-1}$).

III-2-3 **Émissivité**

L'émissivité représente l'intensité émise par le plasma dans une direction donnée et par unité de volume. Il s'agit donc de la puissance rayonnée par unité de

volume dV et par unité d'angle solide $d\Omega$. Elle s'exprime en ($W.m^{-3}.sr^{-1}$) :

$$\varepsilon(\theta,\phi) = \frac{dI(\theta,\phi)}{dV} = \frac{d^2Fe(\theta,\phi,d\Omega)}{d\Omega dV} \qquad (III-10)$$

L'émissivité est reliée aux coefficients d'émission spectral $\varepsilon_{\lambda}(r,T)$,et d'absorption spectral $k_{\lambda}(r,T)$ par l'expression [11] :

$$\varepsilon(r,T) = \int_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}(r,T) e^{-\left[\int_r^R k_{\lambda}(r',T)dr'\right]} d\lambda \qquad (III-11)$$

III-3 Équation du transfert radiatif

Considérons un élément de volume du plasma. Les particules qui constituent cet élément émettent un rayonnement en direction des autres unités de volume du plasma (nous avons vu que l'émission était isotrope). Par ailleurs, cet élément de volume reçoit un rayonnement de la part de tous les autres éléments de volume environnant. Le rayonnement effectivement émis par cette unité de volume est donc le bilan de ce qui y est émis et de ce qui y est absorbé,et est régi par l'équation du transfert radiatif. En supposant les phénomènes de diffraction négligeables, et l'indice de réfraction du milieu égal à 1 (hypothèses vérifiées dans les plasmas thermiques [12]), l'équation du transfert radiatif suivant une direction de l'espace s'écrit :

$$\frac{dL_\lambda(r)}{dr} = \varepsilon_\lambda(r) - k'_\lambda(r).L_\lambda(r) \qquad (III-12)$$

La résolution pratique de cette équation dans les gaz réels est difficile : il s'agit de faire un bilan en chaque point du plasma, de tout le rayonnement émis autour de ce point et qui arrive effectivement en ce point, et de tout le rayonnement émis en ce point vers les autres points, et ce pour chaque longueur d'onde, en prenant en compte le fait que de multiples mécanismes se superposent et ne sont pas indépendants les uns des autres.

III-4 les deux types de rayonnement

III-4-1 Le fond continu

Les phénomènes qui génèrent le rayonnement du fond continu sont la recombinaison radiative, le rayonnement de freinage et l'attachement radiatif. Voici une description de chacun de ces processus.

La recombinaison radiative

Lorsqu'un ion positif A^{z+} de charge ze capture un électron du plasma pour former un atome ou un ion $A_j^{(Z-1)+}$, de charge $(Z-1)e$ dans un état excité, l'excédant d'énergie de l'électron est libéré sous la forme d'un photon, d'énergie $\frac{hc}{\lambda}$, On schématise la réaction de la manière suivante :

$$A^{Z+} + e^- \Leftrightarrow A_j^{(Z-1)+} + \frac{hc}{\lambda} \qquad (III-13)$$

Ce processus est appelé recombinaison radiative (le processus inverse est la Photo-ionisation).

Les expressions permettant de déterminer le coefficient d'émission spectral correspondant à la recombinaison radiative pour les particules hydrogénoïdes d'une part $\left(He^{+} et\ He^{++}\right)$,et les autres espèces d'autre part $\left(Ar^{+} et\ Ar^{++}\right)$sont les suivantes :

Cas des espèces hydrogénoïdes

L'expression de l'émissivité spectrale peut se mettre sous la forme suivante [13] :

$$\varepsilon_{\lambda}^{rec}(T) = C_1\left(\frac{c}{\lambda^2}\right)\frac{z^4 n_e n^{z+}}{c} T^{-\frac{3}{2}}\left[\exp\left(\frac{-hc}{\lambda k_B T} - \frac{z\Delta E_z}{k_B T}\right)\right].S \qquad (III-14)$$

Avec

$$S = \sum_j \frac{g_j^{(z-1)+}}{n_j^5}\exp\left(\frac{E_{\lim}^{(z-1)+} - E_j^{(z-1)+}}{k_B T}\right) + \frac{1}{g_0^{(z-1)+}}\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^3}\exp\left(\frac{z_z^2 + E_{Ryd}}{n^2 k_B T}\right) \qquad (III-15)$$

n_j est le nombre quantique principal du niveau d'énergie E_j de l'espèce $A^{(z-1)+}$, $g_0^{(z-1)+}$ et $g_j^{(z-1)+}$ sont les poids statistiques du niveau fondamental et du niveau j de l'espèce $A^{(z-1)+}$, C_1 est une constante de valeur $1{,}7192.10^{-46}\, J.m^3.K^{3/2}.sr^{-1}$, et $E_{\lim}^{(z-1)+}$ est l'énergie minimale nécessaire à l'ionisation de l'atome ou de l'ion de charge $(z-1)e$. S est une grandeur sans dimension, dont le premier terme est une somme sur j telle que $E_J^{(Z-1)+} \geq \left(E_{\infty}^{(z-1)+} - \Delta E - \frac{hc}{\lambda}\right)$:

$E_{\infty}^{(z-1)+}$ est l'énergie qu'il faut pour ioniser l'ion ou l'atome à partir de son niveau fondamental.

Le second terme est une somme dont les indices sont les suivants :

$$n_1 = z\sqrt{\frac{E_{Ryd}}{\frac{hc}{\lambda} + z\Delta E_z}} \qquad \text{et} \qquad n_2 = z\sqrt{\frac{E_{Ryd}}{z\Delta E_z}} \qquad (III-16)$$

E_{Ryd} : est l'énergie de Rydberg de l'espèce considérée :

$$\left[E_{Ryd}\right]_H = hcR_\infty = 13{,}6057 eV$$

$$\left[E_{Ryd}\right]_{He^+} = hcR_\infty\left[1-\frac{m_e}{M}\right] = 13{,}6038 eV$$

h et c sont respectivement la constante de Planck et la vitesse de la lumière, R_∞ est la constante infinie de Rydberg $\left(R_\infty = 1{,}09737.10^7 m\right)$, et m_e et M sont les masses des électrons et de l'ion.

Cas des espèces argon $\left(Ar^+ et\ Ar^{++}\right)$

Dans ce cas, le potentiel auquel sont soumis les électrons peut être considéré comme un potentiel de Thomas-Fermi. Le coefficient d'émission spectral a alors pour expression [14] :

$$\varepsilon_\lambda^{rec}(T) = C_2\left(\frac{c}{\lambda^2}\right)\frac{z^4 n_e n^{z+}}{Q_{z^+}^{\text{int}}(T)}T^{-\frac{1}{2}}\left[1-\exp\left(\frac{-hc}{\lambda k_B T}\right)\right].g_0^{z^+}\xi_\lambda^{z-1}(T) \qquad (III-17)$$

$\varepsilon_\lambda^{rec}(T)$ est exprimé en ($W.m^{-3}.sr^{-1}.m^{-1}$), n_e et n^{z+} sont les densités d'électron et d'ion de charge ze en (m^{-3}), $Q_{\text{int}}^{z+}(T)$ et g_0^{z+} sont respectivement la fonction de partition interne et le poids statistique du niveau fondamental de cet ion, C_2 est une constante $\left(C_2 = 5{,}44.10^{-52} J.m^3.K^{\frac{1}{2}}.sr^{-1})\right)$ [3] , et $\xi_\lambda^{z-1}(T)$ est le facteur de Biberman, qui est une correction à l'approximation hydrogénoïde. Ses valeurs sont fournies par Hoffsaess [15].

Le rayonnement de freinage

La vitesse initiale υ_j d'un électron libre $\left[e^-\right]_{\upsilon_j}$ peut être modifiée lorsque celui-ci pénètre dans le champ d'une autre particule A. Lorsque l'électron est freiné, il perd de l'énergie cinétique . Cette perte se traduit par la génération d'un photon, dont l'énergie correspond à la perte d'énergie de l'électron $\left[e^-\right]_{\upsilon_i}$. On parle alors de rayonnement de freinage :

$$A+[e]_{\upsilon_j} \Leftrightarrow A+[e]_{\upsilon_i} + \frac{hc}{\lambda} \qquad (III-20)$$

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{1}{2} m_e \left| \upsilon^2{}_i - \upsilon^2{}_j \right|$$

Voici d'après Cabannes et Chapelle [13] ,l'expression de son coefficient
d'émission spectral lorsque la particule A est successivement un atome puis un ion :

$$\varepsilon_\lambda^{ea}(T) = C_3 \left(\frac{c}{\lambda^2} \right) \frac{n_e n_a}{\lambda^2} T^{\frac{3}{2}} . \exp\left(-\frac{hc}{\lambda} \right) G(\lambda, T) \qquad (III-21)$$

$$\varepsilon_\lambda^{ei}(T) = C_4 \left(\frac{c}{\lambda^2} \right) z^2 n_e n^{z+} T^{-\frac{1}{2}} . \exp\left(-\frac{hc}{\lambda} \right) G^{z+}(\lambda, T) \qquad (III-22)$$

n_e , n_a et n^{z+} sont les densités d'électrons, d'atomes et d'ions, et C_3 et C_4 sont des constantes égales à $C_3 = 3{,}42.10^{-43}\, J.m.K^{1/2}.sr^{-1}$ et $C_4 = 5{,}44.10^{-52}\, J.m^3 K^{1/2}.sr^{-1}$.

Le facteur $G^{Z+}(\lambda, T)$ est le facteur correctif de Gaunt, qui joue un rôle comparable à celui du facteur de Biberman pour la recombinaison radiative. La fonction $G(\lambda, T)$ fait intervenir la section efficace élastique totale de collision électron/atome. Pour le espèce argon, les valeurs de ces sections efficaces sont extraites des articles de Neufeld et al. [15] et de Tanaka et al. [16].Pour l'espèce hélium, ces valeurs proviennent des articles de Fursa et al. [5] , Golden et al. [17] . ,et Kennerly et al. [18] .

L'attachement radiatif

Dans le cas d'un attachement radiatif, l'électron est capté par un atome neutre conduisant ainsi à la formation d'un ion négatif et l'émission de rayonnement sur un spectre continu. Ce phénomène ne concerne que l'hélium, dans le cas de l'argon il a été négligé.

Il s'agit du mécanisme suivant : un atome A capture un électron pour former un ion négatif A^-, en générant un photon dont l'énergie compense la perte d'énergie du système :

$$A + e^- \Leftrightarrow A^- + \frac{hc}{\lambda} \qquad (III-23)$$

Le coefficient d'émission spectral s'écrit de la façon suivante :

$$\varepsilon_\lambda^{att}(T) = \left(\frac{2hc}{\lambda^3}\right).\left(\frac{c}{\lambda^2}\right) n_{A^-}.\exp\left(-\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)\sigma_{\det}^-(\lambda) \qquad (III-24)$$

$\sigma_{\det}^-(\lambda)$ est la section efficace de photo-détachement de l'ion A^-, dont les valeurs sont extraites de la littérature [19] .

III.4.2 Emission des raies

La transition d’un électron excité entre un niveau d’énergie E_j vers un niveau inférieur E_i s’accompagne d’une émission de photon d’énergie $\frac{hc}{\lambda_{ji}}$, induisant une réorganisation de la structure électronique. Pour une pression donnée, le coefficient d’émission spectrale de cette raie s’écrit [19]:

$$\varepsilon_{ji}(T) = \frac{hc}{4\pi\lambda_{ji}} A_{ji}.N_j(T).P_{ji}(\lambda,T) \qquad (III-25)$$

Avec N_j la densité du niveau émetteur de l'atome , A_{ji} la probabilité de transition spontanée et P_{ji} le profil normalisé de la raie vérifiant pour une température T donnée [20]:

$$\int_0^{\infty} P_{ji}(\lambda) d\lambda = 1 \qquad (III-26)$$