



République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de Magister en Génie Civil

Option: Seismic Risk And Earthquake Engineering

Thème

Etude du comportement dynamique des structures à barres comportant des fissures

Présenté par :

Slimani Mohammed

Soutenu le 19 décembre 2013 devant le jury composé de :

Mr. Zendagui Djawad

Président

Mr. Boumechra Nadir

Encadreur

Mr. Matallah Mohammed

Examineur

Mr. Hamdaoui Karim

Examineur

Année Universities: 2013-2014

Remerciement

Je remercie tout d'abord le bon dieu qui m'a aidé de terminer ce travail « Alahamdou li ALLAH ».

Je tiens à remercier mon directeur de thèse, Dr Boumechra Nadir pour m'avoir proposé un sujet fort intéressant et pour la confiance qu'il m'a accordée. Il m'a dirigé tout au long de cette étude et m'a donné les grands axes de recherche. Je le remercie aussi pour sa disponibilité, sa gentillesse et sa sensibilité.

J'adresse mes remerciements les plus respectueux à monsieur Dr Zendagui Djawad qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie aussi Dr Matallah Mohammed et Dr Hamdaoui Karim qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être mes examinateurs. Leurs idées me seront sans nul doute très utiles pour la suite de cette recherche.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements ainsi que ma grande gratitude et reconnaissance envers tous mes enseignants de la graduation et de la post graduation « Département de Génie civil ».

Et à la fin, je veux dire merci pour ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Résumé

Suite aux différents séismes survenus dans des sites urbains, la plupart des constructions non détruites présentaient des fissures plus ou moins nombreuses et variées. La recherche et la reconnaissance de leur comportement et de leur stabilité a été la plus grande inconnue pour les ingénieurs et les experts. Les résultats de ces études conditionnaient la décision sur leur existence d'une part et d'autre part sur les techniques de leur réhabilitation éventuellement adoptées.

Pour cela, dans ce travail, des modèles mathématiques ont été développées pour pouvoir faire l'analyse statique et aussi dynamique d'une structure fissurée. Ces modèles présentent la fissure par un ressort à raideur non linéaire existant au niveau des barres définies en éléments finis. La modélisation de la fissure est réalisée à partir de trois approches différentes qui sont celles de Nandwann et Maiti, de Kurtosis et aussi de Okamura.

Pour cette étude, un programme a été développé à l'aide du code Matlab.

Il a été constaté que le nombre, la position et la profondeur des fissures existantes influentes largement sur la stabilité et la sécurité de la structure. La propriété spectrale du séisme agissant sur la structure dégradée peut avoir aussi un effet variable puisque le champ de contraintes et de déformations est modifié.

Mots clés : structure, portique 3D, fissure, stabilité, séisme.

ABSTRACT

Following the earthquakes in various urban sites, most non-destroyed buildings showed cracks more or less numerous and varied. Research and recognition of their behavior and their stability was unknown to most engineers and experts. The results of these studies conditioned the decision on their existence on the one hand and the other hand on techniques for rehabilitation may be adopted.

For this, in this work, mathematical models have been developed in order to be as dynamic and static analysis of a cracked structure. These models have the crack with a nonlinear spring stiffness existing at the bar defined in finite elements. The modeling of the crack is made from three different approaches are those of Nandwann and Maiti, Kurtosis and also Okamura. For this study, a program was developed with the Matlab code.

It was found that the number, location and depth of existing cracks influential on the stability and security of the structure. The spectral property of the earthquake acting on the degraded structure can also have a variable effect since the field of stress and strain changes.

Keywords: building, frame 3D, crack, stability, earthquake.

المخلص:

في أعقاب الزلازل في المواقع الحضرية المختلفة، أظهرت معظم المباني غير المدمرة الشقوق بعدد أكثر أو أقل ومتنوعة. وكان البحث وتقديرا لسلوكها واستقرارها غير معروفة لمعظم المهندسين والخبراء. نتائج هذه الدراسات تشترط البحث على وجودها من ناحية و أيضا على تقنيات إعادة التأهيل التي يمكن اعتمادها.

لهذا، في هذا العمل، قد تم تطوير نماذج رياضية من أجل دراسة ثابتة وديناميكية لتحليل هيكل متصدع. هذه النماذج تصف الشقوق بعنصر لين ذو صلابة غير خطية المعرفة بالعناصر المحدودة. تم إجراء نمذجة الشقوق من ثلاثة مناهج مختلفة هي تلك Kurtosis , Maiti و Nandwann وأيضا Okamura. لهذه الدراسة، تم تطوير برنامج برمز Matlab.

و قد وجد أن عدد ومكان وعمق الشقوق مؤثرة على نطاق واسع على استقرار وأمن الهيكل. الخاصية الطيفية من وقوع الزلازل بناء على هيكل متدهور يمكن أن يكون لها أيضا تأثير متغير منذ مجال الإجهاد.

كلمات البحث: هيكل، الشقوق، استقرار، الزلازل

TABLE DES MATIERES

Remerciement.....	i
Résumé.....	ii
Table de matières.....	v
Liste des tableaux.....	ix
Listes des figures.....	xiv
Introduction Générale.....	xxi
CHAPITRE 1 : LE PHENOMENE DE LA FISSURATION	
1.1 Introduction	1
1.1.1 Mécanique de la rupture.....	1
1.1.2 Modes de rupture	2
1.2 Mécanique de la rupture basée sur le bilan énergétique.....	2
1.2.1 Taux de restitution d'énergie	4
1.2.2 Intégrale de contour « J »	6
1.2.3 L'intégrale du domaine équivalent	7
1.2.4 Intégrale de Bui	7
1.2.5 La densité d'énergie de déformation.(S)	8
1.2.6 Propagation	9
1.2.6. 1 Critères de propagation	9
1.2.6. 2 Bifurcation de la fissure	10
1.3 Mécanique de la rupture élastique	11
1.3.1 Facteur d'intensité des contraintes.....	11
1.3.2 Détermination des champs de contraintes et de déplacements au voisinage d'une fissure (résolution de Westergaard).....	12
1.3.3 Facteur d'intensité de contraintes dans la pratique	14
1.4 Mécanique de la rupture élastoplastique	15
1.4.1 Définition d'un comportement élastoplastique	15
1.4.2 Position du problème.....	16
1.4.3 Étendue de la zone plastique	16

1.4.4 Profil équivalent d'Irwin	18
1.5 Mécanique de la rupture dynamique.....	19
1.5.1 La rupture dynamique	19
1.5.2 Caractérisation des champs asymptotiques en pointe de fissure : facteur d'intensité dynamique de contrainte	19
1.5.3 Concepts énergétiques en rupture dynamique	22
1.5.4 Propagation de la fissure dynamique	22
1.6 Méthodes expérimentales pour l'étude de la fissure.....	23
1.6.1 La photoélasticité	23
1.6.2 Jauges de déformations (Extensométrie).....	24
1.6.3 Interférométrie	24
1.7 Les différents moyens de suivi de fissures et de mesure d'ouverture de fissure dans les structures en béton	25
1.7.1 Le fissurotest.....	26
1.7.2 La lunette micrométrique.....	26
1.7.3 Le déformètre à bille	27
1.7.4 La Jauge GINGER CEBTP.....	27
1.7.5 Le capteur de déplacement	28
 CHAPITRE 2: ETUDE STATIQUE ET DYNAMIQUE DE LA POUTRE FISSUREE	
2.1 Introduction.....	29
2.1.1 Schéma de la poutre étudiée	29
2.2 Modélisation en éléments finis plaque de la poutre fissurée.....	29
2.2.1 Poutre avec une fissure inférieure (éléments finis plaque)	29
2.2.2 Poutre avec deux fissures inférieure et supérieure (éléments finis plaque)	32
2.2.3 Poutre avec une fissure centrale (éléments finis plaque)	35
2.3 Modélisation en éléments finis barre de la poutre fissurée	37
2.3.1 Poutre avec deux fissures inférieure et supérieure (éléments finis barre).....	37
2.4 Modélisation en éléments finis ressort de la poutre fissurée	40
2.4.1 Définition du mode ressort (Naseralavi A, 2010)	40
2.4.2 Applications numérique.....	42
2.4.3 Modèle de Nandwann et Maiti (Bui, 1978)	42
2.4.4 Modèle de Kurtosis (Lee, 2009) :.....	44
2.4.5 Modèle d'Okamura (Okamura et Al, 1969).....	45

2.4.6 Etude comparative.....	46
2.5 Conclusion.....	47

CHPITRE 3: FORMULATION AUX ELEMENTS FINIS

3.2 Concept de base de la méthode des éléments finis.....	49
3.3 Démarche de formulation éléments finis.....	50
3.3.1 Discrétisation de la structure en éléments finis.....	50
3.3.2 Construction de l'approximation nodale par sous domaine.....	50
3.3.3 Etablissement de la relation entre déformations et déplacements.....	51
3.3.4 Etablissement de la relation entre contraintes et déformations.....	51
3.3.5 Calcul des matrices élémentaires.....	51
3.4 Élément fini barre.....	52
3.4.1 Définition.....	52
3.4.2 Formulation de l'élément barre dans le plan.....	53
3.4.3 Formulation d'un élément barre tridimensionnelle.....	56
3.5 Élément fini poutre.....	57
3.5.1 Définition.....	57
3.5.2 Formulation d'un élément poutre dans le plan.....	58
3.5.3 Formulation d'un élément poutre en torsion (4 d.d.l.).....	61
3.5.4 Formulation d'un élément poutre tridimensionnelle.....	63
3.6 Charges appliquées sur les éléments.....	68
3.7 Résolution en analyse statique.....	70
3.7.1 Système d'équations linéaires.....	70
3.7.2 Prise en compte des conditions aux limites.....	70
3.7.3 Résolution du système linéaire.....	71
3.7.4 Calcul des efforts.....	71
3.8 Résolution en analyse modale.....	72
3.8.1 Système d'équations aux valeurs propres.....	72
3.8.2 Résolution du système aux valeurs propres.....	73
3.9. Élément fini ressort_fissure.....	73
3.10 Conclusion.....	74

CHPITRE 4: ETUDE STATIQUE ET DYNAMIQUE DE PORTIQUE FISSURES

4.1 Introduction	76
4.2 Modélisation en éléments finis du portique non fissuré (cas statique)	76
4.2.1 Modélisation en éléments finis du portique fissuré (position de la fissure).....	77
4.2.2 Modélisation en éléments finis du portique fissuré (1 fissure).....	78
4.2.3 Modélisation en éléments finis du portique fissuré (2 fissure).....	81
4.2.4 Modélisation en éléments finis du portique non fissuré (cas dynamique).....	84
4.2.5 Modélisation en éléments finis du portique fissuré (position de la fissure).....	86
4.2.6 Modélisation en éléments finis du portique fissuré (2 fissures):.....	87
4.2.7 Modélisation en éléments finis du portique fissuré (4 fissures).....	91
4.2.8 Modélisation en éléments finis du portique fissuré (6 fissures).....	93
4.3 Etude du comportement dynamique d'une structure 3D à barres	96
4.3.1 Introduction	96
4.3.2 Structure à barres non fissurée	97
4.23.3 Structure à barres fissurée (12 fissures).....	98
4.3.4 Structure à barres fissurée (24 fissures).....	103
4.3.5 Structure à barres fissurée (36 fissures).....	108
4.3.6 Structure à barres fissurée (48 fissures).....	113
4.3.7 Sructure à barres fissurée (60 fissures).....	118
4.3.8 Structure à barres fissurée (72 fissures).....	122
4.4 Conclusion:.....	127

CONCLUSION GENERALE

REFERENCES BIBIOGRAPHIQUES

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre 1 :

Tableau 1.1 : Différents types de fissuration.....1

Tableau 1.2 : les quatre formes possible de $f(\theta)$17

Chapitre 2 :

Tableau 2.1 : Valeurs des déplacements maximums et les contraintes maximums pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.....30

Tableau 2.2 : Valeurs du huit premières périodes pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.....31

Tableau 2.3 : Valeurs des déplacements maximums et les contraintes maximums pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.....33

Tableau 2.4 : Valeurs du huit premières périodes pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.....34

Tableau 2.5 : Valeurs des déplacements maximums et les contraintes maximums pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.35

Tableau 2.6 : Valeurs du huit premières périodes pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.....36

Tableau 2.7 : Valeurs du déplacement maximum, moment maximum et l'effort normal maximal pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.....38

Tableau 2.8 : valeurs des huit premières périodes pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.....39

Tableau 2.9 : Modèles de raideur ressort – fissure.....41

Tableau 2.10 : valeurs du déplacement maximum pour les différentes profondeurs de la fissure.....43

Tableau 2.11 : valeurs du huit premières périodes pour les différentes profondeurs de la fissure.....	44
Tableau 2.12 : valeurs du déplacement maximum pour les différentes profondeurs de la fissure.	45
Tableau 2.13 : valeurs du huit premières périodes pour les différentes profondeurs de la fissure.	45
Tableau 2.14 : valeurs du déplacement maximum pour les différentes profondeurs de la fissure.	46
Tableau 2.15 : valeurs du huit premières périodes pour les différentes profondeurs de la fissure.	46
Tableau 2.16 : La différence entre les trois modèles utilisés de raideur ressort – fissure ...	47
<u>Chapitre 4 :</u>	
Tableau 4.1: Valeurs du déplacement horizontal du portique non fissuré pour.....	76
Tableau 4.2: Valeurs du moment fléchissant maximal dans le poteau du portique non fissuré.....	76
Tableau 4.3: Valeurs du moment l’effort normal dans le poteau du portique non fissuré....	77
Tableau 4.4: Valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré pour des différentes positions de la fissure / l’encastrement.	77
Tableau 4.5: Valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	79
Tableau 4.6: Valeurs du moment fléchissant du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	79
Tableau 4.7: Valeurs du l’effort normal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	80

Tableau 4.8: Valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	82
Tableau 4.9: Valeurs du moment fléchissant du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction	82
Tableau 4.10: Valeurs du l'effort normal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	83
Tableau 4.11 : Valeurs des 3 premières périodes pour le portique non fissurée.....	85
Tableau 4.12: Valeurs du déplacement horizontal maximal du portique non fissuré	85
Tableau 4.13: Valeurs du moment fléchissant maximal dans le poteau du portique non fissuré.....	85
Tableau 4.14: Valeurs du moment l'effort normal maximal dans le poteau du portique non fissuré.....	86
Tableau 4.15: Valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré pour des différentes positions de la fissure / l'encastrement.	86
Tableau 4.16: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction...	88
Tableau 4.17: Valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	88
Tableau 4.18: Valeurs du moment fléchissant maximal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	89
Tableau 4.19: Valeurs du l'effort normal maximal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	90
Tableau 4.20: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction...	91
Tableau 4.21: Valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	92
Tableau 4.22: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction...	94

Tableau 4.23: Valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	94
Tableau 4.24: Valeurs des moments fléchissant animaux dans les poteaux du RDC de la structure non fissuré.....	97
Tableau 4.25: Valeurs des 3 premières périodes de la structure non fissuré.....	98
Tableau 4.26: Valeurs du déplacement horizontal maximal de la structure non fissuré.....	98
Tableau 4.27: Valeurs du M_y , N , T_z maximale dans le poteau du RDC de la structure non fissuré.....	98
Tableau 4.28: valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction....	98
Tableau 4.29: Valeurs du déplacement horizontal maximal pour les différents facteurs de réduction.....	99
Tableau 4.30: Valeurs du M_y , N , T_z maximal pour les différents facteurs de réduction.....	99
Tableau 4.31: Valeurs du M_y maximale dans la poutre secondaire, du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	100
Tableau 4.32: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction...	101
Tableau 4.33: Valeurs du déplacement horizontal maximal pour les différents facteurs de réduction.....	103
Tableau 4.34: Valeurs du M_y , N , T_z maximal pour les différents facteurs de réduction...	104
Tableau 4.35: Valeurs du M_y maximale dans la poutre secondaire, du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	105
Tableau 4.36: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction..	106
Tableau 4.37: Valeurs du déplacement horizontal maximal pour les différents facteurs de réduction.....	108
Tableau 4.38: valeurs du M_y , N , T_z maximal pour les différents facteurs de réduction...	109
Tableau 4.39: Valeurs du M_y maximale dans la poutre secondaire, du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	109

Tableau 4.40: Valeurs du M_y maximale dans la poutre secondaire, du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	111
Tableau 4.41: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction.	113
Tableau 4.42: Valeurs du déplacement horizontal maximal pour les différents facteurs de réduction.....	114
Tableau 4.43: Valeurs du M_y , N , T_z maximal pour les différents facteurs de réduction...	114
Tableau 4.44: Valeurs du M_y maximale dans la poutre secondaire, du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	116
Tableau 4.45: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction..	118
Tableau 4.46: valeurs du déplacement horizontal maximal pour les différents facteurs de réduction.....	119
Tableau 4.47: Valeurs du M_y , N , T_z maximal pour les différents facteurs de réduction...	119
Tableau 4.48: Valeurs du M_y maximale dans la poutre secondaire, du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	121
Tableau 4.49: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction.	123
Tableau 4.50: Valeurs du déplacement horizontal maximal pour les différents facteurs de réduction.....	123
Tableau 4.51: Valeurs du M_y , N , T_z maximal pour les différents facteurs de réduction...	124
Tableau 4.52: Valeurs du M_y maximale dans la poutre secondaire, du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.....	125
Tableau 4.53 : Valeurs du D_x , max pour tous les cas étudié de la structure fissuré.....	127

LISTE DES FIGURES

Chapitre 1 :

Figure 1.1 : Les trois modes de rupture.....	2
Figure 1.2 : La géométrie du double échantillon de rupture de la poutre en porte-à-faux.....	3
Figure 1.3 : Accroissement d'une fissure.....	5
Figure 1.4 : Le contour d'intégration Γ	6
Figure 1.5 : surface utilisée pour le calcul de l'intégrale du domaine équivalent J.....	7
Figure 1.6: Repérage du point de calcul $s(\theta)$	8
Figure 1.7 : Distribution des contraintes.....	12
Figure 1.8 : Fissure dans une plaque infinie sous tension.....	15
Figure 1.9 : Courbe $\sigma_y = f(r)$	16
Figure. 1.10 : Étendue des zones plastiques selon les deux critères.....	17
Figure 1.11 : Modèle simple de déformation plastique à la pointe de la fissure, avec ou sans correction d'Irwin.....	18
Figure 1.12 : Zones autour de la pointe d'une fissure.....	20
Figure 1.13 : Systèmes référentiels pour la fissure en mouvement.....	21
Figure 1.14 : Exemple de la photoélasticité d'un crochet	23
Figure 1.15 : Montage de jauges de déformation.....	24
Figure 1.16 : interférométrie de speckle	25
Figure 1.17 : Mesure de l'ouverture d'une fissure avec un Fissurotest.....	26
Figure 1.18 : Lunette micrométrique avec réglette interne gradué pour la mesure d'une fissure.....	26
Figure 1.19 : Mesure d'évolution de la fissure avec le déformètre à bille.....	27
Figure 1.20 : La jauge GINGER CEBTP pour le suivi de l'évolution d'une fissure pour expertise.....	27
Figure 1.21 : Mesure d'évolution de la fissure avec un capteur	28

Chapitre 2 :

Figure 2.1 : Schéma de la Poutre étudiée.....	29
Figure 2.2 : Schéma de la Poutre étudiée et sa modélisation par le logiciel SAP 2000.....	29
Figure 2.3 : Schéma de la Poutre étudiée et sa modélisation par le logiciel SAP 2000.....	32
Figure 2.4 : Schéma de la Poutre étudiée et sa modélisation par le logiciel SAP 2000	35
Figure 2.5 : Schéma de la Poutre étudiée et sa modélisation par le logiciel SAP 2000.....	37

Figure 2.6 : (a) la poutre étudiée ; (b) mode ressort de la poutre fissurée.....	40
Figure 2.7 : Raideur proportionnelle des différents modèles.....	42
Figure 2.8: Poutre avec une fissure et son modèle d'élément fini.....	42
Figure 2.9 : (a) Poutre avec une fissure; (b) Modèle de la poutre fissurée.....	44
Figure 2.10 : (a) Poutre avec une fissure; (b) Modèle de la poutre fissurée.....	45
<u>Chapitre 3 :</u>	
Fig. 3.1 : Schématisation d'une poutre	48
Fig. 3.2 : Discrétisation en éléments finis d'un treillis plan	48
Fig. 3.3 : Discrétisation en éléments finis d'un portique plan	49
Fig. 3.4 : Exemples de modélisation par la M.E.F	50
Fig. 3.5 : Géométrie d'un élément barre	52
Fig. 3.6 : Modélisation d'un élément barre.....	52
Fig. 3.7 : Élément barre dans le repère local (\bar{x}, \bar{y})	53
Fig. 3.8 : Élément dans le repère global	56
Fig. 3.9 : Élément barre spatiale	56
Fig. 3.10 : Élément poutre dans le plan avec 6 degrés de liberté	58
Fig. 3.11 : Élément poutre en torsion	62
Fig. 3.12 : Élément poutre tridimensionnelle	64
Fig. 3.13 : Axes locaux d'un élément poutre	65
Fig. 3.14 : Rotations des axes pour un élément poutre tridimensionnelle.....	65
Fig. 3.15 : Axes principaux d'un élément poutre.....	66
Fig. 3.16 : Rotations correspondant à un élément vertical.....	67
Fig. 3.17 : Charges sur un élément	69
Fig. 3.18 : Cas du poids propre d'une barre d'un treillis	69
Fig. 3.19 : Organigramme d'analyse linéaire par la M.E.F. d'une structure à de poutres.....	75
<u>Chapitre 4 :</u>	
Figure 4.1: Discrétisation en éléments finis du portique non fissuré.....	76
Figure 4.2: Discrétisation en éléments finis du portique fissuré.....	77
Figure 4.3: Variation du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction de la position de la fissure / l'encastrement.....	78
Figure 4.4: Discrétisation en éléments finis du portique fissuré.....	78
Figure 4.5: Variation du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.....	79

Figure 4.6: Variation du moment fléchissant dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.....	80
Figure 4.7: Variation du l'effort normal dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.....	80
Figure 4.8: Discrétisation en éléments finis du portique fissuré.....	81
Figure 4.9: Variation du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.....	82
Figure 4.10: Variation du moment fléchissant dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.....	83
Figure 4.11: Variation du l'effort normal dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.....	83
Figure 4.12: Discrétisation en éléments finis du portique non fissuré.....	84
Figure 4.13: L'accélérogramme du El-Centro.....	85
Figure 4.14: Discrétisation en éléments finis du portique fissuré.....	86
Figure 4.15: Variation du déplacement horizontal maximal du portique fissuré en fonction de la position de la fissure / l'encastrement.....	87
Figure 4.16: Discrétisation en éléments finis du portique fissuré	87
Figure 4.17: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.....	88
Figure 4.18: Variation du déplacement horizontal maximal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.....	89
Figure 4.19: Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.....	89
Figure 4.20: Variation du l'effort normal maximal dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.....	90
Figure 4.21: Discrétisation en éléments finis du portique fissuré.....	91
Figure 4.22: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.....	92
Figure 4.23: variation du déplacement horizontal maximal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.....	92
Figure 4.24: Discrétisation en éléments finis du portique fissuré.....	93

Figure 4.25: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.....	94
Figure 4.26: Variation du déplacement horizontal maximal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.....	95
Figure 4.27: Discrétisation de la structure non fissuré par SAP 2000	96
Figure 4.28: Discrétisation en éléments finis de la structure a barres non fissuré.....	97
Figure 4.29: Discrétisation en éléments finis de la structure a barres fissuré (12 fissures)...	98
Figure 4.30: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.....	99
Figure 4.31 : Variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.....	100
Figure 4.32 : Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.....	100
Figure 4.33 : Variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.....	101
Figure 4.34 : Variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction	101
Figure 4.35 : Variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.....	102
Figure 4.36: Discrétisation en éléments finis de la structure a barres fissuré (24 fissures)..	103
Figure 4.37: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.....	104
Figure 4.38 : Variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.....	104
Figure 4.39 : Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.....	105
Figure 4.40 : Variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.....	105
Figure 4.41 : Variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.....	106
Figure 4.42 : Variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.....	106

Figure 4.43: Discrétisation en éléments finis de la structure a barres fissuré (36 fissures)..	108
Figure 4.44: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.....	108
Figure 4.45 : Variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.....	109
Figure 4.46 : Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.....	110
Figure 4.47 : Variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.....	110
Figure 4.48 : Variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction	111
Figure 4.49 : Variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.....	111
Figure 4.50: Discrétisation en éléments finis de la structure a barres fissuré (48 fissures...)	113
Figure 4.51: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.....	113
Figure 4.52 : Variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.....	114
Figure 4.53 : Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.....	115
Figure 4.54 : Variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.....	115
Figure 4.55 : Variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction	116
Figure 4.56 : Variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.....	116
Figure 4.57: Discrétisation en éléments finis de la structure a barres fissuré (60 fissures)..	118
Figure 4.58: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.....	118
Figure 4.59 : Variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.....	119
Figure 4.60 : Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur.....	120

Figure 4.61 : Variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.....	120
Figure 4.62 : Variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction	120
Figure 4.63 : Variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.....	121
Figure 4.64 : Discrétisation en éléments finis de la structure a barres fissuré (72 fissures)..	122
Figure 4.65 : Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.....	123
Figure 4.66 : Variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.....	124
Figure 4.67 : Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.....	124
Figure 4.68 : Variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.....	125
Figure 4.69 : Variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.....	125
Figure 4.70 : Variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.....	126
Figure 4.71 : Valeurs du D_x , max pour tous les cas étudié	128

Introduction Générale

La rupture est un problème auquel l'homme aura à faire face aussi longtemps qu'il construira des édifices ou fabriquera des structures. Ce problème est actuellement plus crucial avec le développement de structures complexes lié au progrès technologique. Les avancées dans la connaissance de la mécanique de la rupture permettent aujourd'hui et plus précisément depuis le milieu du 20^{ème} siècle, de mieux prévenir le risque de rupture. Cependant, beaucoup de mécanismes de rupture sont encore mal connus notamment lorsqu'on utilise de nouveaux matériaux ou de nouveaux procédés.

Le coût des ruptures catastrophiques représente, d'après une étude économique du début des années 80, près de 4% du (PNB) dans les pays industriels développés. On pourrait réduire ce coût d'environ 30% si on appliquait correctement les concepts connus de la mécanique de la rupture et de 25% supplémentaires par le développement des recherches dans le domaine de la rupture. (Griffith, 1920)

Les premiers essais de rupture ont été menés par Léonard Vinci bien avant la révolution Industrielle. Il a montré que la résistance à la traction de fils de fer varie inversement avec leur longueur. Ces résultats suggèrent que les défauts contenus dans le matériau contrôlaient sa résistance ; plus le volume est important (fil de fer long) plus la probabilité de présence de fissure par exemple est importante.

Cette interprétation qualitative fut précisée plus tard en 1920 par Griffith qui a établi une relation directe entre la taille du défaut et la contrainte de rupture. S'appuyant sur les travaux de Inglis, Griffith appliqua l'analyse des contraintes autour d'un trou elliptique à la propagation instable d'une fissure ; il formule ainsi à partir du premier principe de la thermodynamique, une théorie de la rupture. (Griffith, 1920)

Selon cette théorie, un défaut devient instable et conduit à la rupture lorsque la variation d'énergie liée à une propagation du défaut atteint l'énergie spécifique du matériau. Cette théorie prédit correctement la relation entre la contrainte de rupture et la taille du défaut dans les matériaux fragiles.

La période entre 1960 et 1980 vit une intensification des recherches sur la rupture avec deux écoles qui s'affrontaient. D'une part les tenants de l'approche utilisant la mécanique linéaire de la rupture et ceux qui s'intéressaient essentiellement à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure. (Griffith, 1920)

Plus récemment encore, de nouvelles approches tentent de relier le comportement local à l'échelle microscopique au comportement global lors de la rupture d'un matériau. Ces approches micro-macro deviennent parfois nécessaires lorsqu'on atteint les limites d'utilisation des autres approches plus classiques.

La structure présentant une ou plusieurs fissures est un système qui a une altération ponctuelle bien spécifique dans sa rigidité. Plusieurs travaux ont défini cette raideur spécifique due à la fissure basée sur des travaux théoriques et/ou expérimentaux. La remarque à poser est :

Comment se comporte une structure ayant des fissures vis-à-vis à des actions statiques ou dynamiques. Pour cela, une recherche a été faite sur les différentes approches adaptées pour la modélisation de l'élément « fissure » qui est un ressort ponctuel ayant une raideur proportionnelle à la fissure.

Par la suite, il était indispensable d'évaluer l'effet des fissures sur le comportement statique et dynamique d'une structure composée de barre par plusieurs simulations numériques.

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à une synthèse bibliographique sur le phénomène de la fissuration. Le deuxième chapitre est réservé pour les modèles numériques de la barre fissurée basée sur la méthode des éléments finis. Le modèle élément fini barre avec fissure ou plusieurs fissures intermédiaires sont présentées dans le troisième chapitre et Le dernier chapitre présente la partie numérique de ce travail. Pour cela nous avons utilisé le code de calcul en éléments SAP 2000 pour la modélisation et résolutions des structures fissurées. Un programme écrit avec le code MATLAB est élaboré pour le calcul numérique des barres fissurées.

Enfin, le travail est clôturé par une conclusion rassemblant tous les principaux résultats obtenus ainsi que des suggestions pour d'éventuelles futures études.

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

1.1. Introduction :

La théorie de la fissuration décrit le comportement des solides ou structures présentant des discontinuités géométriques macroscopiques à l'échelle de la structure, discontinuités linéiques dans les milieux considérés comme bidimensionnels (plaques, coques), discontinuités surfaciques dans les milieux tridimensionnels ; et elle permet de prévoir l'apparition d'une fissure macroscopique et prévoir l'évolution de la fissure jusqu'à la rupture complète de la structure.

Dans les calculs de structures, ces discontinuités doivent être prises en compte car elles modifient les champs de contraintes, déformations et déplacements.

L'analyse d'évènements historiques, les études et les recherches techniques font que les experts en fissures ont acquis des connaissances précises sur le phénomène de fissuration. Ils savent, par exemple, que certains facteurs, notamment chargements cycliques, favorisent l'apparition de fissures dans les ouvrages ou les machines.

L'analyse des fissures permet de comprendre l'origine de fissures et leur évolution. L'analyse peut servir à identifier le plus tôt possible les véritables menaces, pour l'intégrité des structures.

Dans ce chapitre nous présentons d'une manière succincte une introduction générale sur la mécanique de la rupture basée sur le bilan énergétique, la mécanique de la rupture élastique, élastoplastique, dynamique et les méthodes expérimentales pour mesurer la fissuration.

1.1.1. Mécanique de la rupture :

La mécanique de la rupture est une étude qui met en jeu les paramètres habituels de la mécanique à partir d'une discontinuité existante : fissure ou défaut. Elle permet dans certains cas de prévoir, en fonction des dimensions d'une fissure et de l'état de chargement, la vitesse de propagation de la fissure et la dimension à partir de laquelle cette fissure peut entraîner une rupture brutale.

La propagation des fissures peut se faire de manière brutale ou progressive.

Le tableau 1.1 montre les différents types de rupture évoqués. En effet, chacun de ces types de rupture correspond à un ensemble d'hypothèses de définitions et d'analyses.

Loi de Comportement	Brutale	Progressive
Elastique	Rupture fragile	Rupture par fatigue à grand nombre de cycle
Elasto-plastique	Rupture ductile	Rupture par fatigue oligo-cyclique

Tableau 1.1 : Différents types de fissuration.

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

1.1.2. Modes de rupture :

Il existe trois façons d'appliquer une force pour permettre à une fissure de se propager :

Mode I : Une contrainte de traction normale au plan de fissure.

Mode II : Une contrainte de cisaillement agissant parallèlement au plan de la fissure et perpendiculaire au front de fissure.

Mode III : Une contrainte de cisaillement agissant parallèlement au plan de la fissure et parallèlement au front de fissure.

De manière générale, une fissure se propage dans un matériau sous une combinaison de contraintes dans les trois modes.

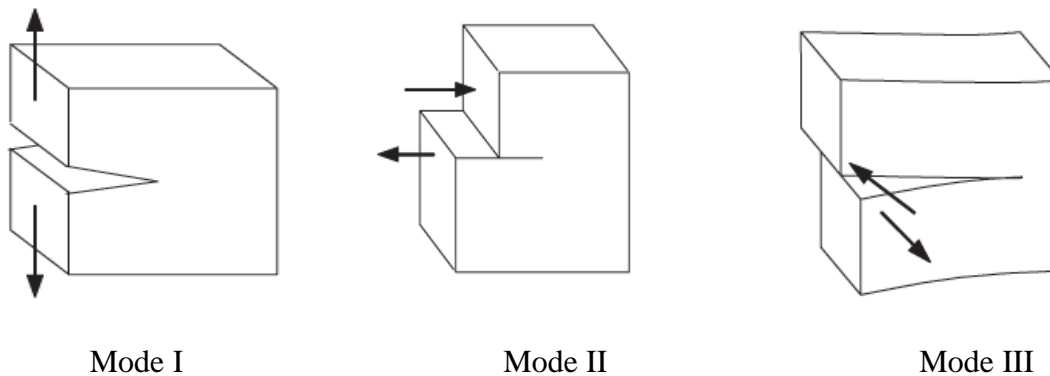


Figure 1.1 : Les trois modes de rupture.

1.2. Mécanique de la rupture basée sur le bilan énergétique :

C'est à Griffith que l'on doit en 1920 l'approche énergétique de la mécanique de la rupture. Dans un milieu solide élastique linéaire (avec la limite élastique conventionnelle à 0,2 % R_e égale à la résistance à la rupture R_r), contenant une fissure de surface A et soumis à un champ de forces F_e . La progression de la fissure est stable tant que l'énergie libérée par l'extension de cette fissure est absorbée par la création de nouvelles surfaces. (Griffith, 1920)

Considérer l'équilibre d'un milieu linéairement élastique contenant une fissure ; une géométrie spéciale, appelée la double poutre en porte-à-faux est illustrée comme exemple dans la figure 1.2.

Cet échantillon contient une fissure de la longueur a et les autres quantités géométriques appropriées sont montrées dans la figure 1.2; indiquant que toutes les charges sont considérées selon l'épaisseur d'unité. Toute l'énergie du système E peut être divisée en deux composantes Π : énergie potentiel et l'énergie liée à la fissure U_s .

$$E = \Pi + U_s \quad (1.1)$$

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

L'énergie potentielle est la somme du travail effectué par les forces externes appliquées W_E et l'énergie stockée dans le système U .

U_s Est défini à l'origine par Griffith comme énergie extérieure de la fissure.

Orowan a généralisé ceci pour inclure la dissipation en plastique pendant la création de la surface et nous peut être considéré comme étant ainsi généralement l'énergie de rupture selon l'unité de superficie de la surface de la fissure et n'être pas particulièrement attribué à l'énergie extérieure. Nous considérons un problème quasi statique et par conséquent l'énergie cinétique a été négligée. (Krishnaswamy et Al, 1948)

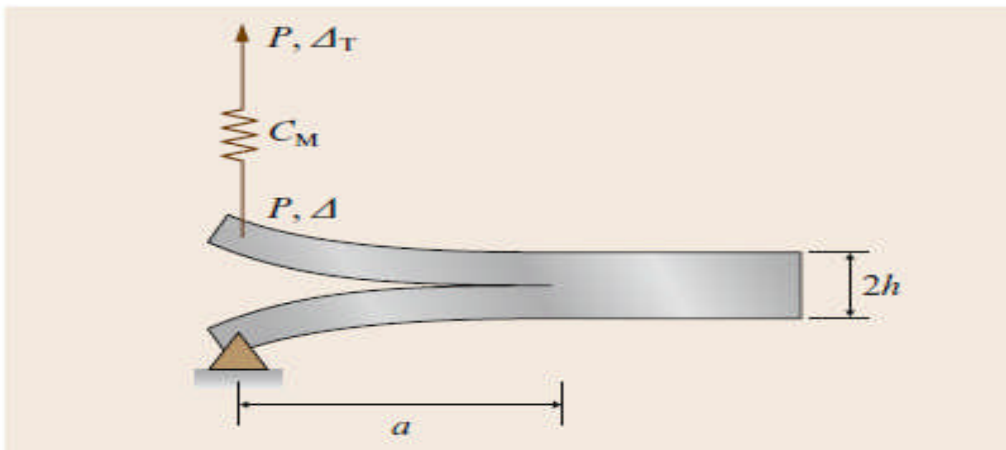


Figure 1.2 : La géométrie du double échantillon de rupture de la poutre en porte-à-faux.

L'énergie du système doit être un extremum quand le système est à l'équilibre ainsi $dE/dA = 0$, où A représente la superficie de la fissure, ce qui pour l'épaisseur d'unité considéré est égal à la longueur a de la fissure.

Nous définissons le taux de dégagement d'énergie potentielle selon la superficie d'unité de la fissure G et la résistance de rupture selon la superficie d'unité R :

$$G(a) = -\frac{d\Pi}{da} \quad , \quad R = \frac{dU_s}{da} \quad (1.2)$$

L'état d'équilibre peut être écrit comme expression que l'énergie potentielle relâchée par le corps en prolongeant la fissure est égale à la résistance de rupture :

$$G(a_c) = R \quad (1.3)$$

Le taux de dégagement d'énergie potentielle peut être calculé à la charge fixe (P) :

$$G = \frac{1}{2} P^2 \frac{dC(a)}{da} \quad (1.4)$$

La longueur de la fissure d'équilibre peut être écrite en termes de la flèche de la poutre ou la charge appliquée :

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

$$a_c = \left(\frac{3Eh^3 \Delta^2}{16R} \right)^{1/4} = \left(\frac{Eh^3 R}{12P^2} \right)^{1/2} \quad (1.5)$$

1.2.1. Taux de restitution d'énergie :

Le premier principe de la thermodynamique, appliqué à une structure fissurée en milieu élastique linéaire sans échange thermique, précise la conservation de l'énergie totale de la structure qui s'écrit : (Griffith, 1920)

$$dw(\varepsilon) - dw_{ext} - dw_s - dE_c = 0 \quad (1.6)$$

Où $w(\varepsilon)$: densité d'énergie de déformation de la structure, $dw(\varepsilon)$: variation de $w(\varepsilon)$.

w_{ext} : Le travail des efforts extérieurs, dw_{ext} : variation de w_{ext} .

$$w_{pot} = w(\varepsilon) - w_{ext} \text{ alors } dw_{pot} = dw(\varepsilon) - dw_{ext} \quad (1.7)$$

w_{pot} : Energie potentielle totale

dw_{pot} : Variation de l'énergie potentielle

w_s : Energie irréversible au fond de la fissure, dw_s : variation de w_s .

E_c : Energie cinétique.

dE_c : La variation de l'énergie cinétique de la fissure.

Lors d'un accroissement de (ds) de la surface de la fissure, il y aura :

$$dE_c > 0 \text{ Et donc : } \frac{d}{ds}(w_{pot}) - \frac{dw_s}{ds} \geq 0 \text{ ou autrement :}$$

$$\frac{d}{ds}(w(\varepsilon) - w_{ext}) - \frac{dw_s}{ds} \geq 0 \quad (1.8)$$

Avec $\frac{d}{ds}(w(\varepsilon) - w_{ext}) = \frac{d}{ds} w_{pot} = G$, G : taux de restitution d'énergie.

On définit γ par :

$$\frac{dw_s}{ds} = 2 \cdot \gamma, \text{ qui est un paramètre intrinsèque du matériau.}$$

Pour qu'il ait fissuration, il faut que :

$$G \geq 2 \cdot \gamma$$

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

G représente la quantité d'énergie que la structure est susceptible de libérer au cours d'une propagation unitaire. Elle donne donc le même type d'information qu'un facteur d'intensité de contraintes.

- *Cas particulier :*

✓ Lorsqu'il s'agit de fissure n'affectant pas, lors de sa propagation, les conditions aux limites appliquée à la pièce, le travail des efforts extérieurs w_{ext} ne varie pas, on écrit donc :

$$G = \frac{dw_{pot}}{ds} = \frac{dw(\varepsilon)}{ds} \quad (1.9)$$

✓ Pour une fissuration en milieu bidimensionnel, d'épaisseur b , on écrit : $ds = b \cdot da$

G s'écrit alors : $G = \frac{1}{b} \cdot \frac{dw_{pot}}{da}$ où da est l'accroissement de la fissure.

✓ Pour une épaisseur unité : $G = \frac{dw_{pot}}{da}$.

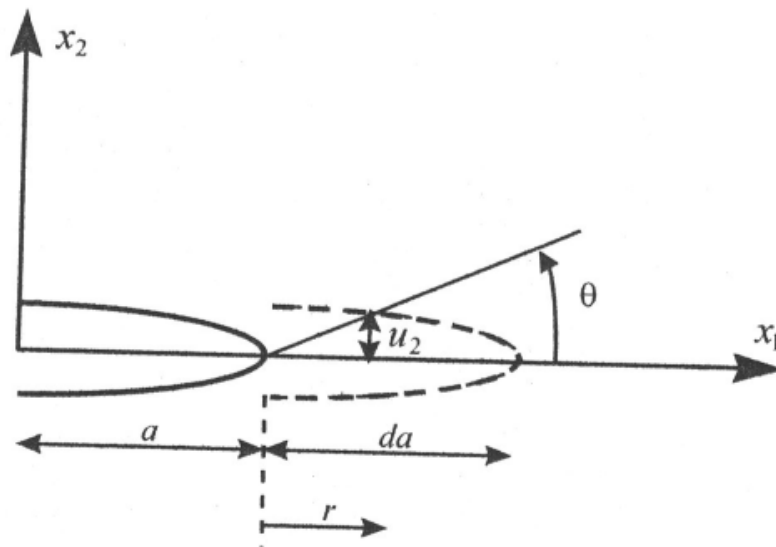


Figure 1.3 : Accroissement d'une fissure.

✓ En milieu infini bidimensionnel en monde I , la relation entre G et K_I s'écrit comme suit [2] :

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (1.10)$$

Avec : $E' = E$ en contrainte plane. Et ν : Coefficient Poisson

$E' = E/(1 - \nu^2)$ en déformation plane.

✓ La relation entre G , (K_I, K_{II}, K_{III}) en milieu élastique linéaire bidimensionnel est [2] :

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E} + \frac{K_{III}^2}{2 \cdot \mu} \quad (1.11)$$

μ : Module de cisaillement (E'), avec $E' = E$ en contrainte plane.

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \text{En déformation plane.}$$

1.2.2. Intégrale de contour « J » :

Le taux de restitution d'énergie peut s'écrire sous la forme d'une intégrale de contour appelée (J) (Griffith, 1920). L'expression de cette intégrale a été introduite par Rice et par Cherepanov (figure 1.4) :

$$J = \int_{\Gamma} [w n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\delta u_i}{\delta x_1}] ds \quad (1.12)$$

Où w : densité d'énergie de déformation.

u_i : Vecteur des déplacements.

Γ : Le contour de l'intégration.

n_j : Normale tournée vers l'extérieur du contour Γ .

s : Longueur du contour Γ .

Le contour Γ doit être orienté tel qu'il est représenté sur la figure (1.4).

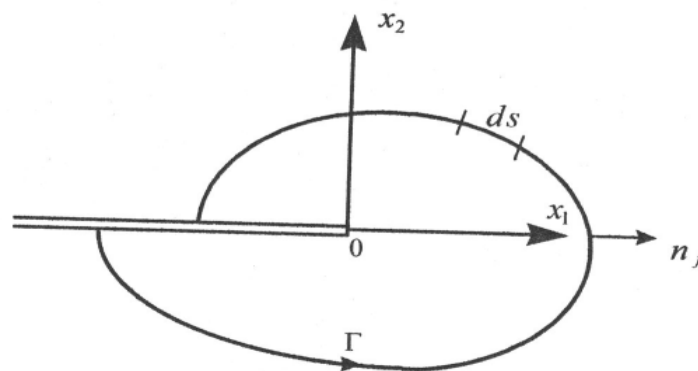


Figure 1.4 : Le contour d'intégration Γ .

Cette intégrale de contour a les propriétés suivantes :

- ✓ J est indépendant du contour (Γ) choisi.
- ✓ Lorsque le contour est placé au milieu élastique linéaire, avec une fissuration rectiligne alors, dans ce cas l'intégrale J est identique au taux de restitution d'énergie.

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

$$J = G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E} \quad (1.13)$$

- ✓ La propriété d'invariance de (J) par rapport au contour permet de définir une caractéristique mécanique de la fissuration à partir d'information « au loin ». Cette particularité est intéressante sur le plan numérique où on utilise des champs « lointains » dont l'approximation par élément finis est beaucoup plus précise que celle des champs « proches »

1.2.3. L'intégrale du domaine équivalent :

Pour les problèmes de fissuration bidimensionnels en mode I, la méthode de l'intégrale du domaine équivalent remplace l'intégration le long du contour par une intégration sur une surface (A) finie en utilisant le théorème de divergence (figure 1.5) :

$$J = - \int_A \left[w \frac{\delta s}{\delta x_1} - \sigma_{ij} \frac{\delta u_i}{\delta x_1} \frac{\delta s}{\delta x_j} \right] dA - \int_A \left\{ \frac{\delta w}{\delta x_1} - \sigma_{ij} \frac{\delta}{\delta x_j} \left[\frac{\delta u_i}{\delta x_1} \right] \right\} S dA \quad (1.14)$$

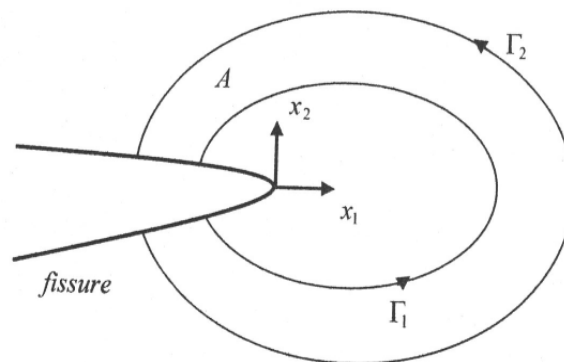


Figure 1.5 : Surface utilisée pour le calcul de l'intégrale du domaine équivalent J.

Où s est une fonction continue sur le domaine introduite dans le calcul par la méthode des éléments finis (chapitre II). Pour le cas des matériaux élastiques, le deuxième terme dans l'équation (1.14) disparaît, cette équation devient :

$$J = - \int_A \left[w \frac{\delta s}{\delta x_1} - \sigma_{ij} \frac{\delta u_i}{\delta x_1} \frac{\delta s}{\delta x_j} \right] dA \quad (1.15)$$

1.2.4. Intégrale de Bui :

Bui a défini une intégrale duale de l'intégrale J notée I telle que (Bui, 1978):

$$I = \int_{\Gamma} \left[w^* n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\delta u_i}{\delta x_1} \right] ds \quad (1.16)$$

w^* : Densité d'énergie complémentaire de déformation élastique.

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

Dans le cas de l'élasticité linéaire, l'intégrale I est aussi indépendante du contour Γ (figure 1.4) et elle est égale à l'intégrale J .

1.2.5. La densité d'énergie de déformation(S) :

Les paramètres G , J et I sont le résultat d'un bilan énergétique, entre la configuration avant et après propagation de la fissure. Une étude énergétique local (dans le champ singulier) permet d'aboutir au calcul de la densité d'énergie volumique de déformation dans une direction θ , notée S (figure 1.6).

L'expression de la densité de l'énergie de déformation $w(\varepsilon)$ en élasticité linéaire et en milieu tridimensionnel

$$w(\varepsilon) = \int \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot [\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \cdot \varepsilon_{33} + 2 \cdot (\sigma_{12} \cdot \varepsilon_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{23} \cdot \varepsilon_{23})] \quad (1.17)$$

En considérant la loi de comportement élastique linéaire, on obtient :

$$w(\varepsilon) = \frac{1 + \nu}{2 \cdot E} \cdot \left[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \frac{\nu}{\nu + 1} \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 \right] \quad (1.18)$$

La densité d'énergie volumique de déformation S est définie dans la direction θ et à une distance r correspondant à la zone singulière ; elle est donnée par l'équation suivante :

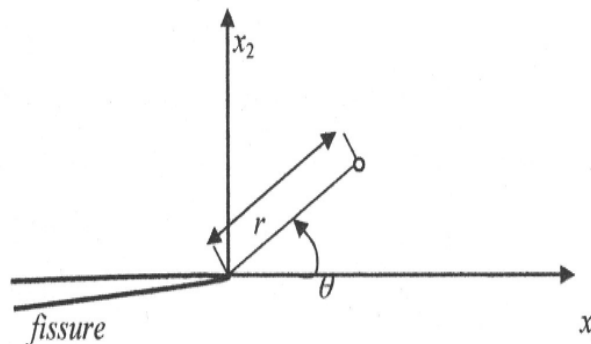
$$s(\theta) = r w(\varepsilon) \quad (1.19)$$


Figure 1.6: Repérage du point de calcul $s(\theta)$.

Pour tout problème plan, on peut écrire S en fonction des facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} :

$$S = a_{11} \cdot K_I^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot K_I \cdot K_{II} + a_{22} \cdot K_{II}^2 \quad (1.20)$$

Avec :

$$16 \cdot \mu \cdot a_{11} = (3 - 4 \cdot \nu \cdot \cos \theta) \cdot (1 + \cos \theta)$$

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

$$16 \cdot \mu \cdot a_{12} = 2 \cdot \sin \theta \cdot (\cos \theta - 1 + 2 \cdot \nu)$$

$$16 \cdot \mu \cdot a_{21} = 4 \cdot (1 - \nu)(1 - \cos \theta) + (3 \cdot \cos \theta - 1)(1 + \cos \theta)$$

μ : Module de cisaillement.

1.2.6. Propagation :

Nous avons présenté les méthodes permettant la détermination des champs de contraintes, déformations et déplacements dans un milieu fissuré et notamment au voisinage de la pointe de la fissure dans le milieu fissuré, autrement dit prévoir sa propagation, en utilisant les critères de propagation. (Recho, 1995).

1.2.6. 1. Critères de propagation :

Ces critères nous permettent de savoir si la fissure a tendance à se propager et à quelle condition commence-t-elle à se propager.

- Critère du facteur d'intensité des contraintes :

Dans le cas d'un problème en Mode I pur (ouverture symétrique), lorsque le facteur d'intensité de contraintes atteint sa valeur critique K_{Ic} , la propagation de la fissure se produit.

Ce critère est formulé par :

$$K_I = K_{Ic} \quad (1.21)$$

K_{Ic} : est une caractéristique physique du matériau, appelée la ténacité du matériau, déterminée expérimentalement.

- Critère du taux de restitution d'énergie G : Un des premiers critères de rupture a été établi par Griffith en 1920 « la rupture se produit lorsque l'énergie restituée par l'extension de la fissure est supérieure à l'énergie nécessaire à créer la surface relative à cette extension ».

Pour les matériaux élastiques fragiles, G_c ne dépend que la caractéristique du matériau γ

$$G_c = 2 \cdot \gamma \quad (1.22)$$

- Intégrale de Rice J :

D'après la théorie de Griffith, il y aura propagation lorsque :

$$J > J_R \quad (1.23)$$

J_R : est un paramètre caractéristique du matériau étudié ; des expériences permettent d'obtenir une courbe donnant la résistance du matériau à l'extension d'une fissure :

$$J_R = F(\Delta a) \quad (1.24)$$

Δa : Croissement de fissure

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

- Densité d'énergie de déformation S :

Sih a introduit un critère de la densité de déformation minimale qui permet de calculer l'angle de déviation θ_0 (Sih, 1973). La propagation commence lorsque « S » atteint une valeur critique caractéristique du matériau S_c :

$$S_{min} = S_c \quad (1.25)$$

Dans le cas d'un problème en mode I pur, la valeur critique S_c peut être obtenue par la valeur critique K_{Ic} , en déformation plane :

$$S_c = \frac{(1 + \nu)(1 - 2 \cdot \nu)}{2 \cdot \pi \cdot E} \cdot K_{Ic}^2 \quad (1.26)$$

1.2.6. 2. Bifurcation de la fissure :

Les paramètres qui ont été définis jusqu'à présent, permettent de caractériser les champs de contraintes, de déformations et de déplacements à la pointe de la fissure dans une structure donnée. Il reste à trouver la direction de propagation de la fissure. Nous avons retenu deux critères de bifurcation parmi les plus largement utilisés (Recho, 1995) :

- Le premier s'établit à partir de la densité de l'énergie de déformation.
- Le deuxième est le critère du maximum du taux de restitution d'énergie.

- Critère de la densité d'énergie de déformation minimale :

Selon ce critère introduit par Sih en 1973, la fissure initiale dans la direction θ_0 pour laquelle la densité de l'énergie de déformation est minimale :

$$\left(\frac{dS}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0} = 0 \Rightarrow S_{min} = S(\theta_0) \quad (1.27)$$

Dans la majorité des problèmes réels, les fissures sont souvent en mode I, les densités d'énergie de déformations sont données comme suit :

- En déformation plane :

$$S_I = \frac{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{2\pi \cdot E} \cdot K_I^2 \quad (1.28)$$

$$\text{Or } G_I = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \cdot K_I^2 \quad (1.29)$$

$$\text{Donc } S_I = \frac{(1 - 2 \cdot \nu)}{2 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot G_I \quad (1.30)$$

- En contrainte plane :

$$S_I = \frac{(1 - \nu)}{2 \cdot \pi \cdot E} \cdot K_I^2 \quad (1.31)$$

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

$$\text{Or} \quad G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad (1.32)$$

$$\text{Donc} \quad S_I = \frac{(1-\nu)}{2\pi} \cdot G_I \quad (1.33)$$

- Critère de taux de restitution d'énergie maximum :

Parmi tous les accroissements virtuels et cinématiquement admissibles, l'accroissement réel est celui qui maximise le taux de restitution d'énergie [2]. L'angle de déviation peut alors être déterminé par :

$$\left(\frac{dG}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0} = 0 \Rightarrow G_{max} = G(\theta_0) \quad (1.34)$$

1.3. Mécanique de la rupture élastique :

La mécanique linéaire élastique de la rupture suppose d'abord que le matériau est isotrope et élastique linéaire. Sur la base de l'hypothèse, le champ de contraintes près de la pointe de la fissure est calculé selon la théorie de l'élasticité. Lorsque les contraintes près de la pointe de la fissure dépassent la ténacité de la matière, la fissure va croître.

En mécanique de la rupture élastique linéaire, la plupart des formules sont dérivées soit pour contraintes planes ou déformations planes, associées aux trois modes de base de charges sur un corps fissuré: l'ouverture, de glissement, et cisaillement.

Encore une fois, La mécanique linéaire élastique de la rupture n'est valable que lorsque la déformation élastique est petite par rapport à la taille de la fissure, ce que nous appelons à petite échelle rendement.

1.3.1. Facteur d'intensité des contraintes:

Le résultat du calcul analytique montre qu'en coordonnées polaires (r, θ) le premier terme du développement limité du champ des contraintes s'écrit en $r^{-1/2}$ quelles que soient les conditions de chargement et la géométrie de l'éprouvette. Plus précisément, on peut toujours l'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (1.35)$$

La constante K est fonction du chargement et de la géométrie de l'éprouvette, et s'appelle *facteur d'intensité des contraintes*. C'est cette quantité qui est utilisée pour décrire le niveau du chargement au voisinage de la fissure et dimensionner la structure, plutôt que la "contrainte maximale". Ainsi, au lieu de ne considérer que le point où se trouve le "maximum", l'ensemble de la singularité spatiale du champ des contraintes est pris en compte.

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

Le facteur d'intensité des contraintes peut évoquer, par son rôle, les coefficients de concentration de contraintes utilisés pour dimensionner les structures comportant des accidents géométriques. Il est vrai que ces deux grandeurs décrivent la solution au voisinage du défaut et peuvent être trouvées dans des abaques ou des formulaires pour un grand nombre de problèmes-type. Cependant, l'analogie s'arrête là : les coefficients de concentration de contraintes sont des nombres sans dimension donnant directement la valeur maximale de la contrainte, tandis que le facteur d'intensité des contraintes s'exprime en $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ (c'est-à-dire le produit d'une contrainte par la racine carrée d'une longueur) et caractérise l'ensemble du champ des contraintes autour de la pointe de fissure.

1.3.2. Détermination des champs de contraintes et de déplacements au voisinage d'une fissure (résolution de Westergaard):

Westergaard ramène la recherche d'une solution au problème d'élasticité plane, à trouver pour chaque mode de fissuration, une fonction harmonique complexe dont l'expression dépend de la forme de la fissure et du type de chargement (Sih, 1966). Les résultats sont résumés de la manière suivante :

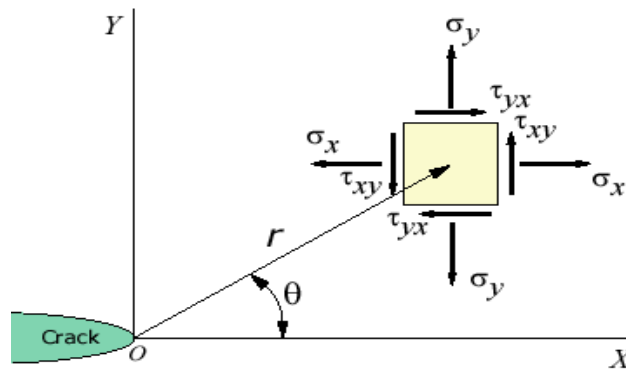


Figure 1.7 : Distribution des contraintes.

Où les exposants et indices *I*, *II*, *III* et désignent les trois modes différents que les charges peuvent être appliquées à une fissure. La distribution détaillée des contraintes et des déplacements pour chaque mode sont résumées comme suite. Le facteur *K* est appelé le facteur d'intensité de contraintes.

Mode I :

- Contraintes :

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (1.36)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (1.37)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} 0 & (\text{en contrainte plane}) \\ \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & (\text{en déformation plane}) \end{cases} \quad (1.38)$$

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (1.39)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.40)$$

Le facteur K est appelé le facteur d'intensité de contraintes.

- **Déplacements :**

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (1.41)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (1.42)$$

$$u_z = 0 \quad (1.43)$$

$$k = \begin{cases} 3 - 4\nu & (\text{en déformation plane}) \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & (\text{en contrainte plane}) \end{cases} \quad (1.44)$$

μ : Module de cisaillement, ν : Coefficient de Poisson.

Mode II :

- **Contraintes :**

$$\sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (1.45)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (1.46)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} 0 & (\text{en contrainte plane}) \\ \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & (\text{en déformation plane}) \end{cases} \quad (1.47)$$

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (1.48)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.49)$$

- Déplacements :

$$u_x = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (1.50)$$

$$u_y = -\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (1.51)$$

$$u_z = 0 \quad (1.52)$$

Mode III :

- Contraintes :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0 \quad (1.53)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (1.54)$$

$$\tau_{zx} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (1.55)$$

- Déplacements :

$$u_x = u_y = 0 \quad (1.56)$$

$$u_z = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (1.57)$$

Pour les matériaux élastiques linéaires, le principe de superposition s'applique. Un problème en mode mixte peut être considéré comme une sommation de chaque mode.

$$\sigma_{ij}^{(Total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (1.58)$$

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

1.3.3. Facteur d'intensité de contraintes dans la pratique :

Les ingénieurs sont intéressés par la contrainte maximale à proximité de la pointe de la fissure et si elle dépasse la ténacité. Ainsi, le facteur d'intensité de contraintes K est communément exprimée en termes de *contraintes appliquées* σ à $r \rightarrow 0$ et $\theta = 0$.

Par exemple (Figure 1.8), pour une fissure dans une plaque infinie sous tension uniforme σ , le facteur d'intensité de contrainte est:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}, \quad \text{où } a \text{ est la moitié de la largeur de la fissure} \quad (1.59)$$

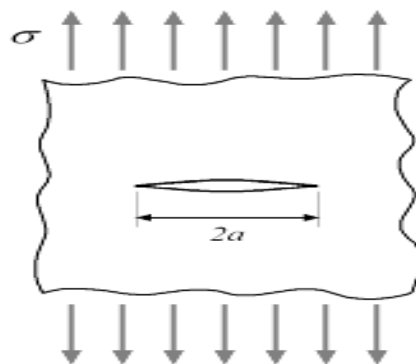


Figure 1.8 : Fissure dans une plaque infinie sous tension.

1.4. Mécanique de la rupture élastoplastique :

1.4.1. Définition d'un comportement élastoplastique :

Un matériau plastique, contrairement aux matériaux élastiques, conserve après décharge une déformation irréversible. Formellement, le comportement plastique est complètement indépendant du temps : il est indépendant de la vitesse de déformation ; cette dernière n'évolue pas lorsque le chargement est maintenu constant.

La déformation d'un matériau élastoplastique comporte une composante élastique réversible et une composante plastique qui ne l'est pas. Typiquement, les métaux possèdent un comportement élastoplastique, tout au moins en première approximation à températures pas trop élevées.

Un matériau élastoplastique est caractérisé par un seuil d'écoulement au-dessous duquel le comportement est purement élastique, alors qu'une fois celui-ci atteint la déformation, alors elle n'est plus réversible.

En toute rigueur, cette dernière est indépendante du temps : elle n'évolue pas si la charge est maintenue constante, elle ne disparaît pas progressivement après décharge. De même, le seuil n'est pas fonction de la vitesse de déformation. En pratique, il en est rarement ainsi et en réalité les matériaux ont le plus souvent un comportement élasto-visco-plastique.

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

Dans les matériaux cristallisés (métaux, céramiques, composés ioniques), la déformation plastique est le résultat du déplacement de défauts du cristal appelés dislocations.

1.4.2. Position du problème :

Dans le plan de la fissure, la courbe représentant :

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad \text{À l'allure donnée sur la figure 1.9 :} \quad (1.60)$$

Dans le plan de la fissure, la courbe représentant σ_y en fonction de r a l'allure donnée par la figure suivante:

σ_y est donnée par la formule ci-dessous

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1.60)$$

On constate que lorsque $r \rightarrow 0$, la contrainte devient infinie, ce qui est en contradiction avec la théorie de l'élasticité.

Il faut donc modifier le modèle de calcul pour tenir compte du phénomène de plasticité en déterminant l'importance et la forme de la zone plastique au moyen des critères de dimensionnement usuels de résistance des matériaux et en corrigeant le facteur d'intensité des contraintes précédent K .

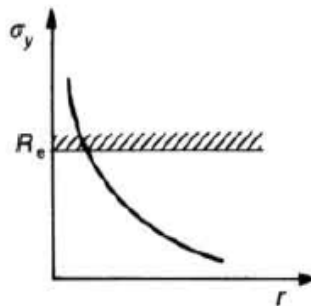


Figure 1.9 : Courbe $\sigma_y = f(r)$

1.4.3. Étendue de la zone plastique :

Autour du fond de la fissure, il existe une zone de déformation plastique dont la frontière est le lieu des points où le champ de contraintes satisfait un critère de limite élastique R_e . On détermine l'étendue de la zone plastique par l'utilisation des critères de Tresca et de Von Mises.

Dans le cas du mode I et en utilisant les équations précédentes, on obtient les résultats suivants concernant la limite de zone de déformation plastique :

$$r = \frac{K_I^2}{2\pi R_e^2} f(\theta) = r_E f(\theta) \quad (1.61)$$

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

Avec $f(\theta)$ fonction présentant les quatre formes possibles données par le tableau suivant :

Critères	Contraintes planes	Déformations planes
Critère de Tresca	$\cos^2 \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2})^2$	$\cos^2 \frac{\theta}{2} (1 - 2\nu + \sin \frac{\theta}{2})^2$
Critère de Von Mises	$\cos^2 \frac{\theta}{2} (1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2})$	$\cos^2 \frac{\theta}{2} [(1 - 2\nu)^2 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2}]$

Tableau 1.2 : les quatre formes possible de $f(\theta)$

La figure 1.6 montre l'étendue des zones plastiques et en particulier, la différence entre l'état de déformations planes et l'état de contraintes planes.

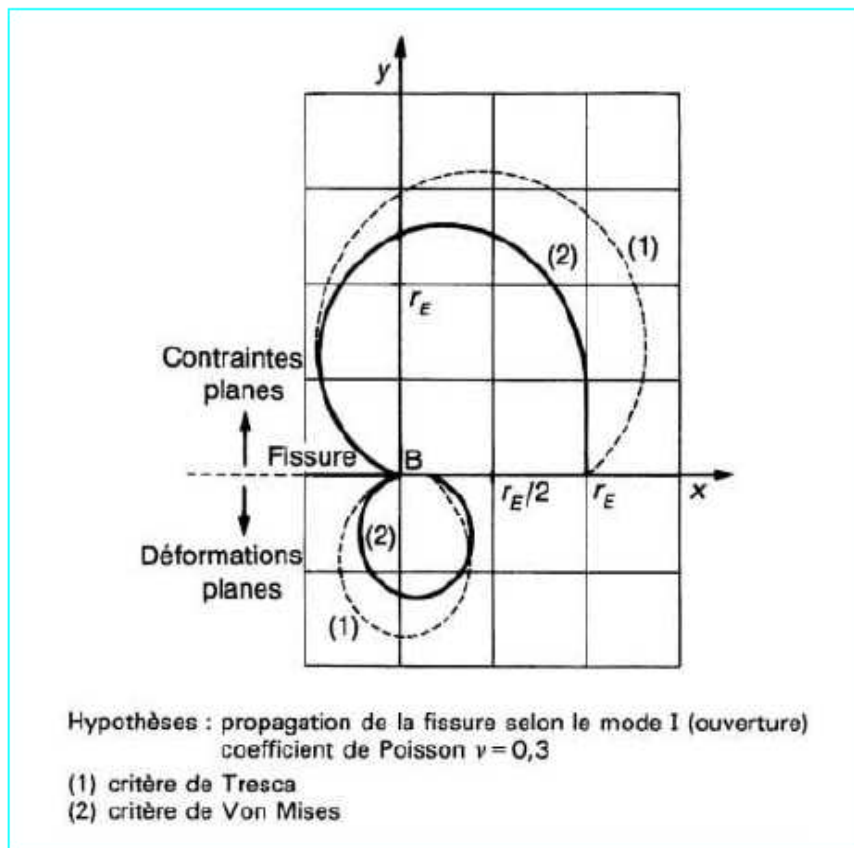


Figure. 1.10 : Étendue des zones plastiques selon les deux critères.

En particulier sur l'axe Bx ($\theta = 0$), on obtient :

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

$$r = \begin{cases} r_E & \text{en contrainte plane} \\ r_E (1 - 2\nu)^2 & \text{en déformation plane} \end{cases} \quad (1.62)$$

$$\text{en posant } r_E = \frac{K_I^2}{2\pi R_E^2} \quad (1.63)$$

L'existence de la forte tri-axialité en déformations planes (au cœur de la structure) tend. On a apte donc à diminuer considérablement la dimension de la zone plastique par rapport à celle régnant en contraintes planes (près de la surface de la structure), dans un rapport proche de 6.

1.4.4. Profil équivalent d'Irwin :

La zone plastique à fond de fissure est en fait plus étendue, car le matériau doit supporter localement une force supplémentaire correspondant à l'aire hachurée (figure 1.11). D'après Irwin la structure se comporte comme si elle contenait une fissure effective a_{eff} égale à :

$$a_{eff} = a + r_E \quad (1.64)$$

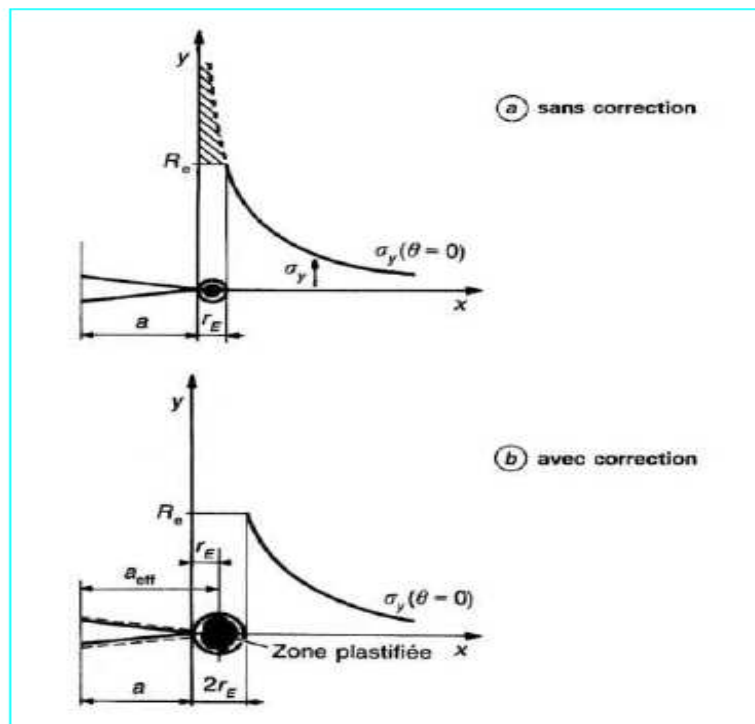


Figure 1.11 : Modèle simple de déformation plastique à la pointe de la fissure, avec ou sans correction d'Irwin.

1.5. Mécanique de la rupture dynamique :

La rupture dynamique est ici abordée d'un point de vue purement mécanique, c'est-à-dire décrite essentiellement par les champs de contrainte et de déformation et les singularités qui leurs sont associées en fond de fissure. Il s'agit de trouver alors les paramètres mécaniques

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

qui décrivent la rupture sous sollicitation rapide transitoire. Plusieurs aspects seront abordés notamment : la ténacité à l'amorçage, la rupture sous chargement mixte traction-cisaillement, la propagation dynamique, ...

1.5.1. La rupture dynamique :

L'étude de la rupture dynamique constitue une branche de la mécanique de la rupture dans laquelle les effets de l'inertie deviennent prépondérants par rapport au chargement, tandis que le taux de déformation possède une influence significative sur les propriétés du matériau et sur l'évolution de la rupture.

L'amorce d'une rupture dynamique ou la propagation dynamique d'une fissure existante peuvent provenir d'un impact subi par la structure concernée ou de l'application brutale d'un chargement de nature à endommager et ainsi de créer des discontinuités dans le matériau.

Les premières recherches concernant la rupture dynamique, de nature empirique, sont relatives au développement de l'artillerie au 19^{ème} siècle avec pour objectif la perforation de cibles. Ce n'est que dans les années 40 que la rupture dynamique devient une science de l'ingénieur en tant que section de la mécanique de la rupture. Son développement a été tout même difficile en raison des particularités des phénomènes de rupture dynamique ; ainsi, l'inhérente dépendance au temps rend les modèles mathématiques beaucoup plus complexes que dans le cas des modèles statiques équivalents. C'est le développement des techniques de calcul qui a permis, à partir des années 70, des progrès importants dans l'étude et la modélisation de la rupture dynamique. En même temps, de nouvelles technologies et systèmes d'acquisition de données sont apparus, conduisant à des mesures expérimentales d'une grande précision dans ce domaine. Ces deux aspects du développement ont joué un rôle complémentaire: d'un côté, la capacité des moyens expérimentaux à fournir des mesures performantes a apporté une nouvelle vision de phénomènes mal connus auparavant, de l'autre les nouvelles techniques de calcul ont assuré une modélisation numérique de plus en plus réaliste de la rupture dynamique dans la mesure où les expérimentations ont permis sa calibration et sa validation.

1.5.2. Caractérisation des champs asymptotiques en pointe de fissure : facteur d'intensité dynamique de contrainte :

La connaissance des champs asymptotiques de contrainte et de déplacement autour de la pointe de fissure, est essentielle pour la compréhension du processus de rupture dynamique.

Une fois les équations qui régissent ces champs connues, les autres paramètres importants

Pour l'étude de la rupture dynamique, comme le facteur d'intensité dynamique de contraintes et le taux de restitution dynamique de l'énergie peuvent être déterminés.

Dans l'étude de l'interaction entre une discontinuité géométrique (la fissure) et le milieu continu avoisinant, la mécanique de la rupture distingue classiquement trois zones successives autour de la tête de la fissure (figure 1.12) :

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

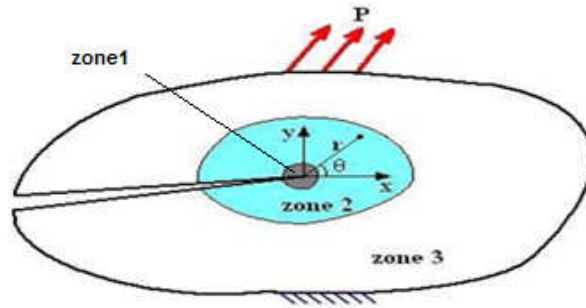


Figure 1.12 : Zones autour de la pointe d'une fissure

– la zone d'élaboration (zone 1) qui se trouve à la pointe de la fissure et dans le sillage laissé par la fissure au cours de sa propagation ; sa taille étant en général très faible, elle est considérée comme ponctuelle d'un point de vue mécanique. Siège de contraintes très importantes qui ont endommagé fortement le matériau, l'étude de cette zone est complexe et dans notre approche est basée sur un modèle de cohésion.

– la zone singulière (zone 2) dans laquelle les champs de déplacement, de déformation et de contrainte sont continus et possèdent une formulation indépendante de la géométrie lointaine de la structure ; quantitativement, cette zone est caractérisée par un facteur multiplicateur appelé facteur d'intensité de contraintes.

– la zone extérieure (zone 3), comprend les champs lointains se raccordant d'une part, à la zone singulière, et d'autre part aux conditions aux limites. La zone singulière de la fissure (zone 2), la plus importante pour la mécanique de la rupture, est caractérisée, d'un point de vue des contraintes et des déplacements, par des champs asymptotiques. Le premier à avoir déterminé et résolu les équations de ces champs, pour le cas statique, a été Irwin en 1957, en s'appuyant sur les travaux de Griffith, montrant que les contraintes au voisinage de la pointe de la fissure ont la forme : (Irwin, 1957)

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) + \sigma_{ij}^{(1)} \quad (1.65)$$

où r et θ sont les coordonnées polaires centrées sur la pointe de la fissure, $K_I - III$: sont les facteurs d'intensité de contraintes pour les trois modes fondamentaux de la rupture,

$f_{ij}^{I-III}(\theta)$: sont des fonctions angulaires connues pour chaque mode et $\sigma_{ij}^{(1)}$ sont les contraintes appliquées au front de la fissure.

Rappelons quelques hypothèses et notations utilisées dans les travaux théoriques en mécanique de la rupture dynamique. Ainsi les fissures sont considérées bidimensionnelles et en milieu semi-infini ; les actions extérieures σ et τ intervenant dans les relations sont appliquées directement sur les lèvres de la fissure.

Certains paramètres et variables spécifiques sont présentés ci-dessous. Ainsi les paramètres de Lamé sont définis comme :

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.66)$$

Où E (module de Young) et ν (coefficient de Poisson), sont les caractéristiques élastiques du matériau.

Les vitesses d'onde de dilatation c_d , et de cisaillement c_s , sont :

$$c_d = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (1.67)$$

Où ρ représente la masse volumique.

On introduit deux coefficients, relatifs aux vitesses évoquées (1.40), définis par :

$$\alpha_d = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_d^2}}, \quad \alpha_s = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_s^2}} \quad (1.68)$$

Où v représente la vitesse d'avancement de la pointe de la fissure.

Considérant un système de coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) , fixé dans l'espace tel que

$Y = 0$ définit le plan de la fissure, il est nécessaire d'introduire également un système de coordonnées (x, y, z) , dont l'origine demeure liée à la pointe de la fissure en mouvement (Figure 1.13).

$$\text{Tel que } x = X - vt \quad (1.69)$$

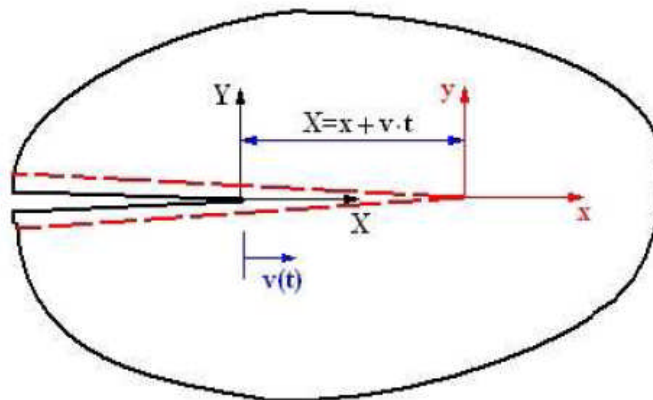


Figure 1.13 : Systèmes référentiels pour la fissure en mouvement

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

1.5.3. Concepts énergétiques en rupture dynamique :

L'une des analyses théoriques de la rupture dynamique la plus performante est basée sur les concepts énergétiques. Elle est en mesure de fournir, par l'implémentation de modèles numériques, les principaux paramètres du phénomène tels que le facteur d'intensité dynamique de contraintes.

Le pionnier des méthodes énergétiques dans l'étude de la rupture a été Griffith qui a compris l'importance de l'évaluation de la variation de l'énergie pendant l'avancement de la fissure fragile. L'extension d'une fissure nécessite la création de nouvelles surfaces avec leur énergie de surface associée et donc, lorsque la fissure avance l'énergie totale du corps diminue d'une quantité égale à l'énergie de création des nouvelles surfaces de discontinuité. Pour un corps élastique fissuré, le taux d'échange du potentiel énergétique total, correspondant aux développements des fissures, s'appelle taux de restitution d'énergie, noté habituellement G .

Par sa définition, G représente ainsi la quantité d'énergie, par unité de longueur de fissure, qui est fournie par l'énergie élastique du corps et du chargement externe pour la création des nouvelles surfaces de la fissure.

L'analyse énergétique de Irwin a montré, pour le cas statique de la rupture, la relation entre G et le facteur d'intensité de contrainte. L'essentiel de son analyse a été d'étudier les deux états énergétiques dans un corps fissuré correspondant aux positions $x = 0$ et $x = \Delta x$ pour la tête de la fissure. On montre ainsi que la variation de l'énergie dans le système est :

$$\Delta W = \int_0^{\Delta x} \sigma(x) u(x) dx = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \left(1 + \frac{\Delta K_I}{K_I} \right) \Delta x \quad (1.70)$$

Où $u(x)$ est le déplacement, suivant la direction perpendiculaire aux bords de la fissure, après l'avancement de celle-ci. Conformément à sa définition énoncée (1.43), le taux de restitution de l'énergie sera exprimé comme :

$$G = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \quad (1.72)$$

1.5.4. Propagation de la fissure dynamique :

La simulation numérique de la propagation d'une fissure dynamique nécessite, à la suite de la caractérisation des champs mécaniques autour de la fissure, un modèle d'évolution. Un tel modèle doit répondre à trois questions essentielles :

- la fissure se propage-t-elle ?
- suivant quelle direction cette propagation va-t-elle se produire ?
- jusqu'où va-t-elle se propager ?

L'ensemble des réponses à ces questions constitue un modèle d'évolution de la fissure dynamique. Il faut différencier toutefois la situation d'une structure vierge de toute fissure mais susceptible de subir une amorce de fissure sous l'action du chargement externe, et le cas d'une structure déjà fissurée, dont on cherche à déterminer l'avancement de celle-ci.

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

Plusieurs travaux expérimentaux et numériques ont été menés pour étudier la propagation de la fissure dynamique.

1.6. Méthodes expérimentales pour l'étude de la fissure:

1.6.1. La photoélasticité :

La photoélasticité est une méthode expérimentale pour déterminer l'effort de distribution dans un matériel. La méthode est la plupart du temps employée dans les cas où les méthodes mathématiques deviennent tout à fait encombrantes. À la différence des méthodes analytiques de détermination d'effort, la photoélasticité donne une image assez précise de distribution d'effort même autour des discontinuités brusques dans un matériel. La méthode sert d'outil important à déterminer les points critiques d'effort dans un matériel et est employée souvent pour déterminer des facteurs de concentration d'effort dans les géométries irréguliers.

La photoélasticité permet une étude détaillée sur les zones chargées. On y observe les zones d'iso-contraintes et leur progression. Cette méthode est très efficace pour l'étude des zones de concentration de contraintes comme : les trous, les encoches, les épaulements... etc.

Une matière plastique transparente est utilisée pour modéliser l'objet de l'étude. Un système optique spécial (polariscope) permet d'observer les variations de contraintes avec les modifications de couleurs de la pièce.

Dans l'exemple ci-contre, on réalise un essai de traction sur un crochet. On remarque bien l'évolution des contraintes dans les zones sensibles car elles changent sans arrêt de couleur. Par contre, vous remarquerez que certaines zones ne changent pas de couleur, ce qui veut dire que les contraintes y sont constantes donc indépendantes de la sollicitation de traction. (Figure 1.14)

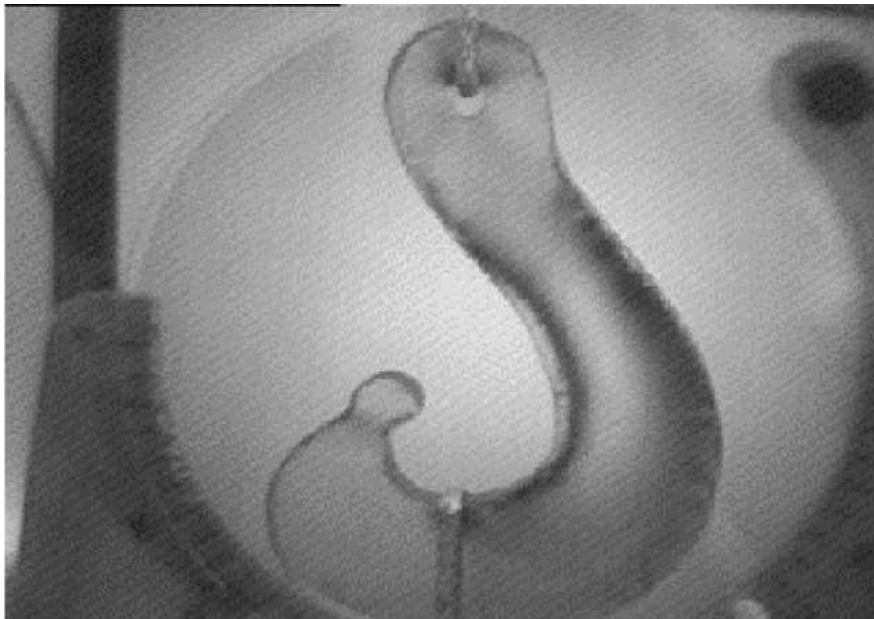


Figure 1.14 : Exemple de la photoélasticité d'un crochet

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

1.6.2. Jauges de déformations (Extensométrie) :

Elle est basée sur l'emploi des jauges de contraintes. C'est la méthode expérimentale la plus usuelle pour vérifier les résultats théoriques. Les jauges sont collées sur la surface à étudier et mesurent les déformations en un point donné. Les contraintes sont ensuite obtenues par calcul à partir des lois de résistance des matériaux.

L'emploi des jauges de contraintes est une méthode expérimentale la plus usuelle pour vérifier les résultats théoriques. Les jauges sont collées sur la surface à étudier et mesurent les déformations en un point donné. Les contraintes sont ensuite obtenues par calcul à partir des lois de résistance des matériaux.

Le montage des jauges de déformation sont représenté dans la figure ci-dessous :

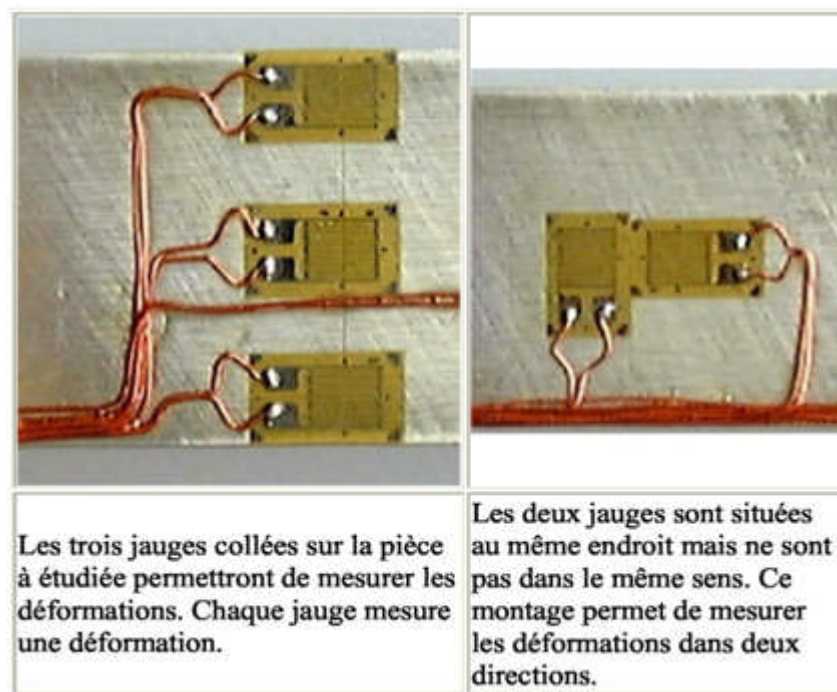


Figure 1.15 : Montage de jauges de déformation

1.6.3. Interférométrie :

L'interférométrie est une méthode de mesure qui exploite les interférences intervenant entre plusieurs ondes cohérentes entre elles.

Et il sert à mesurer des accélérations verticales et horizontales à la surface d'un objet. Ces accélérations sont liées aux ondes envoyées dans l'objet. Cet équipement permet de mesurer ces accélérations sans contact direct avec l'objet. En effet, il envoie un rayon laser sur l'objet qui modifie sa trajectoire en fonction des accélérations de l'objet. Un signal est envoyé à l'amplificateur de puissance. Ce signal amplifié va dans le capteur piézoélectrique. Ce capteur est en contact avec un matériau à la surface duquel est envoyé un rayon laser. Le capteur piézoélectrique crée une vibration que le laser mesure à la surface du matériau. Il en ressort un signal électrique visualisé par un oscilloscope ou enregistré par une centrale d'acquisition. La mesure du rayon laser est alors effectuée et permet ainsi la mesure des accélérations.

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

L'analyse des contraintes par interférométrie de speckle est une basée sur l'interférométrie de speckle, cette technique qui utilise les propriétés de cohérence des faisceaux laser et qui permet d'accéder à la mesure globale et sans contact, de micro-déplacements à la surface d'une pièce de manière très précise (résolution 0,1 μm).

L'enregistrement étant fait directement sur caméra(CCD), les visualisations en temps réel, pendant l'application de la contrainte, sont possibles sur le moniteur vidéo. Les déformations mécaniques sont obtenues par le traitement d'image (dérivation spatiale) à partir de la carte des déplacements. Le tenseur des contraintes en tout point de la surface est alors déterminé à partir de la loi de comportement.

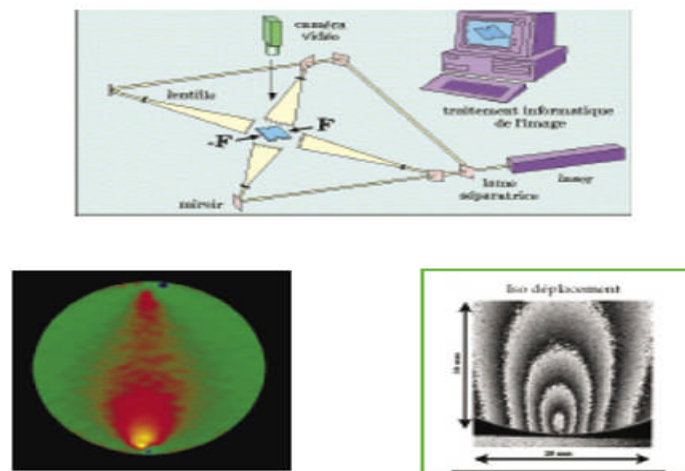


Figure 1.16 : Interférométrie de speckle

1.7. Les différents moyens de suivi de fissures et de mesure d'ouverture de fissure dans les structures en béton :

Aujourd'hui il ya plusieurs types de matériels de mesure d'ouverture de fissures pour le bâtiment aux précisions et aux facilités d'utilisation différentes. Des appareils permettant des mesures de fissures de l'ordre du centième de précision comme le déformètre à bille, la jauge GINGER CEBTP, le Datalogger (qui lui enregistre les données), et des appareils de plus faible précision comme le Fissurotest, la règle graduée, le Fissuromètre Vinchon, ou la lunette micrométrique.

Afin de choisir le matériel adapté à la surveillance des fissures en fonction de l'importance de l'ouvrage (ouvrages d'art, pavillon, monument historique, immeuble, etc.), ces appareils sont détaillés ci-dessous.

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

1.7.1 : Le Fissurotest :

Cet appareil est constitué d'une réglette transparente graduée. L'opérateur pose le Fissurotest sur la fissure en choisissant la largeur du trait correspondant à l'ouverture de la fissure grâce au pouvoir séparateur de l'œil.

Très pratique car pouvant être transporté dans la poche, le mesureur de fissure Fissurotest reste néanmoins un outil estimatif.

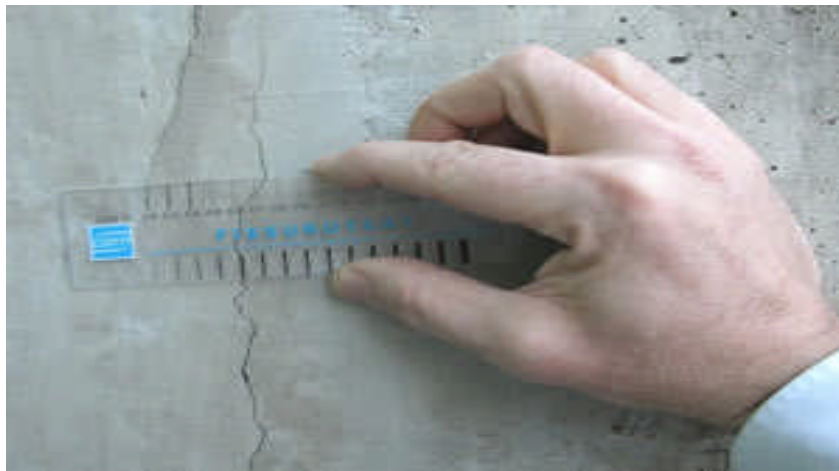


Figure 1.17 : Mesure de l'ouverture d'une fissure avec un Fissurotest.

1.7.2 : La lunette micrométrique :

Comme le Fissurotest, cet appareil permet de mesurer l'ouverture d'une fissure en millimètre.

Sous la forme d'un microscope portable, l'optique interne est équipée d'une réglette rotative que l'on positionne perpendiculairement à la fissure

Plus précise que le Fissurotest, la lunette micrométrique permet de mesurer l'ouverture d'une fissure avec une résolution d'un centième de millimètre. Elle peut être équipée d'un éclairage interne afin de faciliter la lecture.



Figure 1.18 : Lunette micrométrique avec réglette interne gradué pour la mesure d'une fissure.

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

1.7.3 : Le déformètre à bille :

Le déformètre à bille est un appareil de suivi de fissures très précis puisque sa résolution est le micron. Deux billes montées sur support sont collées de part et d'autre de la fissure. L'opérateur vient positionner le déformètre sur les deux billes afin de mesurer l'espacement de ces deux billes. Un comparateur de précision monté sur le déformètre permet d'effectuer cette mesure.

Avant chaque série de mesures, l'opérateur fait le zéro de l'appareil sur une barre en Invar avec deux billes dont l'espacement est d'une grande stabilité dimensionnelle. Le déformètre à bille peut être aussi posé sur des plots scellés pour des mesures à long terme.



Figure 1.19 : Mesure d'évolution de la fissure avec le déformètre à bille.

1.7.4 : La Jauge GINGER CEBTP :

La Jauge GINGER CEBTP est un nouveau produit breveté par GINGER CEBTP qui est un excellent compromis entre la règle graduée et le déformètre à bille. La jauge GINGER CEBTP est constituée de deux supports fixés de part et d'autre de la fissure, et d'un appareil de lecture digital avec une résolution de 1/100 mm. Les supports peuvent être collés ou vissés de part et d'autre de la fissure à mesurer. Un outil idéal pour les experts qui désirent une mesure de suivi de fissure rapide mais précise et économique.(GINGER CEBTP, 2012).



Figure 1.20 : La jauge GINGER CEBTP pour le suivi de l'évolution d'une fissure pour expertise.

Chapitre 1 : Le phénomène de la fissuration

1.7.5 : Le capteur de déplacement :

Si le suivi de fissure nécessite un enregistrement, il est conseillé de choisir un capteur de déplacement potentiométrique relié à une centrale d'acquisition. Cette centrale sera programmée pour effectuer et mettre en mémoire périodiquement l'ouverture de fissure. Un système d'alarme pour être mis en place avec appel téléphonique d'urgence en cas de dépassement d'un seuil.



Figure 1.21 : Mesure d'évolution de la fissure avec un capteur.

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

2.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous présentons d'une manière succincte une modélisation en éléments finis type plaques modèle 16x64, soit 3213 DDL, type barre modèle 64 F.E, soit 189 DDL de la poutre fissurée, et aussi une modélisation en éléments finis type ressort en utilisant trois modèles différents :

Le modèle de Nandwann et Maiti (Bui, 1978), le modèle de Kurtosis (Lee, 2009) et le modèle d'Okamura (Okamura et Al, 1969).

Une Analyse comparative statique et autre dynamique ont été effectuées à l'aide du logiciel SAP 2000 pour les deux types d'éléments finis : plaques, barre.

Pour les autres types d'éléments finis de la poutre fissurée un programme a été développé par le code MATLAB.

2.1.1. Schéma de la poutre étudiée :

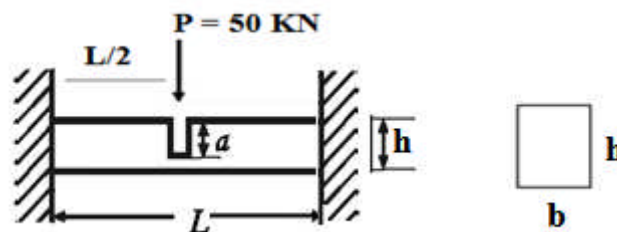


Figure 2.1 : Schéma de la Poutre étudiée.

2.2. Modélisation en éléments finis plaque de la poutre fissurée :

Une poutre fissurée de longueur $L=8\text{m}$ et de largeur $b=0.2\text{m}$ et de hauteur $h=0.4\text{m}$ est supposée fixée sur ses deux extrémités (Poutre encastree – encastree), est discrétisée par un modèle 16x64 soit 3213 DDL avec le logiciel SAP 200. Une charge ponctuelle est appliquée en son milieu $P = 50 \text{ kN}$.

Les données physiques sont les suivantes : $E=2.10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu=0.30$, $\gamma=0$, $m=2.50 \text{ T/m}^3$

2.2.1. Poutre avec une fissure inferieure (éléments finis plaque) :

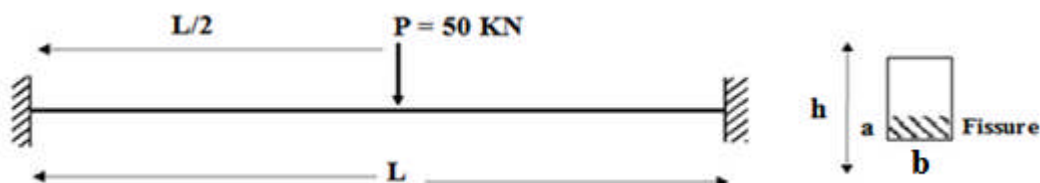


Figure 2.2 : Schéma de la Poutre étudiée et sa modélisation par le logiciel SAP 2000.

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

➤ Etude statique :

Un calcul statique a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.1 qui donne les valeurs des déplacements maximums (mm) et ces contraintes maximums (KN/m²) pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

	Larg. <i>mm</i>	V_{\max} (L/2) <i>mm</i>	σ_{\max} (L/2) <i>KN/m²</i>	τ_{\max} (L/2) <i>KN/m²</i>	$\sigma_{\max, Fiss}$ (L/2) <i>KN/m²</i>
Section nette		6.41	10583	798	-
a=h/10	2	6.47	10976	12673	20292
	4	6.47	10987	12578	19936
	6	6.47	10997	12486	19593
	8	6.47	11008	12397	19265
	10	6.47	11019	12310	18952
a=h/4	2	6.88	13549	28592	33818
	4	6.89	13568	28154	32709
	6	6.89	13588	27743	31654
	8	6.89	13608	27354	30656
	10	6.90	13628	26983	29717
a=h/2	2	8.49	21886	45904	50778
	4	8.50	21909	45265	48788
	6	8.51	21950	44665	46908
	8	8.51	21992	44096	45140
	10	8.53	22034	43551	43485

Tableau 2.1 : Valeurs des déplacements maximums et les contraintes maximums pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

➤ Etude dynamique :

Un calcul modal a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.2 qui donne les huit premières périodes (seconde) pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

	Larg. <i>mm</i>	T1 <i>(sec)</i>	T2 <i>(sec)</i>	T3 <i>(sec)</i>	T4 <i>(sec)</i>	T5 <i>(sec)</i>	T6 <i>(sec)</i>	T7 <i>(sec)</i>	T8 <i>(sec)</i>
Section nette		0.05582	0.02067	0.01082	0.00675	0.00565	0.00468	0.00347	0.00283
a=h/10	2	0.05595	0.02067	0.01085	0.00675	0.00565	0.00469	0.00347	0.00283
	4	0.05595	0.02067	0.01085	0.00675	0.00565	0.00469	0.00347	0.00283
	6	0.05595	0.02067	0.01085	0.00675	0.00565	0.00469	0.00347	0.00283
	8	0.05595	0.02067	0.01085	0.00675	0.00565	0.00469	0.00347	0.00283
	10	0.05595	0.02067	0.01085	0.00675	0.00565	0.00469	0.00347	0.00283
a=h/4	2	0.05687	0.02067	0.01108	0.00675	0.00565	0.00478	0.00347	0.00288
	4	0.05687	0.02067	0.01108	0.00675	0.00565	0.00478	0.00347	0.00288
	6	0.05688	0.02067	0.01108	0.00675	0.00565	0.00478	0.00347	0.00288
	8	0.05688	0.02067	0.01108	0.00675	0.00565	0.00478	0.00347	0.00288
	10	0.05688	0.02067	0.01108	0.00675	0.00565	0.00478	0.00347	0.00288
a=h/2	2	0.06034	0.02067	0.01185	0.00676	0.00565	0.00506	0.00348	0.00314
	4	0.06035	0.02067	0.01185	0.00676	0.00565	0.00506	0.00348	0.00314
	6	0.06036	0.02067	0.01185	0.00676	0.00565	0.00506	0.00348	0.00314
	8	0.06037	0.02067	0.01185	0.00676	0.00565	0.00506	0.00348	0.00314
	10	0.06038	0.02067	0.01185	0.00676	0.00565	0.00506	0.00348	0.00314

Tableau 2.2 : Valeurs du huit premières périodes pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

Les tableaux (2.1, 2.2) montrent que :

- ✓ les valeurs des déplacements maximums et les contraintes maximums augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Pour a=h/10, le déplacement V_{\max} augmente de 0.95%, la contrainte σ_{\max} augmente de 3.7%, et τ_{\max} augmente de 1488%, par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Pour a=h/2, le déplacement V_{\max} augmente de 32.45%, la contrainte σ_{\max} augmente de 106%, et τ_{\max} augmente de 5652%, par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Les valeurs des périodes propres de vibration augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

- ✓ Pour $a=h/10$, le première période de vibration T_1 augmente de 0.2% par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Pour $a=h/2$, le première période de vibration T_1 augmente de 8% par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Pour la même profondeur de la fissure, la prise en compte de la variation de la largeur de la fissure n'influence pas beaucoup sur les valeurs des périodes et déplacements.

2.2.2. Poutre avec deux fissures inférieure et supérieure (éléments finis plaque) :

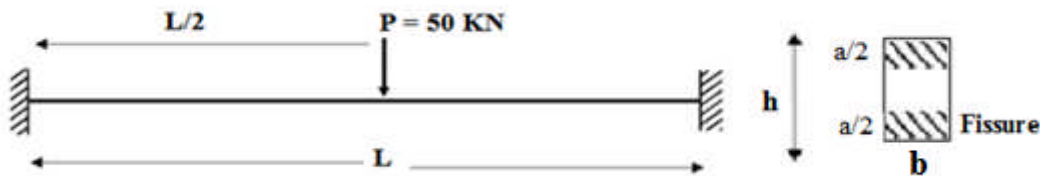


Figure 2.3 : Schéma de la Poutre étudiée et sa modélisation par le logiciel SAP 2000.

➤ Etude statique :

Un calcul statique a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.3 qui donne les valeurs des déplacements maximums (mm) et ces contraintes maximums (KN/m²) pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

	Larg. <i>mm</i>	$V_{\max (L/2)}$ <i>mm</i>	$\sigma_{\max (L/2)}$ <i>KN/m²</i>	$\tau_{\max (L/2)}$ <i>KN/m²</i>	$\sigma_{\max, Fiss (L/2)}$ <i>KN/m²</i>
Section nette		6.41	10583	798	-
$a=h/10$	2	6.47	28574	9898	20796
	4	6.47	27965	9788	19634
	6	6.47	27360	9683	18449
	8	6.47	26760	9580	17252
	10	6.47	26170	9480	16068
$a=h/4$	2	6.75	41642	21272	42596
	4	6.75	40528	20940	40160
	6	6.75	39417	20627	37676
	8	6.75	38319	20331	35175
	10	6.75	37241	20048	32685

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

a=h/2	2	7.94	61826	42066	47903
	4	7.99	59981	41484	46352
	6	8.00	58181	40938	44885
	8	8.01	56436	40419	43505
	10	8.02	54753	39923	42214

Tableau 2.3 : Valeurs des déplacements maximums et les contraintes maximums pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

➤ **Etude dynamique :**

Un calcul modal a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.4 qui donne les huit premières périodes (seconde) pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

	Larg. <i>mm</i>	T1 <i>(sec)</i>	T2 <i>(sec)</i>	T3 <i>(sec)</i>	T4 <i>(sec)</i>	T5 <i>(sec)</i>	T6 <i>(sec)</i>	T7 <i>(sec)</i>	T8 <i>(sec)</i>
Section nette		0.05582	0.02067	0.01082	0.00675	0.00565	0.00468	0.00347	0.00283
a=h/10	2	0.05583	0.02066	0.01082	0.00675	0.00565	0.00484	0.00347	0.00283
	4	0.05583	0.02066	0.01082	0.00675	0.00565	0.00484	0.00347	0.00283
	6	0.05583	0.02066	0.01082	0.00675	0.00565	0.00468	0.00347	0.00283
	8	0.05583	0.02066	0.01082	0.00675	0.00565	0.00468	0.00347	0.00283
	10	0.05583	0.02066	0.01082	0.00675	0.00565	0.00468	0.00347	0.00283
a=h/4	2	0.05634	0.02066	0.01095	0.00675	0.00565	0.00473	0.00347	0.00284
	4	0.05635	0.02066	0.01095	0.00675	0.00565	0.00473	0.00347	0.00284
	6	0.05635	0.02066	0.01095	0.00675	0.00565	0.00473	0.00347	0.00284
	8	0.05636	0.02066	0.01095	0.00675	0.00565	0.00473	0.00347	0.00284
	10	0.05636	0.02066	0.01095	0.00675	0.00565	0.00473	0.00347	0.00284
a=h/2	2	0.05890	0.02067	0.01154	0.00675	0.00565	0.00494	0.00347	0.00289
	4	0.05892	0.02067	0.01155	0.00675	0.00565	0.00494	0.00347	0.00289
	6	0.05894	0.02067	0.01155	0.00675	0.00565	0.00494	0.00347	0.00289

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

	8	0.05896	0.02067	0.01155	0.00675	0.00565	0.00494	0.00347	0.00289
	10	0.05898	0.02067	0.01156	0.00675	0.00565	0.00494	0.00347	0.00289

Tableau 2.4 : Valeurs du huit premières périodes pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

Les tableaux (2.3, 2.4) montrent que :

- ✓ les valeurs du déplacement maximum et les contraintes maximums augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Pour $a=h/10$, le déplacement V_{\max} augmente de 0.95%, la contrainte σ_{\max} augmente de 170%, et τ_{\max} augmente de 1140.35%, par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Pour $a=h/2$, le déplacement V_{\max} augmente de 23.87%, la contrainte σ_{\max} augmente de 484.20%, et τ_{\max} augmente de 5171.43%, par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Les valeurs des périodes propres de vibration augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure
- ✓ Pour $a=h/10$, la première période de vibration $T1$ augmente de 0.02% par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Pour $a=h/2$, la première période de vibration $T1$ augmente de 5.52% par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Pour la même profondeur de la fissure, la prise en compte de la variation de la largeur de la fissure ne change pas les valeurs des périodes et déplacements.

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

2.2.3. Poutre avec une fissure centrale (éléments finis plaque) :

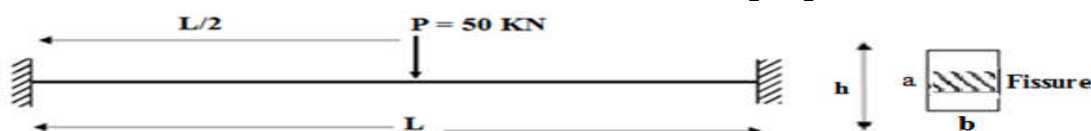


Figure 2.4 : Schéma de la Poutre étudiée et sa modélisation par le logiciel SAP 2000.

➤ Etude statique :

Un calcul statique a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.5 qui donne les valeurs des déplacements maximums (mm) et ces contraintes maximums (KN/m^2) pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

	Larg. <i>mm</i>	$V_{\max (L/2)}$ <i>mm</i>	$\sigma_{\max (L/2)}$ <i>KN/m²</i>	$\tau_{\max (L/2)}$ <i>KN/m²</i>	$\sigma_{\max, Fiss (L/2)}$ <i>KN/m²</i>
Section nette		6.41	10583	798	-
a=h/10	2	6.37	10227	3188	10215
	4	6.37	10234	3154	10215
	6	6.37	10241	3119	10215
	8	6.37	10247	3084	10216
	10	6.37	10254	3049	10216
a=h/4	2	6.37	10227	3315	10214
	4	6.37	10232	3279	10214
	6	6.37	10241	3242	10215
	8	6.37	10250	3204	10215
	10	6.37	10259	3167	10215
a=h/2	2	6.39	10452	3710	10225
	4	6.39	10469	3692	10225
	6	6.39	10485	3672	10225
	8	6.39	10500	3650	10226
	10	6.39	10516	3627	10226

Tableau 2.5 : Valeurs des déplacements maximums et les contraintes maximums pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

➤ Etude dynamique :

Un calcul modal a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.6 qui donne les huit premières périodes (seconde) pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

	Larg. <i>mm</i>	T1 <i>(sec)</i>	T2 <i>(sec)</i>	T3 <i>(sec)</i>	T4 <i>(sec)</i>	T5 <i>(sec)</i>	T6 <i>(sec)</i>	T7 <i>(sec)</i>	T8 <i>(sec)</i>
Section nette		0.05582	0.02067	0.01082	0.00675	0.00565	0.00468	0.00347	0.00283
a=h/10	2	0.05573	0.02067	0.01079	0.00675	0.00565	0.00466	0.00348	0.00283
	4	0.05572	0.02067	0.01079	0.00675	0.00565	0.00466	0.00348	0.00283
	6	0.05572	0.02067	0.01079	0.00675	0.00565	0.00466	0.00348	0.00283
	8	0.05572	0.02067	0.01079	0.00675	0.00565	0.00466	0.00348	0.00283
	10	0.05572	0.02067	0.01079	0.00675	0.00565	0.00466	0.00348	0.00283
a=h/4	2	0.05572	0.02067	0.01079	0.00675	0.00565	0.00466	0.00348	0.00284
	4	0.05572	0.02067	0.01079	0.00675	0.00565	0.00466	0.00348	0.00284
	6	0.05572	0.02067	0.01079	0.00675	0.00565	0.00466	0.00348	0.00284
	8	0.05571	0.02067	0.01079	0.00675	0.00565	0.00466	0.00348	0.00284
	10	0.05571	0.02067	0.01079	0.00675	0.00565	0.00466	0.00348	0.00284
a=h/2	2	0.05577	0.02068	0.01080	0.00676	0.00565	0.00467	0.00348	0.00289
	4	0.05576	0.02068	0.01080	0.00676	0.00565	0.00466	0.00348	0.00289
	6	0.05576	0.02068	0.01080	0.00676	0.00565	0.00466	0.00348	0.00289
	8	0.05575	0.02068	0.01080	0.00676	0.00565	0.00466	0.00348	0.00289
	10	0.05574	0.02068	0.01080	0.00676	0.00565	0.00466	0.00348	0.00289

Tableau 2.6 : Valeurs du huit premières périodes pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

Les tableaux (2.5, 2.6) montrent que :

- ✓ les valeurs des déplacements maximums et les contraintes maximums augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

- ✓ Pour $a=h/10$, le déplacement V_{\max} diminue de 0.62%, la contrainte σ_{\max} diminue de 3.36%, et τ_{\max} augmente de 299.50%, par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Pour $a=h/2$, le déplacement V_{\max} diminue de 0.31%, la contrainte σ_{\max} diminue de 1.24%, et τ_{\max} augmente de 3649.12%, par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Les valeurs des périodes propres de vibration augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Pour $a=h/10$, la première période de vibration $T1$ diminue de 0.18% par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Pour $a=h/2$, la première période de vibration $T1$ augmente de 0.10% par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Pour la même profondeur de la fissure, la prise en compte de la variation de la largeur de la fissure n'influence pas beaucoup sur les valeurs des périodes et déplacements.

2.3. Modélisation en éléments finis barre de la poutre fissurée :

Une poutre de longueur $L=8\text{m}$ et de largeur $b=0.2\text{m}$, et de hauteur $h=0.4\text{m}$, est supposée fixée sur ces deux extrémités (Poutre encastree – encastree), et discrétisée par un modèle éléments finis, soit 189 DDL avec le logiciel SAP 200. Une charge ponctuelle est appliquée en son milieu $P = 50 \text{ KN}$.

Les données matérielles sont les suivantes : $E=2.10^7\text{kN/m}^2$, $\nu=0.30$, $\gamma=0$, $m=2.50\text{T/m}^3$

2.3.1. Poutre avec deux fissures inférieure et supérieure (éléments finis barre):

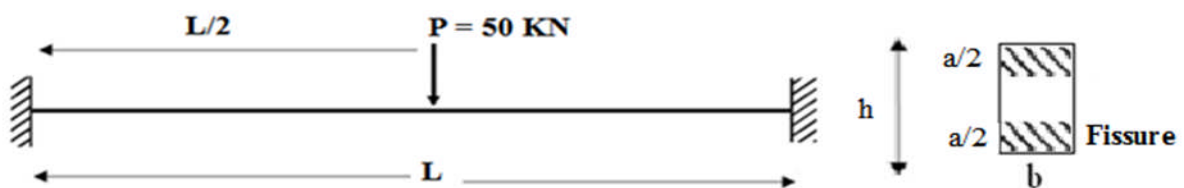


Figure 2.5 : Schéma de la Poutre étudiée et sa modélisation par le logiciel SAP 2000.

➤ Etude statique :

Un calcul statique a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.7 qui donne les valeurs du déplacement maximum (mm), moment maximum (KN.m) et l'effort normal maximal (KN) pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

	Larg. <i>mm</i>	$V_{\max (L/2)}$ <i>mm</i>	$M_{\max (L/2)}$ <i>KN.m</i>	$T_{\max (L/2)}$ <i>KN.</i>
Section nette		6.44	50.00	25
a=h/10	2	6.45	49.99	25.00
	4	6.45	49.99	25.00
	6	6.45	49.99	25.00
	8	6.45	49.98	25.00
	10	6.45	49.98	25.00
a=h/4	2	6.45	49.98	25.00
	4	6.46	49.97	25.00
	6	6.46	49.95	25.00
	8	6.47	49.93	25.00
	10	6.47	49.91	25.00
a=h/2	2	6.48	49.91	25.00
	4	6.51	49.83	25.00
	6	6.54	49.74	25.00
	8	6.58	49.65	25.00
	10	6.60	49.57	25.00

Tableau 2.7 : Valeurs du déplacement maximum, moment maximum et l'effort normal maximal pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

➤ **Etude dynamique :**

Un calcul modal a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.8 qui donne les huit premières périodes (seconde) pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

	Larg. <i>mm</i>	T1 <i>(sec)</i>	T2 <i>(sec)</i>	T3 <i>(sec)</i>	T4 <i>(sec)</i>	T5 <i>(sec)</i>	T6 <i>(sec)</i>	T7 <i>(sec)</i>	T8 <i>(sec)</i>
Section nette		0.05593	0.02067	0.01079	0.00671	0.00566	0.00464	0.00344	0.00283
a=h/10	2	0.05592	0.02068	0.01078	0.00672	0.00566	0.00463	0.00344	0.00283
	4	0.05592	0.02068	0.01078	0.00672	0.00566	0.00463	0.00344	0.00283
	6	0.05592	0.02068	0.01078	0.00672	0.00566	0.00463	0.00344	0.00283
	8	0.05593	0.02068	0.01078	0.00672	0.00566	0.00463	0.00344	0.00283
	10	0.05593	0.02068	0.01078	0.00672	0.00566	0.00463	0.00344	0.00283
a=h/4	2	0.05593	0.02068	0.01078	0.00672	0.00566	0.00463	0.00344	0.00283
	4	0.05594	0.02068	0.01079	0.00672	0.00566	0.00463	0.00344	0.00283
	6	0.05595	0.02068	0.01079	0.00672	0.00566	0.00463	0.00344	0.00283
	8	0.05595	0.02068	0.01079	0.00672	0.00566	0.00463	0.00344	0.00283
	10	0.05596	0.02068	0.01079	0.00672	0.00566	0.00463	0.00344	0.00283
a=h/2	2	0.05598	0.02068	0.01080	0.00672	0.00566	0.00463	0.00344	0.00283
	4	0.05603	0.02068	0.01081	0.00672	0.00566	0.00464	0.00344	0.00283
	6	0.05610	0.02068	0.01083	0.00672	0.00566	0.00465	0.00344	0.00283
	8	0.05616	0.02068	0.01084	0.00672	0.00566	0.00465	0.00344	0.00283
	10	0.05622	0.02068	0.01086	0.00672	0.00566	0.00466	0.00344	0.00283

Tableau 2.8 : Valeurs du huit premières périodes pour les différentes largeurs et profondeurs de la fissure.

Les tableaux (2.7, 2.8) montrent que :

- ✓ les valeurs des déplacements maximums et les moments maximums augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Pour a=h/10, le déplacement V_{\max} augmente de 0.16%, le moment M_{\max} diminue de 0.02%, et T_{\max} constante par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Pour a=h/2, le déplacement V_{\max} augmente de 0.62%, le moment M_{\max} diminue de 0.18%, et T_{\max} constante par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Les valeurs des périodes propres de vibration augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

- ✓ Pour $a=h/10$, la première période de vibration T_1 diminue de 0.02% par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Pour $a=h/2$, la première période de vibration T_1 augmente de 0.10% par rapport à une poutre non fissurée.
- ✓ Pour la même profondeur de la fissure, la prise en compte de la variation de la largeur de la fissure n'influence pas beaucoup sur les valeurs des périodes et déplacements.

2.4. Modélisation en éléments finis ressort de la poutre fissurée :

Une poutre fissurée de longueur $L=8\text{m}$ et de largeur $b=0.2\text{m}$, et de hauteur $h=0.4\text{m}$, est supposée fixée sur ces deux extrémités (Poutre encastree- encastree) est discrétisée par un modèle ressort avec le code MATLAB. Une charge ponctuelle est appliquée en son milieu $P = 50\text{KN}$.

2.4.1. Définition du mode ressort (Naseralavi A, 2010) :

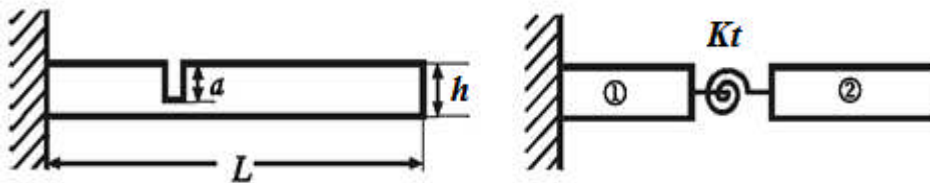


Figure 2.6 : (a) la poutre étudiée ; (b) mode ressort de la poutre fissurée.

Plusieurs travaux ont été exposés qui définissent la raideur du ressort_fissure proportionnellement à la profondeur du ressort par rapport à la fonction développée. Parmi on cite les travaux de Nandwann et Maiti, Kurtosis et Okamura,..... .

Le tableau 2.9 présent un récapitulatif des formulations des raideurs du ressort_fissure des auteurs cités précédemment.

Ces formulations ont été développées en majorité suite à des travaux expérimentaux ou des travaux analytiques pour des barres à section rectangulaires ou section circulaires ou quelconques.

La figure 2.7 présente graphiquement la variation de la raideur K_t du ressort_fissure par rapport à la profondeur de la fissure pour le cas d'une poutre a section rectangulaire. Il est a remarqué que les 3 modèles : Kurtosis et Nandwann et Okamura sont trop proches.

Tous les modèles présentent les fissures comme des ressorts de rotation, Le tableau 2.9 et la figure 2.7 donne des modèles de modélisation de la fissure par le mode ressort:

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

Auteur	Raideur
Nandwann and Maiti (Bui, 1978)	$K_t = \frac{bh^2E}{72\pi\alpha^2 f(\alpha)}$ $f(\alpha) = 0.6384 - 1.035\alpha + 3.7201\alpha^2 - 5.1773\alpha^3 + 7.553\alpha^4 - 7.332\alpha^5 + 2.4909\alpha^6$
Kurtosis (Lee, 2009)	$K_t = \frac{1}{C}, C = 5.346 \frac{h}{EI} J(\alpha)$ $J(\alpha) = 1.8624\alpha^2 - 3.95\alpha^3 + 16.37\alpha^4 - 37.226\alpha^5 + 76.81\alpha^6 - 126.9\alpha^7 + 172\alpha^8 - 43.97\alpha^9 + 66.56\alpha^{10}$
Okamura (Okamura et Al, 1969)	$K_t = \frac{1}{C}, C = 6 \frac{h(1-\mu^2)}{EI} J(\alpha)$ $J(\alpha) = 1.98\alpha^2 - 3.277\alpha^3 + 14.43\alpha^4 - 31.26\alpha^5 + 63.56\alpha^6 - 133.36\alpha^7 + 147.52\alpha^8 - 127.69\alpha^9 + 61.50\alpha^{10}$
Shpli and Dado (Shpli et Al)	$C = \frac{6h}{EI} \left(1.98 \left(\frac{\alpha}{h}\right)^2 - 3.277 \left(\frac{\alpha}{h}\right)^3 + 14.251 \left(\frac{\alpha}{h}\right)^4 - 31.08h + 62.79 \left(\frac{\alpha}{h}\right)^6 - 102.171 \left(\frac{\alpha}{h}\right)^7 + 146.404 \left(\frac{\alpha}{h}\right)^8 - 127.69 \left(\frac{\alpha}{h}\right)^9 + 61.504 \left(\frac{\alpha}{h}\right)^{10} \right)$ $K_t = \frac{1}{C}$
Shen and Pierre (Shen et Al, 1990)	$\theta^* = \Phi \left(\frac{\alpha}{2d}\right) \frac{M}{EI}$ $\Phi_t(\alpha) = 3\pi d(1-\nu^2)(0.63\alpha^2 - 1.045\alpha^4 - 9.97\alpha^5 + 20.29\alpha^6 - 33.03\alpha^7 + 47.11\alpha^8 - 40.76\alpha^9 + 19.6\alpha^{10})$
Christides and Barr (Christides et Al, 1989)	$EI_d(x) = \frac{EI_0}{1 + (c-1)\exp(-2\alpha x-x_c /d)}$
Chondros and Al (Chondros et Al, 1998)	$K_0 = \frac{EI}{6\pi(1-\nu^2)h J(\alpha)} \quad \alpha = \frac{a}{h}$ $J(\alpha) = 0.6272\alpha^2 - 0.4533\alpha^3 + 4.5948\alpha^4 + 9.9736\alpha^5 + 20.2948\alpha^6 - 33.0351\alpha^7 + 47.1063\alpha^8 - 40.7556\alpha^9 + 19.6\alpha^{10}$
Tada, Paris and Irwin (Tada et Al, 1985)	$C_m = \frac{h}{EI} \Theta$ $\Theta(\alpha) = 2 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 (5.93 - 19.69\alpha + 37.14\alpha^2 - 35.84\alpha^3 + 13.12\alpha^4)$

Tableau 2.9 : Modèles de raideur ressort – fissure.

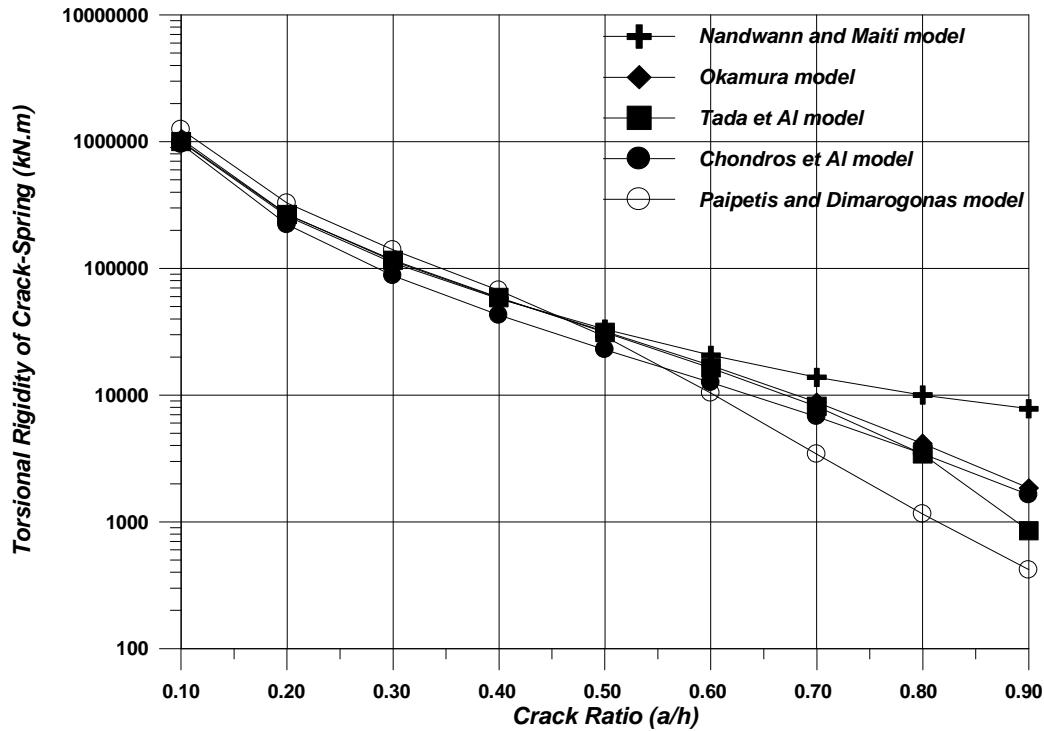


Figure 2.7 : Raideur proportionnelle des différents modelés.

2.4.2. Applications numérique :

On reprend la même poutre traitée en 2.2 et 2.3 avec une section fissurée au milieu utilisant les trois approches choisies qui sont celles de Kurtosis et Nandwann et Okamura, utilisant le code MATLAB.

2.4.3. Modèle de Nandwann et Maiti (Bui, 1978) :

Les fissures sont modélisées comme des ressorts de rotation et le problème vers l'avant est résolu par l'utilisation de la méthode des éléments finis basée sur la théorie d'Euler-Bernoulli des poutres.

Dans le modèle d'élément fini le nœud qui représente la fissure a trois degrés de liberté tandis que les autres nœuds ont deux degrés de liberté.

La géométrie de la poutre fissurée et son modèle d'élément fini sont donnés dans la Figure 2.8. (Poutre avec une fissure et son modèle d'élément fini).

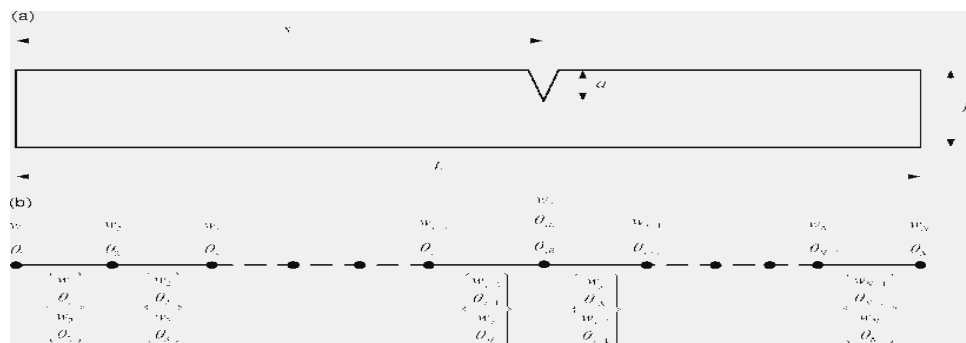


Figure 2.8: Poutre avec une fissure et son modèle d'élément fini.

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

$\alpha = \frac{a}{h}$ (2.1), l'équation d'élément finie d'un segment de poutre basée sur la théorie d'Euler-Bernoulli de longueur ΔL est donnée par :

$$[M]^e \{W''\}^e + [K]^e \{W\}^e = \{f\}^e \quad (2.2)$$

$$[M]^e = \frac{\rho A \Delta L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\Delta L & 54 & -13\Delta L \\ & 4(\Delta L)^2 & 13\Delta L & -3(\Delta L)^2 \\ & & 156 & -22\Delta L \\ \text{SYM} & & & 4(\Delta L)^2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$[K]^e = \frac{EI}{(\Delta L)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\Delta L & -12 & 6\Delta L \\ & 4(\Delta L)^2 & -6\Delta L & 2(\Delta L)^2 \\ & & 12 & -6\Delta L \\ \text{SYM} & & & 4(\Delta L)^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$\{W\}^e = \{w_i \quad \theta_i \quad w_{i+1} \quad \theta_{i+1}\}^T$ (2.5) Vecteur déplacement de la poutre sans fissuration

$\{W\}^e = \{w_{j-1} \quad \theta_{j-1} \quad w_j \quad \theta_{jL}\}^T$ (2.6) Vecteur déplacement de la poutre avec fissuration, à gauche de la fissure.

$\{W\}^e = \{w_j \quad \theta_{jR} \quad w_{j+1} \quad \theta_{j+1}\}^T$ (2.7) Vecteur déplacement de la poutre avec fissuration, à droite de la fissure.

θ_{jR} et θ_{jL} sont reliés par la matrice de rigidité avec fissuration (2.8):

$$[K]_c = \begin{bmatrix} K_t & -K_t \\ -K_t & K_t \end{bmatrix} \quad (2.8) \quad , \quad K_t = \frac{bh^3E}{72\pi\alpha^2 f(\alpha)} \quad , \quad \alpha = \left(\frac{a}{h}\right) \quad (2.9)$$

$$f(\alpha) = 0.6384 - 1.035\alpha + 3.7201\alpha^2 - 5.1773\alpha^3 + 7.553\alpha^4 - 7.332\alpha^5 + 2.4909\alpha^6 \quad (2.10)$$

Après l'application des conditions aux limites les équations du mouvement globales de la vibration libre de la poutre est :

$$[K] \{W\} = \omega^2 [M] \{W\} \quad (2.11) .$$

Une Analyse statique et autre dynamique sont effectuées utilisant le code MATLAB :

➤ **Etude statique :**

Un calcul statique a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.10 qui donne les valeurs du déplacement maximum (mm) pour les différentes profondeurs de la fissure.

profondeur de la fissure (a)	$V_{\max} (mm), L/2$
h/10	6.35
h/4	6.84
h/2	8.84

Tableau 2.10 : Valeurs du déplacement maximum pour les différentes profondeurs de la fissure.

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

➤ Etude dynamique:

Un calcul modal a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.11 qui donne les huit premières périodes (seconde) pour les différentes profondeurs de la fissure.

(a)	T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)	T4 (sec)	T5 (sec)	T6 (sec)	T7 (sec)	T8 (sec)
h/10	0.0871	0.0541	0.00884	0.00046	0.00000143	0.00000142	0.00000014	0.00000013
h/4	0.0871	0.0544	0.00884	0.00113	0.00000143	0.00000142	0.00000014	0.00000014
h/2	0.0871	0.0554	0.00884	0.00245	0.00000143	0.00000142	0.00000014	0.00000014

Tableau 2.11 : valeurs du huit premières périodes pour les différentes profondeurs de la fissure.

Les tableaux (2.10... 2.11) montrent que :

- ✓ Les valeurs du déplacement maximum augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Les valeurs des périodes augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.

2.4.4. Modèle de Kurtosis (Lee, 2009) :

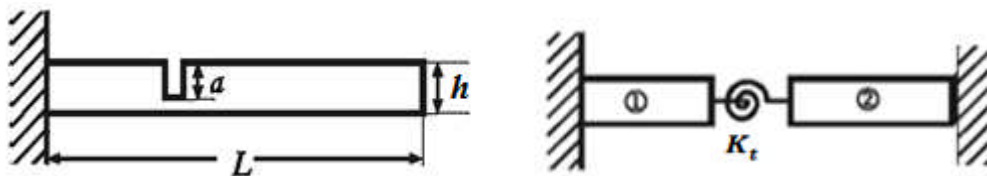


Figure. (2.9). (a) Poutre avec une fissure; (b) Modèle de la poutre fissurée.

La constante de flexion de la poutre fissurée est donnée par (2.12) :

$$K_t = \frac{1}{C}, C = 5.346 \frac{h}{EI} J(\alpha), \alpha = \left(\frac{a}{h}\right) \quad (2.12) , a : \text{est la profondeur de la fissure .}$$

$$J(\alpha) = 1.8624\alpha^2 - 3.95\alpha^3 + 16.37\alpha^4 - 37.226\alpha^5 + 76.81\alpha^6 - 126.9\alpha^7 + 172\alpha^8 - 43.97\alpha^9 + 66.56\alpha^{10} \quad (2.13)$$

➤ Etude statique :

Un calcul statique a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.12 qui donne les valeurs du déplacement maximum (mm) pour les différentes profondeurs de la fissure.

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

profondeur de la fissure (a)	$V_{\max} (mm), L/2$
h/10	6.33
h/4	6.72
h/2	9.17

Tableau 2.12 : Valeurs du déplacement maximum pour les différentes profondeurs de la fissure.

➤ Etude dynamique:

Un calcul modal a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.13 qui donne les huit premières périodes (seconde) pour les différentes profondeurs de la fissure.

(a)	T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)	T4 (sec)	T5 (sec)	T6 (sec)	T7 (sec)	T8 (sec)
h/10	0.0871	0.0543	0.0884	0.00092	0.00000143	0.00000142	0.00000014	0.00000013
h/4	0.0871	0.0552	0.0884	0.0020	0.00000143	0.00000142	0.00000014	0.00000014
h/2	0.0871	0.0603	0.00884	0.0050	0.00000143	0.00000142	0.00000014	0.00000014

Tableau 2.13 : valeurs du huit premières périodes pour les différentes profondeurs de la fissure.

Les tableaux (2.12... 2.13) montrent que :

- ✓ Les valeurs du déplacement maximum augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Les valeurs des périodes augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.

2.4.5. Modèle d'okamura (Okamura et Al, 1969) :

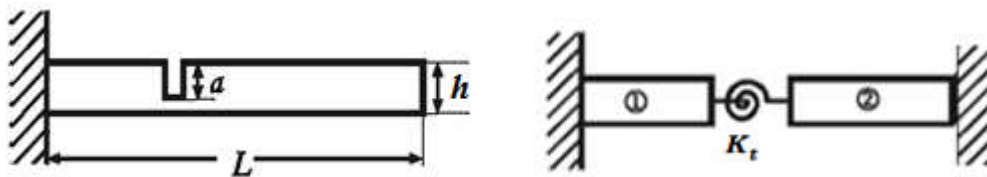


Figure. (2.10). (a) Poutre avec une fissure; (b) Modèle de la poutre fissurée.

La constante de flexion de la poutre fissurée est donnée par (2.14) :

$$K_t = \frac{1}{C}, C = 6 \frac{h(1-\mu^2)}{EI} J(\alpha), \alpha = \left(\frac{a}{h}\right) \quad (2.14) \text{ , } a : \text{ est la profondeur de la fissure .}$$

$$J(\alpha) = 1.98\alpha^2 - 3.277\alpha^3 + 14.43\alpha^4 - 31.26\alpha^5 + 63.56\alpha^6 - 133.36\alpha^7 + 147.52\alpha^8 - 127.69\alpha^9 + 61.50\alpha^{10} \quad (2.15)$$

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

➤ Etude statique :

Un calcul statique a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.14 qui donne les valeurs du déplacement maximum (mm) pour les différentes profondeurs de la fissure.

profondeur de la fissure (a)	$V_{\max} (mm), L/2$
h/10	6.30
h/4	6.80
h/2	7.90

Tableau 2.14 : Valeurs du déplacement maximum pour les différentes profondeurs de la fissure.

➤ Etude dynamique:

Un calcul modal a été réalisé pour étudier l'effet de la fissure sur la poutre, Tableau 2.15 qui donne les huit premières périodes (seconde) pour les différentes profondeurs de la fissure.

a	T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)	T4 (sec)	T5 (sec)	T6 (sec)	T7 (sec)	T8 (sec)
h/10	0.0871	0.0543	0.0884	0.00098	0.00000143	0.00000142	0.000000138	0.000000138
h/4	0.0871	0.0553	0.0884	0.0023	0.00000142	0.00000142	0.000000138	0.000000138
h/2	0.0871	0.0576	0.00884	0.00393	0.00000142	0.00000142	0.000000138	0.000000138

Tableau 2.15 : Valeurs du huit premières périodes pour les différentes profondeurs de la fissure.

Les tableaux (2.14, 2.15) montrent que :

- ✓ Les valeurs du déplacement maximum augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Les valeurs des périodes augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.

2.4.6. Etude comparative

Les (6) tableaux précédents montrent que :

- ✓ Les valeurs des périodes augmentent en fonction de la profondeur de la fissure.
- ✓ Les valeurs des déplacements augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ La différence entre les résultats des trois méthodes utilisées de Modélisation en éléments finis ressort est très faible, Tableau 2.16.

Pour $a = h/2$:

Chapitre 2: Etude statique et dynamique d'une poutre fissurée

$V_{\max} = 8.84$ mm (Nandwann and Maiti), $V_{\max} = 9.17$ mm (Kurtosis),

$V_{\max} = 7.90$ mm (Okamura),

Auteur	Raideur
Nandwann and Maiti	$K_t = \frac{bh^2 E}{72\pi\alpha^2 f(\alpha)}$ $f(\alpha) = 0.6384 - 1.035\alpha + 3.7201\alpha^2 - 5.1773\alpha^3 + 7.553\alpha^4 - 7.332\alpha^5 + 2.4909\alpha^6$
Kurtosis	$K_t = \frac{1}{C}, C = 5.346 \frac{h}{EI} J(\alpha)$ $J(\alpha) = 1.8624\alpha^2 - 3.95\alpha^3 + 16.37\alpha^4 - 37.226\alpha^5 + 76.81\alpha^6 - 126.9\alpha^7 + 172\alpha^8 - 43.97\alpha^9 + 66.56\alpha^{10}$
Okamura	$K_t = \frac{1}{C}, C = 6 \frac{h(1-\mu^2)}{EI} J(\alpha)$ $J(\alpha) = 1.98\alpha^2 - 3.277\alpha^3 + 14.43\alpha^4 - 31.26\alpha^5 + 63.56\alpha^6 - 133.36\alpha^7 + 147.52\alpha^8 - 127.69\alpha^9 + 61.50\alpha^{10}$

Tableau 2.16 : La différence entre les trois modèles utilisés de raideur ressort – fissure

2.5 Conclusion :

Après les résultats de ces applications pour les trois modèles de raideur ressort – fissure, notre choix s'est porté sur le modèle Kurtosis pour la suite des applications (Chapitre quatre), c'est à dire le cas le plus défavorable qui donne un V_{\max} , plus important.

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

3.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous présentons d'une manière générale le concept de base de la méthode des éléments finis pour l'analyse des structures. Le comportement mécanique d'une structure métallique formée de poutres sous les charges qui lui sont appliquées est correctement décrit par la théorie des poutres (Decolon, 2000). Cette dernière est entièrement définie par les caractéristiques géométriques de la section courante (aire, inertie, module d'inertie, etc.) et la géométrie de la fibre moyenne (figure 3.1).

Les efforts appliqués à la poutre sont schématisés comme charges ponctuelles ou charges réparties le long de la fibre moyenne. Les sollicitations résultantes sont obtenues sous la forme de torseurs d'efforts (trois forces et trois moments) en chaque point de la fibre moyenne. Des relations simples reliant les torseurs d'efforts aux caractéristiques géométriques de la section permettent de déduire les contraintes dans la section.

L'application de la théorie des poutres à des structures simples comme les poutres continues, les portiques et les treillis simples, conduit à des solutions analytiques complètes. En revanche, pour les structures plus complexes, le recours à une méthode numérique est nécessaire telle que la méthode aux éléments finis qui est systématiquement et aisément programmable avec les références nécessaires pour l'analyse statique et modale des structures de types tel que les systèmes à treillis (figure 3.2) et les pratiques (figure 3.3).

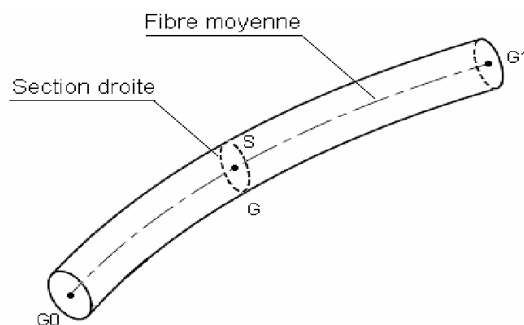


Fig. 3.1 : Schématisation d'une poutre

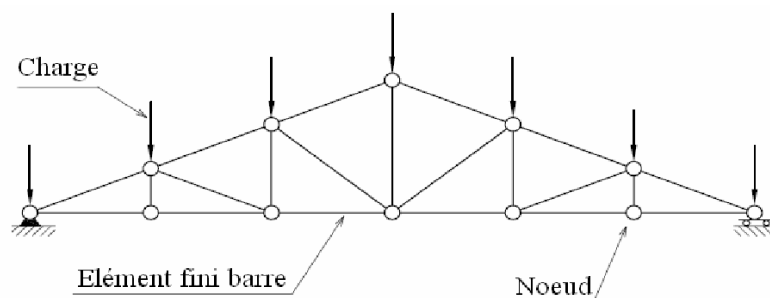


Fig. 3.2 : Discrétisation en éléments finis d'un treillis plan

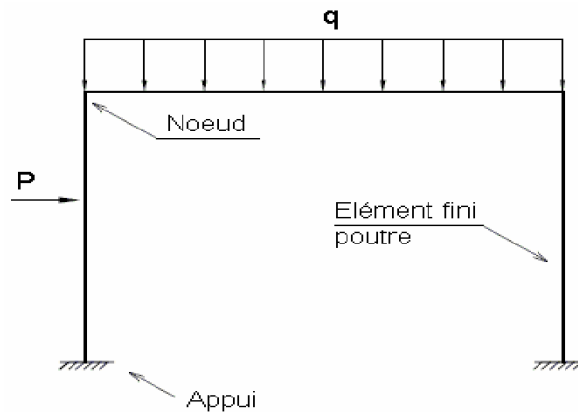


Fig. 3.3 : Discrétisation en éléments finis d'un portique plan

3.2. Concept de base de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (M.E.F.) est un des outils les plus efficaces et les plus généraux pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatial, automobile, nucléaire, génie civil, construction navale, mécanique, constructions off-shore, etc. Dans le domaine du calcul des structures, la M.E.F. est une technique à caractère pluridisciplinaire qui met en œuvre des connaissances relevant de plusieurs disciplines de base telles que la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée. Les bases théoriques de la M.E.F. reposent d'une part sur les méthodes énergétiques de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation spatiale des fonctions (Ritz, Galerkin). La M.E.F. est basée sur une décomposition du domaine dans lequel on désire effectuer la simulation en sous-domaines de forme géométrique simple appelés 'éléments finis' pour lesquels on procède à des approximations nodales des champs de déplacements ou de contraintes qui prennent en général la forme de fonctions polynomiales. L'ensemble de ces éléments constitue ce que l'on appelle le maillage du domaine. Ces éléments sont liés par un nombre fini de conditions de continuité, exprimées en certains points communs à plusieurs éléments appelés 'nœuds'.

Ce sont les méthodes classiques du calcul des structures, méthode des déplacements et méthode des forces, qui sont à la base de la M.E.F. (Zienkiwicz, 1979). Selon que l'on approxime le champ des contraintes ou le champ des déplacements on crée le modèle contrainte ou le modèle déplacement. Le modèle déplacement semble plus commode à mettre en œuvre car il s'adapte généralement mieux aux problèmes de calcul des structures et sera adopté dans ce qui suit. Dans la méthode des déplacements, la formulation du problème est faite en fonction des déplacements aux nœuds qui sont les inconnues cinématiques. La structure est préalablement discrétisée en éléments finis. Le calcul est conduit suivant deux niveaux de formulation : élémentaire au niveau de l'élément fini et globale au niveau de la structure complète.

a. La formulation élémentaire au niveau de l'élément fini :

Pour chaque élément et dans un repère local, on choisit une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements à l'intérieur de cet élément en termes de déplacements nodaux. Puis, on calcule pour chaque élément ses matrices de rigidité et de masse ainsi que son vecteur des forces. Ces caractéristiques élémentaires sont transformées par la suite dans le repère global de la structure.

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

b. La formulation globale au niveau de la structure complète :

Elle consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle de l'énergie potentielle en fonction des déplacements inconnus en tous les nœuds de la structure. Cette étape nécessite l'assemblage des matrices de rigidité et de masse et les vecteurs forces et déplacements de la structure à partir des caractéristiques élémentaires (matrices de rigidité et de masse et vecteurs forces et déplacements de chaque élément).

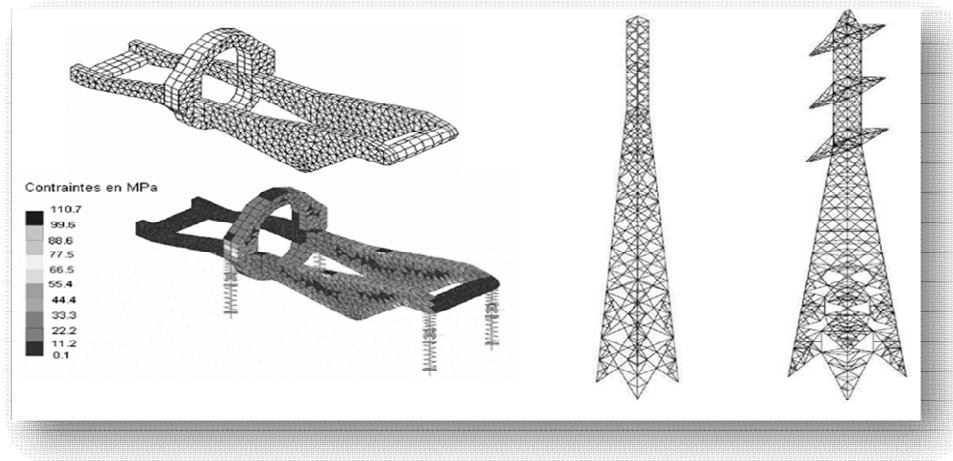


Fig. 3.4 : Exemples de modélisation par la M.E.F

3.3. Démarche de formulation éléments finis

L'analyse des structures de type treillis ou portique peut s'effectuer en considérant d'abord le comportement de chaque partie (élément barre ou poutre) indépendamment puis en assemblant ces parties de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

Dans la suite, toutes les grandeurs vectorielles et matricielles relatives à la base locale de l'élément sont surlignées d'une barre.

3.3.1. Discrétisation de la structure en éléments finis

C'est l'ensemble des opérations à effectuer pour établir le modèle mathématique de calculs représentant au mieux la structure réelle. Pratiquement cette idéalisation consiste du point de vue topologique, à ramener la structure à une géométrie simple ; c'est ainsi qu'on réduit les éléments unidimensionnels à leur axe et on définit les conditions d'appuis et les charges. Au point de vue rhéologique, elle consiste à choisir la loi constitutive du matériau et à déterminer les constantes qui définissent cette loi.

3.3.2. Construction de l'approximation nodale par sous domaine

Pour chaque élément, on choisit une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements $u^e(x, y, z)$ à l'intérieur de cet élément en termes de déplacements nodaux

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

U^e . Ce modèle peut être représenté de façon commode par une expression polynomiale contenant un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté. Soit,

$$u^e(x, y, z) = N^t U^e \quad (3.1)$$

Où N est la matrice d'interpolation reliant les déplacements d'un point intérieur de l'élément aux déplacements nodaux.

3.3.3. Etablissement de la relation entre déformations et déplacements

Il s'agit ici de trouver la matrice B reliant les déformations ϵ de l'élément à ses déplacements nodaux U^e . Cette relation est exprimée par :

$$\{\epsilon\} = B U^e \quad (3.2)$$

3.3.4. Etablissement de la relation entre contraintes et déformations

Pour un matériau élastique linéaire, les contraintes σ sont des fonctions linéaires des déformations ϵ . Elles sont exprimées par l'expression :

$$\{\sigma\} = D \{\epsilon\} \quad (3.3)$$

Où D est la matrice d'élasticité

3.3.5. Calcul des matrices élémentaires

Cette étape constitue la partie la plus importante du problème. Le déplacement U^e aux nœuds sont déterminés de telle façon que les contraintes engendrées dans l'élément équilibrent le chargement extérieur F^e , c'est-à-dire que :

$$K^e U^e = F^e \quad (3.4)$$

K^e est la matrice de rigidité de l'élément exprimée dans le repère local. Elle est déduite de l'énergie de déformation de l'élément (Rocky, 1979) et exprimée par :

$$K^e = \int^v B^T D B dv \quad (3.5)$$

Il faut aussi calculer la matrice de masse M^e de chaque élément. Cette matrice est déduite de l'énergie cinétique de l'élément (Rocky, 1979). Dans le repère local de l'élément, cette matrice est donnée par l'expression :

$$M^e = \int^v \rho N^T N dv \quad (3.6)$$

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

Où ρ est la masse volumique du matériau constituant l'élément. Finalement, on exprime les matrices \mathbf{K}^E , \mathbf{M}^E , \mathbf{U}^E et \mathbf{F}^E dans le repère global défini pour toute la structure.

3.4. Élément fini barre

3.4.1. Définition

Géométriquement une barre correspond à un solide orienté dans la direction x (repère local). Les dimensions dans le plan (y - z) normal à x sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinale (figure 3.5). Un élément fini barre (figure 3.6) schématise un composant d'une structure qui travaille uniquement en traction ou compression. C'est généralement un élément à 2 nœuds, qui comporte 3 inconnues ou degrés de liberté (d.d.l.) par nœud représentant les composantes de son déplacement dans l'espace.

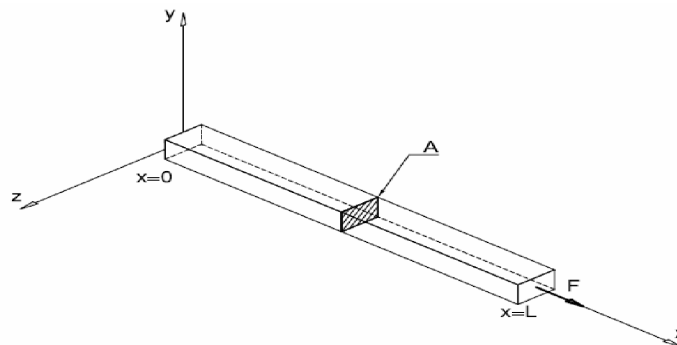


Fig. 3.5 : Géométrie d'un élément fini barre

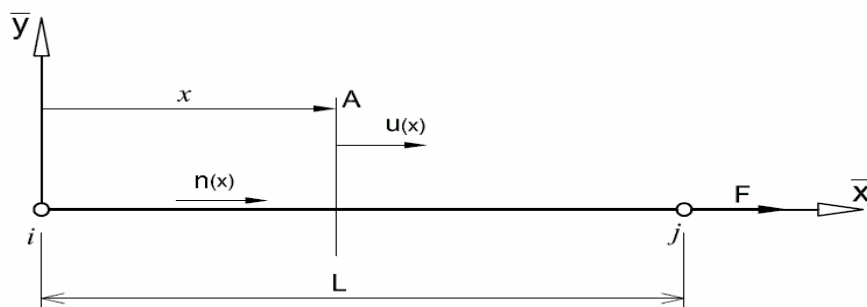


Fig. 3.6 : Modélisation d'un élément fini barre

Les principales hypothèses pour un élément barre rectiligne qui ne travaille qu'en traction ou compression [Rocky, 1979] sont :

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

- Petits déplacements

$$\vec{u}_{(M,t)} = u_{(x,t)} \vec{X} \quad (3.7)$$

- Déformations en petits déplacements :

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.8)$$

- Loi de Hooke dans un milieu isotrope homogène élastique :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.9)$$

avec σ est la contrainte dans la barre et E est le module de Young du matériau.

En intégrant les contraintes sur la section A nous obtenons la loi de comportement intégrée des barres :

$$n(x) = EA\varepsilon \quad (3.10)$$

Où $n(x)$ est l'effort normal dans la barre dû à la force nodale F.

3.4.2. Formulation de l'élément barre dans le plan

a. Identification du problème

Considérons un élément barre dans le plan défini par deux nœuds i et j , de longueur L et de section uniforme A (figure 3.7).

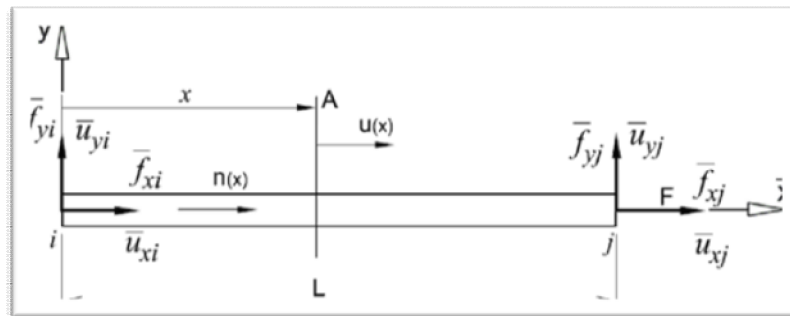


Fig. 3.7: Élément fini barre dans le repère local (i, \bar{x}, \bar{y})

Dans le repère local (i, \bar{x}, \bar{y}) on note par \bar{u}_{xi} et \bar{u}_{xj} les déplacements aux nœuds i et j , et par \bar{f}_{xi} et \bar{f}_{xj} les forces aux nœuds i et j .

Le vecteur force relatif à l'élément e est donné par :

$$\bar{F}^e = [\bar{f}_{xi}, \bar{f}_{yi}, \bar{f}_{xj}, \bar{f}_{yj}]^t \quad (3.11)$$

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

Le vecteur déplacement est donné par:

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi}, \bar{u}_{yi}, \bar{u}_{xj}, \bar{u}_{yj}]^t \quad (3.12)$$

Dans le cas qui nous occupe $\bar{f}_{yi}, \bar{f}_{yj}, \bar{u}_{yi}, \bar{u}_{yj}$ sont nuls puisque l'élément barre ne travaille qu'en traction ou compression.

b. Fonction d'interpolation

Pour un problème statique, lorsque l'élément est chargé au niveau de ses nœuds, l'effort normal est uniforme. Compte tenu des relations (3.8) et (3.10) la solution $u(x)$ sera linéaire. Pour chercher cette solution, nous allons utiliser une approximation polynomiale linéaire de la forme (Krishnamoorthy, 1987) :

$$u(x) = N_1 \bar{u}_{xi} + N_2 \bar{u}_{xj} \quad (3.13)$$

Où N_1 et N_2 sont les coordonnées naturelles.

Nous identifions aux nœuds i ($x=0$) et j ($x=L$) la valeur de l'approximation des déplacements axiaux. Nous en déduisons :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \text{ Et } N_2 = \frac{x}{L} \quad (3.14)$$

Sous forme matricielle nous écrivons :

$$u(x) = N^t \bar{U}^e = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right] \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{xj} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

La matrice N d'interpolation reliant les déplacements d'un point intérieur de l'élément aux déplacements nodaux est donc :

$$N = \left[1 - x/L \quad x/L \right]^t \quad (3.16)$$

c. Relation entre déformation et déplacement

La déformation est déduite des expressions (3.8) et (2.13)

Soit:

$$\{\epsilon\} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{xj} \end{bmatrix} = B \bar{U}^e \quad (3.17)$$

La matrice B reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nodaux est alors :

$$B = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

d. Matrice de rigidité d'une barre dans le plan :

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

La forme de la matrice de rigidité e

K de l'élément dans le repère local est donnée par l'expression (3.5). La matrice d'élasticité D se réduit au scalaire E (module de Young du matériau). Soit, après intégration :

$$\bar{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

e. Matrice de masse d'une barre dans le plan :

La matrice de masse M^e dans le repère local est déterminée à partir de l'expression (3.6). Soit, après intégration :

$$\bar{M}^e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

f. Transformation dans le repère global

Soit $u_{xi}, u_{yi}, u_{xj}, u_{yj}$ les déplacements aux nœuds i et j exprimés dans le repère global (figure 2.8). La relation entre les déplacements exprimés dans le repère local et ceux exprimés dans le repère global est donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{u}_{xi} &= u_{xi}c_x + u_{yi}c_y \\ \bar{u}_{xj} &= u_{xj}c_x + u_{yj}c_y \end{aligned} \quad (3.21)$$

Où c_x et c_y sont les cosinus directeurs définis par :

$$c_x = \frac{1}{L}(x_j - x_i) \quad \text{Et} \quad c_y = \frac{1}{L}(y_j - y_i) \quad (3.22)$$

Avec L est la longueur de l'élément calculée à partir des coordonnées des nœuds. Soit :

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (3.23)$$

Sous forme matricielle, on écrit :

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{xj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x & c_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & c_x & c_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi} \\ y_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

La matrice transformation du repère local au repère global est :

$$T = \begin{bmatrix} c_x & c_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & c_x & c_y \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

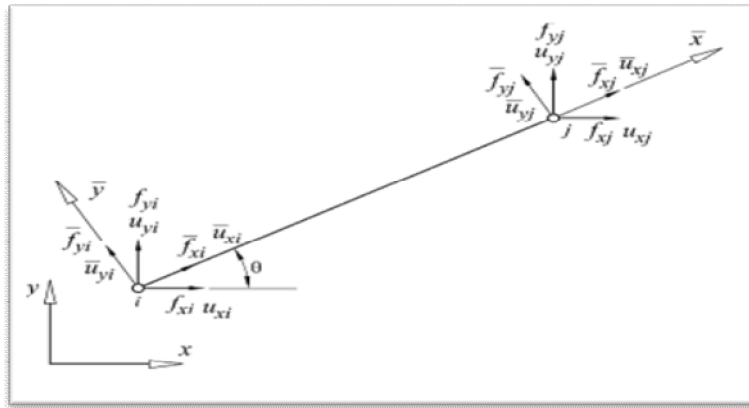


Fig. 3.8 : Élément fini dans le repère global

La matrice de rigidité exprimée dans le repère global sera déduite de la matrice de rigidité exprimée dans le repère local par la relation :

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^t \mathbf{K}^e \mathbf{T} \quad (3.26)$$

De même, la matrice de masse de l'élément barre dans le plan exprimée dans le repère global est :

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{T}^t \bar{\mathbf{M}}^e \quad (3.27)$$

3.4.3. Formulation d'un élément barre tridimensionnelle

La figure (2.9) illustre un élément barre tridimensionnelle. Le vecteur force relatif à l'élément e est donné par :

$$\bar{\mathbf{F}}^e = [\bar{f}_{xi}, \bar{f}_{yi}, \bar{f}_{xj}, \bar{f}_{yj}, \bar{f}_{zj}]^t \quad (3.28)$$

Avec quatre composantes nulles.

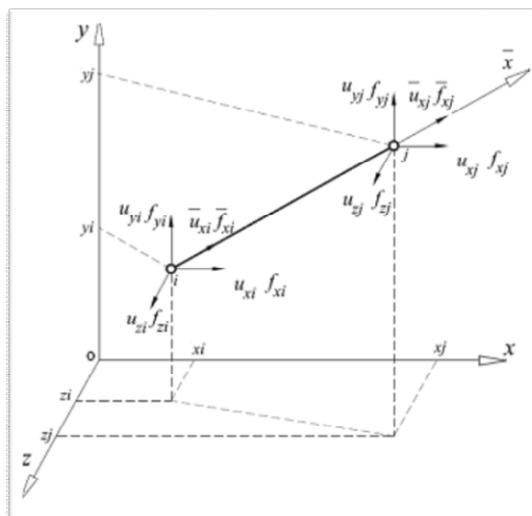


Fig. 3.9 : Élément fini barre spatiale

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

Le vecteur déplacement est donné par :

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi}, \bar{u}_{yi}, \bar{u}_{xj}, \bar{u}_{yj}, \bar{u}_{zj}]^e \quad (3.29)$$

Avec quatre composantes nulles.

De la même manière que pour un élément barre dans le plan, les relations entre les grandeurs mesurées dans le repère local et celles mesurées dans le repère global pour un élément barre tridimensionnelle sont données par :

$$\begin{aligned} \bar{u}_{xi} &= u_{xi}c_x + u_{yi}c_y + c_z u_{zi} \\ \bar{u}_{xj} &= u_{xj}c_x + u_{yj}c_y + c_z u_{zj} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Avec :

$$c_x = \frac{1}{L}(x_j - x_i) \quad c_y = \frac{1}{L}(y_j - y_i) \quad c_z = \frac{1}{L}(z_j - z_i) \quad (3.31)$$

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3.32)$$

La matrice de transformation est donc :

$$T = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

La matrice de rigidité d'une barre tridimensionnelle exprimée dans le repère global est donnée par :

$$K^e = T^t \bar{K}^e T \quad (3.34)$$

$$\bar{K}^e \text{ est donnée par l'expression} \quad (3.19)$$

De même, la matrice de masse de l'élément barre tridimensionnelle exprimée dans le repère global est :

$$M^e = T^t \bar{M}^e T \quad (3.35)$$

$$\bar{M}^e \text{ est donnée par l'expression} \quad (3.20)$$

3.5. Élément fini poutre

3.5.1. Définition :

Un élément fini poutre est un élément dont le comportement est tridimensionnel. Ce comportement dans le cadre de la théorie linéaire est obtenu par superposition de trois modèles mathématiques : le modèle de traction, le modèle de torsion et le modèle de flexion (Krishnamoorthy, 1987). C'est généralement un élément à 2 nœuds, qui comporte 6

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

inconnues ou d.d.l. par nœud associés aux composantes de son déplacement et de sa rotation dans l'espace. Pour une poutre plane, chaque nœud possède trois degrés de liberté par nœud (deux déplacements et une rotation), alors que pour une poutre tridimensionnelle, le nombre de degrés de liberté par nœud est six : trois rotations et trois translations.

3.5.2. Formulation d'un élément poutre dans le plan

a. Identification du problème :

La figure (3.10) illustre un élément poutre dans le plan (x-y) orienté suivant son axe local \bar{x} .

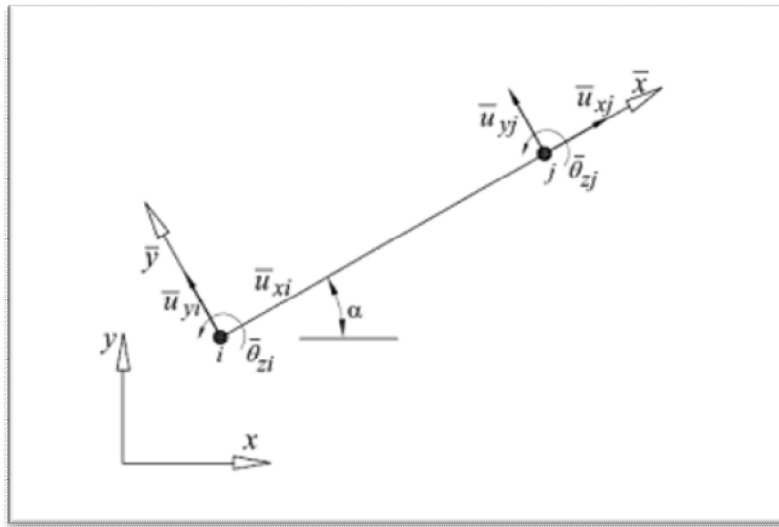


Fig. 3.10 : Élément poutre dans le plan avec 6 degrés de liberté

Cet élément possède six degrés de liberté correspondant au vecteur déplacement suivant :

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi}, \bar{u}_{yi}, \bar{\theta}_{zi}, \bar{u}_{xj}, \bar{u}_{yj}, \bar{\theta}_{zj}]^t \quad (3.36)$$

Où $\bar{u}_{xi}, \bar{u}_{yi}, \bar{u}_{xj}, \bar{u}_{yj}$ sont les déplacements aux nœuds i et j suivant \bar{x} et \bar{y} , $\bar{\theta}_{zi}$ et $\bar{\theta}_{zj}$ sont les rotations aux nœuds i et j autour de l'axe Z

Les coefficients de la matrice de rigidité de cet élément qui sont dus aux déplacements axiaux sont ceux définis pour un élément barre et n'influence pas le comportement de l'élément sous l'effet de $\bar{u}_{yi}, \bar{u}_{yj}, \bar{\theta}_{zj}$ et $\bar{\theta}_{zi}$. Dans la suite nous cherchons à déterminer les coefficients de la matrice de rigidité relatifs aux déplacements $\bar{u}_{yi}, \bar{u}_{yj}, \bar{\theta}_{zj}$ et $\bar{\theta}_{zi}$.

b. Fonction d'interpolation

On choisit une fonction d'interpolation qui définit d'une façon approximative l'état de déplacement de tous les points de l'élément. Puisque l'élément possède quatre degrés de liberté de $\bar{u}_{yi}, \bar{u}_{yj}, \bar{\theta}_{zj}$ et $\bar{\theta}_{zi}$, quatre coefficients inconnus doivent apparaître dans le polynôme représentant le modèle du déplacement (Krishnamoorthy, 1987). Soit :

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

$$\bar{u}_y = a_1 N_1^3 + a_2 N_2^3 + a_3 N_1^2 N_2 + a_4 N_1 N_2^2 \quad (3.37)$$

où N_1 et N_2 sont les coordonnées naturelles données par l'expression (2.14) et a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des coefficients à déterminer.

Sous forme matricielle l'expression (3.37) s'écrit:

$$\bar{u}_y = N^t \bar{U}^e \quad (3.38)$$

La rotation θ est liée au déplacement \bar{u}_y par la relation :

$$\theta = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} = \frac{1}{L} [3a_2 N_2^2 + a_3 N_1^2 + 2a_4 N_1 N_2 - 3a_1 N_1^2 - 2a_3 N_1 N_2 - a_4 N_2^2] \quad (3.39)$$

En égalant cette expression aux rotations au nœud $i(x=0)$ et au nœud $j(x=L)$; on en déduit :

$$N = [N_1^2(3 - 2N_1)N_1^2 N_2 L \quad N_2^2(3 - N_2) - N_1 N_2^2 L]^t \quad (3.40)$$

c. Relation entre déformation et déplacement

La seule déformation à considérer est la courbure autour de l'axe y . Le vecteur de déformation est donné par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = -y \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} \quad (3.41)$$

La contrainte σ et le moment m_z dus à la flexion dans le plan $(x-y)$ sont (Kerguignas, 1977):

$$\sigma = -E y \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} \quad (3.42)$$

$$m_z = -EI_z \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} \quad (3.43)$$

si E est le module de Young du matériau et I_z est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe \bar{z} .

Compte tenu des expressions (3.38) et (3.40), on a :

$$m_z = -\frac{EI_z}{L} [(6-12N_1) L(2N_2 - 4N_1) (6 - 12N_2) L(4N_2 - 2N_1)] \bar{U}^e \quad (3.44)$$

Les contraintes σ et les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ correspondant au moment interne dans la poutre sont reliées par la relation :

$$\sigma = D\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = DB\bar{U}^e \quad (3.45)$$

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

Dans ce cas particulier, la matrice D contient un seul terme correspondant à la rigidité de flexion EI_x . La matrice reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nodaux est donc :

$$B = \left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \quad -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right] \quad (3.46)$$

d. La matrice de rigidité

La matrice de rigidité de l'élément poutre à 4 d.d.l. dans le repère local est calculée à partir de l'expression (3.5). Soit :

$$K^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & -\frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} \\ & \frac{4EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{2EI_x}{L} \\ & & \frac{12EI_x}{L^3} & -\frac{6EI_x}{L^2} \\ \text{sym.} & & & \frac{4EI_x}{L} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

En tenant compte du coefficient dû au déplacement suivant l'axe \bar{x} , la matrice de rigidité de l'élément poutre dans le plan (à 6 d.d.l.) exprimée dans le repère local de l'élément est :

$$\bar{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} \\ & & \frac{4EI_x}{L} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{2EI_x}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & \frac{12EI_x}{L^3} & -\frac{6EI_x}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI_x}{L} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

e. Matrice de masse d'un élément poutre dans le plan :

En utilisant les expressions (3.6) et après intégration la matrice de masse pour un élément poutre à 4 d.d.l. exprimée dans le repère local est donnée par :

$$\bar{M}^e = \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Pour un élément poutre à 6 d.d.l. la matrice de masse est la superposition des deux matrices données par les expressions (3.20) et (3.49). Soit :

$$\bar{M}^e = \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

f. Transformation dans le repère global

On procède de la même façon que pour un élément barre tridimensionnelle, la matrice de transformation dans le repère global est :

$$T = \begin{bmatrix} c_x & c_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_y & c_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_y & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Où c_x et c_y sont les cosinus directeurs définis par l'expression (3.31).

2.5.3. Formulation d'un élément poutre en torsion (4 d.d.l.)

a. La matrice de rigidité

Considérons la poutre représentée à la figure (3.11) sollicitée par un moment de torsion m_x .

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

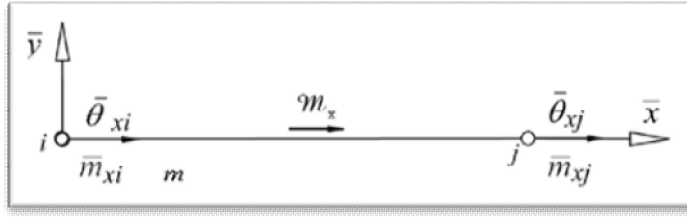


Fig. 3.11 : Élément poutre en torsion

La rotation varie linéairement le long de la longueur de la poutre et peut être exprimée de la manière suivante :

$$\theta_x = N_1 \bar{\theta}_{xi} + N_2 \bar{\theta}_{xj} \bar{\theta}_{xi} \quad (3.52)$$

Où N_1 et N_2 sont les coordonnées naturelles définies par l'expression (3.14). L'angle α de torsion le long de l'élément est donné par :

$$\alpha = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{L} (\bar{\theta}_{xj} - \bar{\theta}_{xi}) \quad (3.53)$$

Le moment de torsion m_x est exprimé par (Kerguignas, 1977):

$$m_x = GI_t \alpha = GI_t \frac{1}{L} (\bar{\theta}_{xj} - \bar{\theta}_{xi}) \quad (3.54)$$

Où I_t est le moment d'inertie de torsion et G est le module de cisaillement du matériau. En assimilant le moment m_x à la contrainte σ , les matrices B et D sont données par

$$D = GI_t \quad (3.55)$$

$$B = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \quad (3.56)$$

Compte tenu de l'expression (3.5), la matrice de rigidité de l'élément fini poutre en torsion exprimée dans le repère local est :

$$\bar{K}^e = \frac{GI_t}{L} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

(3.57)

e. La matrice de masse

L'énergie cinétique d'un élément poutre en torsion pure est (Decolon, 2000) :

$$W^e = \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_t \theta^2 dx \quad (3.58)$$

Ce de masse correspond à :

$$\bar{M}^e = \int_0^L \rho I_t N^T dx \quad (3.59)$$

Soit :

$$\bar{M}^e = \frac{\rho I_t L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

3.5.4. Formulation d'un élément poutre tridimensionnelle

a. La matrice de rigidité

Considérons l'élément poutre tridimensionnelle représenté à la figure (3.12). L'axe \bar{x} de la poutre coïncide avec l'axe neutre de cette dernière. Il est positif de i vers j . Les axes \bar{y} et \bar{z} sont choisis de telle sorte que les plans $(\bar{x}-\bar{y})$ et $(\bar{x}-\bar{z})$ soient les plans principaux de la flexion.

Notons par \bar{u}_{xi} , \bar{u}_{yi} , et \bar{u}_{zi} les déplacements au nœud i et par $\bar{\theta}_{xi}$, $\bar{\theta}_{yi}$ et $\bar{\theta}_{zi}$ les rotations, respectivement, autour de \bar{x} , \bar{y} et \bar{z} au même nœud i . \bar{f}_{xi} , \bar{f}_{yi} , \bar{f}_{zi} , \bar{m}_{xi} , \bar{m}_{yi} et \bar{m}_{zi} sont les forces et les moments au nœud i .

Le vecteur force est donné par :

$$\bar{F}^e = [\bar{f}_{xi} \bar{f}_{xi} \bar{f}_{yi} \bar{f}_{zi} \bar{m}_{xi} \bar{m}_{yi} \bar{m}_{zi} \bar{f}_{xj} \bar{f}_{yj} \bar{f}_{zj} \bar{m}_{xj} \bar{m}_{yj} \bar{m}_{zj}] \quad (3.61)$$

Le vecteur déplacement est donné par :

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi} \bar{u}_{xi} \bar{u}_{yi} \bar{u}_{zi} \bar{\theta}_{xi} \bar{\theta}_{yi} \bar{\theta}_{zi} \bar{u}_{xj} \bar{u}_{yj} \bar{u}_{zj} \bar{\theta}_{xj} \bar{\theta}_{yj} \bar{\theta}_{zj}] \quad (3.62)$$

Cet élément est la superposition de quatre éléments dont les matrices de rigidité ont déjà été déterminées : élément barre, élément poutre en torsion, élément poutre fléchie autour de z dans le plan $(\bar{x}-\bar{y})$ et élément poutre fléchie autour de y dans le plan $(\bar{x}-\bar{z})$.

La matrice de rigidité d'un élément poutre tridimensionnelle est donc :

$$K^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_z}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_z}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

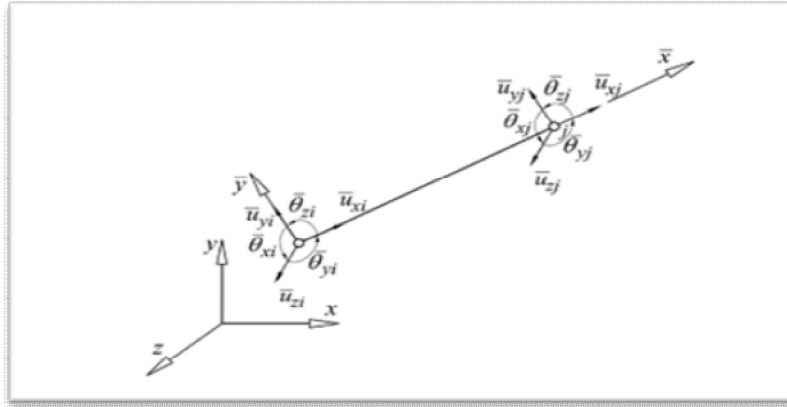


Fig. 3.12 : Élément poutre tridimensionnelle

b. La matrice de masse

La matrice de masse d'un élément poutre tridimensionnelle est obtenue par la superposition des matrices de masse des éléments poutres en traction, torsion et flexion dans les deux plans $(\bar{x}-\bar{y})$ et $(\bar{x}-\bar{z})$. Soit :

$$\bar{M}^e = \frac{\rho AL}{420} \times \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 0 & 156 & \frac{140Lz}{A} & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & \frac{70Lz}{A} & 13L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{140Lz}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{70Lz}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 \\ 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{70Lz}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140Lz}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L & \frac{70Lz}{A} & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & \frac{140Lz}{A} & 4L^2 & 0 \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

c. Transformation dans le repère global

Dans le cas d'un élément barre tridimensionnelle, la position des deux nœuds d'extrémités suffit pour définir son orientation dans l'espace. Pour un élément poutre, la ligne liant les nœuds i et j définit l'axe local \bar{x} de la poutre. Un troisième nœud k est nécessaire pour définir les deux plans principaux de flexion $(\bar{x}-\bar{y})$ et $(\bar{x}-\bar{z})$. (figure 3.13).

Pour aboutir à la matrice de transformation, le repère global est amené à coïncider avec le repère local par une séquence de rotations d'angles β , γ et α respectivement autour des axes y, z et x (figure 3.14).

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

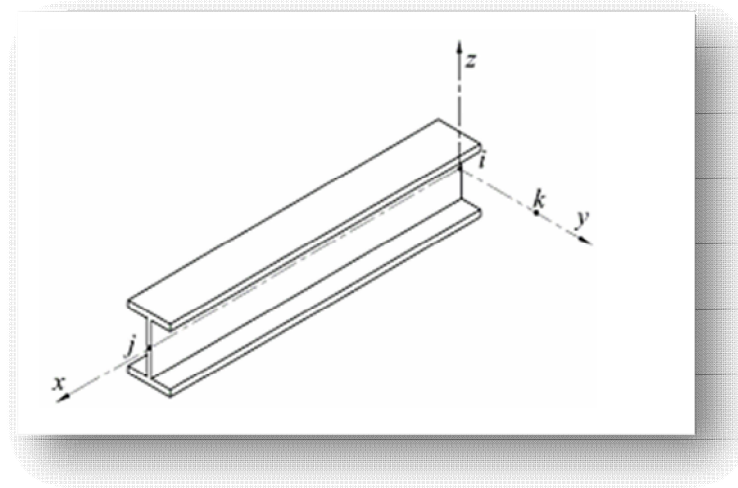


Fig. 3.13 : Axes locaux d'un élément poutre

La première rotation autour de l'axe y avec un angle β place l'axe x en position x_β qui est la projection de l'axe \bar{x} sur le plan(x-z). L'axe z est placé en position z_β . La matrice de transformation correspondant à cette rotation est :

$$T_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Avec $\cos \beta = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}}$ et $\sin \beta = \frac{c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}}$ (3.66)

Où c_x, c_y et c_z sont les cosinus directeurs définis par l'expression (3.31).

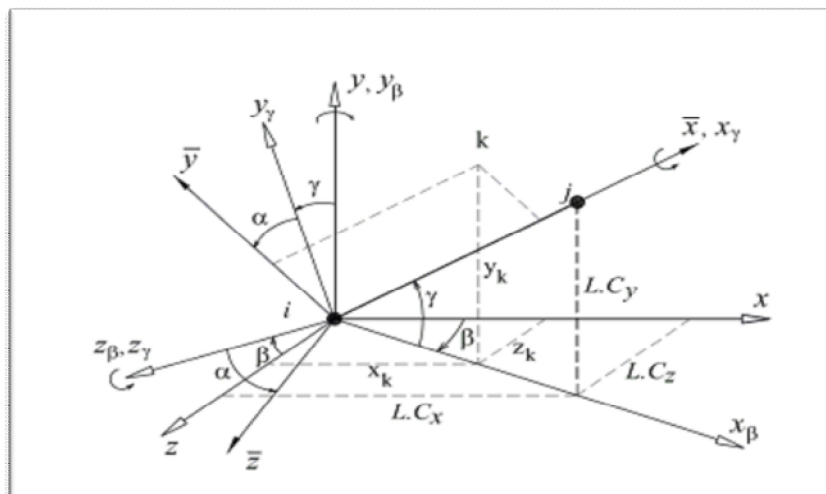


Fig. 3.14 : Rotations des axes pour un élément poutre tridimensionnelle.

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

La deuxième transformation consiste à faire tourner le nouveau système d'axes $(x_\beta, y_\beta, z_\beta)$

Autour de z_β avec un angle γ pour faire coïncider l'axe x_β avec l'axe \bar{x} . Nous obtenons un nouveau système d'axes $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$. La matrice de transformation correspondant à cette rotation est :

$$T_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\text{Avec } \cos \gamma = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \quad \text{et} \quad \sin \gamma = \frac{c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \quad (3.68)$$

Finalement, le système d'axes $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$. Tourne d'un angle α autour de l'axe x_γ pour amener les axes y_γ et z_γ à se confondre avec les axes \bar{y} et \bar{z} . La matrice de transformation correspondant à cette rotation est :

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Le nœud k est choisi sur l'axe principal \bar{y} de la section (fig. 3.15). Les coordonnées de ce nœud par rapport à i exprimées dans le repère global sont :

$$\begin{aligned} X_{xi} &= X_k - X_i \\ Y_{xi} &= Y_k - Y_i \\ Z_{xi} &= Z_k - Z_i \end{aligned} \quad (3.70)$$

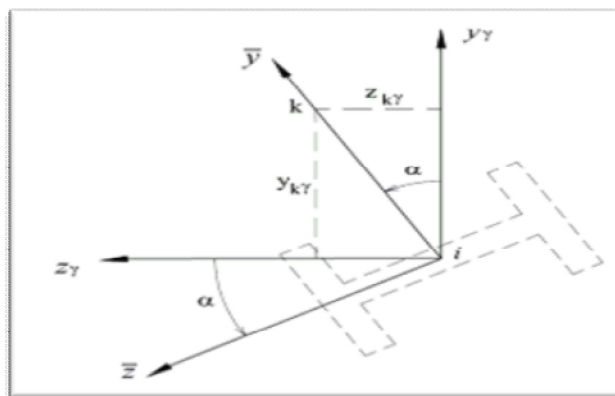


Fig. 3.15 : Axes principaux d'un élément poutre.

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

Les coordonnées du nœud k exprimées dans repère $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sont :

$$\begin{bmatrix} x_{k\bar{y}} \\ y_{k\bar{y}} \\ z_{k\bar{y}} \end{bmatrix} = T_\gamma T_\beta \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Après simplification nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_{k\bar{y}} &= c_x x_{ki} + c_y y_{ki} + c_z z_{ki} \\ y_{k\bar{y}} &= -\frac{c_y c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} x_{ki} + \sqrt{c_x^2 + c_z^2} y_{ki} - \frac{c_y c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} z_{ki} \\ z_{k\bar{y}} &= -\frac{c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} x_{ki} + \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} z_{ki} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Nous en déduisons l'angle α qui peut être calculé par ses lieux trigonométriques comme suit :

$$\sin \alpha = \frac{z_{k\bar{y}}}{\sqrt{y_{k\bar{y}}^2 + z_{k\bar{y}}^2}} \quad \text{Et} \quad \cos \alpha = \frac{y_{k\bar{y}}}{\sqrt{y_{k\bar{y}}^2 + z_{k\bar{y}}^2}} \quad (3.73)$$

Finalement la transformation correspondant à l'ensemble des rotations d'angles β , γ et α est :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_\alpha \mathbf{T}_\gamma \mathbf{T}_\beta \quad (3.74)$$

Cette transformation n'est pas applicable pour des membrures dont l'axe local \bar{x} est parallèle à l'axe global x (c_x et c_z sont nuls). Dans ce cas de figure, il y a uniquement deux rotations : la première correspond à $\gamma=90^\circ$ ou $\gamma=270^\circ$ selon que la valeur de c_y est positive ou négative, la deuxième autour de l'axe x avec un angle α (fig. 3.16).

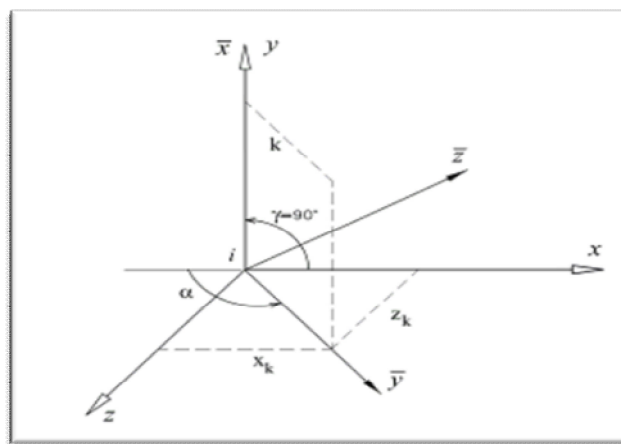


Fig. 3.16 : Rotations correspondant à un élément vertical.

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

La matrice de transformation dans ce cas est :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & c_y & 0 \\ -c_y \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ c_y \sin \alpha & 0 & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Et les lieux trigonométriques de l'angle α sont évalués comme suit :

$$\sin \alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \quad \text{Et} \quad \cos \alpha = -\frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} c_y \quad (3.76)$$

3.6. Charges appliquées sur les éléments

Dans le cas d'une charge répartie q sur un élément, celle-ci est rapportée aux nœuds d'extrémités (figure 3.17). Le vecteur de charge nodale correspondant est (Krishnamoorthy, 1987) :

$$\bar{F}_r^e = \iint N^T q ds \quad (3.77)$$

Pour une charge uniformément répartie sur un élément poutre dans le plan (figure 3.17- a) le vecteur de charges nodales équivalent est :

$$\bar{F}_r^e = q \int_0^L N^T dl \quad (3.78)$$

Soit, donc, après intégration :

$$\bar{F}_r^e = \left[0 \quad \frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \quad 0 \quad \frac{qL}{2} \quad -\frac{qL^2}{12} \right]^t \quad (3.79)$$

Dans le cas d'une charge répartie qui varie linéairement le long de l'élément (figure 3.17-b) le vecteur de charges nodales équivalent est :

$$\bar{F}_r^e = \left[0 \quad \frac{(7q_1+3q_2)L}{20} \quad \frac{(3q_1+2q_2)L^2}{60} \quad 0 \quad \frac{(3q_1+7q_2)L}{20} \quad -\frac{(2q_1+3q_2)L^2}{60} \right]^t \quad (3.80)$$

Dans le cas d'une charge ponctuelle P appliquée sur l'élément (figure 3.17-c) le vecteur de charges nodales \bar{F}_r^e prend la forme :

$$\bar{F}_r^e = \left[0 \quad \frac{Pb^2}{L^3} (3a+b) \quad \frac{Pab^2}{L^2} \quad 0 \quad \frac{Pa^2}{L^2} (a+3b) \quad -\frac{Pa^2b}{L^2} \right]^t \quad (3.81)$$

Pour une barre de treillis, la notion de charge répartie transversale n'est pas cohérente avec la théorie, la modélisation de type barre ne prenant pas en compte la raideur flexionnelle.

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

Le poids propre d'une barre doit être modélisé par deux forces, concentrées aux nœuds d'extrémités, statiquement équivalentes au poids total de la barre (figure 3.18).

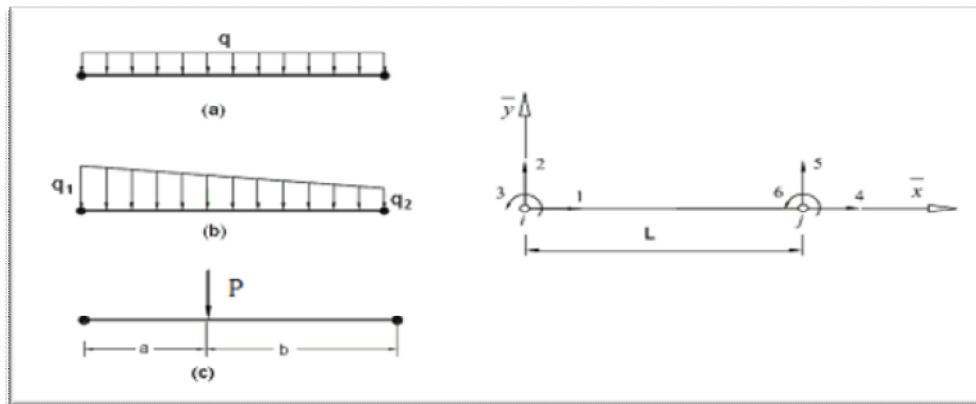


Fig. 3.17 : Charges sur un élément

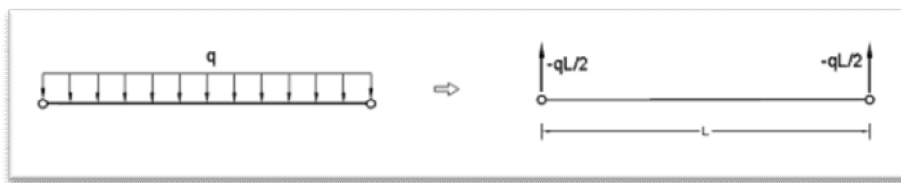


Fig. 3.18 : Cas du poids propre d'une barre d'un treillis

La phase de l'assemblage consiste à construire les matrices K , M et F de la structure complète à partir des matrices K^e , M^e et F^e des différents éléments tout en respectant la compatibilité des déplacements et l'équilibre des forces aux nœuds. Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie potentielle P totale de la structure est obtenue par sommation des énergies potentielles P_e des éléments [Imbert 1979]. Si on a une structure formée de n_e éléments, cette énergie s'écrit, sous forme matricielle :

$$\Pi = \sum_1^{n_e} \Pi^e = \sum_1^{n_e} \left(\frac{1}{2} U^{eT} K^e U^e - U^{eT} F^e + \frac{1}{2} U^{eT} M^e \ddot{U}^e \right) \quad (3.82)$$

Le premier terme de cette expression exprime l'énergie de déformation, le second correspond au travail des forces extérieures et le troisième traduit l'effet de l'inertie. La compatibilité des déplacements nodaux de la structure est obtenue en écrivant pour chaque élément une relation matricielle du type :

$$U^e = C^e \cdot U \quad (3.83)$$

C^e est la matrice de localisation ou de connectivité géométrique d'ordre $n \times m$ (n : nombre de d.d.l. de l'élément, m : nombre de d.d.l. de la structure). C'est une matrice booléenne dont les éléments sont des 0 ou des 1. Chaque terme dont le d.d.l. coïncide avec celui du système prend la valeur 1. Cette relation permet de localiser pour chaque élément ces

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

d.d.l. dans l'ensemble des d.d.l. de la structure. En utilisant cette relation dans l'expression (3.82), on aura :

$$\Pi = \sum_1^{n_e} \left(\frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{C}^{e^t} \mathbf{K}^e \mathbf{C}^e \mathbf{U} - \mathbf{U}^t \mathbf{C}^e \mathbf{F}^e + \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{C}^{e^t} \mathbf{M}^e \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{U}} \right) \quad (3.84)$$

Soit
$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^t \mathbf{F} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (3.85)$$

Avec
$$\mathbf{K} = \sum_1^{n_e} \mathbf{C}^{e^t} \mathbf{K}^e \mathbf{C}^e \quad (3.86)$$

$$\mathbf{M} = \sum_1^{n_e} \mathbf{C}^{e^t} \mathbf{M}^e \mathbf{C}^e \quad (3.87)$$

$$\mathbf{F} = \sum_1^{n_e} \mathbf{C}^{e^t} \mathbf{F}^e \quad (3.88)$$

Les matrices M et K sont symétriques, définies positives et ne dépendent que du, matériau et de la forme de la structure.

3.7. Résolution en analyse statique

3.7.1. Système d'équations linéaires

L'analyse statique consiste à calculer la réponse statique linéaire d'une structure soumise à des charges ponctuelles ou réparties. Dans le cas statique l'expression (3.85) devient :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^t \mathbf{F} \quad (3.89)$$

Les extremums de cette énergie sont :

$$\partial \Pi / \partial \mathbf{U} = \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.90)$$

D'où

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.91)$$

La résolution de ce système linéaire permet de déterminer le vecteur U des déplacements inconnus. On calculera par la suite, les réactions, les efforts et les contraintes dans les éléments de la structure.

3.7.2. Prise en compte des conditions aux limites

Dans l'expression (2.91), la matrice de rigidité K de la structure est singulière. Cela implique qu'il existe des déplacements de solide rigide qui doivent être éliminés en introduisant les conditions aux limites cinématiques.

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

Avant de résoudre ce système d'équations pour déterminer le vecteur U des déplacements inconnus, il faut donc prendre en compte les conditions de déplacement imposé. Pour cela, nous décomposons le système en deux blocs correspondant, respectivement, aux composantes du vecteur de déplacements nodaux connues U_d et inconnues U_i . Nous obtenons, alors, la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_d + R \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Avec F_i Composantes des forces correspondant aux déplacements inconnus ;
 F_d Composantes des forces correspondant aux déplacements connus ;
 R Réactions inconnues engendrées par les appuis.

Le premier bloc d'équations nous donne le vecteur des déplacements nodaux inconnus :

$$U_i = K_{11}^{-1} F_i - K_{11}^{-1} K_{12} U_d \quad (3.93)$$

Le second bloc d'équations nous permet de déterminer les réactions d'appui :

$$R = K_{21} U_i + K_{22} U_d - F_d \quad (3.94)$$

Si les déplacements prescrits U_d sont nuls, l'expression (3.93) devient :

$$U_i = K_{11}^{-1} F_i \quad (3.95)$$

En reportant (3.95) dans (3.94) nous obtenons :

$$R = K_{21} K_{11}^{-1} F_i - F_d \quad (3.96)$$

En pratique, si les déplacements imposés sont tous nuls, on procède par élimination des lignes et colonnes correspondant à ces degrés de liberté pour obtenir la matrice K_{11} .

3.7.3. Résolution du système linéaire

La résolution du système (3.95) permet de déterminer le vecteur U_i des déplacements inconnus. En pratique, la matrice K_{11} , à laquelle on aboutit est de grande taille. Le coût de la résolution numérique de ces systèmes d'équations est une partie significative du coût global de l'analyse. Il existe des méthodes de résolution appropriées qui tirent profit du caractère symétrique de la topologie de la matrice de rigidité. La méthode d'élimination de Gauss est parmi les méthodes utilisées pour la résolution des systèmes linéaires [Meyer, 1975]. Elle a une excellente fiabilité ; elle permet en particulier la détection des singularités. Cette méthode a été utilisée dans CADBEL pour résoudre le système d'équations linéaires (3.95).

3.7.4. Calcul des efforts

Les efforts intérieurs se calculent élément par élément à partir des déplacements exprimés dans le repère local de l'élément. Ils sont obtenus en écrivant les équations élémentaires d'équilibre ; soit en statique pour un élément :

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

$$\mathbf{F}_i^e = \mathbf{K}^e \mathbf{U}^e - \mathbf{F}_r^e \quad (3.97)$$

Où \mathbf{F}_r^e est le vecteur forces aux nœuds équivalent aux charges appliquées sur l'élément.

La somme des efforts exercés sur un nœud doit être nulle. Nous pouvons donc tester la précision de la résolution du système en calculant les résidus d'équilibre locaux. Les contraintes sont calculées à partir des efforts en fonction de la forme et des dimensions de la section transversale.

3.8. Résolution en analyse modale

3.8.1. Système d'équations aux valeurs propres

La recherche des fréquences et modes naturels d'une structure s'appelle l'analyse modale.

Compte tenu de l'expression (3.85) et en négligeant les amortissements de type visqueux, l'énergie potentielle P totale de la structure due aux vibrations libres de l'élément est :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{U}^t \mathbf{K} \ddot{\mathbf{U}} \quad (3.98)$$

Les extremums de cette énergie sont donnés par la relation :

$$\partial \Pi / \partial \mathbf{U} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.99)$$

Et l'équation matricielle associée à l'analyse élastodynamique pour un régime libre est définie par :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.100)$$

Les solutions recherchées pour l'équation (3.100) sont régies par une loi temporelle et pour autant que la matrice de rigidité soit non singulière, sont de type harmonique [Gmür, 1997] :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{p} a \cos(\omega t - \varphi) \quad (3.101)$$

a, ω et φ sont des nombres réels dénotant respectivement l'amplitude de référence, la pulsation et la phase de la fonction. Cette relation ne traduit physiquement que chaque d.d.l. de la structure suit un mouvement en phase avec tous les autres déplacements généralisés. Compte tenu de cette expression, l'équation (3.100) associée au régime libre devient :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3.102)$$

Ce système homogène de n équations linéaires admet n solutions non triviales \mathbf{p}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) telles que soit vérifiées les équations :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{p}_i = \mathbf{0} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.103)$$

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

Alors que

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p}_i \alpha_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \quad (3.104)$$

est le mode propre élastique de rang i à amplitude de référence α_i et de déphasage φ_i .

En termes de mécanique des structures le vecteur \mathbf{p}_i est le vecteur modal et ω_i est la pulsation propre associée, mesurée en rd/s. Les grandeurs ω_i^2 sont les racines de l'équation algébrique suivante :

$$\det(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (3.105)$$

3.8.2. Résolution du système aux valeurs propres

La résolution d'un système aux valeurs propres est beaucoup plus coûteuse que celle d'un problème statique. En fait, il s'agit d'un problème non linéaire, et beaucoup de méthodes s'appuient sur la résolution d'une succession de systèmes linéaires, en interne.

De nombreux algorithmes performants ont été développés pour l'extraction numérique des caractéristiques modales d'une structure.

Parmi les techniques courantes, citons les méthodes d'itération sur les vecteurs ou les valeurs propres, comme la méthode de la puissance et l'itération inverse de Rayleigh, et les procédures basées sur la minimisation du quotient de Rayleigh telles que les méthodes des gradients conjugués et de relaxation. Une autre catégorie de techniques classiques de résolution modale est constituée par les méthodes dites de transformation permettant de réduire progressivement le problème aux valeurs propres initiales en une forme diagonale ou tridiagonale. Parmi ces méthodes qui tirent profit des propriétés d'orthogonalité, on trouve les méthodes de Jacobi, de Givens et de Householder, ainsi que les algorithmes QL et QR.

Citant enfin les méthodes des sous-espaces, de Lanczos et de Guyan-Irons qui sont bien adaptées à la recherche des fréquences propres les plus basses de grands systèmes. Aucune de ces méthodes n'a le mérite d'être universelle. En effet, chacune de ces méthodes présente inévitablement des désavantages en relation avec la robustesse, la fiabilité, la facilité de la mise en œuvre et l'efficacité numérique. Il faut, par conséquent, sélectionner dans la large gamme disponible la technique d'extraction modale la plus appropriée au problème à résoudre. Pour la résolution du système (3.100) nous avons utilisé la méthode de factorisation QR.

Cette méthode est généralement considérée comme étant la plus robuste et la plus performante pour déterminer l'ensemble des valeurs propres quand les matrices structurelles sont de petite taille ou à grande largeur de bande (Krishnamoorthy, 1987).

3.9. Élément fini ressort_fissure

Cet élément fini n'est présenté que par la matrice de rigidité, la matrice masse est négligé.

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

La matrice de rigidité est la suivante :

$$\begin{aligned} \text{Kr}(1, 1) &= 1e12; & \text{Kr}(1, 7) &= -1e12; & \text{Kr}(7, 7) &= 1e12; \\ \text{Kr}(2, 2) &= 1e12; & \text{Kr}(2, 8) &= -1e12; & \text{Kr}(8, 8) &= 1e12; \\ \text{Kr}(3, 3) &= 1e12; & \text{Kr}(3, 9) &= -1e12; & \text{Kr}(9, 9) &= 1e12; \\ \\ \text{Kr}(4, 4) &= 1e12; & \text{Kr}(4, 10) &= -1e12; & \text{Kr}(10, 10) &= 1e12; \\ \\ \text{Kr}(5, 5) &= \mathbf{kt}_y; & \text{Kr}(5, 11) &= -\mathbf{kt}_y; & \text{Kr}(11, 11) &= \mathbf{kt}_y; \\ \text{Kr}(6, 6) &= \mathbf{kt}_z; & \text{Kr}(6, 12) &= -\mathbf{kt}_z; & \text{Kr}(12, 12) &= \mathbf{kt}_z; \end{aligned} \quad \text{Avec la symétrie}$$

$$\mathbf{kt}_y = f(\alpha) , \quad \mathbf{kt}_z = f(\beta) ; \quad (\text{Ch2 ; modèle de Kurtosis})$$

$$\text{Avec } \alpha = \frac{\sigma_z}{k} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sigma_y}{k}$$

3.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les formulations élémentaires et globales utilisées dans les codes de programmations pour l'analyse statique et modale des structures formées de poutres par la méthode des éléments finis. La formulation élémentaire consiste à déterminer une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements à l'intérieur de l'élément en termes de déplacements nodaux puis à calculer, pour chaque élément, ses caractéristiques élémentaires : matrice de rigidité, matrice de masse et vecteur des forces. La formulation globale consiste à rechercher, pour la structure complète, l'expression matricielle de l'énergie potentielle en fonction des déplacements inconnus en tous les nœuds de la structure. Ceci nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaires (matrices de rigidité, de masses, vecteurs forces) de tous les éléments. Ainsi, à partir des formulations énergétiques nous aboutissons à un système d'équations linéaires qui régissent le comportement statique et modal de la structure. Ce système d'équations peut être résolu avec une précision suffisante à l'aide de méthodes linéaires. Ce processus d'analyse linéaire peut être décrit par l'organigramme.

A partir des différentes formulations développées, un code de calcul a été développé sous l'évènement Matlab qui peut traiter un portique tridimensionnel présentant un ou plusieurs fissures. Ces fissures peuvent être positionnées au choix. Ce code peut réaliser des analyses statiques et aussi dynamiques.

Chapitre 3: Formulation aux éléments finis

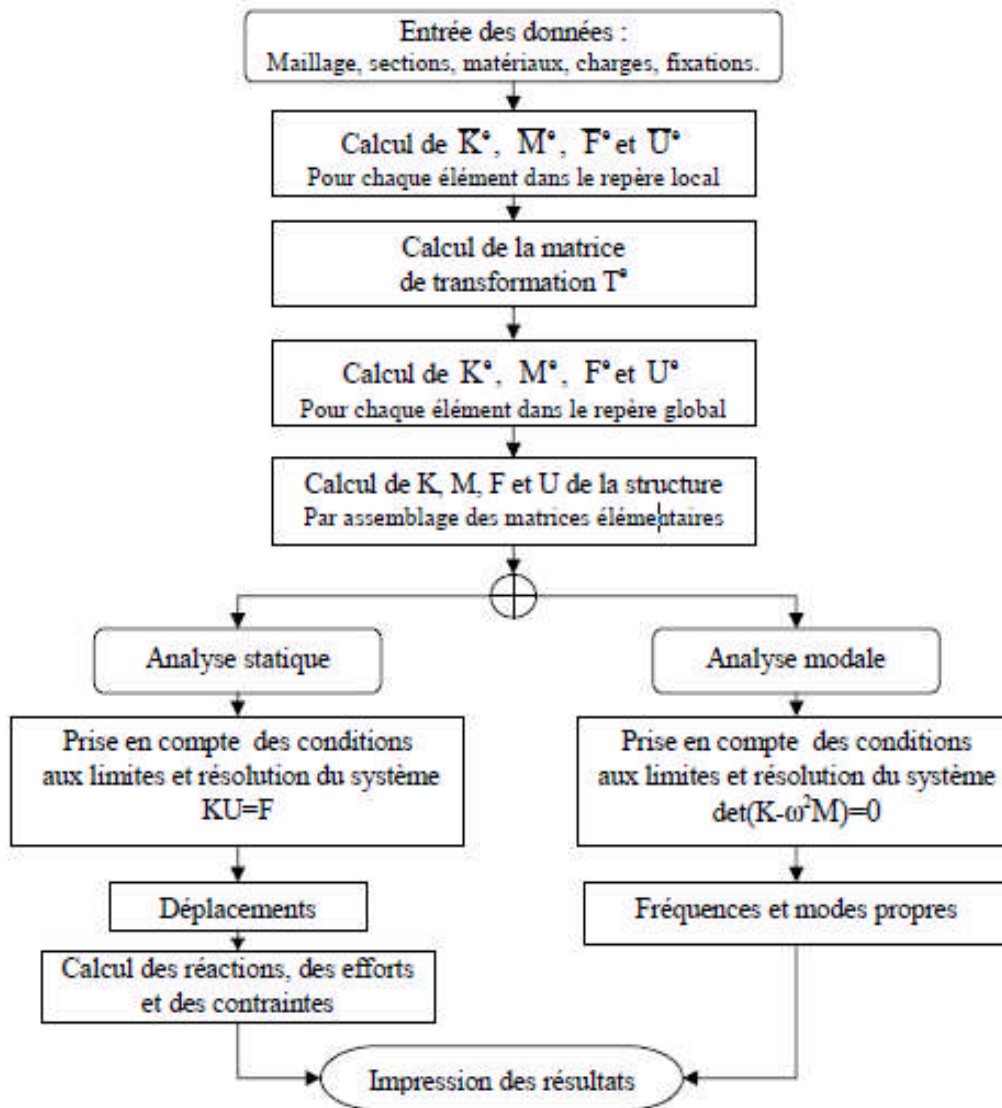


Fig. 3.19 : Organigramme d'analyse linéaire par la M.E.F. d'une structure à de poutres.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

4.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous présentons d'une manière succincte une modélisation en éléments finis 3D du portique non fissuré et portique fissuré. Une Analyse statique et autre dynamique ont été effectuées utilisant le code MATLAB pour étudier une structure à 2 étages qui présente à chaque fois des fissures sur les poteaux.

Enfin ce chapitre est clôturé par une petite conclusion rassemblant tous les résultats des cas étudiés de la structure fissurée.

4.2. Modélisation en éléments finis du portique non fissuré (cas statique) :

- Un portique simple de longueur $L_x=3m$ et de hauteur $L_z=3m$, est supposé fixé sur les 2 appuis (encastrée – encastrée), $P=10$. KN, Pour cette étude, un programme a été développé à l'aide du logiciel Matlab avec le modèle de Kurtosis. Les données matérielles sont les suivantes : $E=2.10^7kN/m^2$, $\nu=0.30$, $\gamma=0$, $m=2.50T/m^3$. (figure 4.1).

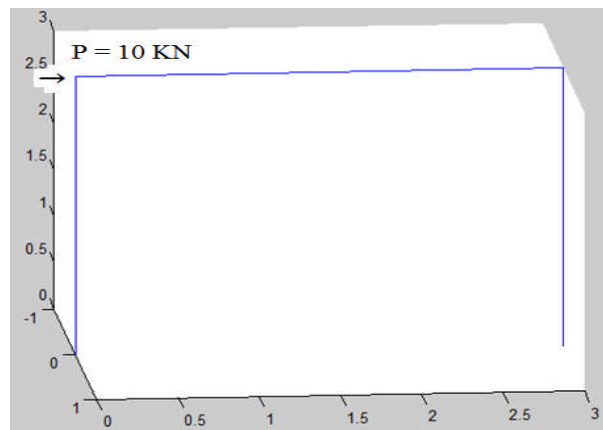


Figure 4.1: Discretisation en éléments finis du portique non fissuré.

- Le tableau 4.1 donne les valeurs du déplacement horizontal du portique non fissuré.

Facteur de réduction (d)	Dx (mm)
d=0 (sans fissure)	1.21

Tableau 4.1: Valeurs du déplacement horizontal du portique non fissuré.

- Le tableau 4.2 donne les valeurs du moment fléchissant dans le poteau du portique non fissuré.

Facteur de réduction (d)	My (KN.m)
d=0 (sans fissure)	8.61

Tableau 4.2: Valeurs du moment fléchissant maximal dans le poteau du portique non fissuré.

- Le tableau 4.3 donne les valeurs de l'effort normal dans le poteau du portique non fissuré.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

Facteur de réduction (d)	N (KN.)
d=0 (sans fissure)	4.27

Tableau 4.3: Valeurs du moment l'effort normal dans le poteau du portique non fissuré

4.2.1 : Modélisation en éléments finis du portique fissuré (position de la fissure):

- Un portique fissuré (1 fissures sur le poteau) ;(figure 4.2).

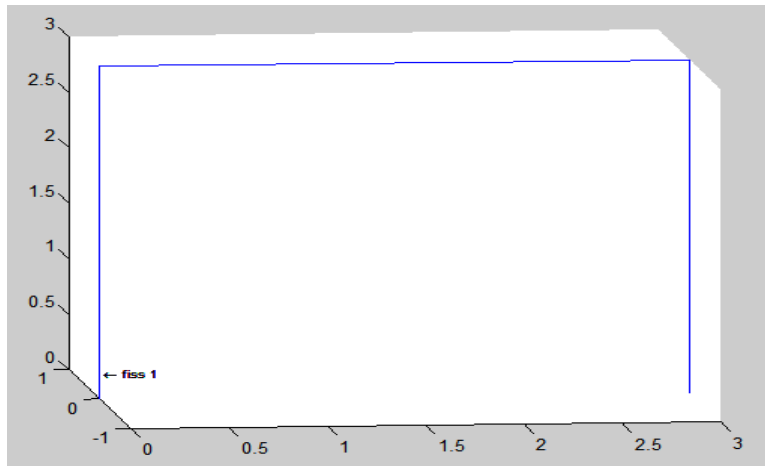


Figure 4.2: Discretisation en éléments finis du portique fissuré.

- Le tableau 4.4 donne les valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction de la position de la fissure / l'encastrement.

La position de la fissure / l'encastrement		Dx (mm)
d=0.9	(L = 5 cm)	1.90
	(L = 10 cm)	1.88
	(L = 20 cm)	1.83
	(L = 50 cm)	1.69
	(L =65 cm)	1.61

Tableau 4.4: Valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré pour des différentes positions de la fissure / l'encastrement.

- La figure 4.3 donne la variation du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction de la position de la fissure / l'encastrement.

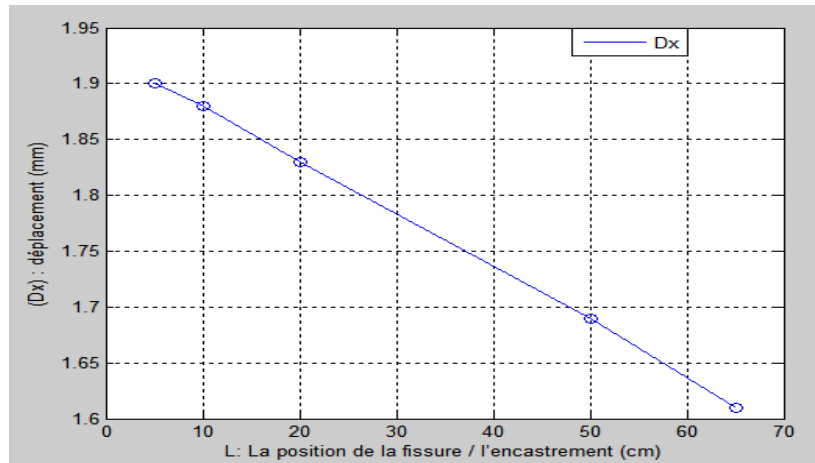


Figure 4.3: Variation du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction de la position de la fissure / l'encastrement.

- ✓ les valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré diminuent en fonction de l'augmentation La position de la fissure / l'encastrement (L).
- ✓ Si on s'approche du cas de poteau (articulé-articulé) et donc le système devient moins rigide, les poteaux présentent des malfaçons aux extrémités (dus à un mauvais coffrage et une mauvaise reprise de bétonnage).

4.2.2. Modélisation en éléments finis du portique fissuré (1 fissure):

- Un portique fissuré (une fissure sur le poteau) ; (figure 4.4).

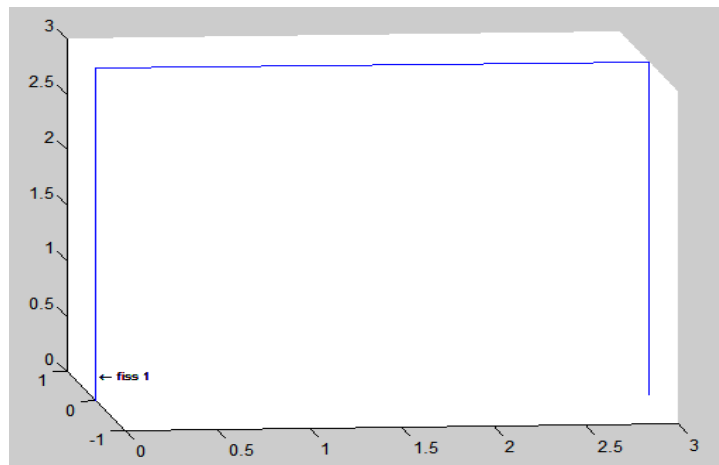


Figure 4.4: Discrétisation en éléments finis du portique fissuré.

- Le tableau 4.5 donne les valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

Facteur de réduction (d)	Dx (mm)
0.00	1.21
0.10	1.22
0.30	1.30
0.50	1.46
0.70	1.70
0.90	1.88

Tableau 4.5: Valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.5 donne la variation du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

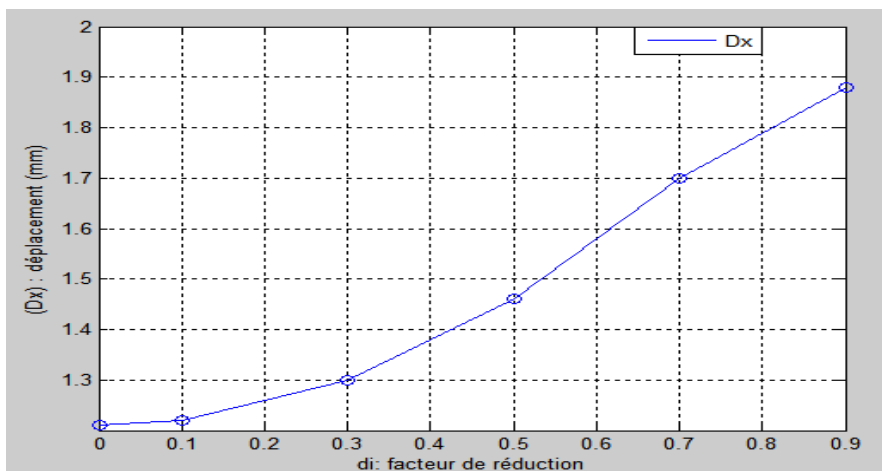


Figure 4.5: Variation du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

- Le tableau 4.6 donne les valeurs du moment fléchissant dans le poteau du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction

Facteur de réduction (d)	My (KN.m)
0.0	8.61
0.10	7.98
0.30	7.08
0.50	5.34
0.70	2.80
0.90	0.78

Tableau 4.6: Valeurs du moment fléchissant du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.6 donne la variation du moment fléchissant dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

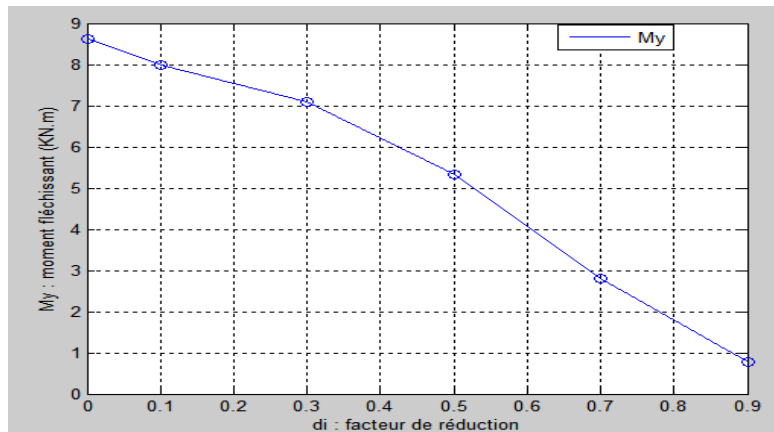


Figure 4.6: Variation du moment fléchissant dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

- Le tableau 4.7 donne les valeurs de l'effort normal dans le poteau du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

Facteur de réduction (d)	N (KN.m)
0.0	4.27
0.10	4.29
0.30	4.42
0.50	4.67
0.70	5.04
0.90	5.34

Tableau 4.7: Valeurs de l'effort normal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.7 donne la variation de l'effort normal dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

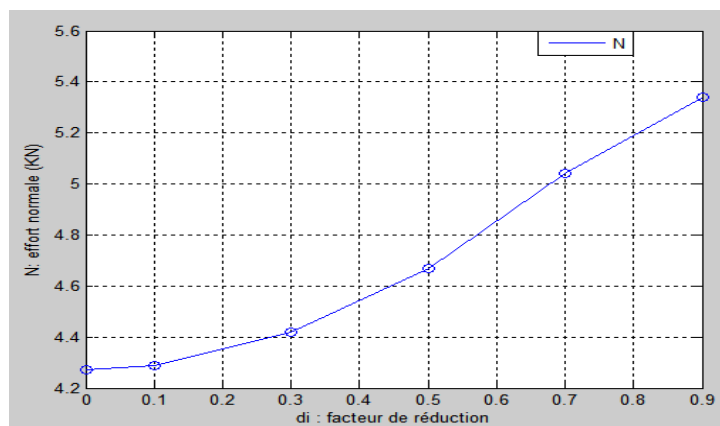


Figure 4.7: Variation de l'effort normal dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- ✓ Les valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 1.554.
- ✓ Les valeurs du moment fléchissant dans le poteau diminuent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le moment fléchissant dans le poteau du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 0.090.
- ✓ Les valeurs de l'effort normal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal dans le poteau du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 1.25.
- ✓ Le moment diminue et l'effort normal augmente dans le poteau puisque la raideur du ressort_fissure crée une articulation lorsque le facteur de réduction (d) augmente.

4.2.3. Modélisation en éléments finis du portique fissuré (2 fissures):

- Un portique fissuré (2 fissures sur les poteaux) ;(figure 4.8).

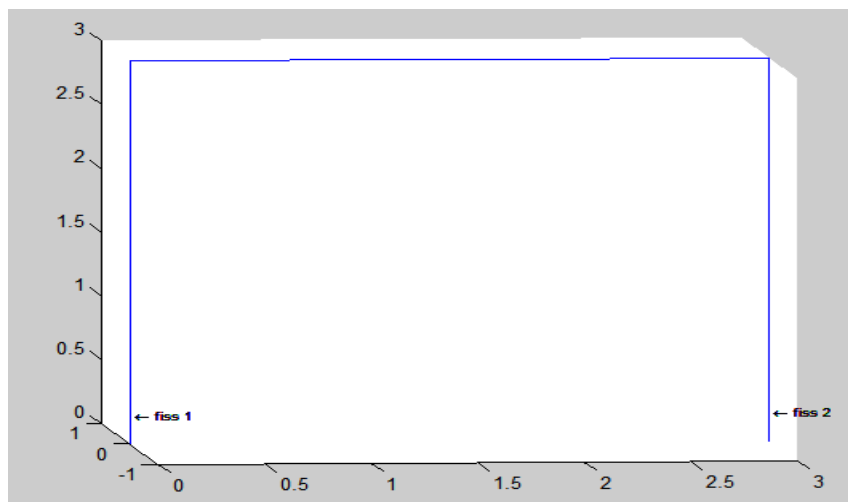


Figure 4.8: Discretisation en éléments finis du portique fissuré.

- Le tableau 4.8 donne les valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

Facteur de réduction (d)	Dx (mm)
0.00	1.21
0.10	1.23
0.30	1.41
0.50	1.84
0.70	2.75
0.90	3.95

Tableau 4.8: Valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.9 donne la variation du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

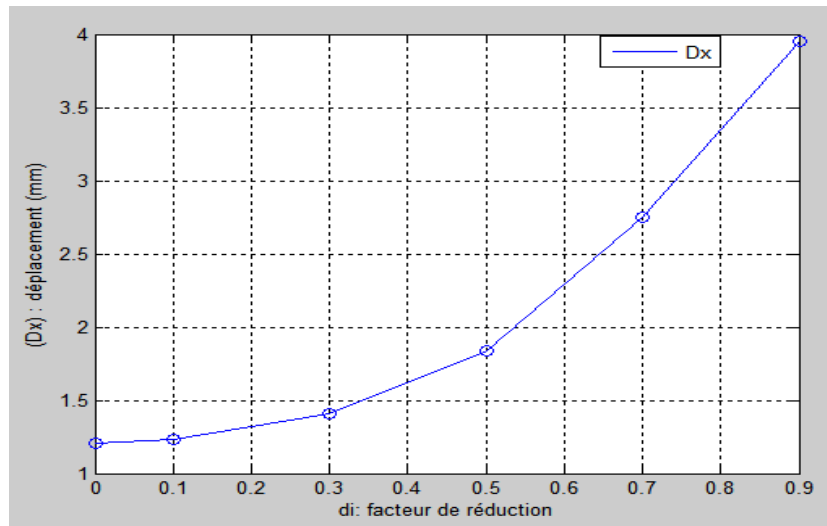


Figure 4.9: Variation du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

- Le tableau 4.9 donne les valeurs du moment fléchissant dans le poteau du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction

Facteur de réduction (d)	My (KN.m)
0.0	8.61
0.10	8.09
0.30	7.65
0.50	6.62
0.70	4.41
0.90	1.56

Tableau 4.9: Valeurs du moment fléchissant du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- La figure 4.10 donne la variation du moment fléchissant dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction

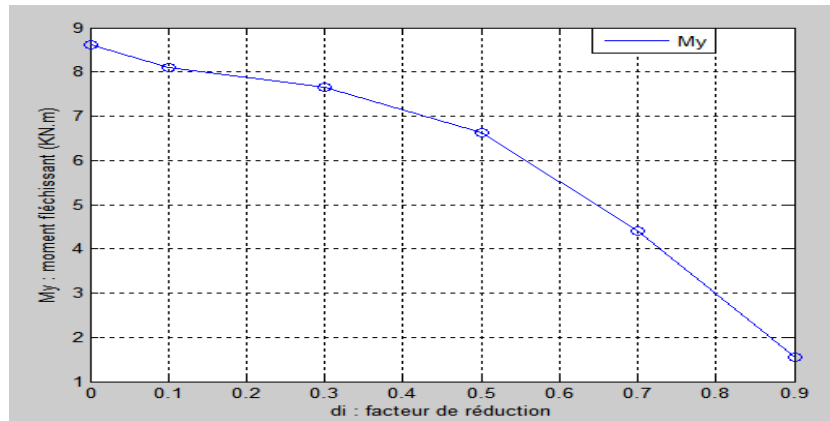


Figure 4.10: Variation du moment fléchissant dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

- Le tableau 4.10 donne les valeurs de l'effort normal dans le poteau du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction

Facteur de réduction (d)	N (KN.m)
0.0	4.27
0.10	4.31
0.30	4.60
0.50	5.27
0.70	6.70
0.90	8.60

Tableau 4.10: Valeurs de l'effort normal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.11 donne la variation de l'effort normal dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

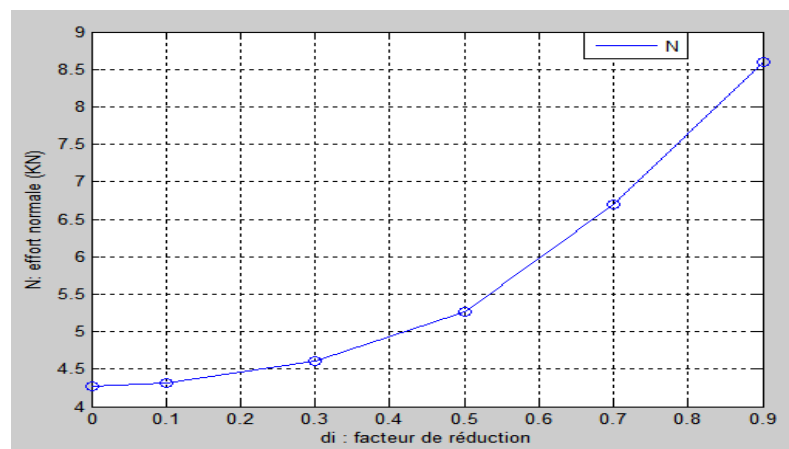


Figure 4.11: Variation de l'effort normal dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- ✓ Les valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 3.26.
- ✓ Les valeurs du moment fléchissant dans le poteau diminuent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le moment fléchissant dans le poteau du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 0.18.
- ✓ Les valeurs de l'effort normal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal dans le poteau du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 2.01.
- ✓ En remarque que le nombre des fissures influentes sur le comportement statique du portique fissuré.

4.2.4. Modélisation en éléments finis du portique non fissuré (cas dynamique) :

Un portique simple de longueur $L_x=3\text{m}$ et de hauteur $L_z=3\text{m}$, est supposé fixé sur les 2 appuis (encastrée – encastrée), $P=10\text{ KN}$, Pour cette étude, un programme a été développé à l'aide du logiciel Matlab avec le modèle de Kurtosis. Les données matérielles sont les suivantes : $E=2.10^7\text{ kN/m}^2$, $\nu=0.30$, $\gamma=0$, $m=2.50\text{T/m}^3$, (figure 4.12).

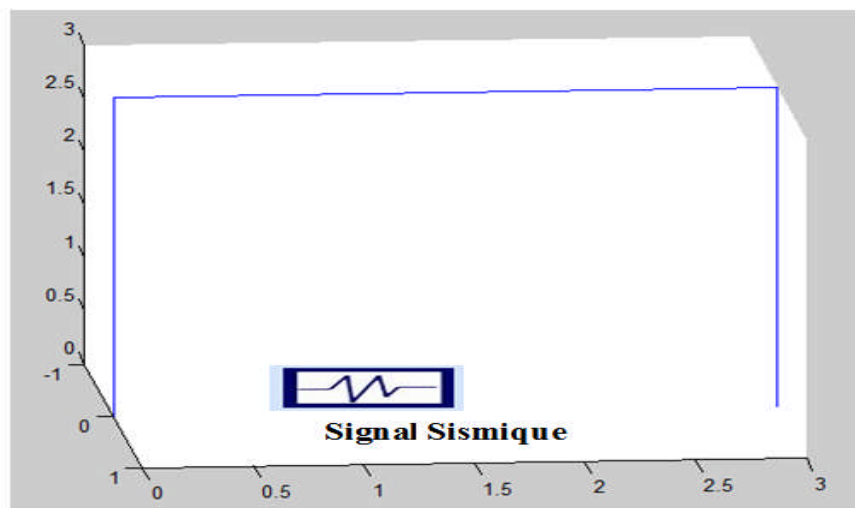


Figure 4.12: Discretisation en éléments finis du portique non fissuré.

- Dans ce cas on va utiliser le l'accélérogramme du El-Centro, figure 4.13

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

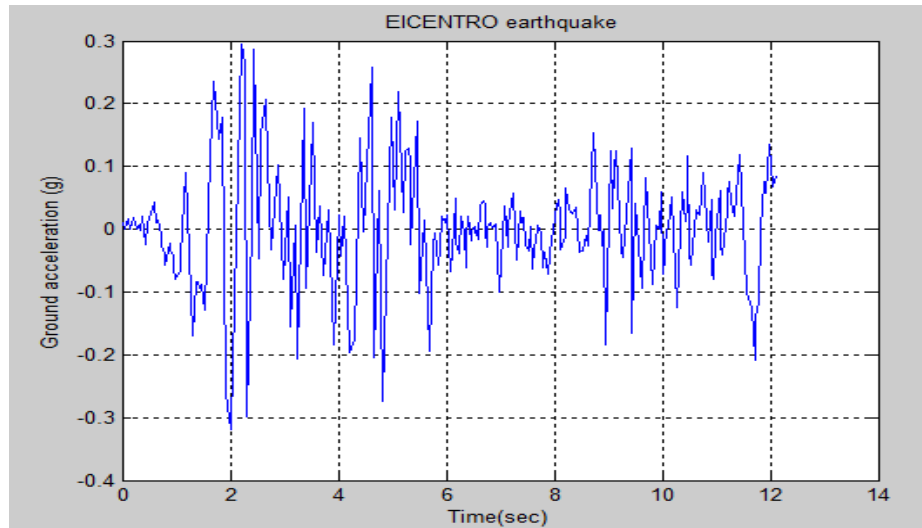


Figure 4.13: L'accélerogramme du El-Centro.

- **Remarque :**

Cet accélerogramme présente une Accélération Maximum absolue de : $(0.313 \cdot g)$ à 2.07 sec. **C a d:** Le $PGA=3.133 \text{ m/s}^2$, Peak Ground Acceleration.

- Le tableau 4.11 donne les 3 premières périodes (seconde).

T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)
0.00284	0.00231	0.00102

Tableau 4.11 : Valeurs des 3 premières périodes pour le portique non fissuré.

- Le tableau 4.12 donne les valeurs du déplacement horizontal maximal du portique non fissuré.

Facteur de réduction (d)	Dx, max (mm)
d=0 (sans fissure)	1.76

Tableau 4.12: Valeurs du déplacement horizontal maximal du portique non fissuré

- Le tableau 4.13 donne les valeurs du moment fléchissant maximal dans le poteau du portique non fissuré.

Facteur de réduction (d)	My,max (KN.m)
d=0 (sans fissure)	12.53

Tableau 4.13: Valeurs du moment fléchissant maximal dans le poteau du portique non fissuré.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- Le tableau 4.14 donne les valeurs de l'effort normal maximal dans le poteau du portique non fissuré.

Facteur de réduction (d)	N, max (KN.)
d=0 (sans fissure)	5.99

Tableau 4.14: Valeurs du moment l'effort normal maximal dans le poteau du portique non fissuré.

4.2.5. Modélisation en éléments finis du portique fissuré (position de la fissure):

- Un portique fissuré (1 fissures sur le poteau), Cas dynamique;(figure 4.14).

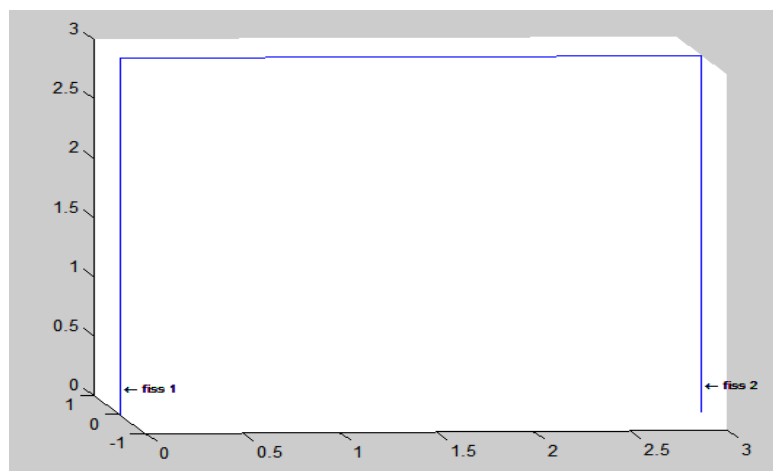


Figure 4.14: Discretisation en éléments finis du portique fissuré.

- Le tableau 4.15 donne les valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré en fonction de la position de la fissure / l'encastrement.

La position de la fissure / l'encastrement		Dx, max (mm)
d=0.9	(L = 5 cm)	6.38
	(L = 10 cm)	3.90
	(L = 20 cm)	3.74
	(L = 50 cm)	2.80
	(L = 65 cm)	1.80

Tableau 4.15: Valeurs du déplacement horizontal du portique fissuré pour des différentes positions de la fissure / l'encastrement.

- La figure 4.15 donne la variation du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction de la position de la fissure / l'encastrement.

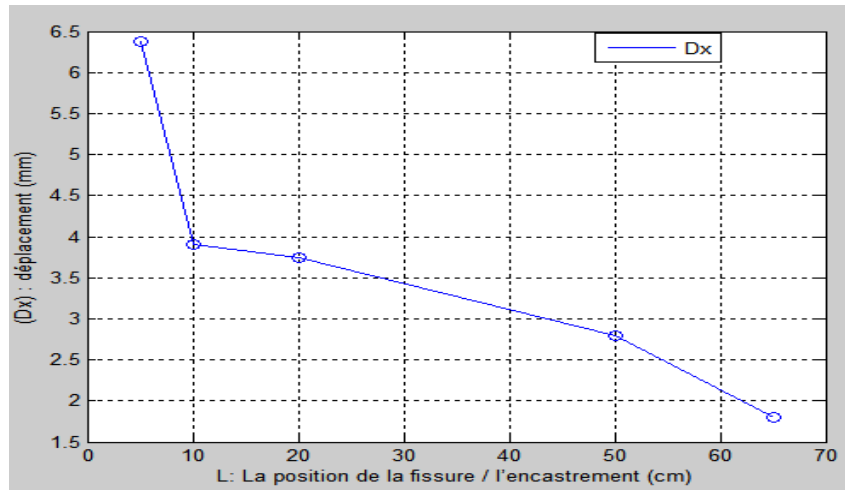


Figure 4.15: Variation du déplacement horizontal maximal du portique fissuré en fonction de la position de la fissure / l'encastrement.

- ✓ les valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré diminuent en fonction de l'augmentation La position de la fissure / l'encastrement (L).
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal maximal du portique fissuré pour $L=5$ cm et $L=65$ est égale à : 3.54.
- ✓ Si on s'approche du cas de poteau (articulé-articulé) et donc le système devient moins Rigide.
- ✓ Pour les problèmes de séisme, le cisaillement aux extrémités des poteaux (présence de la fissure) est fatal pour la structure.

C'est à dire le séisme est dévastateur lorsque les poteaux présentent des malfaçons aux extrémités (dus à un mauvais coffrage et une mauvaise reprise de bétonnage).

4.2.6. Modélisation en éléments finis du portique fissuré (2 fissures):

- Un portique fissuré (2 fissures sur les poteaux) ; (figure 4.16).

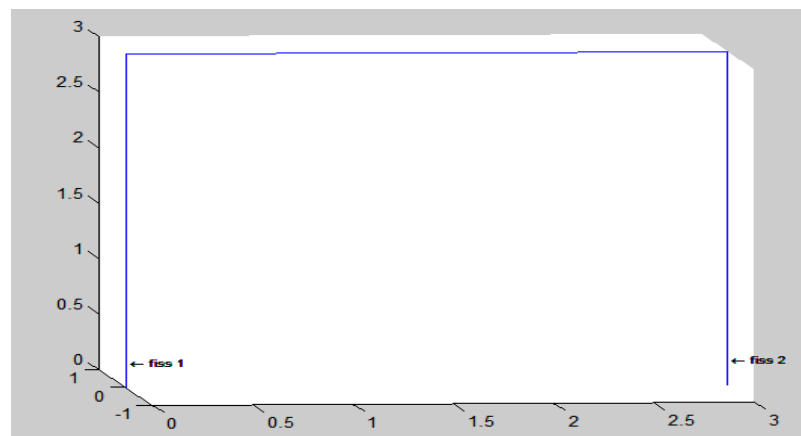


Figure 4.16: Discrétisation en éléments finis du portique fissuré.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- Le tableau 4.16 donne les 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction (*profondeurs de la fissure*) :

Facteur de réduction (d)	T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)
0.1	0.00286	0.00231	0.00102
0.3	0.00338	0.00267	0.00117
0.5	0.00486	0.00359	0.00152
0.7	0.0103	0.0061	0.00227
0.9	0.0401	0.0115	0.00327

Tableau 4.16: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction

- La figure 4.17 donne la variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

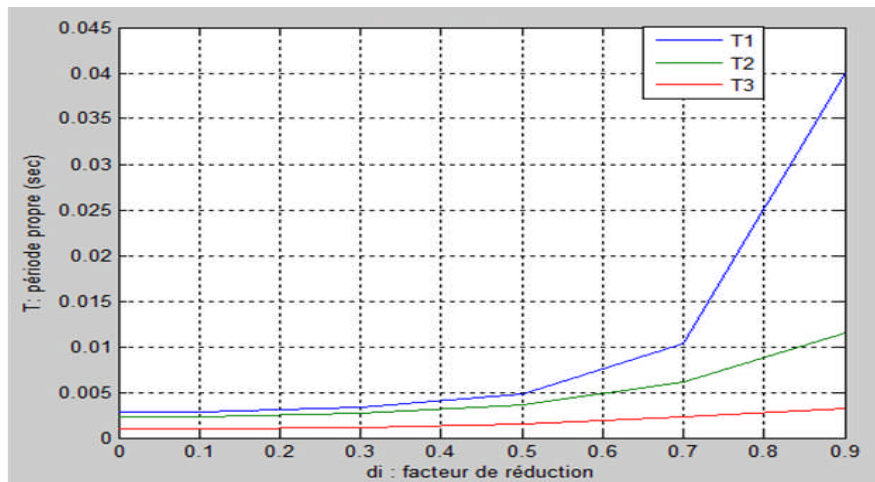


Figure 4.17: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

- Le tableau 4.17 donne les valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	Dx, max (mm)
0.00	1.72
0.10	1.78
0.30	2.06
0.50	2.74
0.70	4.21
0.90	6.25

Tableau 4.17: Valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.18 donne la variation du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

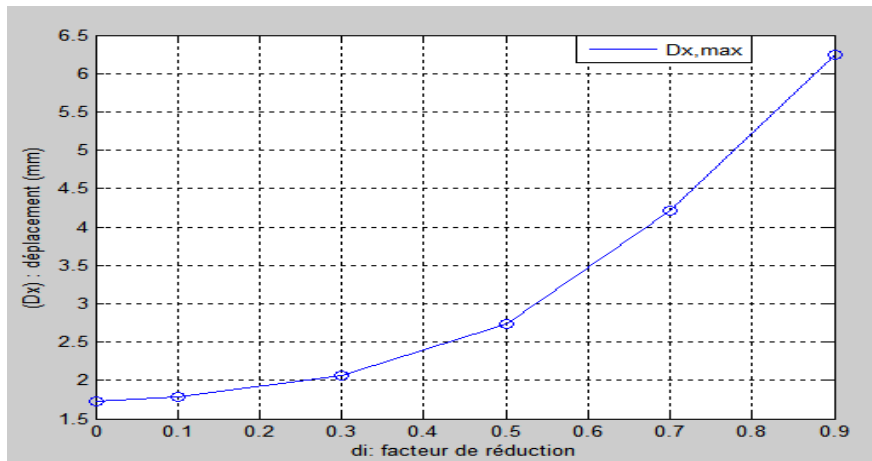


Figure 4.18: Variation du déplacement horizontal maximal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

- Le tableau 4.18 donne les valeurs du moment fléchissant maximal dans le poteau du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction

Facteur de réduction (d)	My, max (KN.m)
0.0	12.53
0.10	11.71
0.30	11.14
0.50	9.84
0.70	6.77
0.90	2.46

Tableau 4.18: Valeurs du moment fléchissant maximal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.19 donne la variation du moment fléchissant maximal dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

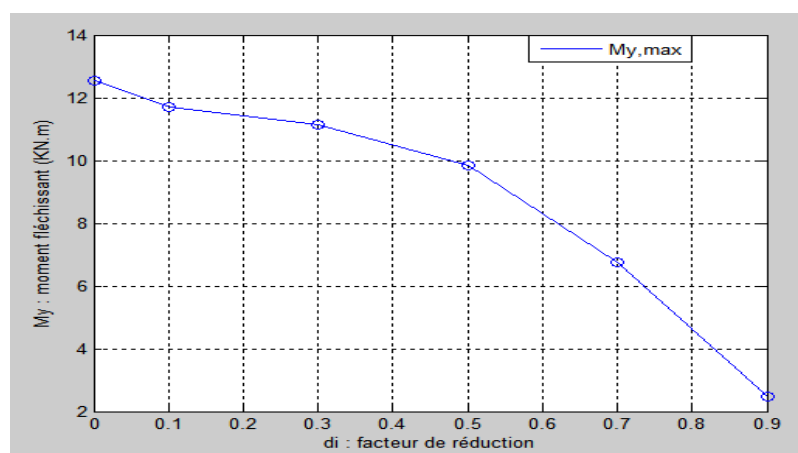


Figure 4.19: Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- Le tableau 4.19 donne les valeurs de l'effort normal maximal dans le poteau du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

Facteur de réduction (d)	N (KN.m)
0.0	6.21
0.10	6.24
0.30	6.53
0.50	7.24
0.70	8.61
0.90	10.34

Tableau 4.19: Valeurs de l'effort normal maximal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.20 donne la variation de l'effort normal maximal dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

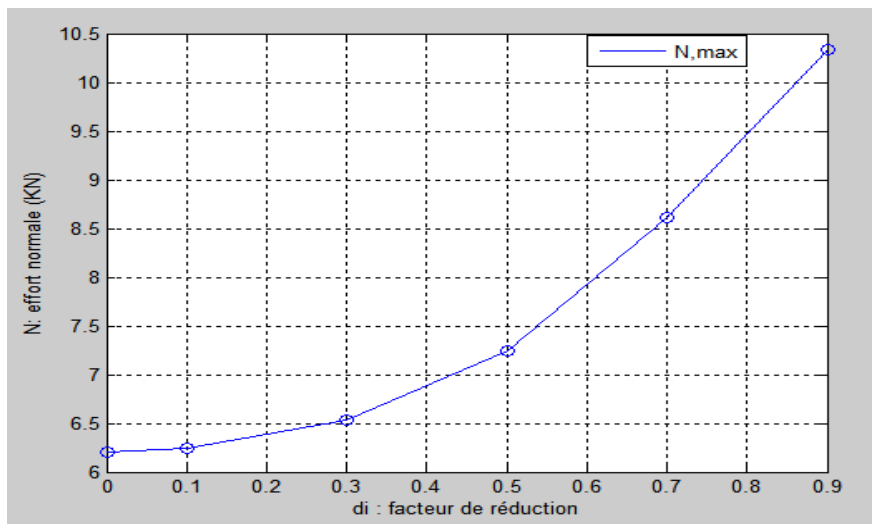


Figure 4.20: Variation de l'effort normal maximal dans le poteau du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

- ✓ Les valeurs des périodes augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Le rapport entre la période T1 du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 14.02.
- ✓ Les valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal maximal du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 3.64.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- ✓ Les valeurs du moment fléchissant maximal dans le poteau diminuent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le moment fléchissant maximal dans le poteau du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 0.21.
- ✓ Les valeurs de l'effort normal maximal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal maximal dans le poteau du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 1.67.

4.2.7. Modélisation en éléments finis du portique fissuré (4 fissures):

- Un portique fissuré (4 fissures sur les poteaux) ; (figure 4.21).

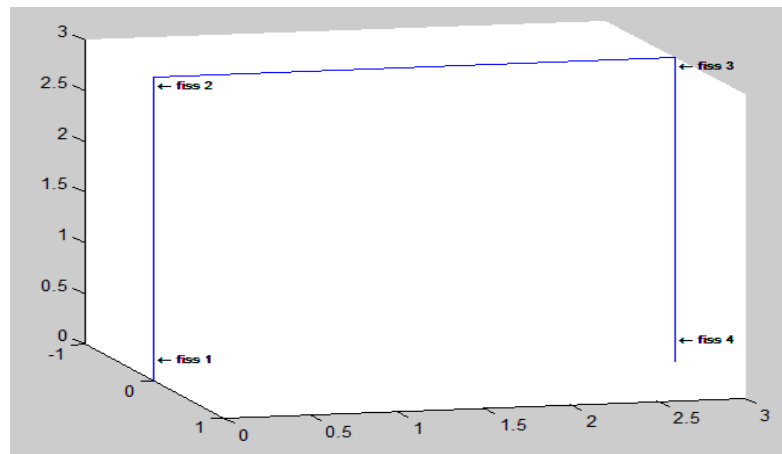


Figure 4.21: Discretisation en éléments finis du portique fissuré.

- Le tableau 4.20 donne les 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction (*profondeurs de la fissure*) :

Facteur de réduction (d)	T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)
0.1	0.00286	0.00230	0.00104
0.3	0.00337	0.00266	0.00129
0.5	0.00486	0.00360	0.00204
0.7	0.0103	0.00627	0.00476
0.9	0.0402	0.0196	0.0129

Tableau 4.20: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.22 donne la variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

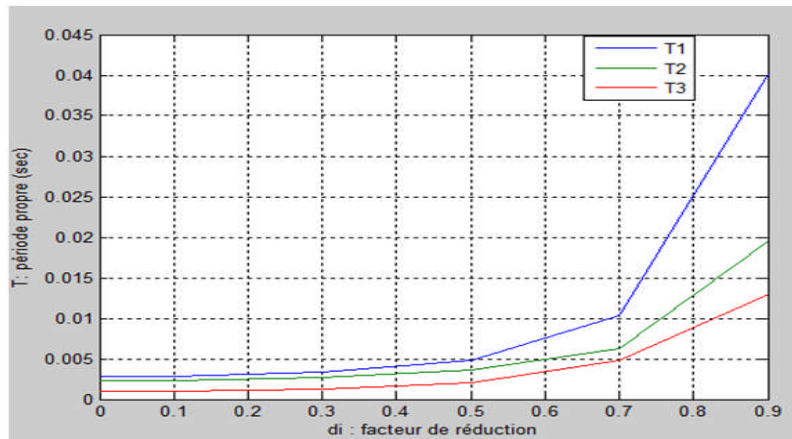


Figure 4.22: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

- Le tableau 4.21 donne les valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	Dx, max (mm)
0.00	1.72
0.10	1.81
0.30	2.27
0.50	3.66
0.70	6.16
0.90	42.33

Tableau 4.21: Valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.23 donne la variation du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

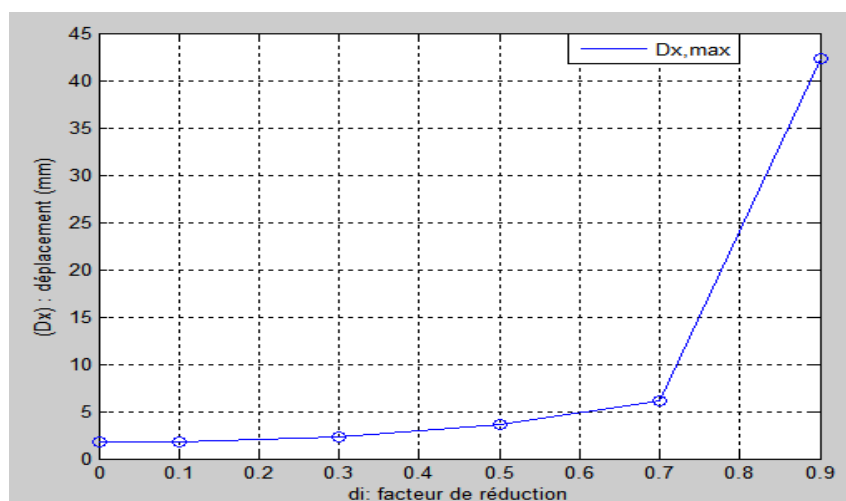


Figure 4.23: variation du déplacement horizontal maximal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- ✓ Les valeurs des périodes augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Le rapport entre la période T_1 du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 14.056.
- ✓ Les valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction) d'une manière exponentielle.
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal maximal du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 23.38.
- ✓ En remarque que le nombre des fissures influentes sur le comportement dynamique du portique fissuré.
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal maximal du portique fissuré pour $d=0.9$ (4 fissures) et (2 fissures) est égale à : 6.77.

4.2.8. Modélisation en éléments finis du portique fissuré (6 fissures):

- Un portique fissuré (4 fissures sur les poteaux, 2 sur la poutre) ; (figure 4.24).

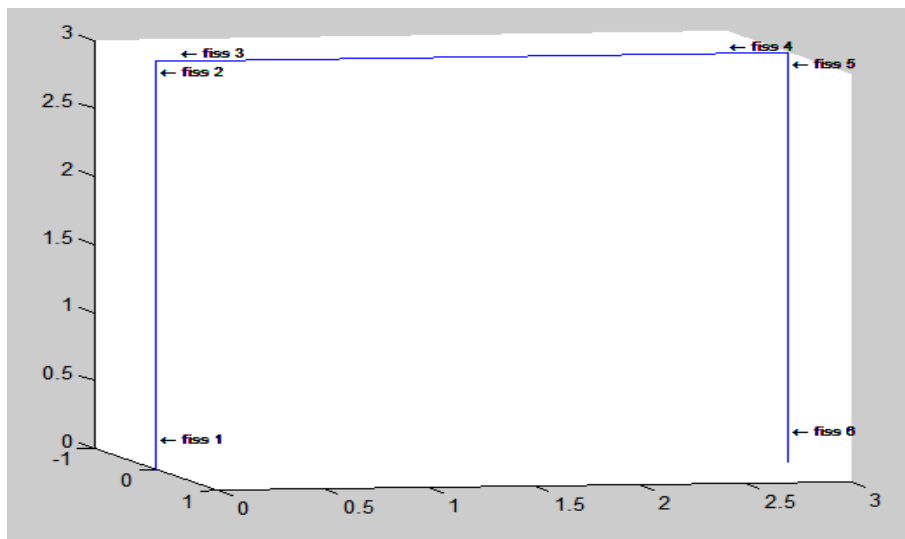


Figure 4.24: Discrétisation en éléments finis du portique fissuré.

- Le tableau 4.22 donne les 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction (*profondeurs de la fissure*).

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

Facteur de réduction (d)	T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)
0.1	0.00287	0.00220	0.00104
0.3	0.00336	0.00256	0.00139
0.5	0.00484	0.00347	0.00238
0.7	0.0103	0.00613	0.00476
0.9	0.0403	0.0256	0.0146

Tableau 4.22: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.25 donne la variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

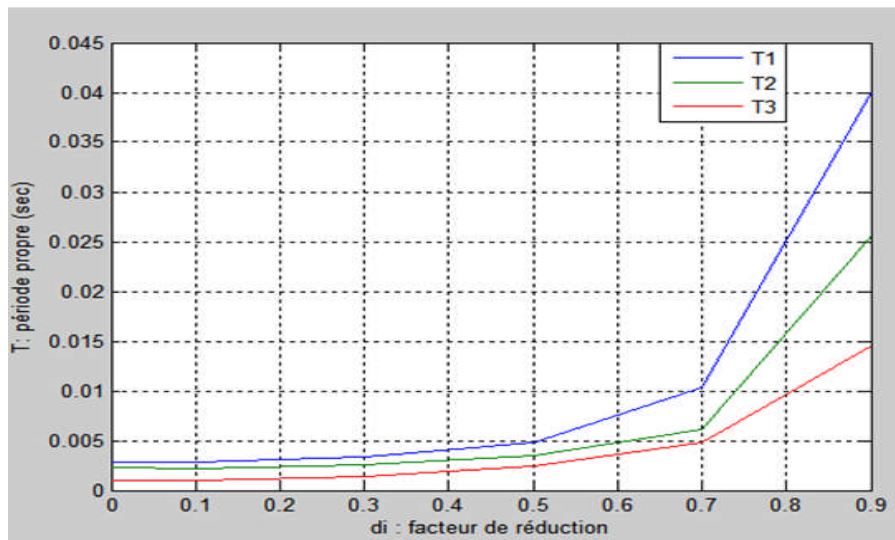


Figure 4.25: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

- Le tableau 4.23 donne les valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	Dx, max (mm)
0.00	1.72
0.10	1.80
0.30	2.41
0.50	4.25
0.70	12.11
0.90	59.04

Tableau 4.23: Valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.26 donne la variation du déplacement horizontal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

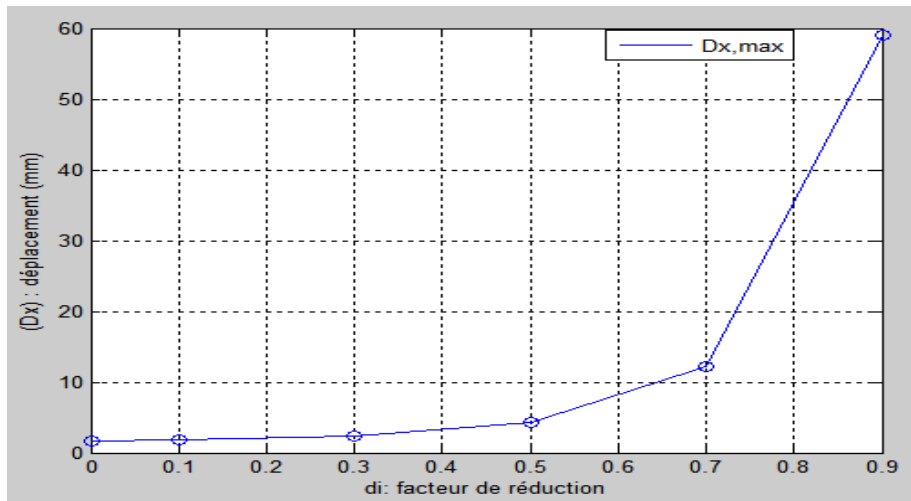


Figure 4.26: Variation du déplacement horizontal maximal du portique fissuré en fonction du facteur de réduction.

- ✓ Les valeurs des périodes augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Le rapport entre la période T_1 du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 14.04.
- ✓ Les valeurs du déplacement horizontal maximal du portique fissuré augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction) d'une manière exponentielle.
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal maximal du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 32.80.
- ✓ En remarque que le nombre des fissures influence sur le comportement dynamique du portique fissuré.
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal maximal du portique fissuré pour $d=0.9$ (6 fissures) et (4 fissures) est égale à : 9.45.

Conclusion 1 :

- On remarque que la position des fissures influence sur le comportement statique et dynamique du portique fissuré.
- ✓ On remarque que le nombre des fissures influence sur le comportement statique et dynamique du portique fissuré.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- On remarque que le calcul dynamique est plus important que le calcul statique :
 - ✓ Par exemple pour le portique fissuré (2 fissures) entre les deux facteurs de réduction 0.1 et 0.9 donne une amplification du déplacement maximal suivant x de la structure de (3.26) dans le cas statique et de (3.64) dans le cas dynamique.
 - ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal maximal du portique fissuré du cas dynamique par rapport au cas statique est égale à : 1.12.

4.3. Etude du comportement dynamique d'une structure 3D à barres :

4.3.1. Introduction :

Dans cette application On va étudier le comportement dynamique de la structure sans fissures et avec plusieurs fissures sur les poteaux. Pour cette raison on a d'abord étudié la structure non fissurée par le logiciel SAP 2000, (figure 4.27), Le tableau 4.25 donne les valeurs des moments fléchissant (M1, M2) dans tous les poteaux de la structure.

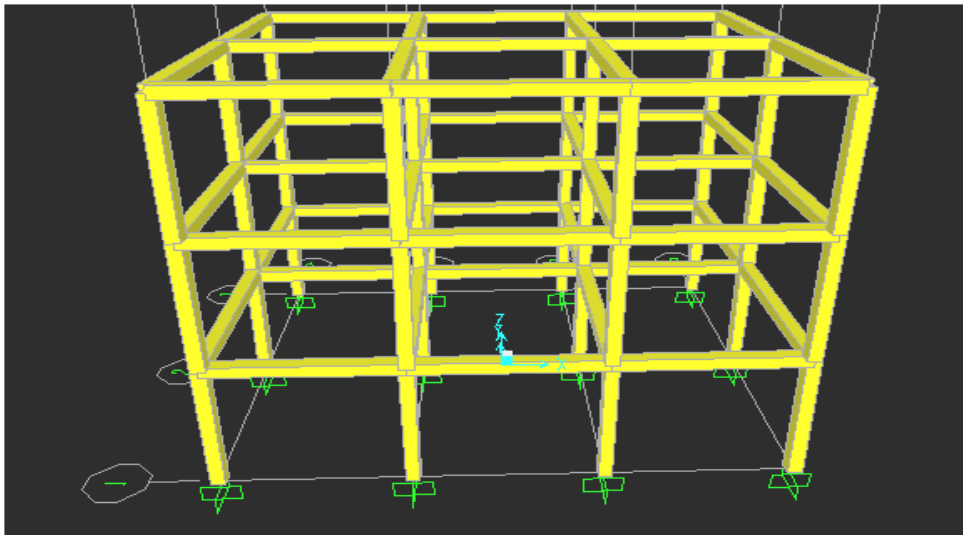


Figure 4.27: Discrétisation de la structure non fissurée par SAP 2000

Poteaux (RDC)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M1(KN.m)	67.73	72.32	72.32	63.73	66.21	75	75	66.21	63.73	72.32	72.32	63.73
M2(KN.m)	36.34	53.77	53.77	36.34	38.17	55.99	55.99	38.17	36.34	53.77	53.77	36.34
Poteaux (1étage)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M1(KN.m)	28.25	48.37	48.37	28.25	29.53	45.58	45.58	29.53	28.25	48.37	48.37	28.25
M2(KN.m)	34.67	53	53	34.67	35.52	54.16	54.16	35.52	34.67	53	53	34.67

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

Poteaux (2étage)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M1(KN.m)	10.78	24.72	24.72	10.78	11.35	25.70	25.70	11.35	10.78	24.72	24.72	10.78
M2(KN.m)	20.46	32.89	32.89	20.46	21.34	34.10	34.10	21.34	20.46	32.89	32.89	20.46

Tableau 4.24: Valeurs des moments fléchissant animaux dans les poteaux du RDC de la structure non fissuré.

Remarque :

D'après les résultats du tableau 4.24, en va conclu que :
Les poteaux les plus sollicités dans le cas dynamique (séisme), selle du RDC et après du premier étage et après du deuxième étage

Pour cela nous avons étudié une structure avec la présence des fissures comme suite :

- Une structure qui présente des fissures sur les poteaux du RDC
- Une structure qui présente des fissures sur les poteaux du RDC et les poteaux du premier étage
- Une structure qui présente des fissures sur les poteaux du RDC et les poteaux du premier étage et les poteaux du deuxième étage.

4.3.2. Structure à barres non fissurée :

- Une structure de 3 travées suivant X, $L_x = 4m$ et 2 travées suivant Y, $L_y = 4.5m$ et de 2 étage suivant Z, $L_z = 3.4m$, est supposée fixé sur les 12 appuis (encastrée – encastrée), Pour cette étude, un programme a été développé à l'aide du logiciel Matlab avec le modèle de Kurtosis. Les données matérielles sont les suivantes :
 $E=2.10^7kN/m^2$, $\nu=0.30$, $\gamma=0$, $m=2.50T/m^3$, (figure 4.27).

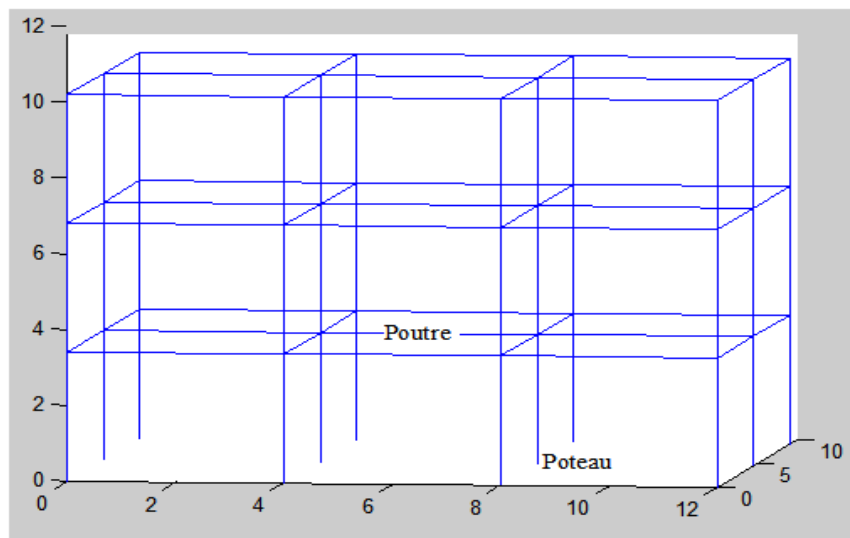


Figure 4.28: Discrétisation en éléments finis de la structure à barres non fissurée.

- Le tableau 4.24 donne les 3 premières périodes (seconde) de la structure non fissuré.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

Facteur de réduction (d)	T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)
0.00	0.0335	0.0299	0.0286

Tableau 4.25: Valeurs des 3 premières périodes de la structure non fissuré.

- Le tableau 4.26 donne les valeurs du déplacement horizontal maximal de la structure.

Facteur de réduction (d)	Dx (cm)
d=0 (sans fissure)	5.061

Tableau 4.26: Valeurs du déplacement horizontal maximal de la structure non fissuré.

- Le tableau 4.27 donne les valeurs du My, N, Tz maximale dans le poteau du RDC de la structure non fissuré.

Facteur de réduction (d)	My, max (KN.m)	N, max (KN)	Tz, max (KN)
0.00	100.82	13.710	51.40

Tableau 4.27: Valeurs du My, N, Tz maximale dans le poteau du RDC de la structure non fissuré.

- Le tableau 4.28 donne les valeurs du My maximale dans la poutre du RDC de la structure non fissurée.

Facteur de réduction (d)	My (KN.m)
0.00	68.740

Tableau 4.28: Valeurs du My maximale dans la poutre du RDC de la structure non fissurée.

4.3.3. Structure à barres fissurées (12 fissures), (figure 4.28).

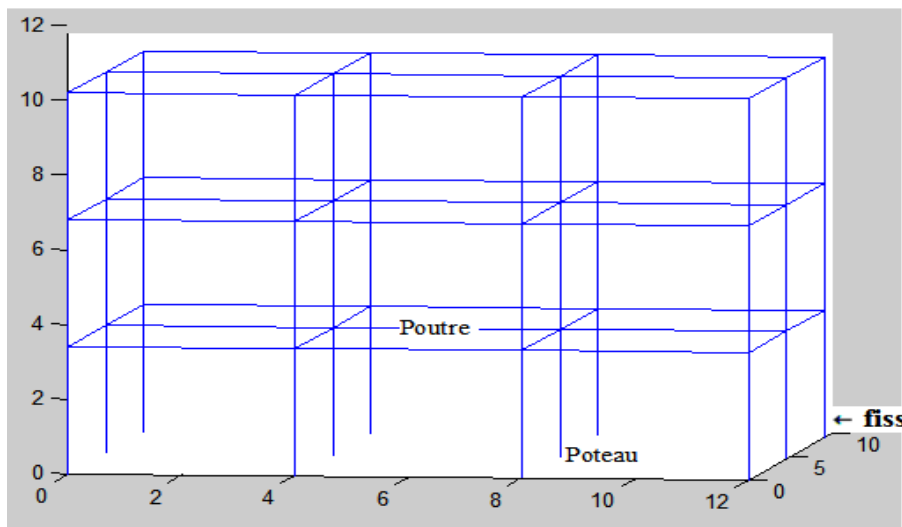


Figure 4.29: Discrétisation en éléments finis de la structure a barres fissuré (12 fissures).

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- Le tableau 4.29 donne les 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction (*profondeurs de la fissure*) :

Facteur de réduction (d)	T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)
0.00	0.0335	0.0299	0.0286
0.10	0.0338	0.0302	0.0288
0.30	0.0357	0.03202	0.0305
0.60	0.0460	0.0412	0.0391
0.90	0.0665	0.060	0.0568

Tableau 4.29: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.29 donne la variation du 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

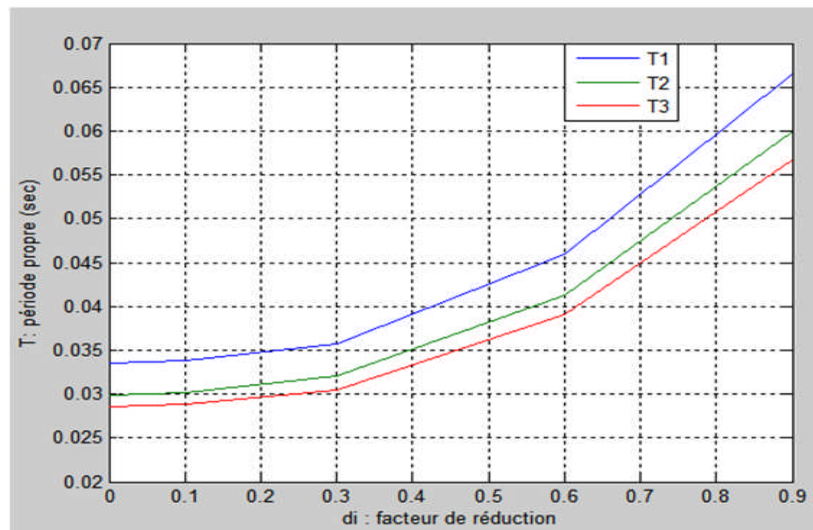


Figure 4.30: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

- Le tableau 4.30 donne les valeurs du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	Dx, max (cm)
0.00	5.061
0.10	5.092
0.30	5.560
0.60	7.520
0.90	8.483

Tableau 4.30: Valeurs du déplacement horizontal maximal pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.30 donne la variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

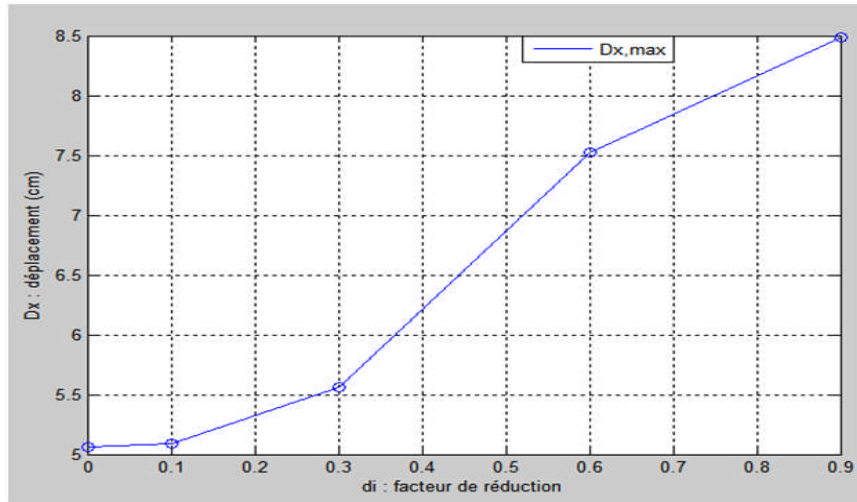


Figure 4.31 : Variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

- Le tableau 4.31 donne les valeurs du M_y , N , T_z maximale dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	M_y (KN.m)	N (KN)	T_z (KN)
0.00	100.82	13.710	51.40
0.10	94.84	13.775	51.44
0.30	92.605	14.654	52.93
0.60	76.670	18.195	57.54
0.90	18.281	17.172	48.37

Tableau 4.31: Valeurs du M_y , N , T_z maximal pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.31 donne la variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

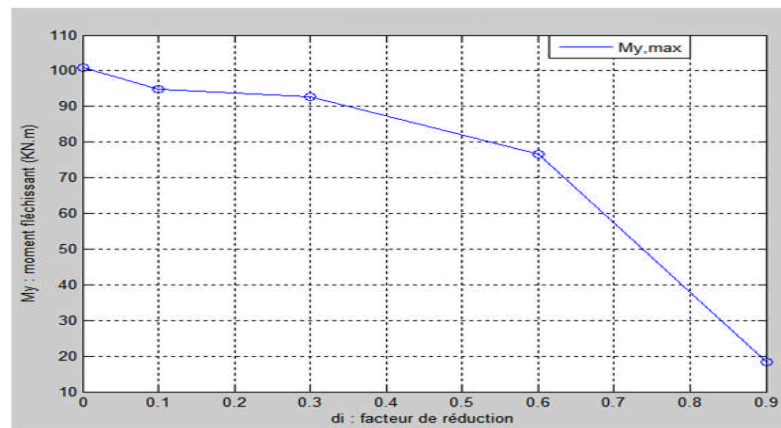


Figure 4.32 : Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

- La figure 4.32 donne la variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

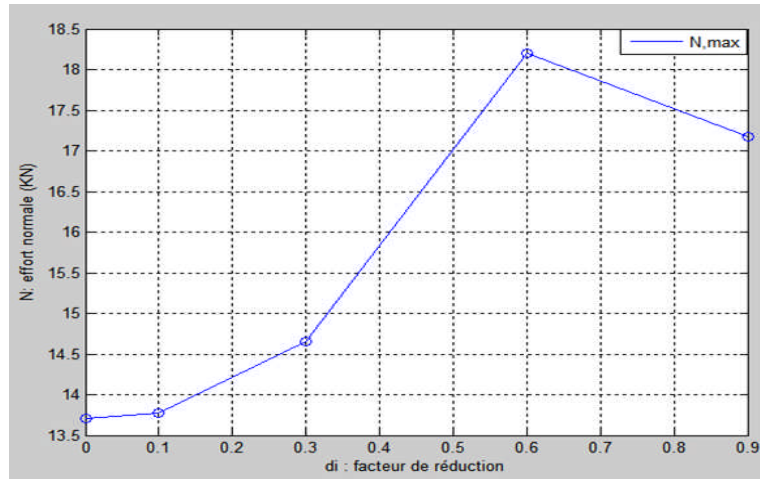


Figure 4.33 : Variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

- La figure 4.33 donne la variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

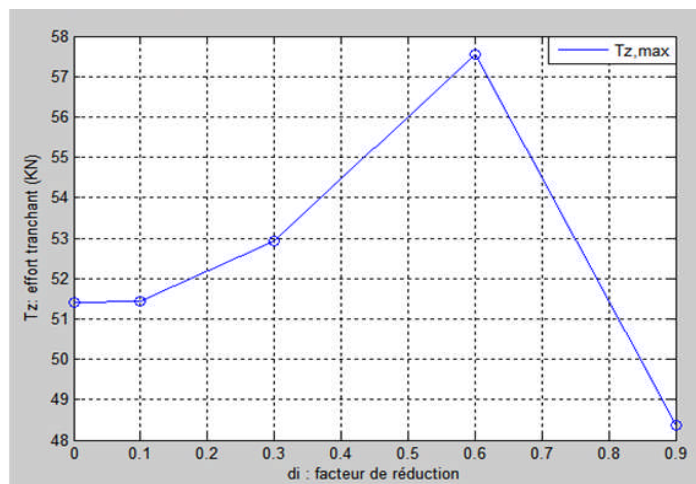


Figure 4.34 : Variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction

- Le tableau 4.32 donne les valeurs du M_y maximale dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	M_y (KN.m)
0.00	68.740
0.10	68.987
0.30	73.890
0.60	93.015
0.90	96.047

Tableau 4.32: Valeurs du M_y maximale dans la poutre secondaire, du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- La figure 4.34 donne la variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

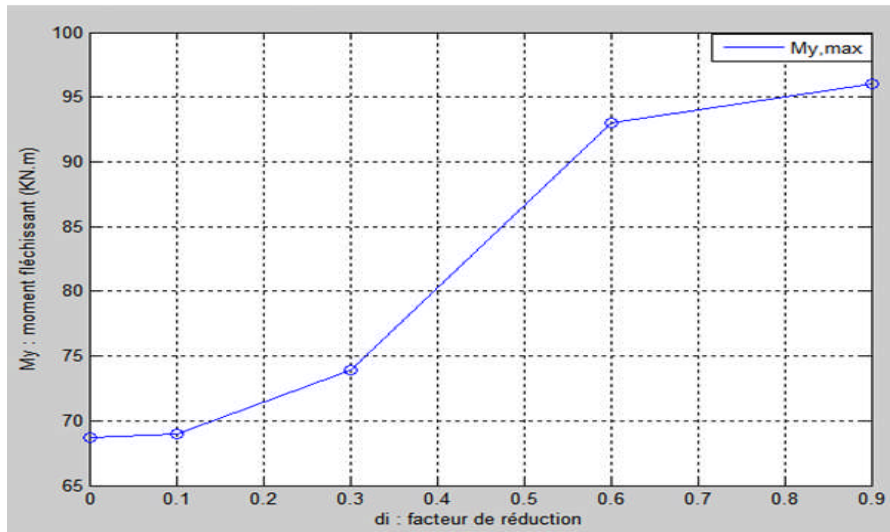


Figure 4.35 : Variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

- ✓ Les valeurs des périodes augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Le rapport entre la période T_1 du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 1.985.
- ✓ Les valeurs du déplacement horizontal maximal augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal maximal pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 1.68.
- ✓ Les valeurs du moment fléchissant maximal dans le poteau diminuent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le moment fléchissant maximal dans le poteau du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 0.192.
- ✓ Les valeurs de l'effort normal maximal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal maximal dans le poteau pour $d=0.6$ et $d=0.1$ est égale à : 1.32.
- ✓ En remarque pour l'effort normal maximal dans le poteau entre $d=0.6$ et $d=0.9$ il y a une rotule plastique.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- ✓ Les valeurs de l'effort tranchant maximal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal maximal dans le poteau pour $d=0.6$ et $d=0.1$ est égale à : 1.12.
- ✓ En remarque pour l'effort tranchant maximal dans le poteau entre $d=0.6$ et $d=0.9$ il se produit une rotule plastique.
- ✓ Les valeurs du moment fléchissant maximal dans la poutre augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction)
 - Le rapport entre le moment fléchissant maximal dans la poutre pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 1.392.

4.3.4. Structure à barres fissurées (24 fissures), (figure 4.35).

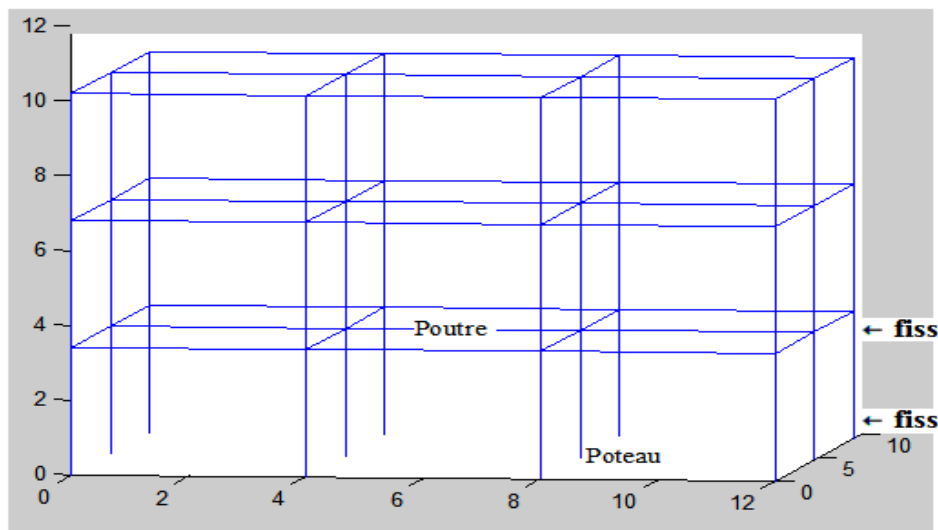


Figure 4.36: Discretisation en éléments finis de la structure à barres fissurée (24 fissures).

- Le tableau 4.33 donne les 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction (*profondeurs de la fissure*) :

Facteur de réduction (d)	T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)
0.00	0.0335	0.0299	0.0286
0.10	0.0336	0.0301	0.0287
0.30	0.0364	0.0328	0.0312
0.60	0.0597	0.0560	0.0520
0.90	0.2460	0.2424	0.2102

Tableau 4.33: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- La figure 4.35 donne la variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

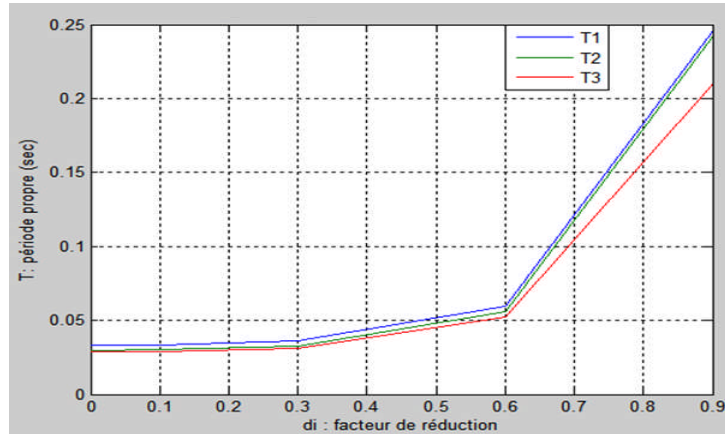


Figure 4.37: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

- Le tableau 4.34 donne les valeurs du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	Dx, max (cm)
0.00	5.061
0.10	5.135
0.30	5.79
0.60	8.164
0.90	12.87

Tableau 4.34: Valeurs du déplacement horizontal maximal pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.36 donne la variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

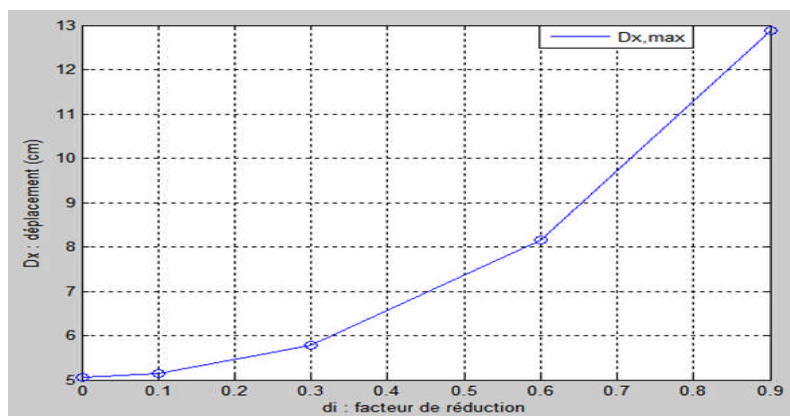


Figure 4.38 : Variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- Le tableau 4.35 donne les valeurs du M_y , N , T_z maximale dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	M_y (KN.m)	N (KN)	T_z (KN)
0.00	100.82	13.710	51.40
0.10	94.95	13.80	51.45
0.30	88.32	15.32	53.21
0.60	77.19	17.001	55.21
0.90	31.76	6.73	19.15

Tableau 4.35: Valeurs du M_y , N , T_z maximal pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.37 donne la variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

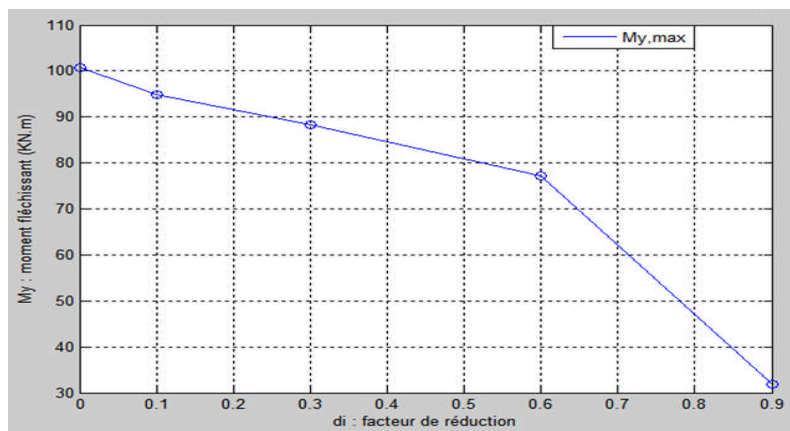


Figure 4.39 : Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

- La figure 4.38 donne la variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

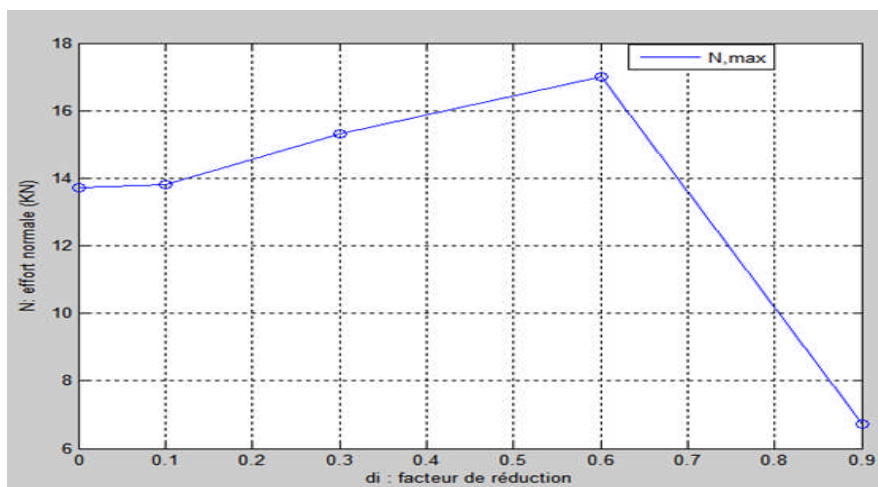


Figure 4.40 : Variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- La figure 4.39 donne la variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

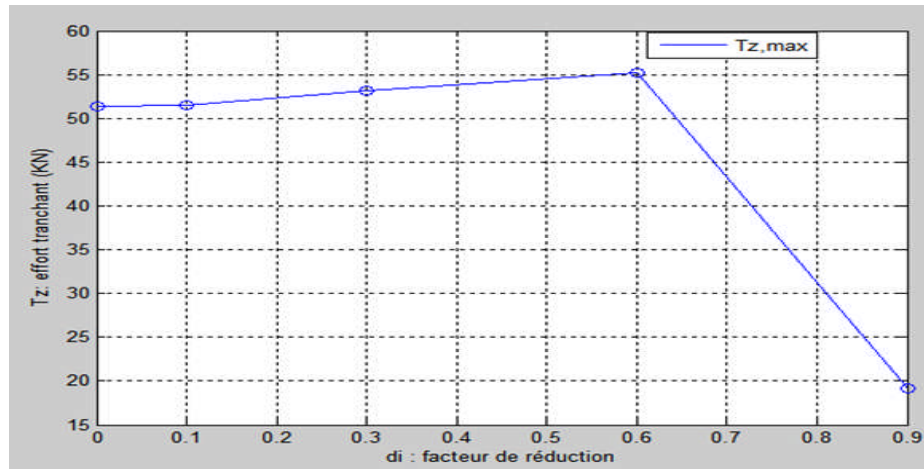


Figure 4.41 : Variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction

- Le tableau 4.36 donne les valeurs du M_y maximale dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	M_y (KN.m)
0.00	68.740
0.10	68.750
0.30	71.08
0.60	72.45
0.90	75.85

Tableau 4.36: Valeurs du M_y maximale dans la poutre secondaire, du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.40 donne la variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

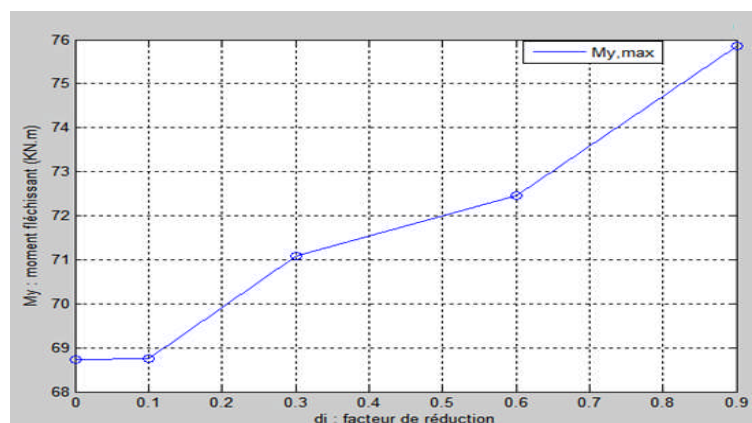


Figure 4.42 : Variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- ✓ Les valeurs des périodes augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Le rapport entre la période T_1 du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale a : 7.34.
- ✓ Les valeurs du déplacement horizontal maximal augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal maximal pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale a : 2.54.
- ✓ Les valeurs du moment fléchissant maximal dans le poteau diminuent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le moment fléchissant maximal dans le poteau du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale a : 0.33.
- ✓ Les valeurs de l'effort normal maximal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal maximal dans le poteau pour $d=0.6$ et $d=0.1$ est égale a : 1.23.
- ✓ En remarque pour l'effort normal maximal dans le poteau entre $d= 0.6$ et $d= 0.9$ il ya une rotule plastique.
- ✓ Les valeurs de l'effort tranchant maximal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal maximal dans le poteau pour $d=0.6$ et $d=0.1$ est égale a : 1.071.
- ✓ En remarque pour l'effort tranchant maximal dans le poteau entre $d= 0.6$ et $d= 0.9$ il se produite une rotule plastique.
- ✓ Les valeurs du moment fléchissant maximal dans la poutre augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction)

Le rapport entre le moment fléchissant maximal dans la poutre pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale a : 1.10.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

4.3.5. Structure à barres fissurées (36 fissures), (figure 4.41).

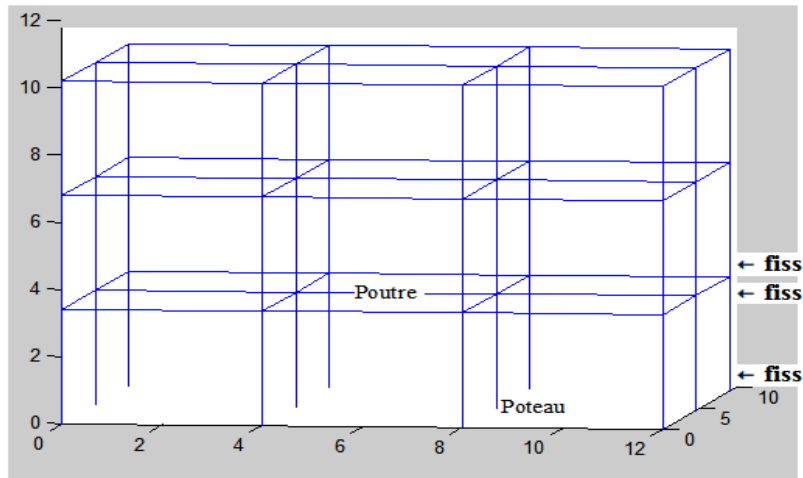


Figure 4.43: Discretisation en éléments finis de la structure à barres fissurée (36 fissures).

- Le tableau 4.37 donne les 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction (*profondeurs de la fissure*) :

Facteur de réduction (d)	T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)
0.00	0.0335	0.0299	0.0286
0.10	0.0336	0.0300	0.0286
0.30	0.0371	0.0335	0.03181
0.60	0.0636	0.0598	0.0554
0.90	0.2550	0.250	0.218

Tableau 4.37: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.42 donne la variation du 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

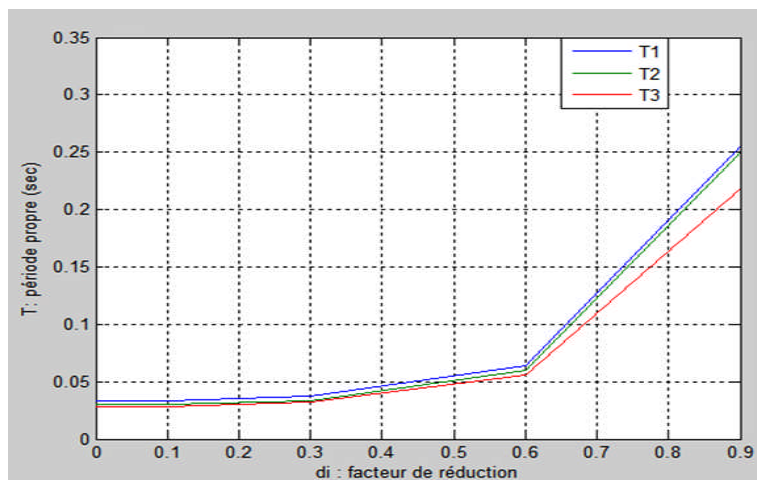


Figure 4.44: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- Le tableau 4.38 donne les valeurs du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	Dx, max (cm)
0.00	5.061
0.10	5.187
0.30	5.995
0.60	8.390
0.90	13.10

Tableau 4.38: Valeurs du déplacement horizontal maximal pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.43 donne la variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

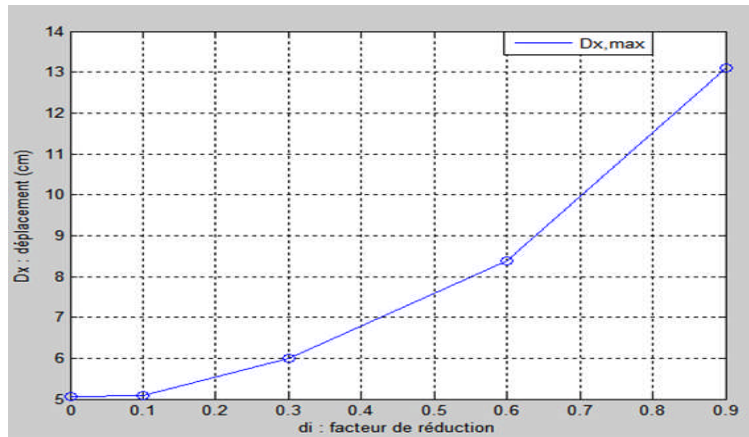


Figure 4.45 : Variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

- Le tableau 4.39 donne les valeurs du My, N, Tz maximale dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	My (KN.m)	N (KN)	Tz (KN)
0.00	100.82	13.71	51.40
0.10	94.87	13.87	51.48
0.30	87.80	16.43	53.69
0.60	83.49	20.33	56.27
0.90	30.45	10.42	18.50

Tableau 4.39: valeurs du My, N, Tz maximal pour les différents facteurs de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- La figure 4.44 donne la variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

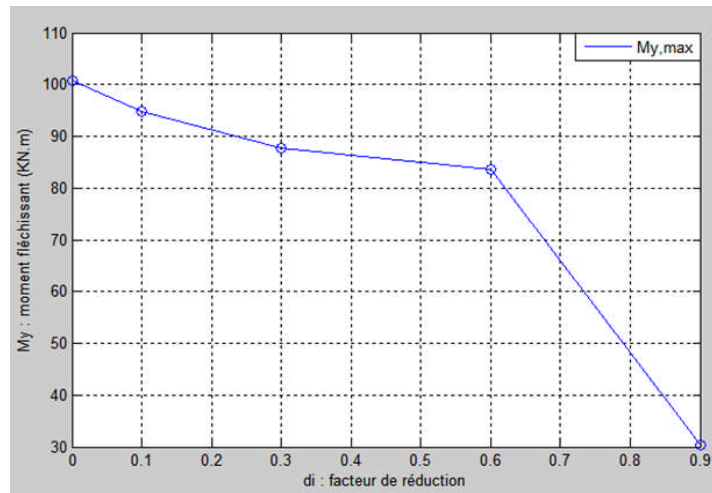


Figure 4.46 : Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

- La figure 4.45 donne la variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

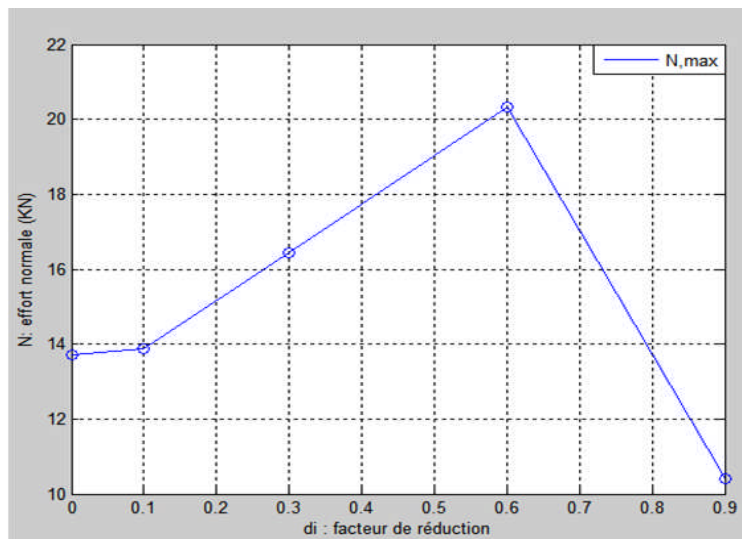


Figure 4.47 : Variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

- La figure 4.46 donne la variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

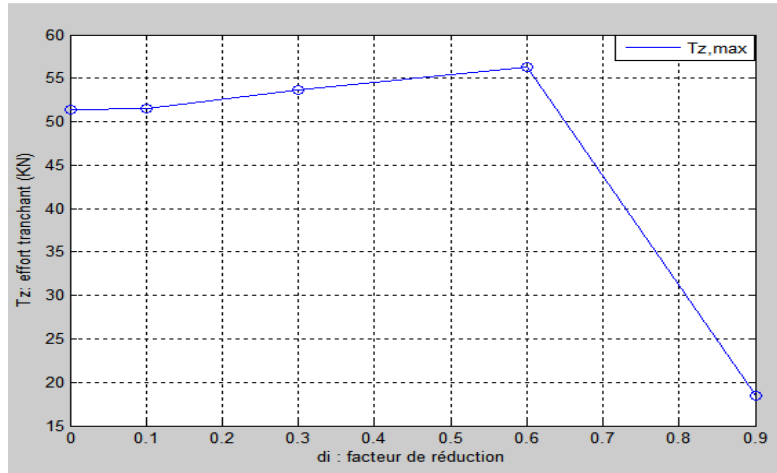


Figure 4.48 : Variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction

- Le tableau 4.40 donne les valeurs du M_y maximale dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	M_y (KN.m)
0.00	68.740
0.10	68.759
0.30	71.16
0.60	74.79
0.90	76.46

Tableau4.40: Valeurs du M_y maximale dans la poutre secondaire, du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.47 donne la variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

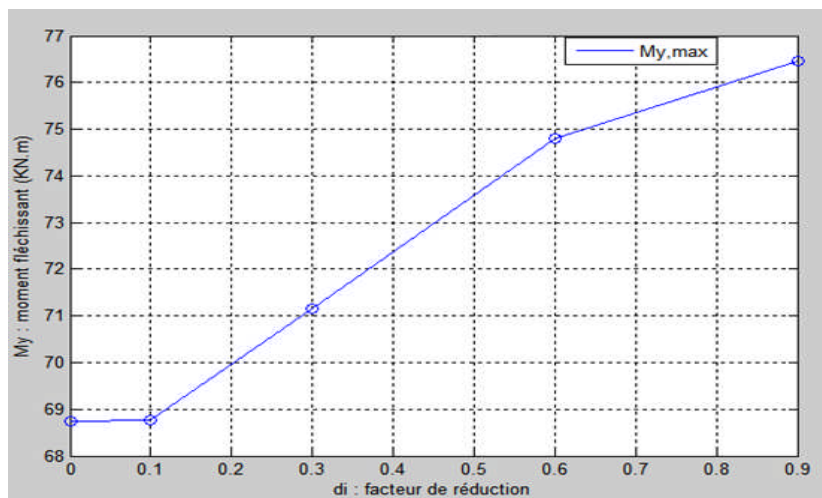


Figure 4.49 : Variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- ✓ Les valeurs des périodes augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Le rapport entre la période T_1 du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale a : 7.61.
- ✓ Les valeurs du déplacement horizontal maximal augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal maximal pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale a : 2.58.
- ✓ Les valeurs du moment fléchissant maximal dans le poteau diminuent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le moment fléchissant maximal dans le poteau du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale a : 0.32.
- ✓ Les valeurs de l'effort normal maximal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal maximal dans le poteau pour $d=0.6$ et $d=0.1$ est égale a : 1.48.
- ✓ En remarque pour l'effort normal maximal dans le poteau entre $d= 0.6$ et $d= 0.9$ il ya une rotule plastique.
- ✓ Les valeurs de l'effort tranchant maximal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal maximal dans le poteau pour $d=0.6$ et $d=0.1$ est égale a : 1.095.
- ✓ En remarque pour l'effort tranchant maximal dans le poteau entre $d= 0.6$ et $d= 0.9$ il se produite une rotule plastique.
- ✓ Les valeurs du moment fléchissant maximal dans la poutre augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le moment fléchissant maximal dans la poutre pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale a : 1.112.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

4.3.6. Structure à barres fissurées (48 fissures), (figure 4.48).

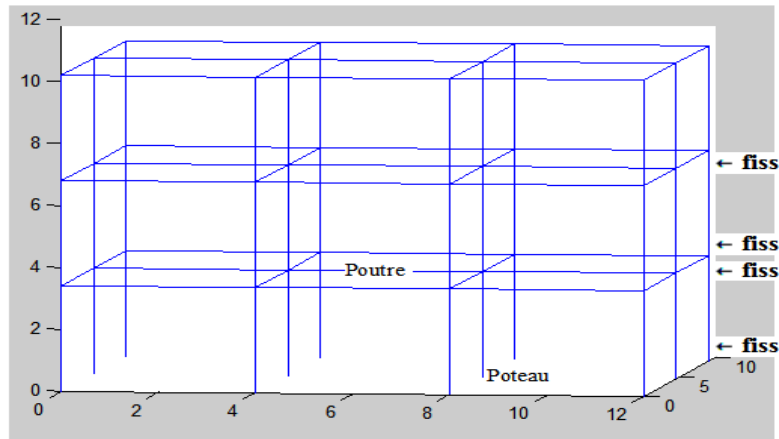


Figure 4.50: Discretisation en éléments finis de la structure à barres fissurée (48 fissures).

- Le tableau 4.41 donne les 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction (*profondeurs de la fissure*) :

Facteur de réduction (d)	T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)
0.00	0.0335	0.0299	0.0286
0.10	0.0353	0.0318	0.0298
0.30	0.0402	0.0366	0.0342
0.60	0.070	0.066	0.0609
0.90	0.373	0.365	0.318

Tableau 4.41: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.49 donne la variation du 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

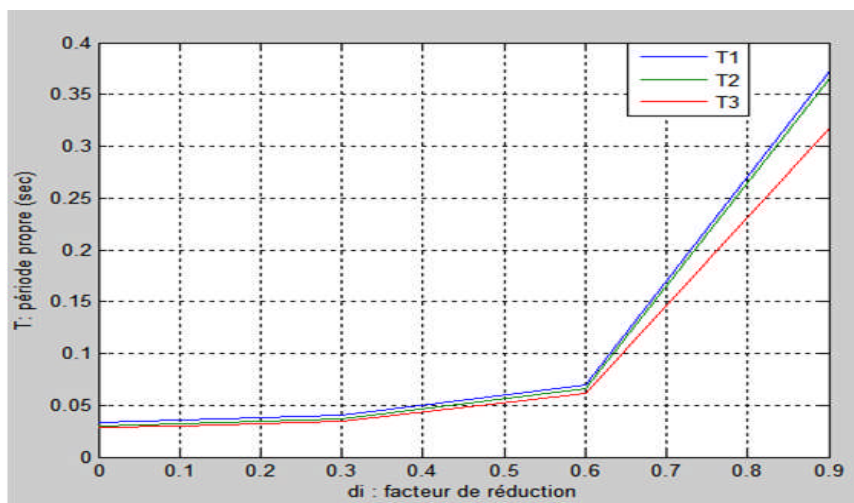


Figure 4.51: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- Le tableau 4.42 donne les valeurs du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	Dx, max (cm)
0.00	5.061
0.10	5.610
0.30	6.89
0.60	8.63
0.90	14.58

Tableau 4.42: Valeurs du déplacement horizontal maximal pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.50 donne la variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

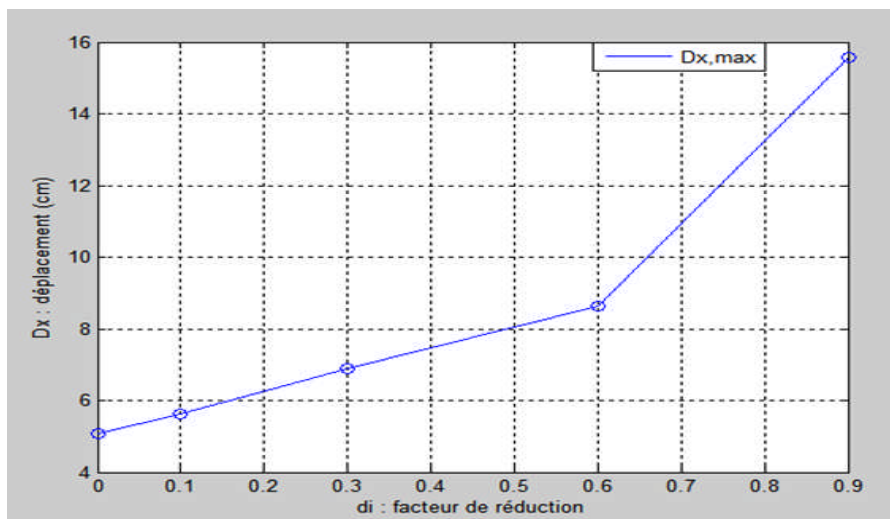


Figure 4.52 : Variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

- Le tableau 4.43 donne les valeurs du My, N, Tz maximale dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	My (KN.m)	N (KN)	Tz (KN)
0.00	100.82	13.71	51.40
0.10	92.87	13.96	53.91
0.30	85.80	18.75	56.50
0.60	81.49	17.96	41.93
0.90	23.75	10.75	14.38

Tableau 4.43: Valeurs du My, N, Tz maximal pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.51 donne la variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

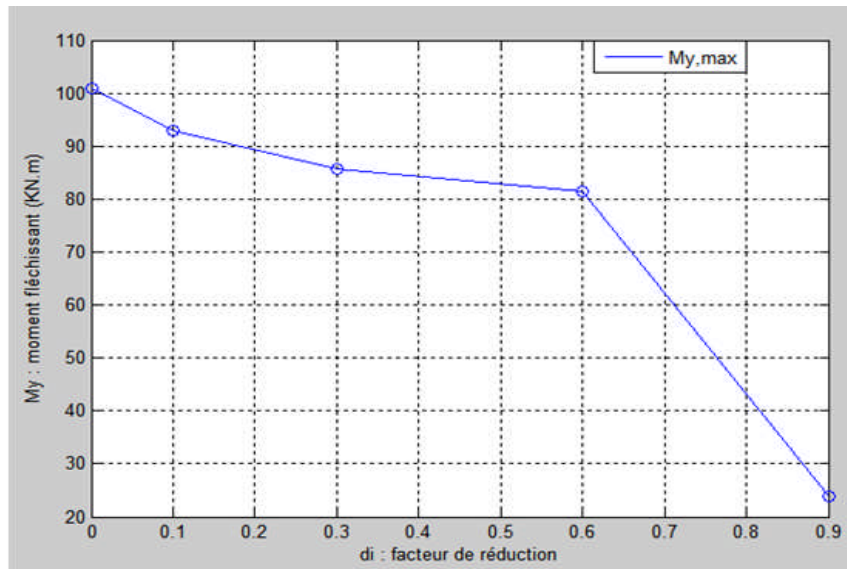


Figure 4.53 : Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

- La figure 4.51 donne la variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

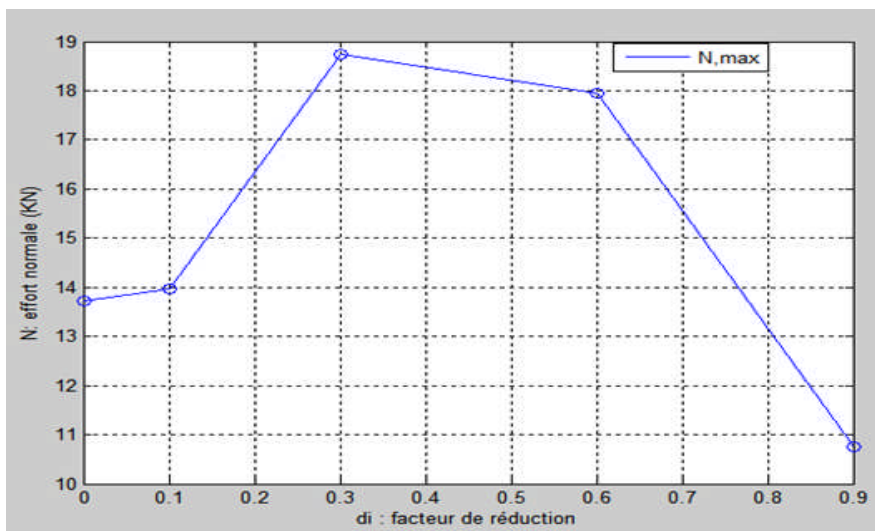


Figure 4.54 : Variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

- La figure 4.52 donne la variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

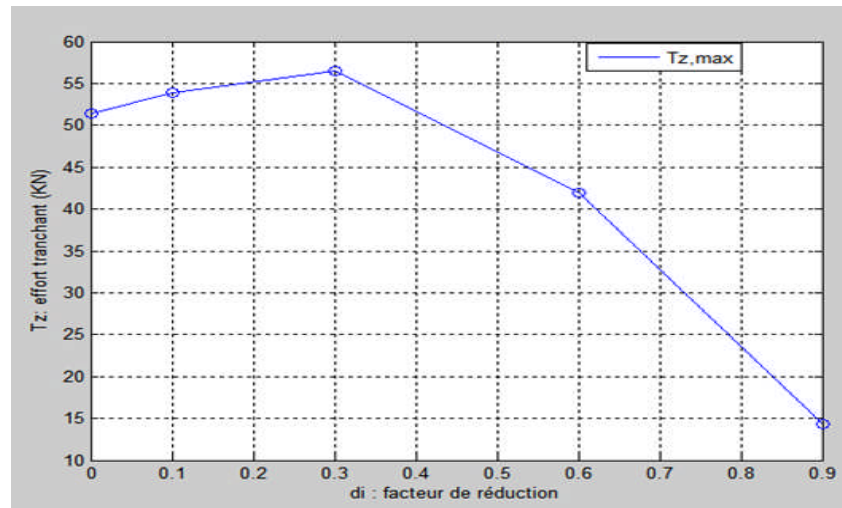


Figure 4.55 : Variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction

- Le tableau 4.44 donne les valeurs du M_y maximale dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	M_y (kN.m)
0.00	68.740
0.10	72.34
0.30	76.30
0.60	53.12
0.90	14.78

Tableau 4.44: Valeurs du M_y maximale dans la poutre secondaire, du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.53 donne la variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

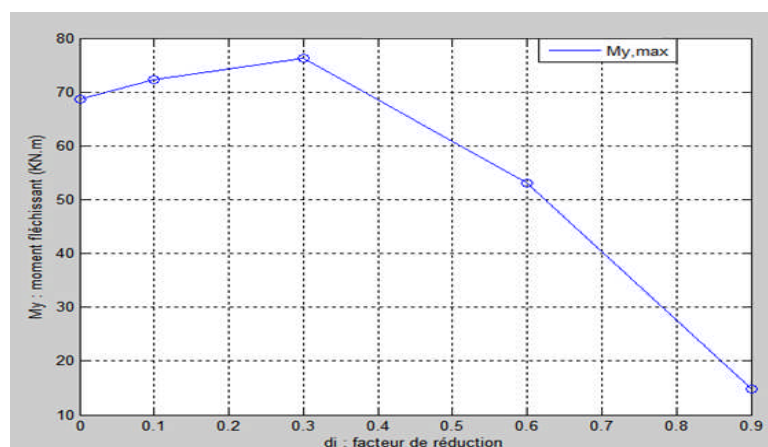


Figure 4.56 : Variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- ✓ Les valeurs des périodes augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Le rapport entre la période T_1 du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale a : 10.50.
- ✓ Les valeurs du déplacement horizontal maximal augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal maximal pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale a : 2.60.
- ✓ Les valeurs du moment fléchissant maximal dans le poteau diminuent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le moment fléchissant maximal dans le poteau du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale a : 0.26.
- ✓ Les valeurs de l'effort normal maximal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal maximal dans le poteau pour $d=0.3$ et $d=0.1$ est égale a : 1.34.
- ✓ En remarque pour l'effort normal maximal dans le poteau entre $d= 0.3$ et $d= 0.9$ il ya une rotule plastique.
- ✓ Les valeurs de l'effort tranchant maximal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal maximal dans le poteau pour $d=0.3$ et $d=0.1$ est égale a : 1.048.
- ✓ En remarque pour l'effort tranchant maximal dans le poteau entre $d= 0.6$ et $d= 0.9$ il se produite une rotule plastique.

Les valeurs du moment fléchissant maximal dans la poutre augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).

Le rapport entre le moment fléchissant maximal dans la poutre pour $d=0.3$ et $d=0.1$ est égale a : 1.055.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

4.3.7. Structure à barres fissurées (60 fissures), (figure 4.54).

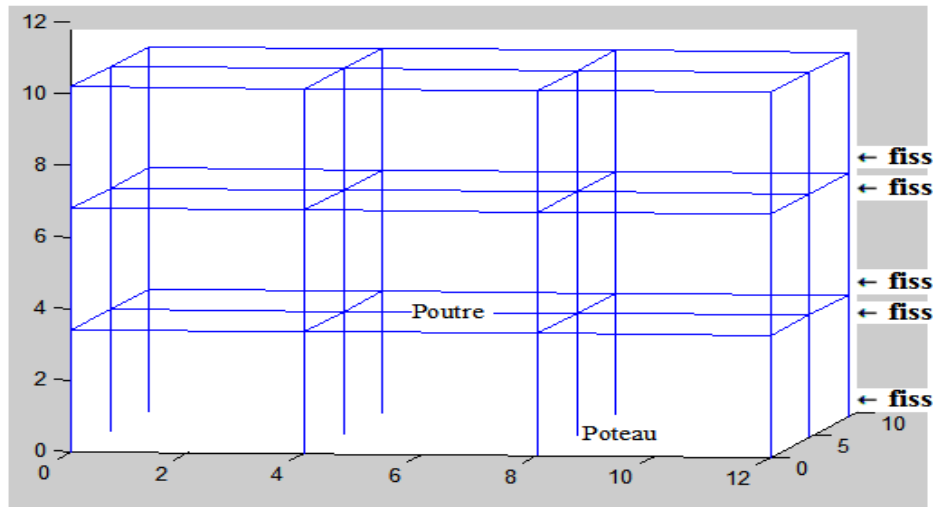


Figure 4.57: Discretisation en éléments finis de la structure à barres fissurée (60 fissures).

- Le tableau 4.45 donne les 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction (*profondeurs de la fissure*) :

Facteur de réduction (d)	T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)
0.00	0.0335	0.0299	0.0286
0.10	0.0346	0.032	0.0296
0.30	0.040	0.0361	0.0342
0.60	0.071	0.067	0.0616
0.90	0.374	0.368	0.321

Tableau 4.45: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.55 donne la variation du 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

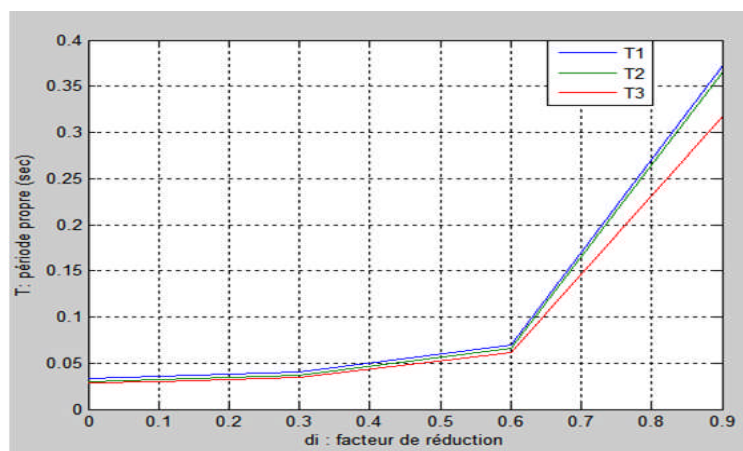


Figure 4.58: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- Le tableau 4.46 donne les valeurs du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	Dx, max (cm)
0.00	5.061
0.10	5.94
0.30	8.77
0.60	9.85
0.90	15.95

Tableau 4.46: Valeurs du déplacement horizontal maximal pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.50 donne la variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

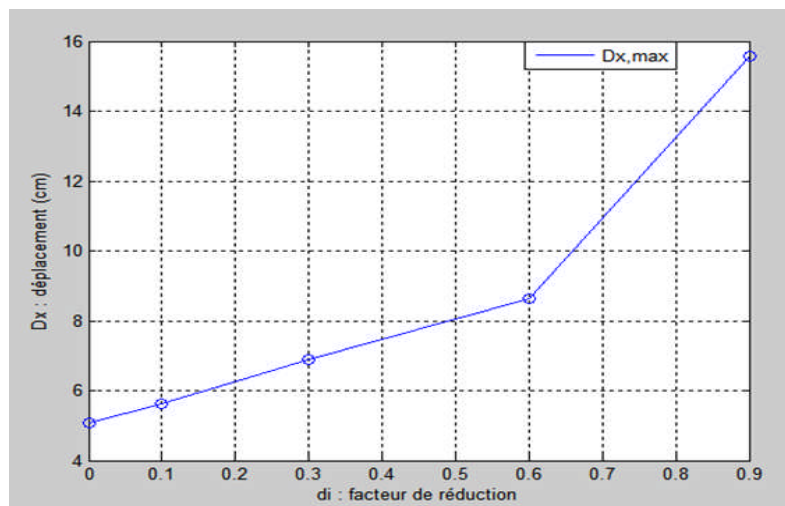


Figure 4.59 : Variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

- Le tableau 4.47 donne les valeurs du My, N, Tz maximale dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	My (KN.m)	N (KN)	Tz (KN)
0.00	100.82	13.71	51.40
0.10	79.08	14.22	54.21
0.30	68.44	18.99	57.40
0.60	57.24	16.85	41.33
0.90	23.14	13.63	14.10

Tableau 4.47: Valeurs du My, N, Tz maximal pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.51 donne la variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

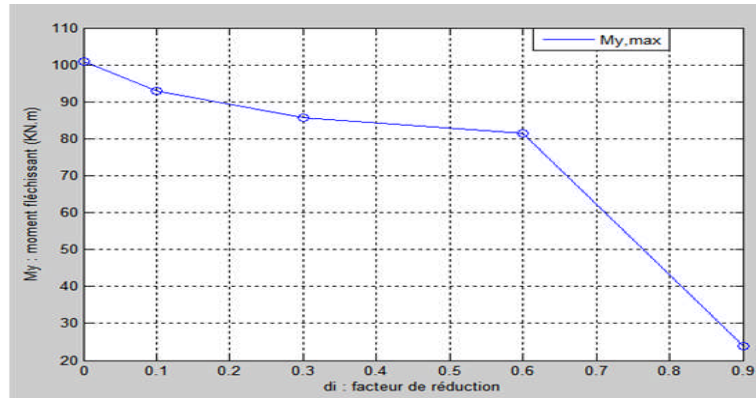


Figure 4.60 : Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

- La figure 4.51 donne la variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

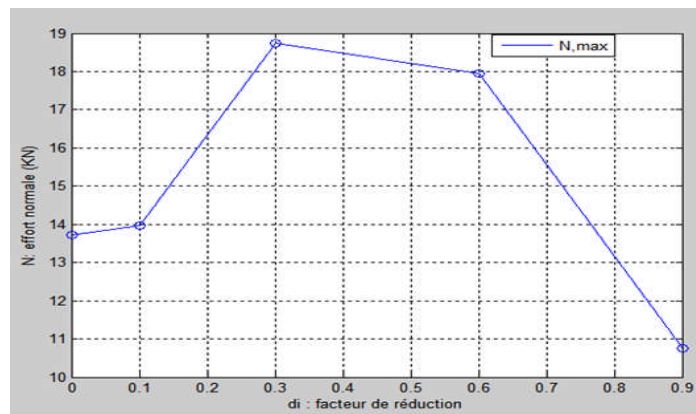


Figure 4.61 : Variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

- La figure 4.52 donne la variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

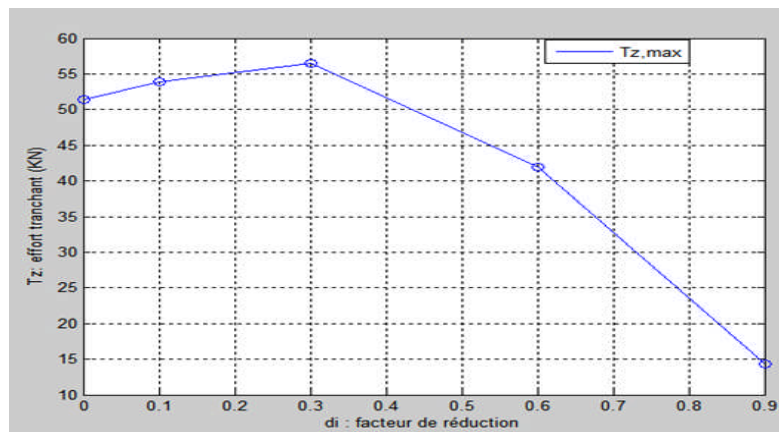


Figure 4.62 : Variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- Le tableau 4.48 donne les valeurs du M_y maximale dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	M_y (KN.m)
0.00	68.740
0.10	73.54
0.30	78.47
0.60	52.21
0.90	14.55

Tableau 4.48: Valeurs du M_y maximale dans la poutre secondaire, du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.53 donne la variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

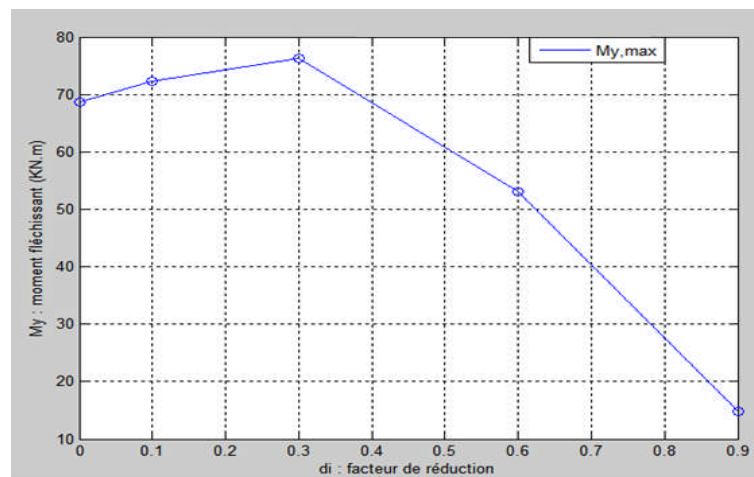


Figure 4.63 : Variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

- ✓ Les valeurs des périodes augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Le rapport entre la période T_1 du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 10.50.
- ✓ Les valeurs du déplacement horizontal maximal augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal maximal pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 2.68.
- ✓ Les valeurs du moment fléchissant maximal dans le poteau diminuent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- ✓ Le rapport entre le moment fléchissant maximal dans le poteau du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 0.29.
- ✓ Les valeurs de l'effort normal maximal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal maximal dans le poteau pour $d=0.3$ et $d=0.1$ est égale à : 1.34.
- ✓ On remarque pour l'effort normal maximal dans le poteau entre $d=0.3$ et $d=0.9$ il y a une rotule plastique.
- ✓ Les valeurs de l'effort tranchant maximal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal maximal dans le poteau pour $d=0.3$ et $d=0.1$ est égale à : 1.048.
- ✓ On remarque pour l'effort tranchant maximal dans le poteau entre $d=0.6$ et $d=0.9$ il se produit une rotule plastique.
- ✓ Les valeurs du moment fléchissant maximal dans la poutre augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction)

Le rapport entre le moment fléchissant maximal dans la poutre pour $d=0.3$ et $d=0.1$ est égale à : 1.055.

4.3.8. Structure à barres fissurées (72 fissures), (figure 4.55).

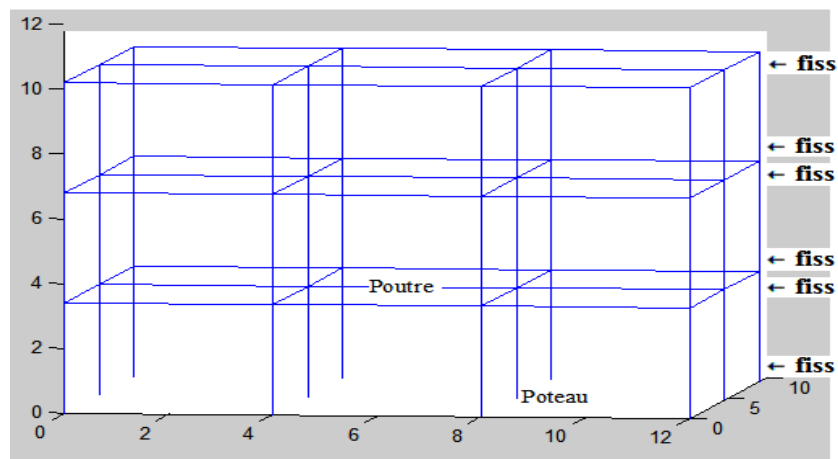


Figure 4.64: Discretisation en éléments finis de la structure à barres fissurée (72 fissures).

- Le tableau 4.49 donne les 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction (*profondeurs de la fissure*) :

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

Facteur de réduction (d)	T1 (sec)	T2 (sec)	T3 (sec)
0.00	0.0335	0.0299	0.0286
0.10	0.0353	0.0315	0.0297
0.30	0.0407	0.0368	0.0345
0.60	0.0738	0.0693	0.0639
0.90	0.402	0.395	0.341

Tableau 4.49: Valeurs des 3 premières périodes pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.55 donne la variation du 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

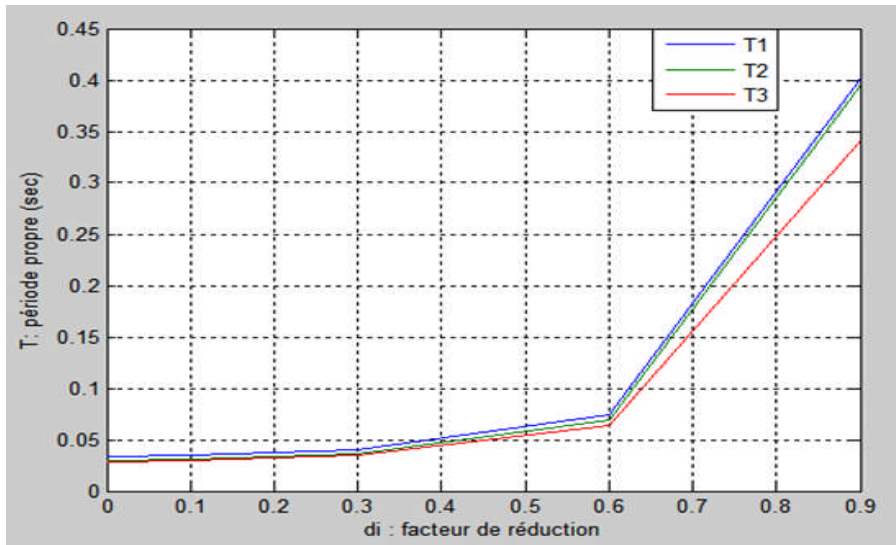


Figure 4.65: Variation des 3 premières périodes (seconde) pour les différents facteurs de réduction.

- Le tableau 4.50 donne les valeurs du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	Dx, max (cm)
0.00	5.061
0.10	6.57
0.30	10.45
0.60	12.47
0.90	18.29

Tableau 4.50: Valeurs du déplacement horizontal maximal pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.56 donne la variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

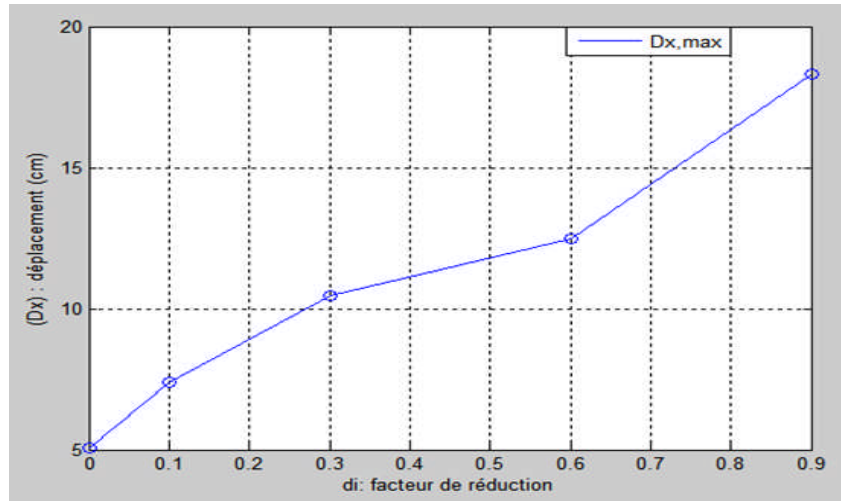


Figure 4.66 : Variation du déplacement horizontal maximal en fonction du facteur de réduction.

- Le tableau 4.51 donne les valeurs du M_y , N , T_z maximale dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	M_y (KN.m)	N (KN)	T_z (KN)
0.00	100.82	13.71	51.40
0.10	77.85	14.48	55.45
0.30	65.44	20.11	59.60
0.60	55.34	15.15	39.73
0.90	21.24	11.83	12.26

Tableau 4.51: Valeurs du M_y , N , T_z maximal pour les différents facteurs de réduction.

- La figure 4.57 donne la variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

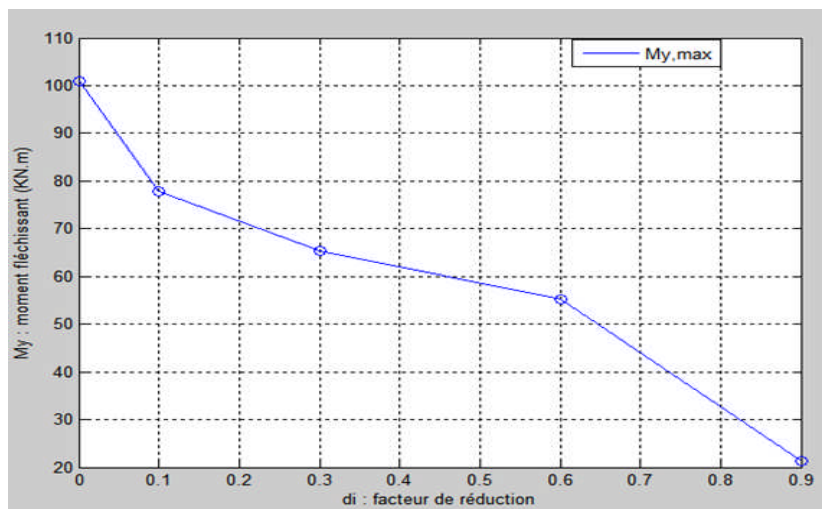


Figure 4.67 : Variation du moment fléchissant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- La figure 4.58 donne la variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

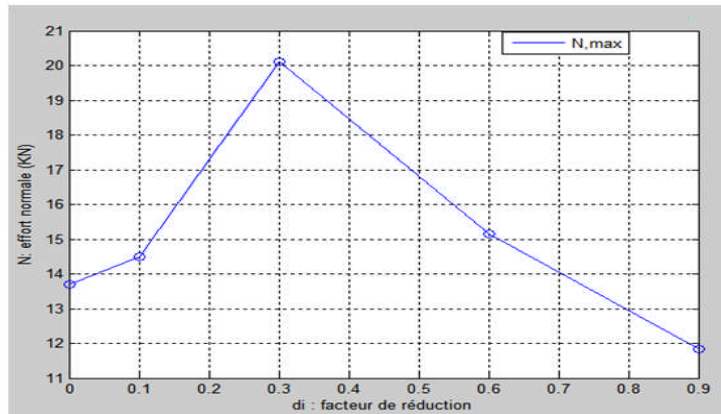


Figure 4.68 : Variation de l'effort normal maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

- La figure 4.59 donne la variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

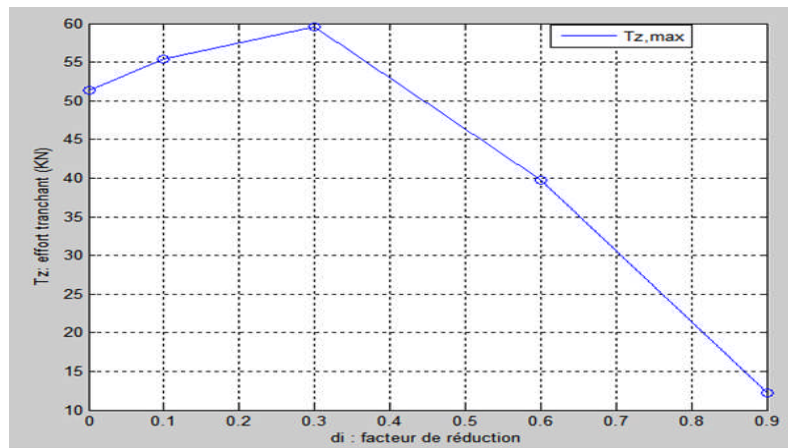


Figure 4.69 : Variation de l'effort tranchant maximal dans le poteau en fonction du facteur de réduction.

- Le tableau 4.52 donne les valeurs du M_y maximale dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

Facteur de réduction (d)	M_y (KN.m)
0.00	68.74
0.10	74.24
0.30	79.87
0.60	50.41
0.90	12.85

Tableau 4.52: Valeurs du M_y maximale dans la poutre secondaire, du portique fissuré pour les différents facteurs de réduction.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- La figure 4.60 donne la variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

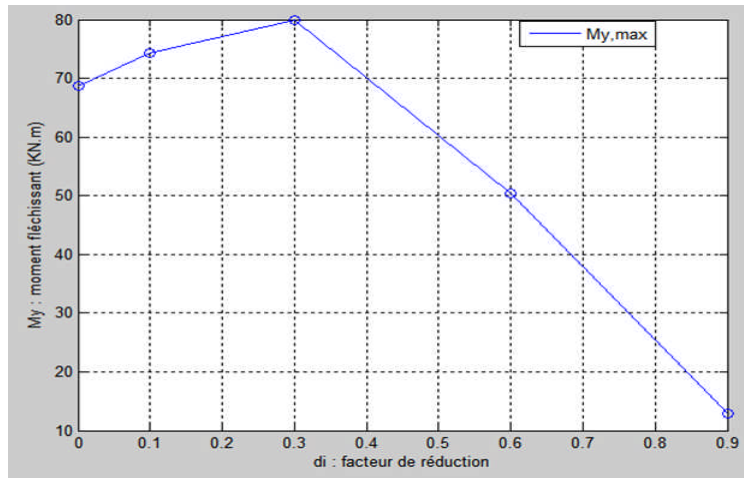


Figure 4.70 : Variation du moment fléchissant maximal dans la poutre en fonction du facteur de réduction.

- ✓ Les valeurs des périodes augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure.
- ✓ Le rapport entre la période T1 du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 10.50.
- ✓ Les valeurs du déplacement horizontal maximal augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le déplacement horizontal maximal pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 2.78.
- ✓ Les valeurs du moment fléchissant maximal dans le poteau diminuent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le moment fléchissant maximal dans le poteau du portique fissuré pour $d=0.9$ et $d=0.1$ est égale à : 0.26.
- ✓ Les valeurs de l'effort normal maximal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal maximal dans le poteau pour $d=0.3$ et $d=0.1$ est égale à : 1.34.
- ✓ En remarque pour l'effort normal maximal dans le poteau entre $d=0.3$ et $d=0.9$ il y a une rotule plastique.

Chapitre 4: Etude statique et dynamique de portiques fissurés

- ✓ Les valeurs de l'effort tranchant maximal dans le poteau augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre l'effort normal maximal dans le poteau pour $d=0.3$ et $d=0.1$ est égale à : 1.048.
- ✓ En remarque pour l'effort tranchant maximal dans le poteau entre $d= 0.6$ et $d= 0.9$ il se produit une rotule plastique.
- ✓ Les valeurs du moment fléchissant maximal dans la poutre augmentent en fonction de l'augmentation de la profondeur de la fissure (augmentation du facteur de réduction).
- ✓ Le rapport entre le moment fléchissant maximal dans la poutre pour $d=0.3$ et $d=0.1$ est égale à : 1.075

Conclusion 2 :

On remarque que la position des fissures influence sur le comportement dynamique de la structure fissurée.

- On remarque que la profondeur des fissures existantes influence largement sur la stabilité et la sécurité de la structure.
- On remarque que le nombre des fissures influence sur le comportement dynamique de la structure fissurée.

4.4. Conclusion:

- La rigidité de la structure est inversement proportionnelle au déplacement horizontal de la structure par rapport au séisme :

$$K \cdot D = F.$$

Si on a une diminution de K automatiquement on a une augmentation de D_x , Tableau 4.53, Figure 4.71.

(d)	Dx, max (cm) Cas 1 12 fissures	Dx, max (cm) Cas 2 24 fissures	Dx, max (cm) Cas 3 36 fissures	Dx, max (cm) Cas 4 48 fissures	Dx, max (cm) Cas 5 60 fissures	Dx, max (cm) Cas 6 72 fissures
0.00	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061
0.10	5.092	5.135	5.187	5.610	5.94	6.57
0.30	5.560	5.79	5.995	6.89	8.77	10.45
0.60	7.520	8.164	8.390	8.63	9.85	12.47
0.90	8.483	12.87	13.10	14.58	15.95	18.29

Tableau 4.53 : Valeurs du D_x , max pour tous les cas étudiés de la structure fissurée.

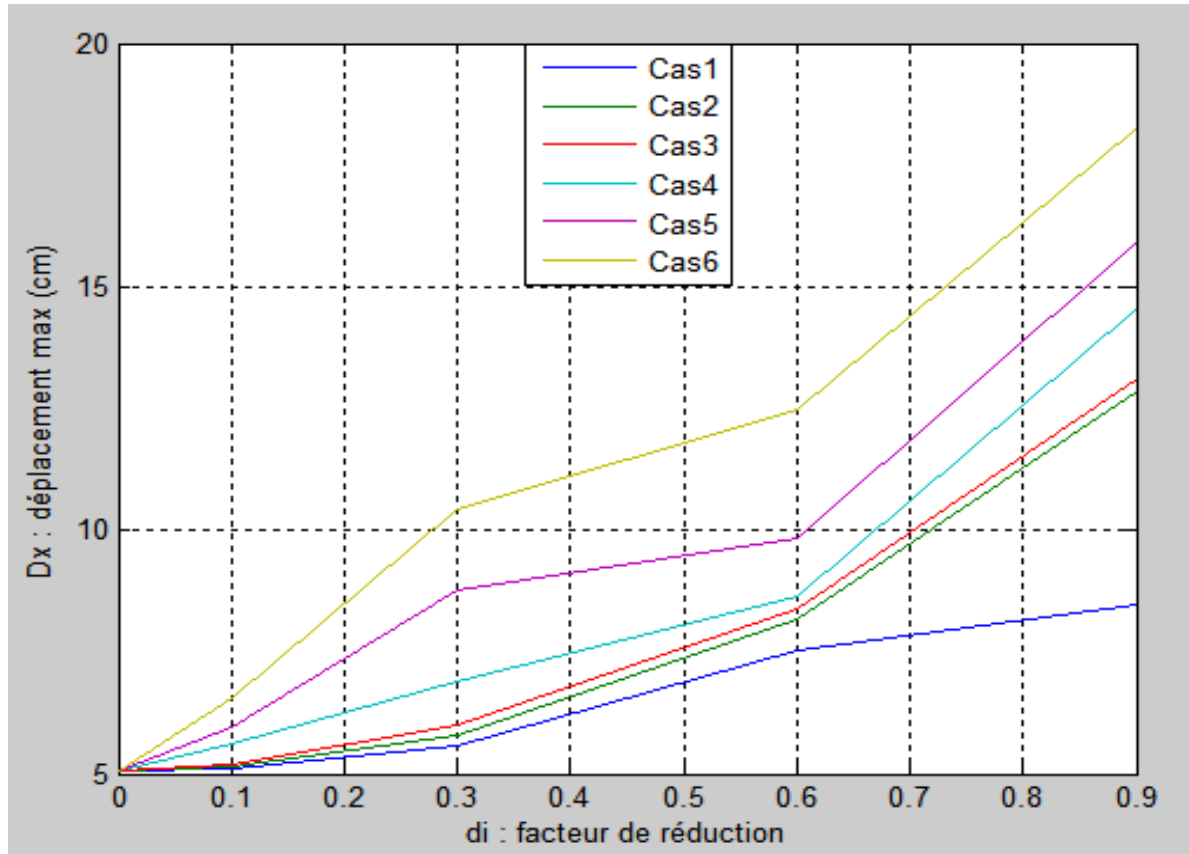


Figure 4.71 : Valeurs du D_x , max pour tous les cas étudiés

Conclusion Générale

Le travail que nous venons de présenter porte sur l'étude du comportement dynamique des structures à barres comportant des fissures par la méthode des éléments finis.

Cette étude a visé dans une première étape à passer en revue la littérature du phénomène de la fissuration basé sur la théorie de la mécanique de la rupture.

On expose ensuite les méthodes expérimentales pour l'étude de la fissure. On a aussi présenté une étude statique et outre dynamique d'une poutre fissurée par trois modèles différents.

Ensuite on a expliqué d'une manière générale le concept de base de la méthode des éléments finis pour l'analyse des structures.

Un programme en Matlab est élaboré pour modéliser et analyser les structures fissurées tridimensionnelles en éléments finis.

Ce programme est utilisé pour la validation numérique des résultats de calcul des structures fissurées par la méthode des éléments finis.

Sur la base de cette étude certaines conclusions peuvent être déduites :

- La position des fissures influence sur le comportement statique et dynamique de la structure fissurée.
- La profondeur des fissures existantes influence largement sur la stabilité et la sécurité de la structure.
- Le nombre des fissures influence sur le comportement statique et dynamique de la structure fissurée.

Ce travail peut donner les moyens à l'ingénieur de modéliser et déterminer la position des fissures dans les structures dégradées tridimensionnelles.

Cette recherche peut être étendue dans le futur en tenant compte des phénomènes suivants :

- ❖ La propagation de la fissure
- ❖ La ductilité de la structure

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- A. SEGHIR, (2004), *Méthode des Eléments Finis (MEF)*, Département de Génie Civil, 5ème Année, Université A. Mira, Bejaïa.
- BUI H.D (1978), *Mécanique de la rupture fragile*, Edition Masson.
- CHONDROS T.D., DIMAROGONAS A.D. and YAO J. (1998), *A continuous cracked beam vibration theory*, Journal of Sound and Vibration, 215(1), 17-34.
- CHRISTIDES A. and BARR A.D.S. (1989), *One dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams*, International of Mechanical Science, Vol. 26, 639-648, ISSN 0020-7403.
- DADO M.H. and SHPLI O. (2003), *Crack parameter estimation in structures using finite element modeling*, International Journal of Solids and Structures, Vol 40, Issue 20, pages 5389-5406, Elsevier.
- DECOLON A. (2000), *Analyse linéaire des structures formées de poutres*, Département de Génie Civil,
- ENGERAND Jean-Luc (1990), *Mécanique de la rupture*, Techniques de l'Ingénieur, B. 5060.
- Florence Hubert, (2004), *Initiation à Matlab*, Université de Provence
- GINGER CEBTP (2012), *Catalogue des produits*, Groupe Ingénierie Europe, France.
- GRIFFITH A.A. (1920), *the phenomenon of ruptures and flow in solids*, Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. A221 pp.163-98.
- HADJILEONTIADIS L.J., DOUKA E. and TROCHIDIS A. (2005), *Crack detection in beams using kurtosis*, Computers and Structures, N°83, p.909–919.
- IRWIN G.R. (1957), *Analysis of Stress and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 361-364.
- Jérôme Briot, (2007), *Gestion des matrices, Améliorer sa programmation sous MATLAB*, Recherche internet.
- KRISHNASWAMY R.C. and GRIFITH A.A. (1948), *Fracture Mechanics*, R. Soc. London A221, 163–198.
- Krishnamoorthy, 1987, *Méthode des Eléments Finis (MEF)*,
- Klaus-Jürgen Bathe, (1996), *Finite Element Procedures*, Massachusetts institute of Technology

- LEE Jinhee (2009), *Identification of multiple cracks in a beam using natural frequencies*, Journal of Sound and Vibration 320, p.482–490.
- NASERALAVI A., SALAJEGHEH J., SALAJEGHEH E. and FADAEI M.J. (2010), *An improved genetic algorithm using sensitivity analysis and micro search for damage detection*, Asian Journal of Civil Engineering, Vol.11, N°6, pages.717-740.
- OKAMURA H., LIU H.W. and CHORNG-SHIN C. (1969), *A cracked column under compression*, Engineering Fracture Mechanics, 1, 547-564.
- O. RAHMANI et S. KEBDANI, (1988), *Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs*, Institut de génie mécanique de l'université des sciences et de la technologie d'Oran.
- RECCHO N. (1995), *Rupture par fissuration des structures*, Edition Hermes.
- Rao V. Dukkipati, (2010), *Matlab an introduction with applications*, Department of Mechanical Engineering Fairfield University.
- SHEN M. and PIERRE C. (1990), *Natural modes of Bernoulli Euler beams with symmetric cracks*, Journal of Sound and Vibration, 138, 115-134.
- SIH G.C. (1966), *On the Westergaard method of crack analysis*, International Journal of Fracture, 2 (4), 628-631.
- SIH G.C. (1973), *Energy-density concept in fracture mechanics*, Engineering Fracture Mechanics 5, 1037–1040.
- Sergey E. Lyshevski. (2013), *Engineering and Scientific Computations Using MATLAB*, Rochester Institute of Technology, United States of America
- TADA H., PARIS P. and IRWIN G. (1985), *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, second edition, Paris Productions, St Louis.
- WESTERGAARD H.M. (1964), *Theory of Elasticity and Plasticity*, Dover Publications, inc. New York.
- ZEGLOUL A. (2004), *Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture*, Mémoire de diplôme d'études approfondies, Université de Metz.
- Zienkiwicz O.C., (1979), *La méthode des éléments finis*, Editions MC graw Hit.