Table des Matières

Notations

- $\mathbb{R}^N$ *est un espace Euclien de dimension* N.
- *Si* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *alors* $x.y$ *est le produit scalair dans* $\mathbb{R}^N$, *c-à-d*

$$x = (x_1, ..., x_N), \text{ et } y = (y_1, ..., y_N), \text{ alors } x.y = \sum_{i=1}^{N} x_i.y_i.$$

- *Si* $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_N) \in I\!N^N$ *est un multi-indice , et* $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$.
- $D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$.
- *Si* $E \subset \mathbb{R}^N$ *, alors* $|E|$ *est la mesure de Lebesgue .*
- $B(x; r)$ *est la boule dans* $\mathbb{R}^N$ *de centre* x *et de rayon* r.
- *Si* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *est un domaine borné , alors* $\partial\Omega$ *son frantière.*
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ *est le gradient de la fonction* $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.
- Δu *est le laplacien de la fonction u:* $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *c-à-d*

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla u).$$

- $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ *est le p-laplacien.*

- p' *est l'exposant conjugé de* p *tel que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$

- p^* *est l'exposant critique tel que* $p^*=\frac{Np}{N-p}$.

- $Supp(u)$ *est le support de la fonction* u.

- $\omega\subset\subset\Omega\omega$ *est un ouvert de* Ω *tel que* $\varpi\subset\Omega$ *et* ϖ *est compact.*

- *s.c.i: Semi continue inferierement*

  s.c.s: Semi continue superierement

  p.p :presque pour tous les points.

- $C^0(\Omega)$ *:est l'espace des fonctions continues sur* Ω.

- $C^k(\Omega)$ *:est l'espace des fonctions* k *fois continuement différentiables sur* Ω*;(*$k\in\mathbb{N}$*).*

- $C^\infty(\Omega)=\bigcap\limits_{k\geq 0}C^k(\Omega)$.

- $C_0^\infty(\Omega)$ *est l'espace des fonctions* C^∞ *à support compact dans* Ω.

- $L^p(\Omega):=\left\{u:\Omega\rightarrow I\!R|u\text{ est mesurable},\int_\Omega|u|^p\,dx<\infty\right\}$ *pour* $1\leq p<\infty$.

- $L^\infty(\mathit{\Omega}):=\left\{u:\Omega\rightarrow I\!R|u\text{ est mesurable},\exists C\text{tel que}\,|u(x)|<C,\text{p.p }x\in\Omega\right\}.$

- $L^{p'}(\Omega)$ *est l'espace dual de* L^p.

Introduction

Soient $y \in \mathbb{R}^N$ *et* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *une application au moins continue, et considérons l'équation*

$$f(x) = b.$$

On se pose cette question comment peut-on de manière pratique affirmer qu'il existe au moins une solution x *à notre équation ?*
Il y a une réponse simple dans le cas où $N = 1$*; par exemple si* $\Omega =]-1,1[$ *et* $f \in C(]-1,1[,\mathbb{R})$, *s'il existe deux nombres réels* $x_1, x_2 \in]-1,1[$ *tels que*

$$f(x_1) \cdot f(x_2) \leq 0,$$

alors notre équation admet au moins une solution, comme conséquence directe du théorème des valeurs intermédiaires. Alors que serait-ce pour une dimension plus grande $N > 1$, *certains se diront dans le cas où* f *est linéaire et si le déterminant de* f *est non nul, alors il existe une solution et meme une unique solution à notre équation, et ce pour tout* $b \in \mathbb{R}^N$, *bien entendu cela n'est valable que si le déterminant de l'application linéaire* f *est non nul, que faire si ce n'est pas le cas ?!!!*
C'est pour répondre à cette dernière question, qu'a été développé un outil intervenant pour les applications non-linéaires, où la notion de déterminant pour les applications linéaires, sera remplacée par la notion de "degré", ce dernier est un réel qui indique par sa non nullité que notre équation admet au moins une solution. Dans le cas de la dimension une, cette notion de

degré peut être introduite de la manière suivante

$$\deg(f, \Omega, b) = \frac{1}{2}(sgn((f(1) - b) - sgn(f(-1) - b)),$$

de telle sorte que si $\deg(f, \Omega, b) \neq 0$, *on a*

$$(f(1) - b)(f(-1) - b) < 0,$$

d'où l'existence des solutions, nous constatons en premier lieu que si ce degré est non nul, notre équation possède bien une solution ou peut être même plusieurs. On observera aussi qu'il dépend de f et de y.

Une première idée pour définir le degré de f en b sur un ensemble Ω, consisterait à le faire coincider avec "le nombre de solutions de l'équation dans Ω". C'est cette notion que l'on va introduire dans ce mémoire.

Au premier chapitre, on introduira quelques notions de base ainsi que des rappels, qui seront utilisés dans certaines preuves et applications.

Le deuxième chapitre est consacré à définir le degré topologique de Brouwer, qu'on utilise dans le cas où l'espace où on travaille est de dimension finie, nous y donnerons quelques proriétés de ce dernier.

Le troisième chapitre quant à lui est dédié à définir la notion du degré topologique de Leray Schauder qui n'est autre que l'homologue du degré topologique de Brouwer, mais en dimension infine, on y donnera aussi quelques-unes de ses propriétés.

Dans le dernier chapitre, on tentera de mettre en exergue l'utilité du degré topologique via quelques applications.

Chapitre 1

Résultats préliminaires

1.1 *Définitions*

• *Si* X *et* Y *sont des espaces métriques et si* $f, g : X \to Y$ *sont des applications continues, on dit que* f *est homotope à* g *si il existe une application continue* $F : X \times [0,1] \to Y$ *telle que* $F(x,0) = f(x)$ *et que* $F(x,1) = g(x)$ *pour tout* $x \in X$. *On dit alors que* F *est une homotopie entre* f *et* g. *de plus la relation "* f *est homotope à* g *" est une relation d'équivalence.*

• *Pour tout* $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, *on pose* $J_\varphi(x) =$ *déterminant de la jacobienne de* φ *au point* x.

• *Pour tout* $a \in \mathbb{R}^*$ *on pose*

$$Sgn(a) = \begin{cases} 1 \text{ si } a > 0 \\ -1 \text{ si } a < 0. \end{cases}$$

• *Soit* f *une application de* Ω *dans* $\mathbb{R}^N$ *différentiable. Un point* $x \in \Omega$ *est dit régulier si* $J_f(x) \neq 0$. *On dit que* $y \in \mathbb{R}^N$ *est une valeur réguliére de* f *si tous les point* $x \in f^{-1}(y)$ *sont réguliers.*

• *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* f *une application de* Ω *dans* $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, *alors supp*$(f) = \overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}}$.

1.2 *Espaces de Sobolev*

Soient Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* $1 \leq i \leq N$. *Une fonction* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *a i-ème dérivée faible dans* $L^1_{loc}(\Omega)$ *s'il existe* $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ *telle que pour tout* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ *on ait*

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)dx.$$

Cela revient à dire que la i-ème dérivée au sens des distributions de u appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$. *Si* f_i *est donnée par la relation ci-dessus, on posera*

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i.$$

Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}^N$, *on note* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$ *la longueur de* α *et on note* $\partial^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_N^{\alpha_N} u$. *Dans la suite* $\partial^\alpha u$ *désigne la dérivée faible d'une fonction* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Pour* $1 \leq p \leq \infty$, *l'espace de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega); \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\right\}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ *étant muni de la norme* $\|u\|_{L^p(\Omega)} := \|u\|_p$ *(où l'on note* $\|u\|_p^p := \int_\Omega |u(x)|^p\, dx$*). On munit l'espace de Sobolev de la norme suivante*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \|u\|_{m,p} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Et si $p = \infty$ *la norme de l'espace* $W^{m,\infty}(\Omega)$ *est*

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = (\sup |\partial^\alpha u|).$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} .$$

Sa norme associée étant

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Notons que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Proposition 1.1 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est*

- *Un espace de Banach pour $1 \le p \le \infty$*
- *Un espace séparable pour $1 \le p < \infty$*
- *Un espace réfléxif pour $1 < p < \infty$.*

Théorème 1.1 *Soit $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes*
1) $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
2) Il existe une constante C telle que

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \le C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} , \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ i = 1, ..., N.$$

3) Il existe une constante C telle que pour tout ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}^N$ avec $|h| < dist(\omega, \mathbb{R}^N \backslash \Omega)$. On a

$$\|u(\cdot + h) - u\|_{L^p(\omega)} \le C |h| .$$

De plus on peut prendre $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$.
Lorsque $p = 1$ les implications suivantes restent vraies (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Théorème 1.2 *(Dérivation).*

Soient $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors* $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ *et*

$$\frac{\partial uv}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \qquad i = 1, ..., N.$$

Théorème 1.3 *(Dérivation de la composée).*

Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ *telle que* $G(0) = 0$ *et* $|G'(s)| \leq M, \forall s \in \mathbb{R}$. *Soit* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *alors*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Théorème 1.4 *(Formule de changement de variables).*

Soient Ω *et* Ω' *deux ouverts de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* $H : \Omega' \to \Omega$ *une application bijective,* $x = H(y)$, *telle que*

$$H \in C^1(\Omega'), \quad H^{-1} \in C^1(\Omega), \; J_H \in L^{\infty}(\Omega'), \quad \text{et } J_{H^{-1}} \in L^{\infty}(\Omega).$$

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *alors* $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$ *et*

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(u \circ H)(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y)) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y). \quad j = 1, ..., N.$$

Définition 1.1 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne la fermeture de* $C_0^1(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$,*il est munit de la norme induite par* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach séparable, il est de plus réfléxif pour* $1 < p < \infty$.

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace H_0^1 *est un espace de Hilbert munit du produit scalaire de* H^1.

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$ *on sait que* $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ *est dense dans* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, *et par conséquent*

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *et* $1 \leq p < \infty$, *si* u *est à support compact et inclus dans* Ω *alors* $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Une autre caractérisation de $W_0^{1,p}(\Omega)$, *si* Ω *est de classe* C^1, *et* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *avec*

$1 \leq p < \infty$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1) $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

2) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.5 *On suppose que Ω de classe C^1 et soit $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

2) Il existe une constante C telle que

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \left\| \varphi \right\|_{L^{p'}}, \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N),\ i = 1, ..., N.$$

3) Si l'on considère la fonction

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) \ si \ x \in \Omega, \\ 0 \ si \ x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

alors la fonction $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et dans ce cas

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}.$$

Théorème 1.6 *(Inégalité de Poincaré). On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante c dépendant de Ω et de p telle que*

$$\left\| u \right\|_{L^p(\Omega)} \leq c \left\| \nabla u \right\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Autrement dit la quantité $\left\| \nabla u \right\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Définition 1.2 *(L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$). On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On note par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.*

Grace au théorème de Riesz, on peut identifier L^2 et son dual, par conséquent on a les inclusions

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega),$$

avec injections continues.

Théorème 1.7 *(Injections continues). Soient $m \geq 1$ un entier et $1 \leq p < \infty$, on a les injections continues suivantes*

$$\begin{array}{lll} si \ \ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0 & alors & W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \text{ où } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N} \\ si \ \ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0 & alors & W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \ \forall q \in [p, +\infty[, \\ si \ \ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0 & alors & W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{array}$$

De plus si $m - \frac{N}{p} > 0$ n'est pas un entier, on pose

$$k = \left[m - \frac{N}{p} \right] \ \text{ et } \theta = m - \frac{N}{p} - k, \ (0 < \theta < 1).$$

Pour $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\|D^\alpha u\| \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}. \quad \text{où } |\alpha| \leq k,$$

et

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C |x - y|^\alpha \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^N. \text{et } |\alpha| = k.$$

En particulier $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^k(\mathbb{R}^N)$.Si l'on remplace $\mathbb{R}^N$ par Ω un ouvert borné de classe C^1, on a les mêmes injections sauf dans le cas où $p < N$, l'injection devient

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Théorème 1.8 *(Rellich-Kondrachov). Si l'on suppose que Ω est un ouvert borné de classe C^1, on a*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega) \ \ \forall q \in [1, p^*[& si \ p < N, \\ \\ L^q(\Omega) \ \ \forall q \in [1, \infty[& si \ p = N, \\ \\ C(\overline{\Omega}) & si \ p > N, \end{cases}$$

avec injections compactes.

Théorème 1.9 *(De la fonction réciproque). Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert,* $x_0 \in \Omega$, $y_0 \in \mathbb{R}^N$ *et* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, *tel que* $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ *est un isomorphisme et* $f(x_0) = y_0$. *Alors il existe un voisinage ouvert* V *de* x_0 *et un voisinage ouvert* W *de* y_0 *tels que* $f_{|V}$ *est un difféomorphisme de classe* C^1 *de* V *sur* W *c-à-d il existe une fonction* $g \in C^1(W, V)$ *tel que* $f \circ g = Id_W$ *et* $g \circ f = Id_V$. *En particulier* $Sgn\ J_f(x) = Sgn\ J_f(x_0)$ *pour tout* $x \in V$ *De plus pour tout* $x \in f^{-1}(y_0)$ *alors* $f^{-1}(y_0)$ *ne contient qu'un nombre fini de points.*

1.3 *Quelques propriétés sur les opérateurs*

Définition 1.3 *(Opérateur compact) Soient* E_1 *et* E_2 *des espaces de Banach. Un opérateur* $T : E_1 \to E_2$ *linéaire est dit compact si il est continu, et si pour tout* $R > 0$ *on a* $T(E_1 \cap \overline{B}(0, R))$ *est relativement compact dans* E_2. *Il est équivalent de dire que pour toute suite* $(x_n)_{n \geq 1}$ *bornée de* E_1 *on peut extraire de* $(T(x_n))_{n \geq 1}$ *une suite qui converge dans* E_2.
Où encore si l'image de tout ensemble borné B *de* E_1 *par* T, *est un ensemble relativement compact de* E_2 *c'est à dire* $\overline{T(B)}$ *est un compact.*

Définition 1.4 *Soit* $L \in L(E)$, *le spectre de* L *est défini par*

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{R}, L - \lambda Id \text{ n'est pas inversible}\}.$$

Nous dirons que $\lambda \in \sigma(L)$ *est une valeur propre de* L *si et seulement si* $\ker(L - \lambda Id) \neq \{0\}$.

Proposition 1.2 *Soit* $L \in L(E)$. *Alors*

- $\sigma(L)$ *est un compact de* $\mathbb{R}$ *contenu dans* $[-\|L\|, \|L\|]$.
- *Si* $L \in L(E)$, L *est compact et* $\dim(E) = \infty$ *alors* $0 \in \sigma(L)$.
- *Si* $L \in L(E)$, L *est compact , si* $\lambda \neq 0$ *alors* $\lambda \in \sigma(L)$ *si et seulement si* λ *est une valeur propre de* L.
- *Si* $L \in L(E)$, L *est compact alors ou bien* $\sigma(L)$ *est fini ou bien* $\sigma(L)$ *est une suite qui tend vers* 0.

Chapitre 2

Degré topologique de Brouwer

2.1 *Introduction*

On va considérer un ouvert borné Ω *de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *une fonction continue, et* $b \in \mathbb{R}^N$ *tel que*

$$f(x) = b. \tag{2.1}$$

On veut obtenir une quantité nous permettant de connaitre le nombre de zéros pour l'équation (2.1)*, cette quantité devrait nous donner les nombre exact des zéros et devrait être invariante par petites déformations de* f*. Alors pour que l'on empêche les zéros de* f *de sortir du domaine on imposera que* $b \notin f(\partial\Omega)$*. Dans le cas simple de* $\mathbb{R}$ *on remarque que le nombre de zéros n'est pas constant, or si on assigne à chaque zéro de* f *une orientation qui n'est autre que le signe de* f' *et on déduit*

$$\deg(f, \Omega, b) = \sum_{x \in f^{-1}(b)} sgn f'(x).$$

On verra par la suite que $\deg(f, \Omega, b)$ *a d'excellentes propriétés. On introduit tout d'abord la formule du degré pour la cas des dimensions* $N \geq 1$.

2.2 *Construction du degré topologique de Brouwer*

Définition 2.1 *Soient $N \geq 1$ un entier, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, une fonction $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et $b \notin f(\partial\Omega)$. On considère $0 < \varepsilon < dist(b, f(\partial\Omega))$ et une fonction $\varphi \in C(]0,\infty[,\mathbb{R})$ à support compact contenu dans $]0,\varepsilon[$, et telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|)dx = 1.$$

On appelle le degré topologique de Brouwer de f dans Ω par rapport au point cible b le nombre

$$\deg(f,\Omega,b) := \int_{\Omega} \varphi(|f(x)-b|)J_f(x)dx.$$

On va voir maintenant que le degré topologique de Brouwer est indépendant du choix de la fonction φ et du choix de ε; pour montrer cela on utilise ce lemme

Lemme 2.1 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ et $\psi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, on suppose que $0 \notin f(\partial\Omega)$ et que $supp(\psi) \subset]0,\varepsilon[$ pour un $0 < \varepsilon < dist(0, f(\partial\Omega))$ et*

$$\int_0^\infty r^{N-1}\psi(r)dr = 0.$$

Alors on a

$$\int_{\Omega} \psi(|f(x)|)J_f(x)dx = 0.$$

Proposition 2.1 *Le degré topologique de Brouwer est indépendant du choix de ε et de φ.*

Preuve: *Soit $\varepsilon_0 = dist(b, f(\partial\Omega))$ et $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_0$, si φ_1 et φ_2 ont un support dans $]0,\varepsilon_1[$ et $]0,\varepsilon_2[$ et vérifient*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1(|x|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_2(|x|)dx = 1,$$

alors en posant $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ on a $\int_0^\infty r^{N-1}\psi(r)dr = 0$, et en appliquant le lemme précédent à ψ on obtient que

$$\int_{\Omega} \psi(|f(x)-b|)J_f(x)dx = 0.$$

$\blacksquare$

Proposition 2.2 *Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $f_1, f_2 \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ *et* b *un point de* $\mathbb{R}^N$. *On suppose que* $b \notin f_1(\partial\Omega) \cap f_2(\partial\Omega)$. *Alors si* $\varepsilon > 0$ *est tel que*

$$\varepsilon < dist(b, f_1(\partial\Omega) \cap f_2(\partial\Omega)), \ \text{ et } \ \|f_1 - f_2\|_\infty < \varepsilon,$$

on a

$$\deg(f_1, \Omega, b) = \deg(f_2, \Omega, b).$$

Preuve: *Comme* $\deg(f, \Omega, b) := \deg(f - b, \Omega, 0)$, *on peut supposer sans perte de généralité que* $b = 0$. *Soit* $\theta : [0, \infty[\longrightarrow [0, 1]$ *une fonction de classe* C^∞ *telle que*

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & 0 \leq r \leq \varepsilon, \\ 0 & r \geq 2\varepsilon. \end{cases}$$

En introduisant la fonction

$$f_3(x) := (1 - \theta(|f_1(x)|))f_1(x) + \theta(|f_1(x)|)f_2(x),$$

on vérifie que pour $1 \leq i, k \leq 3$ *on a* $\|f_i - f_k\|_\infty < \varepsilon$ *et pour* $x \in \partial\Omega$, *on a* $|f_i(x)| > 3\varepsilon$. *D'autre part, le choix de* θ, *implique que*

$$f_3(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si} \quad |f_1(x)| > 2\varepsilon, \\ f_2(x) & \text{si} \quad |f_1(x)| < \varepsilon. \end{cases}$$

On va maintenant choisir les fonctions φ_1 *et* φ_2 *pour définir le degré des fonctions* f_1 *et* f_2 *de la façon suivante*

$$supp(\varphi_1) \subset]2\varepsilon, 3\varepsilon[\quad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1(|x|)dx = 1,$$
$$supp(\varphi_2) \subset]0, \varepsilon[\quad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_2(|x|)dx = 1.$$

Comme f_3 coincide (en partie) avec f_1 et f_2, on a alors

$$\begin{aligned}\varphi_1(|f_3(x)|)J_{f_3}(x) &= \varphi_1(|f_1(x)|)J_{f_1}(x),\\ \varphi_2(|f_3(x)|)J_{f_3}(x) &= \varphi_2(|f_2(x)|)J_{f_2}(x).\end{aligned}$$

Cela implique de façon évidente que

$$\begin{aligned}\deg(f_3,\Omega,0) &= \deg(f_1,\Omega,0),\\ \text{et } \deg(f_3,\Omega,0) &= \deg(f_2,\Omega,0).\end{aligned}$$

Et donc

$$\deg(f_2,\Omega,0) = \deg(f_1,\Omega,0).$$

■

Proposition 2.3 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$. On considére un point $b \notin f(\partial\Omega)$ et $(f_k)_k$ une suite de fonctions de $C^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ telle que*

$$\|f_k - f\|_\infty \to 0 \qquad\qquad sur \quad \overline{\Omega}.$$

Alors le degré topologique de f_k existe pour k assez grand et le degré topologique de f est défini par

$$\deg(f,\Omega,b) = \lim_{k\to\infty} \deg(f_k,\Omega,b).$$

Preuve: *Sachant que $\|f_k - f\|_\infty \to 0$ sur $\overline{\Omega}$, pour $k \geq k_0$ assez grand, b n'appartient pas à $f_k(\partial\Omega)$ et par conséquent le degré topologique $\deg(f_k,\Omega,b)$ est bien défini.*
Par ailleurs la proposition précédente implique que si k, j sont assez grands pour que

$$\|f_k - f_j\|_\infty < \frac{1}{4} dist(b, f_k(\partial\Omega) \cap f_j(\partial\Omega)),$$

alors

$$\deg(f_k,\Omega,b) = \deg(f_j,\Omega,b).$$

On conclut que la suite des degrés topologiques $(\deg(f_k,\Omega,b))_k)$ *est stationnaire. Et on vérifie facilement que cette définition est indépendante du choix de la suite* $(f_k)_k$. ■

Proposition 2.4 *(Stabilité) Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $b \in \mathbb{R}^N$*.On suppose que* f_1,f_2 : $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *sont deux fonctions continues telles que* $b \notin f_1(\partial\Omega) \cap f_2(\partial\Omega)$. *Alors si*

$$\|f_1 - f_2\|_\infty < \frac{1}{4} dist(b, f_1(\partial\Omega) \cap f_2(\partial\Omega))$$

on a

$$\deg(f_2, \Omega, b) = \deg(f_1, \Omega, b).$$

Proposition 2.5 *(Stabilité par rapport à la cible) Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$*.On suppose que* $b, b_1 \in \mathbb{R}^N$ *sont dans la même composante connexe de* $f(\partial\Omega)$ *alors*

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega, b_1).$$

Preuve: *Il suffit de voir que si* $b_1 \in \mathbb{R}^N$ *est assez proche de* b, *alors le degré est le même. Soit* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\varepsilon < dist(b, f(\partial\Omega))$, *et posons*

$$f_0(x) = f(x) - b, \qquad\qquad f_1(x) = f(x) - b_1$$

on voit que si $dist(b_1, b) < \varepsilon$, *alors* $\|f_1 - f_0\|_\infty < \varepsilon$, *et que par conséquent d'aprés la proposition précédente*

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f_0, \Omega, 0) = \deg(f_1, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega, b_1).$$

■

2.3 *Propriétés du degré de Brouwer*

Proposition 2.6 *(Additivité) Soient* Ω_1, Ω_2 *deux ouverts bornés disjoints de* $\mathbb{R}^N$ *et* $f \in C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2; \mathbb{R}^N)$. *Si* b *est un point de* $\mathbb{R}^N$ *et* $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$, *alors*

$$\deg(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, b) = \deg(f, \Omega_1, b) + \deg(f, \Omega_2, b).$$

Preuve: *L'astuce est d'approcher la fonction f par des fonctions régulières en considérant une proposition faite précédemment.* ■

Corollaire 2.1 *(Existence) Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ et $b \in \mathbb{R}^N$ un point cible n'appartenant pas à $f(\partial\Omega)$. Si $\deg(f,\Omega,b) \neq 0$ alors l'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution dans Ω.*

Preuve: *On va montrer que si $f^{-1}(b) = \emptyset$, alors $deg(f,\Omega,b) = 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que f est réguliere. Fixons $0 < \epsilon < dist(b, f(\bar{\Omega}))$, et soit φ vérifiant les conditions de la Définition 2.1. Comme le support de φ est inclu dans $(0,\epsilon)$, on déduit facilement que $deg(f,\Omega,b) = 0$. D'ou la conclusion* ■

Corollaire 2.2 *(normalisation). Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^N$. En désignant par I l'application identité, on a*

$$\deg(I,\Omega,b) = \begin{cases} 1 & si \quad b \in \Omega, \\ 0 & si \quad b \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$

du fait que $J_I(x) = 1$
On a, aussi du fait que $J_{-I}(x) = (-1)^N$,

$$\deg(-I,\Omega,b) = \begin{cases} (-1)^N & si \quad b \in \Omega, \\ 0 & si \quad b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Corollaire 2.3 *Si H est un hyperplan de $\mathbb{R}^N$ et $f(\overline{\Omega}) \subset H$, alors pour tout $b \notin f(\partial\Omega)$,* $\deg(f,\Omega,b) = 0$.

Preuve: *Si $b \notin H$ alors $b \notin f(\overline{\Omega})$ donc il n'existe pas de x tel que $f(x) = b$. Donc*

$$\deg(f,\Omega,b) = 0.$$

Si $b \in H$ on va prendre un point $b_1 \notin f(\partial\Omega)$ tel que $b_1 \notin H$. D'aprés la proposition (2.5), on *obtient*

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega, b_1) = 0.$$

■

Définition 2.2 *Soient X, Y deux espaces topologiques et f, g deux applications continues de X dans Y. On dit que f est homotope à g dans Y s'il existe une fonction continue*

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. La fonction H est alors appelée homotopie. L'invariance par homotopie du degré topologique est très importante, parce qu'en particulier elle permet de calculer le degré topologique de certaines fonctions en se ramenant à des cas où le calcul est facile.

Proposition 2.7 *(Invariance par homotopie). Soient $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue et $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Alors pour tout $t \in [0,1]$ on a*

$$\deg(H(\cdot, t), \Omega, b) = \deg(H(\cdot, 0), \Omega, b).$$

Preuve: *Vérifions tout d'abord qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $|t_1 - t_2| \leq \delta$ alors*

$$\deg(H(\cdot, t_1), \Omega, b) = \deg(H(\cdot, t_2), \Omega, b).$$

En effet soit $\varepsilon = \frac{1}{4} dist(b, H(\partial\Omega \times [0,1]))$, comme $H(\cdot, \cdot)$ est uniformément continue sur le compact $\overline{\Omega} \times [0,1]$, alors il existe $\delta > 0$ tel que si $|t_1 - t_2| \leq \delta$, pour tout $x \in \overline{\Omega}$ on ait

$$|H(x, t_1) - H(x, t_2)| < \varepsilon.$$

Par conséquent, d'aprés la proposition on a

$$\deg(H(\cdot, t_1), \Omega, b) = \deg(H(\cdot, t_2), \Omega, b)$$

pour tout, $t \in [0,1]$ tels que $|t_1 - t_2| \leq \delta$. On déduit le résultat d'invariance par homotopie en recouvrant le compact $[0,1]$ par des intervalles de longueur δ. ■

Proposition 2.8 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et deux fonctions $f, g \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. On suppose que $f = g$ sur $\partial\Omega$ et que $b \notin f(\partial\Omega)$. Alors on a*

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(g, \Omega, b).$$

Preuve: *Il suffit d'utiliser l'invariance par homotopie du degré topologique, en considérant l'homotopie*

$$H(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x).$$

pour tout $t \in [0,1]$ on a que

$$\deg(H(\cdot,t), \Omega, b) = \deg(H(\cdot,0), \Omega, b)$$

et le résultat s'en suit. Pour $t = 1$

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(g, \Omega, b).$$

■

Lemme 2.2 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. On désigne par*

$$S = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$$

l'ensemble des points singuliers de f et on suppose que $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$. Alors on a

$$\deg(f, \Omega, b) = \sum_{x \in f^{-1}(b)} sgn(J_f(x)) \in \mathbb{Z}.$$

Preuve: *Dans le cas où $f^{-1}(\{b\}) = \varnothing$ on a rien à montrer le degré est nul, sinon supposons que $f^{-1}(\{b\}) \neq \varnothing$, on a que $f^{-1}(\{b\}) = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ pour $m \geq 1$ fixé*

Soit $r > 0$ assez petit pour que

$$B(b,r) \cap (f(\partial\Omega) \cup f(S)) = \varnothing.$$

On sait que pour $1 \leq i \leq m$, il existe un voisinage V_i de x_i tel que f soit un difféomorphisme de V_i sur $B(b,r)$ et que $f^{-1}(B(b,r)) = \bigcup_{1\leq i\leq m_i} V$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < \min(r, dist(b, f(\partial\Omega) \cup f(S))),$$

et prenons une fonction $\varphi \in C(]0,\infty[,\mathbb{R})$ telle que $supp(\varphi) \subset]0,\varepsilon[$, et $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|)dx = 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\deg(f,\Omega,b) &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|f(x)-b|)J_f(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int_{V_i} \varphi(|f(x)-b|)J_f(x)dx.
\end{aligned}$$

Si l'on pose $y = f(x) - b$, puisque $J_f(x)$ ne s'annule pas sur V_i, on a

$$dy = |J_f(x)|\, dx = sgn(J_f(x_i))J_f(x)dx,$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_{V_i} \varphi(|f(x)-b|)J_f(x)dx &= sgn(J_f(x_i)) \int_{B(0,r)} \varphi(|y|)dy \\
&= sgn(J_f(x_i)).
\end{aligned}$$

D'où

$$\deg(f,\Omega,b) = \sum_{x\in f^{-1}(b)} sgn(J_f(x))$$

■

Lemme 2.3 *(Sard) Soient Ω un ouvert borné et $f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ et*

$$S = \{x \in \Omega, \qquad J_f(x) = 0\},$$

l'ensemble des points singuliers de f. Alors $f(S)$ est de mesure nulle.

Preuve: *Considérons Ω comme étant un cube de coté a et $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. Subdivisons Ω en k^n cube C_i $(i = 1, ..., k^n)$ de coté $\frac{a}{k}$ d'où $\sqrt{N}\frac{a}{k}$ sera donc le diamétre de chaque sous-cube C_i. Si i est tel que $S \cap C_i \neq \varnothing$ alors il existe un $x \in S \cap C_i$ et $y \in C_i$. Comme $J_f(x) = 0$, cela implique que $f'(x)(\mathbb{R}^N)$ est contenu dans un hyperplan de $\mathbb{R}^N$ notons le H_x. L'application*

$$x \to f'(x),$$

est uniformément continue i.e

$$\forall\ x, y \in \Omega \qquad \|x - y\| < \alpha \Rightarrow \left\|f'(x) - f'(y)\right\| < \varepsilon$$

En appliquant le théorème des accroissement finis à la fonction

$$z \to f(z) - f'(x)z$$

on obtient que

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x) - f'(y - x)| &\leq |y - x|\, \varepsilon(|y - x|) \\ &\leq \tfrac{a\sqrt{N}}{k} \varepsilon(|y - x|)\ . \end{aligned}$$

Ou encore

$$dist(f(y), f(x) + H_x) \leq \frac{a\sqrt{N}}{k} \varepsilon(\frac{a\sqrt{N}}{k})$$

Par ailleurs on pose

$$L = \max_{x \in \overline{\Omega}} \left\|f'(x)\right\|$$

et sachant que l'on peut écrire

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'(x + t(y - x))(y - x)dt.$$

D'où

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |y - x| \sup_{0 \leq t \leq 1} |f'(x + t(y - x))| \\ &\leq L.\tfrac{a\sqrt{N}}{k}. \end{aligned}$$

Ce qui, finalement implique que si $C_i \cap S \neq \varnothing$, alors $f(C_i)$ est contenu dans un pavé d'épaisseur $2\varepsilon(\frac{a\sqrt{N}}{k})^2$ et dont la base a des cotés de longueur $\frac{2La\sqrt{N}}{k}$, on en déduit l'estimation suivante

$$mes(f(C_i)) \leq 2\varepsilon(\frac{a\sqrt{N}}{k})^2(2L\frac{a\sqrt{N}}{k})^{N-1}$$

et comme il y a k^N cube C_i, on en déduit que pour tout $k \geq 1$ on a

$$mes(f(S)) \leq 2^N L^{N-1}(a\sqrt{N})^N \varepsilon(\frac{a\sqrt{N}}{k})$$

maintenant si l'on fait tendre $k \to \infty$, et comme le nombre de subdivisions est quelconque, ceci donne que

$$mes(f(S)) = 0.$$

■

2.4 *Applications*

Proposition 2.9 *(Non rétraction de la boule) Soient $B = B(0,1)$ la boule unité ouverte et S^{N-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^N$. Il n'existe pas de fonction continue $\varphi : \overline{\Omega} \to S^{N-1}$ telle que $\varphi \mid_{S^{N-1}} = I$.*

Preuve: *Si une telle fonction existait on aurait*

$$\deg(\varphi, \Omega, 0) = \deg(I, \Omega, 0) = 1$$

en d'autres termes il existe un $x \in B$ tel que $\varphi(x) = 0$, ce qui contredit notre hypothèse selon que $\varphi(x)$ appartient à la sphère S^{N-1}. ■

Théorème 2.1 *(point fixe de Brouwer) Soit $f : \overline{B}(0,1) \to \overline{B}(0,1)$ une application continue. Alors f admet un point fixe dans $\overline{B}(0,1)$.*

Preuve: *S'il existe un $x \in S^{N-1}$ tel que $f(x) = x$, le résultat est vrai, sinon pour tout $x \in S^{N-1}$ on aurait $x - f(x) \neq 0$. Introduisons alors l'homotopie $H(x,t) = x - tf(x)$ et soit*

$B = B(0,1)$. On va vérifier que pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $x \in S^{N-1}$ on a

$$x - tf(x) \neq 0.$$

En effet on le sait déja pour $t = 1$. S'il existait $x \in S^{N-1}$ et $0 \leq t \leq 1$ tels que $x - tf(x) = 0$, on aurait alors $t\,|f(x)| = 1$, ce qui n'est pas possible car $|f(x)| \leq 1$ et $t < 1$. Par conséquent $\deg(H(\cdot,t), B, 0)$ est défini pour tout $t \in [0,1]$ et

$$\begin{aligned} \deg(H(\cdot,1), B, 0) &= \deg(H(\cdot,0), B, 0) \\ &= \deg(I, B, 0) = 1. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition on conclut qu'il existe $x \in B$ tel que $x - f(x) = 0$. ∎

Proposition 2.10 *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue telle que $\frac{f(x)\cdot x}{|x|} \to \infty$ lorsque $|x| \to \infty$, alors f est surjective sur $\mathbb{R}^N$.*

Preuve: *soit $y \in \mathbb{R}^N$ et considérons l'homotopie suivante*

$$H(t,x) = tf(x) + (1-t)x$$

l'homotopie naturelle entre f et Id. prenons un $R > |y|$ assez grand et pour tout $t \in [0,1]$ on a $H(t,x) = y$ n'a pas de solution $x \in \partial B(0,R)$, ceci va nous permettre de conclure grace a l'invariance par homotopie et la normalisation du degré que

$$\deg(f, B(0,R), y) = \deg(Id, B(0,R), y) = 1$$

d'où la surjectivité de la fonction f il existe au moins un $x \in B(0,R)$ tel que $f(x) = y$.
Soit alors un $x \in \partial B(0,R)$ et $t \in [0,1]$ tel que $H(t,x) = y$ on a que

$$x \cdot y = x \cdot H(t,x) = tx \cdot f(x) + (1-t)\,|x|^2\,,$$

ce qui donne

$$|y| \geq \left(t\frac{f(x)\cdot x}{|x|} + (1-t)\,|x| \right) = \left(t\frac{f(x)\cdot x}{|x|} + (1-t)R \right).$$

Si l'on prend $R > |y| + 1$ assez grand de sorte que $\frac{f(x)\cdot x}{|x|} > |y| + 1$ lorsque $|x| \geq R$. On déduit de ce qui précède que

$$|y| \geq t(|y| + 1) + (1 - t)(|y| + 1) = |y| + 1,$$

contradiction, avec ce choix de R, $H(t, x) = y$ ne peut avoir une solution $x \in \partial B(0, R)$ et ceci pour tout $t \in [0, 1]$ ■

Théorème 2.2 *(Rouché) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions holomorphes sur un voisinage de $\overline{\Omega}$. On suppose que f n'a aucun zéro sur $\partial\Omega$. Si $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ $\forall z \in \partial\Omega$, alors f et g ont le même nombre de zéros dans Ω avec leur multipilicité.*

Pour la preuve de ce théorème on a besoin du lemme suivant

Lemme 2.4 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$, qui ne s'annule pas sur $\partial\Omega$. Alors $\deg(f, \Omega, 0)$ est égal au nombre de zéros de f dans Ω, comptés avec leur multiplicité.*

Preuve: *Si la fonction f est constante il n'y a rien à démontrer f, car si f est une constante non nulle, alors elle n'a pas de zéros, donc $\deg(f, \Omega, 0) = 0$ et l'on a le résultat du lemme.*

Supposons maitenant que f est une fonction non constante avec un nombre fini de zéros dans Ω.

Soit $\{z_1, ..., z_k\}$ les zéros de f et $(n_1, ..., n_k)$ leur multipilicités respectives.
Fixons $\varepsilon > 0$ tel que toutes les boules $(B(z_i, \varepsilon))_{i \in [1,k]}$ sont disjointes et incluses dans Ω, alors comme f n'a aucun zéro en dehors de l'union de ses boules, d'aprés la propriétés d'additivité du degré topologique on obtient que

$$\deg(f, \Omega, 0) = \sum_{i=1}^{k} \deg(f, B(z_i, \varepsilon), 0).$$

Maintenant il reste à montrer que pour ε assez petit on a

$$\deg(f, B(z_i, \varepsilon), 0) = n_i.$$

Par translation on peut se ramener à étudier le degré sur $B(0, \varepsilon)$ on peut supposer dès le début *que* $z_i = 0$ *et notons* $n = n_i$.

On peut écrire f *sous la forme*

$$f(z) = az^n\,(1 + w(z)) \text{ ou } a \neq 0 \text{ et } w(z) \to 0 \text{ lorsque } z \to 0,$$

on peut supposer que $|w(z)| < 1$ *pour* $|z| = \varepsilon$.

Considérons l'homotopie suivante

$$H(t, z) = az^n(1 + tw(z))$$

qui n'a pas de zéro sur $[0, 1] \times \partial B(0, \varepsilon)$, *l'invariance du degré donne que*

$$\deg(f, B(0, \varepsilon), 0) = \deg(az^n, B(0, \varepsilon), 0)$$

maintenant, il reste à calculer le degré $\deg(az^n, B(0, \varepsilon), 0)$, *pour cela on réalise une homotopie entre* az^n *et* z^n *toujours par la propriété d'invariance on obtient que*

$$\deg(az^n, B(0, \varepsilon), 0) = \deg(z^n, B(0, \varepsilon), 0)$$

et que

$$\deg(z^n, B(0, \varepsilon), 0) = \deg(z^n, B(0, 1), 0) = n$$

d'où

$$\deg(f, B\,(z_i, \varepsilon)\,, 0) = n_i.$$

■

Preuve: *(Théorème de Rouché)*

En montrant que les deux degrés sont égaux (*i.e* : $\deg(f, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0)$). *L'idée est de construire une homotopie entre les deux fonctions* f *et* g *qui ne s'annule pas sur* $\partial\Omega$.
En effet pour $z \in \partial\Omega$ *on a que*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|\,.$$

D'où

$$H(t,z) = (1-t)f(z) + tg(z) = f(z) + t(g(z) - f(z)) \neq 0.$$

On conclut que

$$\deg(f, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0).$$

■

Comme une application intéréssante du degé de Brouwer, on peut répondre à la question suivante:

A chaque instant, existe t'il deux points sur la terre qui ont exactement la même température et la même pression ?

La réponse sera une conséquence du corollaire suivant

Corollaire 2.4 *Soit $N > p$ deux entiers et $f : S^{N-1} \to \mathbb{R}^p$ continue alors il existe un $x \in S^{N-1}$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Preuve: *La preuve est basée sur le théorème de Borusk qui dit que pour tout Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ contenant 0 symmétrique par rapport à l'origine et $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ une fonction impaire telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$ alors $\deg(f, \Omega, 0)$ est impair et non nul.*
Soit $g : \overline{B}(0,1) \to \mathbb{R}^p$ une extension continue et impaire de $x \in S^{N-1} \to f(x) - f(-x)$, en identifiant $\mathbb{R}^p$ à $\mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^N$ où l'ensemble $\{0\}$ représente $N-p$ coordonnées du cout on peut supposer que g est à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Si $0 \notin g(S^{N-1})$ alors le fait que g est impaire par le théorème de Borusk on a que degré est impaire en particulier qu'il est non nul, on en déduit que tout un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^N$ est dans l'image de g ce qui est une contradiction puisque l'image de g est contenue dans $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ qui ne peut contenir un voisinage de 0 de $\mathbb{R}^N$.On a donc que $0 \in g(S^{N-1})$ qui dit que il existe un x telle que $f(x) = f(-x)$. ■

Alors pour répondre à la question, il suffit de prendre $N = 3$, $p = 2$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définit par $f(x) = (T(x), P(x))$ où T est la température et P est la pression dans le point x

Chapitre 3

Degré topologique de Leray-Schauder

3.1 *Introduction*

Nous allons maintenant présenter un degré ayant le même rôle que le degré de Brouwer, mais en dimension infinie, c'est à dire un outil qui permet d'assurer qu'une équation de la forme $f(x) = y$, où f est continue d'un Banach E dans lui-même, ait au moins une solution x. On se rend cependant vite compte, sur un exemple, qu'il n'y a aucun espoir en dimension infinie de construire un degré topologique pour toute application continue (et même linéaire) en voici la preuve.

Soient $\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace des suites $x = (x_n)_{n\geq 0}$ de carré sommable, et K la boule unité fermée de $\ell^2(\mathbb{N})$. On désigne par $|x|$ la norme de x

$$|x|^2 := \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2.$$

Si $x \in K$ on définit Tx par

$$Tx = (\sqrt{1 - |x|^2}, x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ...).$$

On vérifie sans peine que T est continue, que $Tx \in K$ et que plus précisément $|Tx| = 1$. Cependant T ne possède aucun point fixe dans K, car si $Tx = x$, on doit avoir pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} = x_n$ et $x_0 = \sqrt{1 - |x|^2}$. Or $|x| = |Tx| = 1$ et par conséquent $x_0 = 0$ d'où $x = 0$, *ce qui contredit* $|x| = 1$.

Le degré topologique en dimension infinie ne pourra donc pas être défini pour toutes les applications continues d'un Banach E dans lui-même, il faut restreindre les fonctions que l'on considère. Il existe plusieurs degrés en dimension infinie, qui ont justement pour principale différence la classe de fonctions à laquelle chacun s'applique; le degré que nous allons étudier ici, appelé degré de Leray-Schauder, est construit sur les applications qui diffèrent de l'identité par une application compacte.

On va définir un degré topologique pour des applications qui sont des perturbations compactes de l'identité du type $I - T$ *où* T *est compact et* I *désigne l'application identité de* X.

3.2 *Construction du degré*

Lemme 3.1 *Soit* Ω *un ouvert borné de* X. *Si* $T : \overline{\Omega} \to X$ *est un opérateur compact et n'a pas de point fixe sur* $\partial\Omega$, *alors il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que pour tout* $u \in \partial\Omega$ *on ait*

$$\|u - Tu\| \geq \varepsilon.$$

Preuve: *Si ce n'est pas le cas il existerait une suite* $(u_n)_n$ *de* $\partial\Omega$ *telle que*

$$\|u_n - Tu_n\| \to 0.$$

Or T *étant compact et* $\overline{\Omega}$ *borné, on pourrait trouver une sous suite* $(Tu_{n_i})_i$ *et* $y \in X$ *tels que* $Tu_{n_i} \to y$ *lorsque* $i \to \infty$. *On en déduit que* $u_{n_i} \to y$ *et par conséquent,* T *étant continu on a* $y - Ty = 0$, *ce qui dit que* y *est un point fixe de* T. *Comme* $y \in \partial\Omega$, *celà contredit notre hypothèse sur* T. ■

Lemme 3.2 *Soit* Ω *un ouvert borné de* X. *Si* $T : \overline{\Omega} \to X$ *est un opérateur compact et n'a pas de point fixe sur* $\partial\Omega$. *Alors si* $\varepsilon > 0$ *est tel que* $\|u - Tu\| \geq 4\varepsilon$ *pour tout* $u \in \partial\Omega$, *il existe un sous espace vectoriel de dimension finie* E_ε *de* X *et un opérateur* $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E_\varepsilon$ *tels que*

$$\forall\, u \in \overline{\Omega}, \quad \|T_\varepsilon - Tu\| \leq \varepsilon$$
$$\forall\, u \in \partial\Omega, \quad \|u - T_\varepsilon u\| \geq 3\varepsilon.$$

Preuve: *On sait d'aprés le lemme précédent que*

$$\forall\ u \in \partial\Omega, \qquad \|u - Tu\| \geq 4\varepsilon.$$

Comme $T(\overline{\Omega})$ *est relativement compact dans* X*, il existe des points* $(x_i)_{i\leq n}$ *dans* $T(\overline{\Omega})$ *tels que*

$$T(\overline{\Omega}) \subset \bigcup\nolimits_{1\leq i\leq n} B(x_i, \varepsilon).$$

Posons pour

$$x \in X, \lambda_i(x) = (\varepsilon - \|x - x_i\|),$$

puis pour $x \in T(\overline{\Omega})$

$$j_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i(x)}$$

Enfin en introduisant l'espace vectoriel engendré par $(x_i)_{i\leq n}$ *c'est à dire l'espace* $E_\varepsilon = \mathbb{R}\{x_1, ..., x_n\}$ *et pour* $u \in \overline{\Omega}$ *l'application*

$$T_\varepsilon(u) = j_\varepsilon(Tu),$$

où $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to X$ *est continu et* $T_\varepsilon(\overline{\Omega}) \subset E_\varepsilon$*. Comme par ailleurs, pour tout* $x \in T(\overline{\Omega})$*, on a*

$$\lambda_i(x)\|x - x_i\| \leq \lambda_i(x)\varepsilon$$

on en conclut sans difficulté que $\|x - j_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$ *pour de tels* x*. Cela implique que si* $u \in \overline{\Omega}$*, alors*

$$\|T_\varepsilon(u) - T(u)\| \leq \varepsilon$$

D'autre part si $u \in \partial\Omega$ *on a*

$$\begin{aligned} \|u - T_\varepsilon u\| &= \|u - Tu + Tu - T_\varepsilon u\| \\ &\geq \|u - Tu\| + \|Tu - T_\varepsilon u\| \\ &\geq 3\varepsilon > 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que T_ε *répond aux exigences du lemme.* ∎

Lemme 3.3 *Soit Ω un ouvert borné de X. Si $T : \overline{\Omega} \to X$ est un opérateur compact et n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$. Alors si $\varepsilon > 0$ est tel que $\|u - Tu\| \geq 4\varepsilon$ pour tout $u \in \partial\Omega$. On suppose que $T_{1\varepsilon}$ et $T_{2\varepsilon}$ sont deux approximations de T, telles que pour $i = 1, 2$ on ait $T_{i\varepsilon}(\Omega) \subset E_\varepsilon$, où E_ε est un sous espace de dimension finie de X, et de plus $\|T_{i\varepsilon}u - Tu\| \leq \varepsilon$ pour $u \in \Omega$, et $\|u - T_{i\varepsilon}u\| \geq 3\varepsilon$ pour $u \in \partial\Omega$. Alors si F est un sous espace vectoriel de dimension finie de X contenant E_ε tel que $\Omega_F = \Omega \cap F \neq \varnothing$, on a*

$$\deg(I - T_{1\varepsilon}, \Omega_F, 0) = \deg(I - T_{2\varepsilon}, \Omega_F, 0).$$

Preuve: *Soient $\partial\Omega_F = \partial\Omega \cap F$ le bord de Ω_F.Comme $T_{i\varepsilon}$ n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$ ceci dit que le degré topologique est bien défini en 0 de l'opérateur $I - T_{i\varepsilon}$. Pour $t \in [0, 1]$ soit*

$$H(u, t) = tT_{1\varepsilon}(u) + (1 - t)T_{2\varepsilon}(u).$$

On ajoute et on retranche la quantité $(1 - t)T(u)$ et on obtient que pour tous $t \in [0, 1]$ $u \in \overline{\Omega}$ et en particulier pour $u \in \Omega_F$ on a

$$\|H(u, t) - Tu\| \leq \varepsilon$$

d'autre part pour $u \in \partial\Omega$ en ajoutant et retranchant aussi la quantité $T(u)$ on a

$$\|u - H(u, t)\| \geq 3\varepsilon.$$

Par conséquent $H \in C(\Omega_F \times [0, 1], F)$ est une homotopie admissible pour appliquer la propriété d'invariance par homotopie du degré topologique de Brouwer, ce qui donne

$$\deg(I - H(\cdot, 0), \Omega_F, 0) = \deg(I - H(\cdot, 1), \Omega_F, 0)$$

D'où

$$\deg(I - T_{1\varepsilon}, \Omega_F, 0) = \deg(I - T_{2\varepsilon}, \Omega_F, 0).$$

■

Dans ce lemme on va voir comment peut on lier deux degrés topologiques de dimensions *différents contrairement aux précédent qui étaient de même dimensions*

Lemme 3.4 *Soient E_n, E_p deux sous espaces de dimension finie et $\omega \subset E_n \times E_p$ un ouvert borné. On identifie $E_n \times \{0\}$ à E_n et on suppose que*

$$\omega_n = \omega \cap (E_n \times \{0\}) \neq \varnothing.$$

Soient $\varphi \in C(\overline{\omega}, E_n)$ et $f(x,y) = (x - \varphi(x,y), y)$ pour $(x,y) \in E_n \times E_p$. On suppose que pour tout x tel que $(x,0) \in \partial\omega$, on a $\varphi(x,0) \neq (x,0)$, et on considère la fonction $f_0(x) = x - \varphi(x,0)$ définie sur $\overline{\omega_n}$. Alors en notant $\deg_n$, $\deg_{n+p}$ les degrés topologiques dans E_n et $E_{n+p} = E_n \times E_p$ respectivement on a

$$\deg_{n+p}(f, \omega, 0) = \deg_n(f_0, \omega_n, 0).$$

3.3 *Définition du degré de Leray-Schauder*

Définition 3.1 *Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert borné de X, $T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$. Alors pour $\varepsilon > 0$, et $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E_\varepsilon$ étant donnés par le lemme on considère F, un sous espace vectoriel de dimension finie contenant E_ε et tel que $\Omega_F = \Omega \cap F \neq \varnothing$. On définit le degré topologique de Leray-Schauder par*

$$\deg(I - T, \Omega, 0) = \deg_F(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F).$$

Cette définition ne dépend que de T et de Ω. Si $b \in X$ est tel que $b \notin (I - T)(\partial\Omega)$, le degré de $I - T$ dans Ω par rapport à la cible b est défini comme étant

$$\deg(I - T, \Omega, b) = \deg(I - T - b, \Omega, 0).$$

Preuve: *De ce qui précède depuis les propriétés on a que*

$$\forall\ u \in \overline{\Omega}, \quad \|Tu - T_\varepsilon u\| \leq \varepsilon$$
$$\forall\ u \in \partial\Omega, \quad \|u - T_\varepsilon u\| \geq 3\varepsilon.$$

Et par conséquent si $\Omega_F \neq \varnothing$, d'aprés le lemme le degré

$$\deg(I_F - T_F, \Omega_F, 0_F)$$

est bien défini. Afin de montrer que ce degré ne dépend que de Ω et T, on va considérer deux familles pour $i = 1, 2$ $\varepsilon_i > 0, E_{i\varepsilon_i}, T_{i\varepsilon_i}$ et F_i comme ci-dessus et on va montrer que le degré est le même. Pour cela on appliquera le lemme (3.4) dans un espace de dimension finie contenant F_1 et F_2 soient

$$F = F_1 \oplus F_2, \qquad \Omega_F = \Omega \cap F.$$

Alors en désignant par $\deg_F$ le degré topologique de Brouwer dans F, on sait d'aprés le lemme (3.3) que

$$\deg_F(I_F - T_{1\varepsilon_1}, \Omega_F, 0_F) = \deg_F(I_F - T_{2\varepsilon_2}, \Omega_F, 0_F).$$

Par ailleurs par le lemme (3.4) on a

$$\deg_F(I_F - T_{i\varepsilon_i}, \Omega_F, 0_F) = \deg_{F_i}(I_{F_i} - T_{i\varepsilon_i}, \Omega_{F_i}, 0_{F_i}).$$

Maintenant en combinant $i = 1$ et $i = 2$ on obtient que

$$\deg_{F_1}(I_{F_1} - T_{i\varepsilon_1}, \Omega_{F_1}, 0_{F_1}) = \deg_{F_2}(I_{F_2} - T_{2\varepsilon_2}, \Omega_{F_2}, 0_{F_2}).$$

■

3.4 *Propriétés du degré de Leray-Schauder*

Proposition 3.1 *(additivité). Si Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts bornés disjoints et $T : \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \to X$ est un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, alors*

$$\deg(I - T, \Omega_1 \cup \Omega_2, 0) = \deg(I - T, \Omega_1, 0) + \deg(I - T, \Omega_2, 0).$$

Proposition 3.2 *Si* $b \in X$ *est tel que pour tout* $u \in \overline{\Omega}$ *on a*

$$u - Tu \neq b$$

alors

$$\deg(I - T, \Omega, b) = 0.$$

Proposition 3.3 *Si* $b \in X$ *est tel que pour tout* $u \in \partial\Omega$ *on a* $u - Tu \neq b$ *et*

$$\deg(I - T, \Omega, b) \neq 0$$

alors il existe $u \in \Omega$ *tel que*

$$u - Tu = b.$$

Proposition 3.4 *Soient* T_1, T_2 *des applications compactes de* $\overline{\Omega}$ *dans* X *et* $b \in X$ *tel que*

$$4\varepsilon = dist(b, T_1(\partial\Omega) \cup T_2(\partial\Omega)) > 0$$

alors si $\sup\limits_{u \in \overline{\Omega}} \|T_1 u - T_2 u\| \leq \varepsilon$, *on a*

$$\deg(I - T_1, \Omega, b) = \deg(I - T_2, \Omega, b).$$

Corollaire 3.1 *Soient* $b \in X$ *et* $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X$ *une application compacte, telle que pour tout* $(u,t) \in \partial\Omega \times [0,1]$ *on ait* $u - H(u,t) \neq b$. *Alors le degré* $\deg(I - H(\cdot, t), \Omega, b)$ *est constant pour* $t \in [0,1]$

$$\deg(I - H(\cdot, t), \Omega, b) = \deg(I - H(\cdot, 0), \Omega, b).$$

Corollaire 3.2 *Soient* $b, b' \in X$ *tels que* $b, b' \notin (I - T)(\partial\Omega)$. *Alors si* b *et* b' *appartiennent à la même composante connexe de* $X \diagdown (I - T)(\partial\Omega)$, *on a*

$$\deg(I - T, \Omega, b) = \deg(I - T, \Omega, b').$$

3.5 *Applications*

Comme première application on a le théorème du point fixe suivant qui généralise le théorème du point fixe de Brouwer.

Théorème 3.1 *(Point fixe de Schauder) Soit* $\overline{B}$ *la boule unité fermée d'un Banach* E *et* $f : \overline{B} \to \overline{B}$ *compacte, alors* f *admet un point fixe.*

Preuve: *S'il existe un point fixe sur* ∂B*,alors il n'y a rien à prouver. On peut supposer que* $f(x) \neq x$ *pour tout* $x \in \partial B$*. puisque* f *n'a pas de point fixe sur le bord de* B *on a bien que le degré est bien défini, nous allons montrer que* $\deg(I - f, B, 0) = 1$ *ce qui prouvera que* $I - f$ *a au moins un zéro dans* B *et que* f *a donc au moins un point fixe dans cet ensemble.*
Soit alors l'homotopie

$$H(t, x) = x - tf(x)$$

compacte et continue de $[0, 1] \times \overline{B}$*, si pour un* $t \in [0, 1]$ *et un* $x \in \partial B$*, on a* $x - tf(x) = 0$ *alors* $x = tf(x)$ *comme* $|x| = 1$ *et* $|f(x)| \leq 1$ *ceci impose que* $t = 1$ *et* $x = f(x)$ *or qu'on a supposer que* $f(x) \neq x$ *sur le bord, on peut donc appliquer l'invariance de l'homotopie que*

$$\deg(H(\cdot, 1), B, 0) = \deg(H(\cdot, 0), B, 0) = \deg(I, B, 0) = 1$$

d'où que le degré est non nul et la présence d'un $x \in B$ *tel que* $f(x) = x$ ■

Notons que le théorème du point fixe de Schauder peut être formuler de la manière équivalente suivante

Théorème 3.2 *Soit* $f : E \to E$ *une application compacte. On suppose qu'il existe une constante universelle* M *telle que si* u *est la solution du problème*

$$u = tf(u) \text{ avec } t \in [0, 1],$$

on a $\|u\|_E \leq M$*. Alors l'application* f *admet un point fixe*

En géneral, on appelle l'estimation précédente "estimation a priori" pour le problème $f(x) = x$

Dans les applications, on utilise plus souvent le Théorème 3.2 que le Théorème 3.1.

On donne maintenat une application trés intéréssante du degré de Leray-Schauder concernant l'existence d'une solution pour une EDP non linéaire.

Soit le problème elliptique suivant

$$Au = g(u) + h \quad \textit{dans } \Omega \tag{3.1}$$

où Ω *un ouvert borné de* $I\!R^N$ *et*

$$\begin{cases} Au = -\Delta u \\ D(A) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega);\ Au \in L^2(\Omega) \right\}, \end{cases} \tag{3.2}$$

définit un opérateur d'inverse compact de $L^2(\Omega)$*; en particulier on suppose que le spectre de* A *est formé d'une suite* $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ *telle que* $|\lambda_k| \to \infty$ *avec* $\lambda_1 > 0$.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifit*

$$g \in C(\mathbb{R}), \qquad \lim_{|s|\to\infty} \frac{g(s)}{s} = \lambda, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Alors, on a le théorème d'existence suivant.

Théorème 3.3 *Soit l'opérateur* A *étant donné par (3.2) et* g *vérifiant (3.3), Alors si* $\lambda \notin \{\lambda_k, k \geq 1\}$, *pour tout* $h \in L^2(\Omega)$ *il existe au moins une fonction* $u \in D(A)$ *telle que*

$$Au = g(u) + h.$$

Preuve: *Sans perte de généralité on peut supposer que* $g(0) = 0$ *car sinon on peut l'écrire*

$$Au = g(u) - g(0) + (h + g(0))$$

avec $G(u) = g(u) - g(0)$ *et* $G(0) = 0$ *et* $H = h + g(0)$*. Donc on suppose que* $g(0) = 0$.

Notre fonction g *a bien un comportement linéaire à l'infini, donc, il existe une constante* $C > 0$ *tel que* $|g(s)| \leq C(1 + |s|)$ *pour tout* $s \in I\!R$.

Par conséquence en déduit facilement que l'opérateur $u \to g(u)$ *de* $L^2(\Omega)$ *dans lui même est bien défini et continu.*

Notons aussi que $(-\Delta)^{-1}$ *est un opérateur compact sur* $L^2(\Omega)$*du fait que l'image de* A*,* $D(A)$*, est contenu dans* $H_0^1(\Omega)$*, lequel a une injection compacte dans* $L^2(\Omega)$*, d'aprés le théorème de Rellich-Kondrachov.*

Soit maintenant

$$H(u,t) = A^{-1}(tg(u) + (1-t)\lambda u + h).$$

Pour $0 \leq t \leq 1$*, on a une homotopie compacte de* $L^2(\Omega) \times [0,1] \to L^2(\Omega)$*, or pour la résolution de l'équation (3), il suffit de trouver* $u \in L^2(\Omega)$ *telle que*

$$u = A^{-1}(g(u) + h)$$

ou encore à résoudre

$$u \in L^2(\Omega), \qquad u - H(u,1) = 0. \tag{3.4}$$

Comme $u - H(u,1)$ *est une perturbation compacte de l'identité, si on trouve une boule de centre* 0 *et de rayon* R *de* $L^2(\Omega)$*, telle que pour tout* $t \in [0,1]$ *on ait* $0 \notin H(\partial B(0,R) \times [0,1])$*, d'aprés les résultats précédents on a que*

$$\deg(H(\cdot,t), B(0,R), 0) = \deg(H(\cdot,0), B(0,R), 0),$$

si ce dernier est non nul, on déduit directement que l'équation (3.4) admet au moins une solution

Montrons maintenant qu'il existe une boule $B(0,R)$ *pour* $R > 0$ *tel que*

$$\forall\ (u,t) \in L^2(\Omega) \times [0,1], \qquad u - H(u,t) = 0 \Rightarrow \|u\| < R. \tag{3.5}$$

On va raisonner par l'absurde, supposons

$$\exists\ (u_n,t_n) \in L^2(\Omega) \times [0,1], \qquad u_n - H(u_n,t_n) = 0 \ \text{ et } \alpha_n = \|u_n\| \geq R.$$

On pose $v_n = u_n/\alpha_n$*, alors* v_n *vérifie l'équation*

$$v_n \in D(A), \quad \|v_n\| = 1, \qquad Av_n = t_n \frac{g(\alpha_n v_n)}{\alpha_n} + (1-t_n)\lambda v_n + \frac{h}{\alpha_n}. \tag{3.6}$$

Comme $g(s) \leq C(1+|s|)$, on conclut que le second membre de cette équation est bornée dans $L^2(\Omega)$ indépendamment de n, puisque l'injection de $D(A)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, on peut extraire une sous suite qu'on notera toujours (v_n, t_n), telle que $v_n \to v$ fortement dans $L^2(\Omega)$, $v_n \to v$ p.p sur Ω et $t_n \to t \in [0,1]$, en particulier on notera que $\|v\| = 1$. En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on peut vérifier que

$$\frac{g(\alpha_n v_n)}{\alpha_n} \to \lambda v \qquad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Ainsi, d'aprés (3.6) on a

$$\text{pour } v_n \to v \text{ dans } L^2(\Omega), \qquad Av_n \to \lambda v \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

Comme A est fermé et $v \in D(A)$, on déduit que $Av = \lambda v$.

Donc λ est une valeur propre de A, contradiction avec l'hypothése du théorème. Donc l'estimation (3.5) est vraie est par conséquent le degré topologique est bien défini.

Comme $\deg(H(\cdot,0), B(0,R), 0) = 1 = \deg(H(\cdot,1), B(0,R), 0)$, *on déduit que l'équation* (3) *admet une solution.* ■

Dans le cas où $\lim\limits_{|s|\to\infty} \frac{g_0(s)}{s} = 0$, on a le résulat suivant.

Proposition 3.5 *Soient $(A, D(A))$ un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte sur $L^2(\Omega)$ et $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ la suite de ses valeurs propres. Soit $g_0 \in C(R)$ une fonction bornée telle que $\lim\limits_{|s|\to\infty} \frac{g_0(s)}{s} = 0$.*
On suppose que $\gamma_- \leq g_0 \leq \gamma_+$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ avec

$$\gamma_\mp = \lim_{s\to\mp\infty} g_0(s).$$

Pour $k \geq 1$ fixé, soit $h \in L^2(\Omega)$ tel que l'équation

$$u \in D(A), \qquad Au = \lambda_k u + g_0(u) + h$$

admet une solution, alors pour tout $\varphi \in N(A - \lambda_k I)\setminus\{0\}$ *on a*

$$\delta(h, \varphi) = \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \gamma_+ \varphi^+(x)dx - \int_\Omega \gamma_- \varphi^-(x)dx \geq 0.$$

Inversement, si h *est tel que* $\delta(h, \varphi) > 0$ *pour tout* $\varphi \in N(A - \lambda_k I)\setminus\{0\}$ *, alors l'équation admet au moins une solution.*■

Comme une autre application du degré topologique, on peut traiter les problèmes linéaires avec perte de coercivité. Plus précisement, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + \operatorname{div}(Vu) = f & \text{dans } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

où $V \in (L^\infty(\Omega))^N$. *Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram, on pose*

$$a(u, v) = \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int\limits_\Omega uV \nabla v dx.$$

Il est facile de voir que a *est coèrcive si* $||V||_{L^N} \leq C$. *Alors en général, pour* V *quelconque,* a *n'est pas coercive.*

Pour traiter le cas général, on va voir le problème précédent comme une perturbation du cas classique où $V = 0$ *et on va essayer d'appliquer le degré topologique pour déduire l'existence d'une solution.*

Théorème 3.4 *Sous les hypothèses précédente, le problème* (3.7) *admet une solution unique.*

Pour la preuve on a besoin du principe de Maximum suivant, dont la preuve se trouve dans [7].

Théorème 3.5 ***(Principe de Maximum)*** *Sous les hypothèses précédentes, si* $f = 0$, *alors la seule solution du problème* (3.7) *est* $u \equiv 0$.

Preuve: *(Théorème (3.4)) Par le principe du Maximum du théorème (3.5), on obtient facilement que si la solution existe, elle est unique.* ■

Pour $w \in L^2(\Omega)$*, fixé on définit* u *comme la solution unique du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = f - \operatorname{div}(Vw) \quad \text{dans } \Omega \\ \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On note $u = F(w)$*. Il est clair que* $F : L^2 \to L^2$ *est un opérateur continu et compact.*

La solution du problème (3.7) *est un point fixe de* F*.*

Pour appliquer le théorème du point de fixe de Schauder, on doit montrer que si (u, t) *est une solution de*

$$u = tF(u), t \in [0, 1],$$

alors il existe une constante $M > 0$ *indépendante de* t, u *tel que* $||u||_{L^2} \leq M$*.*

Supposons par l'absurde l'existence

$$\exists t_n \in [0, 1] \text{ tel que } u_n = t_n F(u_n), \qquad \text{et } \|u_n\|_{L^2} \geq n$$

alors

$$F(u_n) = \frac{u_n}{t_n} \Leftrightarrow -\Delta u_n = t_n f - t_n \operatorname{div}(V u_n).$$

On pose $v_n = \frac{u_n}{||u_n||}$*, alors* $||v_n||_{L^2} = 1$ *et* v_n *est la solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta v_n = t_n \frac{f}{\|u_n\|} - t_n \operatorname{div}(V v_n) \qquad \text{sur } \Omega \\ \|v_n\|_{L^2} = 1 \\ v_n = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \; . \end{cases}$$

On utilisant v_n *comme fonction test, et d'aprés les hypothèses sur* V *et* v_n *on obtient que* $||v_n||_{W_0^{1,2}} \leq C$*, alors il existe* $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *tel que* $v_n \rightharpoonup v$ *faiblement dans* $W_0^{1,2}(\Omega)$*.*

Par le Théorème de Rellich-Kondrachov, on déduit que $v_n \to v$ *dans* $L^2(\Omega)$ *et p.p sur* Ω*. Donc* $||v||_{L^2} = 1$*.*

Notons que $t_n \to t \in [0,1]$. *Passons à la limite dans le problème de* v_n, *il résulte que* v *est la solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta v = -t\mathrm{div}(Vv) & \text{sur } \Omega \\ \|v\|_{L^2} = 1 \\ v = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Si $t = 0$, *le problème aura pour seule solution la solution triviale, une contradiction avec le fait que* $\|v\|_{L^2} = 1$.

Si $t \neq 0$, *alors en appliquant le principe du maximum 3.5, on obtient que* $v = 0$, *contradiction.*

Donc $||u||_{L^2} \leq M$ *et par le théorème du point fixe de Schauder on déduit l'existence d'une solution.*

Bibliographie

[1] *H.Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Dunod, 1999*

[2] *Cronin J., Fixed points and topological degree in nonlinear analysis, Mathematical surveys, AMS,1964.*

[3] *Deimling K., Nonlinear functional analysis, Springer (1985).*

[4] *Donal O'regan, Yeol Je Cho,Yu-Qing Chen,Topological degree theory and applications,* Series: Mathematical Analysis and Applications 2006.

[5] *Droniou.J, Degrés topologiques et applications ,2006*

[6] *Droniou J., Non-coercive Linear Elliptic Problems, Potential Anal. 17 (2002), no. 2, 181-203.*

[7] *D.Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer Verlag, Heidelberg, 2000 elliptiques, Springer-Verlag, 1993.*

[8] *O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes,* Springer-Verlag.1993

[9] *Leray J., Lions J.L., Quelques résultats de Visik sur les problemes elliptiques semi-linéaires par les méthodes de Minty et Browder. Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 97-107.*

[10] *Mabel.Cuesta, Analyse fonctionnelle non linéaires et applications en équations différentielles (cours 2009-2010)*

[11] *Mawhin J., Topological degree methods in nonlinear boundary value problems, Conference Board of the Mathematical Sciences (040), AMS, 1979.*