Table des Matières

Notations

E espace de Banach.

$E^{'}$espace dual de E.

$\langle .,. \rangle_{E',E}$ crochet de dualité de $E^{'} \times E$.

$D(A)$ domaine de l'opérateur$A$.

$R(A)$ l'image de l'opérateur$A$.

$\rightarrow$ convergence forte.

$\rightharpoonup$ convergence faible.

$\mid B \mid$=mes(B) : messure de Lebesgue de l'ensemble B.

Ω : ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$\Gamma = \partial\Omega$: frontière de Ω.

$C^k(\Omega)$: l'espace des fonctions k fois continuement différentiables sur Ω $(k \in \mathbb{N})$.

$C^\infty(\Omega) = \underset{k \geq 0}{\cap} C^k(\Omega)$.

$\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω.

$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ intégrable tel que } \int\limits_\Omega |f(x)|\, dx < +\infty \right\}$.

$L^1_{loc}(\Omega)$: l'espace des fonctions localement intégrables sur Ω.

$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\ f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\},\ 1 < p < \infty$.

$L^p(\Omega;\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ t.q. } f \text{ mesurable et } \int\limits_\Omega |f(x)|^p\, dx < +\infty \right\},\ 1 \leq p < +\infty.$

avec $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int\limits_\Omega |f(x)|^p\, dx \right]^{1/p}$.

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } c \text{ tel que } |f(x)| \leq c \ \ p.p \text{ sur } \Omega \}$.

avec $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ c;\ |f(x)| \leq c \ \ p.p \text{ sur } \Omega \}$.

$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = \overline{1, n} \right\}.$

avec $\quad \|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{H^1(\Omega)}} = \left[\int\limits_\Omega \left(v^2 + \sum\limits_{i=1}^n \left(\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \right]^{1/2}.$

$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$, ou γ_0 est l'application trace.

Y : la période de réference définie par: $Y = \prod\limits_{i=1}^n]0, l_i[$ avec $l_i > 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$.

$|Y|$: mesure de Y (mesure de Lebesgue).

$\underline{u}$: un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

$H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

$H_\sharp^1(Y) = \left\{ f \text{ t.q. } f \in H^1(Y) \text{ et } f \text{ est } Y\text{-périodique} \right\}$.

$Du = (\frac{\partial u}{\partial x1}, \frac{\partial u}{\partial x2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$ =grad u avec $u(x) = u(x_1, ..., x_n)$: $\Omega \to \mathbb{R}$.

$div\underline{u}$: la divergence d'un vecteur $\underline{u}$ est $div\underline{u} = \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$.

$M_Y(h)$: La moyenne de la fonction h sur Y est notée par $M_Y(h) = \frac{1}{|Y|} \int\limits_Y h(y)\, dy$.

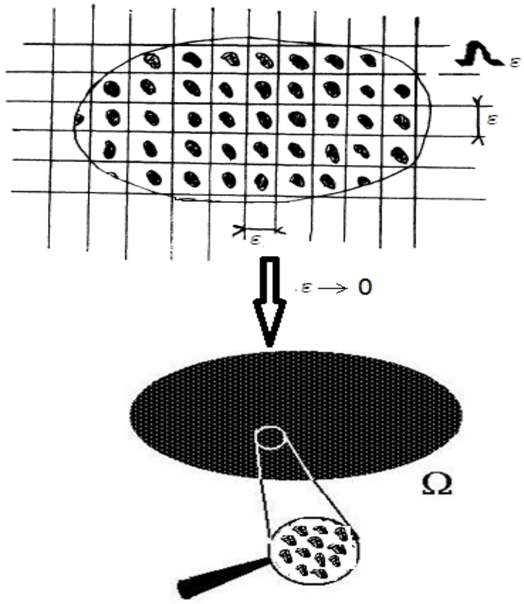
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

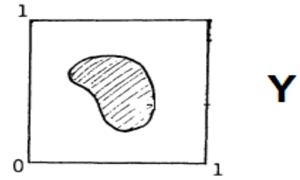
Introduction

L'homogénéisation est une méthode de modélisation de phénomènes physiques où l'hétérogénéité est quasi présente. Cette hétérogénéité est répartie d'une façon périodique. Elle est de taille trés petite. Le modèle homogénéisé est justement obtenu en faisant tendre cette taille vers zéro.

Dans ce travail on s'est intéressé à l'homogénéisation d'une suite d'opérateurs non linéaires monotones de type divergence qui agissent sur l'espace H_0^1.

L'introduction de la théorie de l'homogénéisation savère trés nécessaire quand le numérique est devenu lourd ou pratiquement impossible. L'opérateur $A^h u = -div(a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du))$ à homogénéiser laisse supposer la stricte monotonie et la lipschitz-continuité de a qui est Y-périodique où Y est la période de référence et $\varepsilon_h Y$ l'hétérogénéité en question(voir figure ci-dessous).Le modèle homogénéisé est aussi de type divergence. Il renferme l'opérateur b à la place de a, qui est défini justement localement afin de mettre en évidence les propriétés physiques de l'hétérogénéité. On montre aussi que b satisfait aussi la stricte monotonie comme a. Ceci nous permet de prouver l'unicité de la solution du problème homogénéisé. Un outil mathématique trés important a été introduit pour mettre en évidence l'opérateur homogénéisé, c'est la compacité par compensation. Un résultat de correcteur est introduit à la fin de ce travail pour mieux expliquer le modèle limite.





Ce mémoire est partagé en deux chapitres organisés de la manière suivante :

Le **chapitre I** est essentiellement consacré à rappeler quelques notions de la convergence faible dans les espaces de Banach, les définitions de la monotonie. Un théorème sera abordé, il permettera de déduire l'existence et l'unicité de la solution d'un problème non linéaire sous certaines consitions. Pour plus de détail le lecteur est renvoyé aux références [1, 2, 4, 5,8, 9,10].

Dans le **chapitre II**, intitulé "Homogénéisation des opérateurs monotones", on se donne un problème aux limites non linéaires, défini par un opérateur satisfaisant les conditions de Lipshitz-continuité et de monotonie. Ces dernières nous seront utiles pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de ce genre de problèmes. En suite on essayera de trouver le problème homogénéisé associé. Pour plus de détail le lecteur est renvoyé aux références [3, 4, 6,7,8].

Chapitre 1

Préliminaires

Nous allons introduire des notions, des définitions et des théorèmes qui nous seront utiles dans notre mémoire.

1.1 La convergence faible dans un Banach

Définition 1.1 *Soit E un espace de Banach, E' son dual et $\langle .,. \rangle$ le produit de dualité sur $E' \times E$.*

On dit que la suite (x_h) de E converge faiblement vers $x \in E$ si et seulement si :

$$\langle x', x_h \rangle \to_{h\to+\infty} \langle x', x \rangle, \forall x' \in E' \tag{1.1}$$

et on écrit :

$$x_h \rightharpoonup_{h\to+\infty} x \qquad \textit{dans } E. \tag{1.2}$$

Théorème 1.1 *Soit E un espace de Banach, E' son dual. Soient $(x_h)_h$ et $(x'_h)_h$ deux suites de E dans E' respectivement.*

Si $x_h \rightharpoonup_{h\to+\infty} x$ dans E, alors:

$$\begin{cases} \exists k > 0 \text{ tq. } \forall h \in \mathbb{N} : \quad \| x_h \|_E \leq k \\ \| x \|_E \leq \liminf\limits_{h\to+\infty} \| x_h \|_E \end{cases} \tag{1.3}$$

Si $x_h \rightarrow_{h\rightarrow+\infty} x$ dans E, alors $x_h \rightharpoonup_{h\rightarrow+\infty} x$ dans E.

Définition 1.2 ***(Espace réflexif):*** *Soit un E espace de Banach, soit $E^{'}$ son dual (muni de la norme duale $\| f \|_{E'} = \sup\limits_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E\leq 1}} | \langle f, x\rangle |$).*

Soit E''son bidual (muni de la norme $\| g \|_{E''} = \sup\limits_{\substack{f\in E' \\ \|f\|_{E'}\leq 1}} | \langle g, f\rangle |$).

On a une injection canonique $J : E \rightarrow E''$ définie comme suit : Soit $x \in E$ fixé, l'application $f \rightarrow \langle f, x\rangle$ de E' dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur E' ie.un élément de E''noté Jx. On a donc

$$\langle Jx, f\rangle_{E''E} = \langle f, x\rangle_{E'E} \qquad \forall x \in E,\ \forall f \in E'.$$

Il est clair que J est linéaire et une isométrie ie. $\| Jx \|_{E''} = \| x \|_E$ pour tout $x \in E$;

Définition 1.3 *En effet*

$$\| Jx \|_{E''} = \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|_{E'}\leq 1}} | \langle Jx, f\rangle | = \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|_{E'}\leq 1}} | \langle f, x\rangle | = \| x \|_E$$

Lorsque J est surjective on dit que E est réflexif.

Définition 1.4 ***(Espace séparable) :*** *On dit qu'un espace de Banach E est séparable s'il existe un ensemble au plus dénombrable qui est dense dans E.*

1.2 Les espaces L^p

Définition 1.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

i) Soit $1 \leq p < +\infty$.On note par $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\|f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < +\infty. \tag{1.4}$$

où $\|.\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)}$est une norme sur $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

ii) Soit $p = +\infty$. On note par $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \inf \{\alpha : |f(x)| \leq \alpha \ p.p\ x \in \Omega\} < +\infty. \tag{1.5}$$

où $\|.\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)}$ *est une norme sur* $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

iii) $L^p_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^n) = \left\{ f \ / \ f \in L^p(\Omega');\mathbb{R}^n) \text{ pour tout ensemble ouvert borné } \Omega' \text{ avec } \overline{\Omega'} \subset \Omega \right\}$.

Remarque 1.1 *a) Soit* $1 \leq p \leq +\infty$. *On désigne par* q *l'exposant conjugué de* p *càd :* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

b) Soit $1 \leq p < +\infty$. *Alors l'espace dual de* $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *est* $L^q(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.2 *(Inégalité de Hölder)*

Soient $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq p \leq +\infty$.

Alors $(f,g) \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\int_\Omega |(f(x).g(x))|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^n)} . \tag{1.6}$$

La convergence faible dans les espaces L^p

La notion de convergence faible dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ devient donc comme suit :

- Si $1 \leq p < +\infty$, alors $f_h \rightharpoonup_{h\to+\infty} f$ dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ si :

$$\int_\Omega (f_h(x).g(x))\, dx \to_{h\to+\infty} \int_\Omega f(x).g(x)\, dx \quad \forall g \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^n). \tag{1.7}$$

- Si $p = +\infty$, alors $f_h \rightharpoonup_{h\to+\infty} f$ faib.$*$ dans $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ si :

$$\int_\Omega (f_h(x).g(x))\, dx \to_{h\to+\infty} \int_\Omega f(x).g(x)\, dx \quad \forall g \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \tag{1.8}$$

avec $(.,.)$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.3 *L'espace* $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *est reflexif pour* $1 < p < +\infty$. *De plus* $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *est un espace de Hilbert avec le produit scalaire définit par :*

$$(f,g)_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \int_\Omega f(x).g(x)\, dx. \tag{1.9}$$

1.3 Les espaces de Sobolev

Définition 1.6 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$. *L'espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$

est définie par :

$$W^{1,p}(\Omega) = u \in L^p(\Omega) : Du \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n) \tag{1.10}$$

où $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$ *représente la* $1^{\text{ère}}$ *dérivée au sens des distributions de la fonction réelle* u.

On définit dans cet espace la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|Du\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \tag{1.11}$$

ou parfois sa norme équivalente :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|Du\|^p_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\right)^{1/p} \ \ (si 1 \leq p < +\infty). \tag{1.12}$$

Définition 1.7 *Soit* $1 \leq p < +\infty$. *L'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est défini comme la fermeture de* $C_0^\infty(\Omega)$ *par rapport à la norme de* $W^{1,p}(\Omega)$.

L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est noté par* $W^{-1,q}(\Omega)$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Remarque 1.2 *Si* $p = 2$, *l'espace* $W^{1,2}(\Omega)$ *est noté par* $H^{1,2}(\Omega)$ *ou bien* $H^1(\Omega)$.

Même chose pour $W_0^{1,p}(\Omega)$*; on le note par* $H_0^{1,2}(\Omega)$ *ou bien* $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 1.1 *i) L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$.

ii) L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace réflexif pour* $1 < p < +\infty$.

iii) L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace séparable pour* $1 \leq p < +\infty$.

iv) L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach séparable; il est de plus réflexif pour* $1 < p < +\infty$.

v) Les espaces $H^1(\Omega)$ *et* $H_0^1(\Omega)$ *sont des espaces de Hilbert munis du produit scalaire suivant :*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)} \tag{1.13}$$

Remarque 1.3 *La quantité* $\|Du\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)}$ *définie une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$,*on la note par* $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$, *qui est équivalente à la norme* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. *(pour* $1 \leq p < +\infty$*).*

1.4 Fonctions périodiques rapidement oscillantes

Nous introduisons une classe de fonctions périodiques oscillantes qui jouent un rôle essentiel dans la théorie de l'homogénéisation.

Définition 1.8 *Soit Y un intervalle de $\mathbb{R}^n$ définie par : $Y =]0, l_1[\times]0, l_2[\times ... \times]0, l_n[$ où $l_1, l_{2,...,l_n}$ sont des nombres positifs donnés. On désignera par Y la période de référence. Soit f une fonction définie p.p $x \in \mathbb{R}^n$. La fonction f est dite Y-périodique ssi :*

$$f(x + kl_ie_i) = f(x) \quad p.p\ x \in \mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

où $\{e_i\}_1^n$ est une base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.9 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1(\Omega)$. La valeur moyenne de f sur Ω est le nombre réel donné par : $M_\Omega(f) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(y)dy$*

Théorème 1.4 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et f est Y-périodique dans $L^p(\Omega)$.*

Soit $f_\varepsilon(x) = f(\frac{x}{\varepsilon})$ p.p $x \in \mathbb{R}^n$.

- Si $p < +\infty$ alors on a :

$$f_\varepsilon \rightharpoonup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mid Y \mid} \int_Y f(y)dy \quad \text{dans } L^p(\omega)$$

pour tout sous ensemble ω borné de $\mathbb{R}^n$.

- Si $p = +\infty$, alors $f_\varepsilon \rightharpoonup^*_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y)dy \quad dansL^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Preuve: Voir [10], (chapitre2, théorème2.6). ■

1.5 Extension des fonctions périodiques

Dans cette partie, on établira le prolongement des fonctions périodiques. (Voir [4], page42).

Soit $Y =]0, 1[^n$ le cube unité ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et $1 < p < +\infty$.

Définition 1.10 *$W^{1,p}_{\#}(Y)$ est l'espace des fonctions $u \in W^{1,p}(Y)$, tel que $M_Y(u) = 0$, et qui ont la même trace sur les faces opposées de Y.*

Remarque 1.4 *Dans le cas où $p = 2$, $W^{1,2}_{\#}(Y)$est noté par $H^1_{\#}(Y)$.*

Lemme 1.1 *Soit $u \in W^{1,p}_{\#}(Y)$. Alors u peut être prolongé par périodicité en un élément de $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve: cas $p = 2$

Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

Soit $u \in H^1_{\#}(Y)$, $u^{\#}$ son extension définie par:

$$u^{\#}(x + kl_ie_i) = u(x) \quad \text{p.p } x \in Y \ , \ \ \forall k \in \mathbb{Z}, \ \ \forall i \in \{1, ..., n\}$$

On pose

$$\begin{aligned} x' &= x + kl_ie_i, \ x' \in Y_i \subset \omega \\ &\Rightarrow \ u^{\#} \in L^2(\omega) \text{ et } (\frac{\partial u}{\partial x_i})^{\#} \in L^2(\omega) \end{aligned}$$

Montrons que

$$\frac{\partial u^{\#}}{\partial x_i} = (\frac{\partial u}{\partial x_i})^{\#} \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Soit

$$\varphi \in D'(\omega), supp\varphi \subset \bigcup_{k \in K(\omega)} \overline{Y_k} = I_\omega \qquad (1)$$

où $K(\omega)$ un sous ensemble fini de $\mathbb{Z}^n$et Y_k sont disjoints deux à deux, $Y_k = Y + z(k)$, pour $z(k) = (k_1l_1, ...k_nl_n) \in \mathbb{R}^n$, k$\in \mathbb{Z}^n$.

On a

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial u^{\#}}{\partial x_i}, \varphi \rangle_{D'(\omega),D(\omega)} &= -\int_\omega u^{\#} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= -\sum_{k \in K(\omega)} \int_{Y_k} u^{\#} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \qquad (2) \end{aligned}$$

En utilisant un changement de variable on obtient:

$$\int\limits_{Y_k} u^{\#} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \ = \int\limits_{Y} u(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y - z(k)) dy \qquad (3)$$

Utilisant maintenant la formule de green :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Y} u(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y - z(k)) dy \quad &= \quad -\int\limits_{Y} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi(y - z(k)) dy \ + \int\limits_{\partial Y} u(y) \varphi(y - z(k)) n_i dS_y \\
&= \quad -\int\limits_{Y} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi(y - z(k)) dy \ + \int\limits_{F_i^+ \cup F_i^-} u(y) \varphi(y - z(k)) n_i dS_y \qquad (4)
\end{aligned}$$

Où $F_i^{\pm}$ sont les faces de ∂Y dans la direction x_i.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{F_i^+ \cup F_i^-} u(y) \varphi(y - z(k)) n_i dS_y \quad = \quad & \int\limits_{\prod\limits_{j \neq i}]0, l_j[} [\ u(y) \varphi(y - z(k))]_{y_i = l_i} dy_{1 \ldots} dy_{i-1} dy_{i+1} \ldots dy_n \\
& - \int\limits_{\prod\limits_{j \neq i}]0, l_j[} [\ u(y) \varphi(y - z(k))]_{y_i = 0} dy_{1 \ldots} dy_{i-1} dy_{i+1} \ldots dy_n
\end{aligned}$$

Considérons maintenant la cellule $Y_{k'}$ adjacente à Y_k dans la direction de x_i c'est à dire:

$$Y_{k'} = Y + z(k')$$

Où

$$z(k') = z(k) + l_i e_i = (k_1 l_{1, \ldots,} k_{i-1} l_{i-1}, (k_i + 1) l_i, k_{i+1} l_{i+1}, \ldots k_n l_n$$

Faisant le même calcul, on trouve

$$\begin{aligned}
\int\limits_{F_i^+ \cup F_i^-} u(y) \varphi(y - z(k')) n_i dS_y \quad = \quad & \int\limits_{\prod\limits_{j \neq i}]0, l_j[} [\ u(y) \varphi(y - z(k'))]_{y_i = l_i} dy_{1 \ldots} dy_{i-1} dy_{i+1} \ldots dy_n \\
& - \int\limits_{\prod\limits_{j \neq i}]0, l_j[} [\ u(y) \varphi(y - z(k))]_{y_i = 0} dy_{1 \ldots} dy_{i-1} dy_{i+1} \ldots dy_n
\end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned} \varphi(y-z(k'))/_{y_i=0} &= \varphi(y_1-k_1l_1,...,y_{i-1}-k_{i-1}l_{i-1},-(k_i+1)l_i,y_{i+1}-k_{i+1}l_{i+1},...,y_n-k_nl_n) \\ &= \varphi(y-z(k))/_{y_i=l_i} \end{aligned}$$

De plus u est$Y-$périodique, alors

$$\begin{cases} \quad - \int\limits_{\prod\limits_{j\neq i}]0,l_j[} [\ u(y)\varphi(y-z(k))]_{y_i=0}dy_1...dy_{i-1}dy_{i+1}...dy_n \\ = \quad \int\limits_{\prod\limits_{j\neq i}]0,l_j[} [\ u(y)\varphi(y-z(k'))]_{y_i=l_i}dy_1...dy_{i-1}dy_{i+1}...dy_n \end{cases} \quad (5)$$

En remplaçant (3) et (4) dans (2) on obtient:

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial u^{\#}}{\partial x_i},\varphi\rangle_{D'(\omega),D(\omega)} &= \sum_{k\in K(\omega)} \int\limits_Y \frac{\partial u}{\partial y_i}\varphi(y-z(k))dy \\ &= \int\limits_\omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^{\#}\varphi dx \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial u^{\#}}{\partial x_i} = (\frac{\partial u}{\partial x_i})^{\#} \quad \forall i \in \{1,...,n\}$$

Alors

$$u^{\#} \in H^1(\omega)$$

■

Lemme 1.2 *Soit $g \in L^q(Y,\mathbb{R}^n)$ tel que*

$$\int_Y (g,Dv)dy = 0 \ \ \forall v \in W^{1,p}_{\#}(Y).$$

Alors g peut être prolongée par périodicité en un élément de $L^q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, qu'on note g tel que $-divg = 0$ dans $D'(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 1.3 ***(lemme de compacité par compensation)*** *Soit $1 < p < +\infty$.soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite qui converge faiblement vers u dans $W^{1,p}(Y)$, et soit $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite dans $L^q(\Omega,\mathbb{R}^n)$qui* *converge faiblement vers g dans $L^q(Y, \mathbb{R}^n)$ quand $\varepsilon \to 0$. De plus $(-divg_\varepsilon)$ converge fortement vers $(-divg)$ dans $W^{-1,p}(Y)$. Alors*

$$\int_\Omega (g_\varepsilon, Du_\varepsilon)\varphi dx \to_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega (g, Du)\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Preuve: Il suffit de voir que

$$\int_\Omega (g_\varepsilon, Du_\varepsilon)\varphi dx = \langle -divg_\varepsilon, u_\varepsilon \varphi\rangle - \int_\Omega u_\varepsilon (g_\epsilon, D\varphi)dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

■

1.6 Théorème d'existence

Définition 1.11 *Soit E un espace de Banach et E'son dual.*

Soit $A : D(A) \subset E \to E'$ un opérateur.

1-On dit que A est monotone si

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle \geq 0 \quad \forall u_1, u_2 \in D(A)$$

2-On dit que A est strictement monotone si

$$\forall u_1, u_2 \in D(A) \ : \ \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle = 0 \Rightarrow u_1 = u_2.$$

3-On dit que A est maximal monotone si

$$\forall [x, y] \in E \times E' \text{ tel que } \langle y - Au, x - u\rangle \geq 0 \qquad \forall u \in D(A) \Rightarrow y = Ax.$$

4-On dit que A est hémicontinu si

$$A(u + tv) \rightharpoonup_{t\to 0} Au \quad \text{dans } E' \ \ \forall u \in D(A) \text{et } v \in E \text{ tel que } u + tv \in D(A) \text{ pour } 0 \leq t \leq 1.$$

Théorème 1.5 *Soit E un espace de Banach réflexif et séparable et soit $A : E \to E'(i.e\, D(A) = E)$ un opérateur ayant les propriétés:*

(1) A est borné hémicontinu.

(2) A est monotone.

Alors A est maximal monotone. En plus, si A est coercif, i.e:

(3) $\lim\limits_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle Au,u\rangle_{E'E}}{\|u\|_E} = +\infty$

alors A est surjectif de $E \to E'$*, i e pour* $f \in E'$*, il existe* $u \in E$ *tel que:*

(4) $A(u) = f$

Preuve: *1) Soit* $w_1, ...w_m, ...$*une base de E ; on cherche* $u_m \in [w_1, ...w_m]$*, vérifiant*

$$(5) \qquad (A(u_m), w_j) = (f, w_j) \quad 1 \le j \le m.$$

Pour l'existence de u_m*, en notant que*

$$(i) \qquad (A(u_m), u_m) - (f, u_m) \ge (A(u_m), u_m) - c \parallel u_m \parallel$$

car $\mid (f, u_m) \mid \le \parallel f \parallel_{E'} \parallel u_m \parallel_E$

$\Longrightarrow (f, u_m) \le c \parallel u_m \parallel_E$

$\Longrightarrow -(f, u_m) \ge -c \parallel u_m \parallel_E$

et donc d'aprés (3), $(A(u_m), u_m) - c \parallel u_m \parallel \ge 0$ *pour* $\parallel u_m \parallel = \rho$*,* ρ *assez grand.*

$$(ii) \qquad \textit{La fonction } v \to (A(v), v) \textit{ est continue sur}[w_1, ...w_m]$$

car les hypothèses (1) et (2) entrainent que A est continu de $E \to E'$*.*

Par ailleurs (5) donne

$$(A(u_m), u_m) = (f, u_m) \le \parallel f \parallel_{E'} \parallel u_m \parallel$$

grâce à (3) on a: $\alpha \parallel u_m \parallel^2 \le (A(u_m), u_m) \le c \parallel u_m \parallel$

$$\Rightarrow \alpha \parallel u_m \parallel \le (A(u_m), u_m) \le c$$

$$\Rightarrow \parallel u_m \parallel \le c'$$

Comme A est borné, il en résulte que $\parallel A(u_m) \parallel \le c'$*.*

2) On peut donc extraire une suite u_μ (car E est réfléxif) telle que

$$(6) \qquad \begin{cases} u_\mu \rightharpoonup u & dans E \\ A(u_h) \rightharpoonup \chi & dans\ E' \end{cases}$$

Passant à la limite dans (5) (pour $m = \mu$,j fixé)on voit que

$$(\chi, w_j) = (f, w_j) \qquad \forall j$$

et donc

$$(7) \qquad \chi = f$$

Par ailleurs, d'aprés (5), $(A(u_\mu), u_\mu) = (f, u_\mu) \to (f, u)$ *et donc, d'aprés (7):*

$$(8) \qquad (A(u_\mu), u_\mu) \to (\chi, u)$$

D'aprés (1) on a :

$$\langle A(u_\mu + kv) - A(u_\mu), z\rangle \longrightarrow \langle A(u_\mu + kv) - \chi, z\rangle \to_{k\to 0} 0$$

Et d'aprés (2)

$$0 \leq c \parallel u_\mu - u \parallel^2 \leq \mid \langle A(u_\mu + kv) - A(u + kv), u_\mu - u\rangle$$

Quand $k \to 0$ on a

$$0 \leq \langle A(u_\mu) - A(u), u_\mu - u\rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow A(u_\mu) = A(u)$$

$$(9) \qquad \chi = A(u)$$

ce qui, joint à (7), montre le théorème.

3) On part de

$$(10) \qquad \langle A(u_\mu) - A(v), u_\mu - v\rangle \geq 0 \qquad \forall v \ \in E$$

Utilisant (6) et (8) on peut passer à la limite dans (10), d'où

$$(11) \qquad \langle \chi - A(v), u - v\rangle \geq 0 \qquad \forall v \ \in E$$

Alors pour l'existence on prend $v = u - \lambda w, \ \ \lambda > 0, \quad w \in E$ *; (11) donne*

$$\langle \chi - A(u - \lambda w), u - (u - \lambda w)\rangle \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \ \langle \chi - A(u - \lambda w), \lambda w\rangle \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda \ \langle \chi - A(u - \lambda w), w\rangle \geq 0$$

Donc

$$\langle \chi - A(u - \lambda w), w\rangle \geq 0$$

En faisant $\lambda \to 0$ *:*

$$\langle \chi - A(u), w\rangle \geq 0 \qquad \forall w \in E$$

D'où (9). ■

Chapitre 2

Homogénéisation des opérateurs monotones

2.1 Position du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $Y =]0,1[^n$ le cube unité ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

considérons l'opérateur non linéaire suivant :

$$A^h u = -div(a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du)) \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

où $a(x,.)$ est $Y-$périodique satisfaisant les propriétés suivantes:

1/ $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telque: $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, a(,\xi)$ est Lebesgue mesurable et $Y-$périodique.

2/ La monotonie: $(a(x,\xi_1) - a(x,\xi_2), \xi_1 - \xi_2) \geq \alpha \mid \xi_1 - \xi_2 \mid^2$p.p $x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$.

3/ Lipshitz-continuité: $\mid (a(x,\xi_1) - a(x,\xi_2) \mid \leq \beta \mid \xi_1 - \xi_2 \mid$p.p $x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$.

avec $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$.

4/ $a(x,0) = 0$ p.p $x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 2.1 *Si a satisfait ces conditions, on dit que $a \in \aleph_\sharp$.*

Etant donné $a \in \aleph_\sharp$, alors pour tout réel positif ε_h et $f_h \in H^{-1}(\Omega)$, considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -div(a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du_h)) = f_h & \text{dans } \Omega \\ u_h \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.1}$$

Le problème devient comme suit :

Trouver $u_h \in E = H_0^1(\Omega)$ / $A^h u_h = f_h$:

$$\langle A^h u_h, v\rangle = \int_\Omega (a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du_h), Dv)dx \tag{2.2}$$

et

$$\langle f_h, v\rangle = \int_\Omega f_h v dx \tag{2.3}$$

Lemme 2.1 *L'opérateur A^h de E dans E' est hémicontinu, monotone et coercif.*

Preuve: i/ Montrons d'abord que

$$A^h w \in H^{-1}(\Omega) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Soit $w \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\mid \langle A^h w, v\rangle \mid \; &= \mid \textstyle\int_\Omega (a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dw), Dv)dx \mid \\
&\leq \textstyle\int_\Omega \mid (a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dw), Dv) \mid dx \\
&\leq \textstyle\int_\Omega \mid a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dw) \mid\mid Dv \mid dx \\
&\leq \beta \parallel Dw \parallel_{L^2}\parallel Dv \parallel_{L^2} \\
&\leq \beta \parallel w \parallel_E \parallel v \parallel_E \\
&\leq \beta' \parallel v \parallel_E \qquad\qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)
\end{aligned}$$

d'où

$$A^h w \in E' = H^{-1}(\Omega).$$

ii/ Montrons que A^h est hémicontinu. Pour cela calculons la quantité suivante :

$$\begin{aligned}
\mid \langle A^h(u+kv) - A^h u, z\rangle_{E',E} \mid \; &= \mid \textstyle\int_\Omega (a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du + kDv) - a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du), Dz)dx \mid \qquad \forall z \in H_0^1(\Omega) \\
&\leq \textstyle\int_\Omega \mid a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du + kDv) - a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du) \mid\mid Dz \mid dx \\
&\leq \beta \textstyle\int_\Omega \mid Du + kDv - Du \mid\mid Dz \mid dx \\
&\leq k\beta \textstyle\int_\Omega \mid Dv \mid\mid Dz \mid \to_{k\to 0} 0
\end{aligned}$$

iii/ montrons que A^h est monotone:

$$\begin{aligned}
\langle A^h u - A^h v, u - v\rangle_{E',E'} &= \int_\Omega (a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du) - a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dv), Du - Dv)dx \\
&\geq \alpha \int_\Omega \mid Du - Dv \mid^2 dx \\
&\geq 0 \qquad \forall u, v \in D(A^h)
\end{aligned}$$

De plus A^h est strictement monotone car :

$$\forall u, v \in D(A^h) \ \ \langle A^h u - A^h v, u - v\rangle_{E',E} = 0 \Rightarrow u = v.$$

iv/ Montrons que A^h est coercif :

$$\begin{aligned}
\langle A^h u, u\rangle_{E',E} &= \int_\Omega (a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du), Du)dx \qquad \forall u \in E \\
&\geq \alpha \int_\Omega \mid Du \mid^2 dx = \alpha \parallel u \parallel_E^2 \\
&\Rightarrow \lim_{\|u\|_E \to +\infty} \frac{\langle A^h u, u\rangle_{E',E}}{\parallel u \parallel_E} = +\infty
\end{aligned}$$

L'opérateur$A^h : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ est hémicontinu, monotone et coercif. En plus, $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Banach séparable et réflexif. En appliquant le théorème 1.5 on déduit que

$R(\ A^h) = H^{-1}(\Omega)$ c'est à dire que A^h est surjectif. Sachant que A^h est injectif, alors le problème 2.1 admet une solution unique. ■

2.2 Le Problème homogénéisé

Théorème 2.1 *(voir [5], théorème 5.3, page 20)*

Soit $a \in \aleph_\sharp$, et soit $(\varepsilon_h)_h$ une suite de réels positifs qui tend vers zéro quand $h \to +\infty$.

Supposons que $f_h \to_{h \to +\infty} f$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Soit (u_h) la solution du problème 2.1 alors

$$u_h \rightharpoonup_{h \to +\infty} u_0 \quad dans\ H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

$$a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du_h) \rightharpoonup b(Du_0) \ \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^n). \tag{2.5}$$

où u_0 est l'unique solution du problème homogénéisé :

$$\begin{cases} -div(b(Du_0)) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.6}$$

où l'opérateur b est définie comme suit :

$$\begin{aligned} b: \ & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & \xi \ \to b(\xi) \ \ = \textstyle\int_Y a(y, \xi + Dw^{\xi}(y))dy \end{aligned} \tag{2.7}$$

avec w^{ε} solution unique du problème local suivant :

$$\begin{cases} \int_Y (a(y, \xi + Dw^{\xi}(y)), Dv(y))dy \ \ = 0 \qquad \forall v \in H^1_{\#}(Y) \\ w^{\xi} \in H^1_{\#}(Y) \end{cases} \tag{2.8}$$

Proposition 2.1 *L'opérateur b satisfait les propriétés suivantes :*

i/b est monotone.

ii/ Il existe une constante $\gamma > 0$ tel que :

$$| \, b(\xi_1) - b(\xi_2) \, | \leq \gamma \, | \, \xi_1 - \xi_2 \, | \qquad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

iii/$b(0) = 0$

Preuve: Soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, par définition de l'opérateur b, il existe $w^{\xi_i} \in H^1_{\#}(Y)$ pour $i = 1, 2$ tel que

$$\begin{cases} \int_Y (a(y, \xi_i + Dw^{\xi_i}(y)), Dv(y))dy = 0 \qquad \forall v \in H^1_{\#}(Y) \\ b(\xi_i) = \int_Y a(y, \xi_i + Dw^{\xi_i}(y))dy \end{cases}$$

i/ Montrons que b est monotone

Soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
(b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2) &= (\textstyle\int_Y a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y))dy - \int_Y (a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y))dy, \xi_1 - \xi_2) \\
&= \textstyle\int_Y (a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) - a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)), \xi_1 - \xi_2))dy \\
&= \textstyle\int_Y (a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) - (a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)), (\xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) - (\xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)))dy \\
&- \textstyle\int_Y (a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) - a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)), Dw^{\xi_1}(y))dy \\
&+ \textstyle\int_Y (a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y))dy - a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)), Dw^{\xi_2}(y))dy \\
&\geq \alpha \textstyle\int_Y \mid (\xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) - (\xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)) \mid^2 dy \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

ii/ Soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\mid b(\xi_1) - b(\xi_2) \mid^2 &= \mid \textstyle\int_Y a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y))dy - \int_Y (a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y))dy \mid^2 \\
&\leq (\textstyle\int_Y \mid a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y))dy - \int_Y (a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)) \mid dy)^2 \\
&\leq (\beta \textstyle\int_Y \mid \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y) - \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y) \mid dy)^2 \\
&\leq \beta^2 (\textstyle\int_Y \mid \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y) - \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y) \mid^2 dy) \\
&\leq \tfrac{\beta^2}{\alpha} (\textstyle\int_Y (a(y, \xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) - a(y, \xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)), (\xi_1 + Dw^{\xi_1}(y)) - (\xi_2 + Dw^{\xi_2}(y)))dy \\
&\leq \tfrac{\beta^2}{\alpha} (b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2) \\
&\leq \tfrac{\beta^2}{\alpha} \mid b(\xi_1) - b(\xi_2) \mid\mid \xi_1 - \xi_2 \mid
\end{aligned}$$

d'où

$$\mid b(\xi_1) - b(\xi_2) \mid \leq \frac{\beta^2}{\alpha} \mid \xi_1 - \xi_2 \mid \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$$

iii/ $b(0) = 0$ car $a(x, 0) = 0$ p.p$x \in \mathbb{R}^n$.

Maintenant on montre le théorème 2.1:

Preuve: On va procéder comme suit:

Etape1 :

D'aprés le lemme 2.1 et le théorème1.5 le problème 2.1 admet une solution unique.

Etape2 :

La formulation faible du problème 2.1 est donnée par :

$$\int_{\Omega}(a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du_h), Dv)dx = \langle f_h, v\rangle_{E',E} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En prenant $v = u_h$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\alpha.\parallel u_h \parallel_E^2 &= \alpha \int_\Omega \mid Du_h \mid^2 dx && \leq \int_\Omega a(\tfrac{x}{\varepsilon_h}, Du_h), Du_h)dx \qquad = \langle f_h, u_h\rangle_{E',E}\\
& && \leq \parallel f_h \parallel_{E'} \parallel u_h \parallel_E\\
& && \leq c \parallel u_h \parallel_E\\
& \Rightarrow \parallel u_h \parallel_E \leq \tfrac{c}{\alpha} = c' && \text{(où } c' \text{ ne dépend pas de h)}
\end{aligned}$$

■

Posons

$\xi^h = a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du_h)$

$$\begin{aligned}
\parallel \xi^h \parallel^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)} &= \int_\Omega \mid a(\tfrac{x}{\varepsilon_h}, Du_h) \mid^2 dx\\
&= \int_\Omega \mid a(\tfrac{x}{\varepsilon_h}, Du_h) - a(\tfrac{x}{\varepsilon_h}, 0) \mid^2 dx\\
&\leq \quad \beta^2 \parallel u_h \parallel^2_{H_0^1(\Omega)}\\
&\leq c
\end{aligned}$$

Donc on peut extraire deux sous suites $(u_h)_h$ et $(\xi^h)_h$, qu'on note encore par $(u_h)_h$ et $(\xi^h)_h$ tels que :

$$u_h \rightharpoonup_{h\to+\infty} \tilde{u} \qquad \text{dans } H_0^1(\Omega). \tag{2.9}$$

$$\xi^h \rightharpoonup_{h\to+\infty} \tilde{\xi} \qquad \text{dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^n). \tag{2.10}$$

avec $\tilde{\xi}$ satisfaisant :

$$-div\ \tilde{\xi} = f \quad \text{dans } \Omega \qquad \text{(au sens des distributions)} \tag{2.11}$$

Si nous montrons que $\tilde{\xi} = b(D\tilde{u})$ p.p $x \in \mathbb{R}^n$ alors par unicité de la solution du problème 2.6 nous concluons que $\tilde{u} = u_0$.

Etape3 :

Maintenent tout revient à montrer que :

$$\tilde{\xi} = b(D\tilde{u}) \quad \text{p.p} \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour cela définissons une suite de fonctions $w_h^\eta \in H^1(\Omega)$, $\varepsilon_h Y$-périodique comme suit : Pour $\eta \in \mathbb{R}^n$, considérons la solution $w^\eta \in H^1_\#(Y)$ du problème 2.8.

Notons encore par w^η son extension$Y$-périodique à tout $\mathbb{R}^n$, et d'aprés le lemme 1.1, nous pouvons prouver que $w^\eta \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (a(x, \eta + Dw^\eta(x)), Dv(x))dx = 0 \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \;. \qquad \text{(voir lemme1.2)} \tag{2.12}$$

Soit:

$$w_h^\eta = (\eta, x) + \varepsilon_h w^\eta(\frac{x}{\varepsilon_h}) \;\; \text{p.p } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.13}$$

On a:

$$Dw_h^\eta(x) = \eta + Dw^\eta(\frac{x}{\varepsilon_h}) \text{ p.p } x \in \mathbb{R}^n.$$

Puisque w^η est$Y$-périodique, alors

$$w^\eta(\frac{x}{\varepsilon_h}) \rightharpoonup_{\varepsilon_h \to 0} M_Y(w^\eta). \qquad\qquad \text{dans } H^1(\Omega)$$

Donc

$$w_h^\eta(x) - (\eta, x) = \varepsilon_h w^\eta(\frac{x}{\varepsilon_h}) \rightharpoonup_{\varepsilon_h \to 0} 0. \qquad \text{dans } H^1(\Omega)$$

Car:

$$w^\eta(\frac{x}{\varepsilon_h}) \rightharpoonup_{\varepsilon_h \to 0} \frac{1}{\mid Y \mid} \int_Y w(y)dy.$$

D'où le résultat suivant :

$$w_h^\eta \rightharpoonup_{h \to +\infty} (\eta, x) \qquad \text{dans } H^1(\Omega) \tag{2.14}$$

Calculons maintenant la quantité suivante :

$$\int_Y \frac{\partial w^\eta}{\partial y_k}(y)dy = \int_{(]0,1[)^{n-1}} (\int_0^1 \frac{\partial w^\eta}{\partial y_k}(y)dy_k)dy_1dy_2...dy_{k-1}dy_{k+1}...dy_n.$$

Le fait que $w^\eta \in H^1_\#(Y)$ permet de déduire que :

$$\int_0^1 \frac{\partial w^\eta}{\partial y_k}(y)dy_k = w^\eta(y_1,y_2...y_{k-1},1,y_{k+1},...,y_n) - w^\eta(y_1,y_2...y_{k-1},0,y_{k+1},...,y_n) = 0.$$

$$\Longrightarrow \int_Y \frac{\partial w^\eta}{\partial y_k}(y)dy = 0 \quad .$$

Soit $\Psi \in (L^2(\Omega,\mathbb{R}^n))^n$ c'est à dire $\Psi = (\Psi_1,...\Psi_n)/\Psi_k \in L^2(\Omega)$ pour $1 \leq k \leq n$

$$\int_\Omega (Dw^\eta(\frac{x}{\varepsilon_h}),\Psi(x))dx = \sum_{k=1}^n \int_\Omega \frac{\partial w^\eta}{\partial x_k}(\frac{x}{\varepsilon_h})\Psi_k(x)dx \to \sum_{k=1}^n \int_\Omega (\int_Y \frac{\partial w^\eta}{\partial x_k}(y)dy)\Psi_k(x)dx = 0.$$

$$\Longleftrightarrow Dw_h^\eta - \eta = Dw_h^\eta(\frac{x}{\varepsilon_h}) \rightharpoonup_{\varepsilon_h\to 0} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega,\mathbb{R}^n) \ .$$

$$\Longleftrightarrow Dw_h^\eta \rightharpoonup_{h\to+\infty} \eta \qquad \text{dans } L^2(\Omega,\mathbb{R}^n) \quad .$$

Finalement, le fait que $a(.,.)(\frac{x}{\varepsilon_h})$ est$Y$-périodique, on déduit que :

$$\int_\Omega a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dw_h^\eta(x)) = a(.,\eta+Dw^\eta(.))(\frac{x}{\varepsilon_h}) \rightharpoonup \frac{1}{\mid Y \mid}\int_Y a(y,\eta+Dw^\eta(y))dy = b(\eta) \quad \text{dans } L^2(\Omega,\mathbb{R}^n).$$

Puisque a est monotone on a :

$$\int_\Omega (a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du_h(x)) - a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dw_h^\eta(x)), Du_h(x) - Dw_h^\eta(x))\varphi(x)dx \geq 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0.$$

Posons

$$U_h(x) = u_h(x) - w_h^\eta(x) \rightharpoonup_{\varepsilon_h\to 0} \tilde{u}(x) - (\eta,x) = U(x) \quad \text{dans } H^1(\Omega).$$

$$G_h(x) = a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du_h(x)) - a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dw_h^\eta(x)) \rightharpoonup_{\varepsilon_h\to 0} \tilde{\xi}(x) - b(\eta) = G(x). \quad \text{dans } L^2(\Omega,\mathbb{R}^n).$$

$$-div(G_h(x)) = -div(a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du_h(x)) - a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dw_h^\eta(x))).$$

or

$$-div((\frac{x}{\varepsilon_h}, Du_h(x))) = f_h \rightarrow_{\varepsilon_h\to 0} f = -div\tilde{\xi} \quad \text{dans } H^1(\Omega). \tag{2.15}$$

et

$$-div(a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dw_h^\eta(x))) = 0 \rightarrow_{\varepsilon_h\to 0} -div(b(\eta)) \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega). \tag{2.16}$$

$$(2.15) \text{ et } (2.16) \Rightarrow -divG_h(x) \rightarrow_{h\to\infty} -divG \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega)\ . \tag{2.17}$$

En passant à la limite quand $\varepsilon_h \to 0$ et en appliquant le lemme de compacité par compensation on a:

$$\int_\Omega (a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du_h(x)) - a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dw_h^\eta(x)), u_h(x) - Dw_h^\eta(x))\varphi(x)dx \to \int_\Omega (\tilde{\xi}(x) - b(\eta), D\tilde{u}(x) - \eta)\varphi(x)dx \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

On a a monotone $\Longrightarrow (a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Du_h(x)) - a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dw_h^\eta(x)), u_h(x) - Dw_h^\eta(x)) \geq 0$

$$\Longrightarrow \int_\Omega (\tilde{\xi}(x) - b(\eta), D\tilde{u}(x) - \eta)\varphi(x)dx \geq 0 \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0.$$

On prend une suite (η_m) dense dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\eta_m \rightarrow_{m\to+\infty} \eta$

Donc

$$\forall m \qquad \int_\Omega (\tilde{\xi}(x) - b(\eta_m), D\tilde{u}(x) - \eta_m)\varphi(x)dx \geq 0\ ,\ \varphi \geq 0.$$

b continu $\Longrightarrow b(\eta_m) \rightarrow_{m\to+\infty} b(\eta)$

$$\Longrightarrow (\tilde{\xi}(x) - b(\eta), D\tilde{u}(x) - \eta) \geq 0 \quad \text{p.p } x \in \Omega \text{ et } \forall \eta \in \mathbb{R}^n.$$

b maximal monotone $\Longrightarrow (b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2) = 0$

$$\Longrightarrow (\tilde{\xi}(x) - b(\eta), D\tilde{u}(x) - \eta) = 0$$

$$\Longrightarrow \eta = D\tilde{u}(x).$$

Par conséquent:

$$\tilde{\xi}(x) = b(D\tilde{u}(x))$$

■

Proposition 2.2 *L'opérateur $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par 2.7 satisfait la propriété suivante :*

$$(b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2) \geq \alpha \mid \xi_1 - \xi_2 \mid^2 \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve: Soit $\xi_i \in \mathbb{R}^n$ pour $i = 1.2$.

Considérons $(w_h^{\xi_i}) \in H^1(\Omega)/w_h^{\xi_i}(x) = (\xi_i, x) + \varepsilon_h w^{\xi_i}(\frac{x}{\varepsilon_h})$.

D'aprés ce qui précède, on a

$$\begin{cases} w_h^{\xi_i} \rightharpoonup_{h\to\infty} (\xi_i, x) \;\; \text{dans } H^1(\Omega) \\ Dw_h^{\xi_i} \rightharpoonup_{h\to\infty} \xi_i \quad \text{dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \\ a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dw_h^{\xi_i}(x)) \to_{\varepsilon_h\to 0} \frac{1}{|Y|}\int_Y a(y, \xi_i \quad + Dw^{\xi_i} \;\; (y))dy = b(\xi_i) \;\; \text{Dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Puisque a est strictement monotone, on a : $\forall \varphi \in \ell_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$

$$\int_\Omega (a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dw_h^{\xi_1}(x)) - a(\frac{x}{\varepsilon_h}, Dw_h^{\xi_2}(x)), Dw_h^{\xi_1}(x) - Dw_h^{\xi_2}(x))\varphi(x)dx \geq \alpha \int_\Omega \mid Dw_h^{\xi_1}(x) - Dw_h^{\xi_2}(x) \mid^2 \varphi(x)dx$$

Quand $\varepsilon \to 0$ et aprés avoir appliqué le lemme de compacité par compensation, nous obtenons:

$$\int_\Omega (b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2)\varphi(x)dx \geq \alpha \lim_{h\to\infty} \int_\Omega \mid Dw_h^{\xi_1}(x) - Dw_h^{\xi_2}(x) \mid^2 \varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0.$$

Posons :

$$\Psi_h(x) = (Dw_h^{\xi_1}(x) - Dw_h^{\xi_2}(x))\bar{\varphi}(x)$$

pour $\bar{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)/ \mid \bar{\varphi} \mid^2 = \varphi$. $\Rightarrow \Psi_h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

En plus on a:

$$\Psi_h(x) = (Dw_h^{\xi_1}(x) - Dw_h^{\xi_2}(x))\bar{\varphi}(x) \rightharpoonup_{h\to\infty} \Psi(x) = (\xi_1 - \xi_2)\bar{\varphi}(x) \quad \text{dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

Maintenant il suffit d'utiliser le théorème1.1 pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_\Omega (b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2)\varphi(x)dx &\geq \alpha \lim_{h\to\infty} \int_\Omega \mid Dw_h^{\xi_1}(x) - Dw_h^{\xi_2}(x) \mid^2 \varphi(x)dx \\ &\geq \alpha \liminf_{h\to\infty} \int_\Omega \mid Dw_h^{\xi_1}(x) - Dw_h^{\xi_2}(x) \mid^2 \varphi(x)dx \\ &\geq \alpha \int_\Omega \mid \xi_1 - \xi_2 \mid^2 \varphi(x)dx \end{aligned}$$

Il résulte que

$$(b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2)\varphi(x) \geq \;\alpha \mid \xi_1 - \xi_2 \mid^2 \varphi(x) \;\; p.p \; x \in \mathbb{R}^n, \varphi \geq 0$$

d'où

$$(b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2) \geq \alpha \mid \xi_1 - \xi_2 \mid^2 \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

■

2.3 Correcteur

Dans la théorie de l'homogénéisation ont est souvent affronté à la convergence suivante:

$Du_\epsilon \rightharpoonup Du_0$ dans L^2.

Améliorer cette convergence c'est la transformer en une convergence forte, pour cela on introduit un opérateur qui ajuste la limite Du_0 à fin d'obtenir une convergence forte, cet opérateur d'ajustement s'appel correcteur.

Théorème 2.2 *Supposons que les hypothèses du théorème 2.1 soient vraies. Soit u_h solution du problème 2.1 et u_0 solution du problème 2.6. Alors*

$$Du_h = \rho_h(., M_h Du_0) + r_h \qquad \textit{avec } r_h \to 0 \ \textit{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

Pour tout $\varepsilon_h > 0$, la fonction $\rho_h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est définie par

$$\rho_h(x, \xi) = \xi + Dw^\xi(\frac{x}{\varepsilon_h})$$

où w^ξ est l'unique solution du problème 2.8. De plus $\forall \varphi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ la fonction $M_h\varphi$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: est définie par

$$M_h\varphi(x) = \sum_{i \in I_h} \chi_{Y_h^i} \frac{1}{\mid Y_h^i \mid} \int_{Y_h^i} \varphi(y)dy$$

où

$$Y_h^i = \varepsilon_h(i + Y) \ \textit{pour } i \in \mathbb{Z}^n$$

$$I_h = \left\{ \in \mathbb{Z}^n : Y_h^i \subseteq \Omega \ \right\}$$

et χ_A est la fonction caractéristique de l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Conclusion

Deux notions importantes ont été introduite dans mon travail:

Compacité par compensation.

Correcteur.

Ces deux notions diffèrent du cas linéaire au cas non linéaire, elle interviennent dans beaucoup d'applications et permettent de mieux connaitre les oscillations du gradient de u_h et la physique derrière.

Bibliographie

[1] A.Bensoussan, J.L.Lions ,G.Papanicolaou , **Asymptotic Analysis For Periodic Structures**, Edition NORTH-HOLLAND -1978.

[2] Haïm Brezis **Analyse Fonctionnelle (Théorie et applications)** Edition Masson-Paris 1983.

[3] V. Chiadŏ Piat and A. Defranceschi, **Homogenization of monotone operators,** Nonlinear Anal. 14 (1990), 717-732.

[4] Anneliese Defranceschi, **An Introduction to Homogenization and G-convergence** School on Homogenization ICTP, Trieste, September 6–17, 1993.

[5] J-Lions. **Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.** Dunod Gauthier-Villars, Paris (1969).

[6] D.Lukkassen and P.Wall, **Two-scale convergence with respect to mesures and homogenization of monotone operators,** (Function Spaces and Applications), Volume3, Number 2 (2005). 125-161.

[7] Peter Wall, **Some Hmogenization and Corrector results for Nonlinear Monotone Operators.** Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 1998, V5, N 3, 331-348.

[8] Mamchaoui Md., **Méthode de jonction dans la théorie de l'Homogénéisation,** Mémoire de Magister.M.C. Université Tlemcen, 2006-2007.

[9] G.Senouci Bereksi, **Homogénéisation** Support de cours de poste graduation, Magister en mathématiques et application 2009-2010.

[10] D.Cioranescu and P.Donato, **An Introduction to Homogenization,** Oxford lecture series in Mathematics and its Application 17.