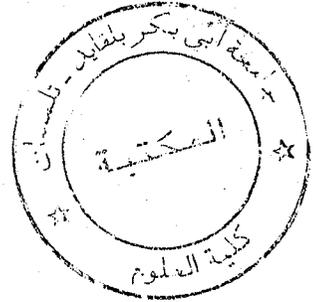
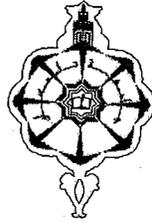
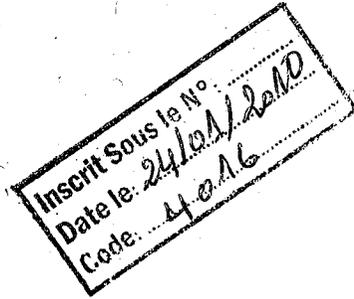


DOC/537-10/09 +

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE ABOU-BAKR BELKAÏD – TLEMCEM



Pour obtenir le grade de

Docteur en Sciences physiques

Option : Physique Electronique et Modélisation

Par

Mr CHIKHAOUI Abdelhak

**Relation entre la Dérivée Optimale
et la Stabilité Asymptotique**

Soutenu en Décembre 2009

Devant le jury d'examen

Président

S.M. BOUGUIMA

Professeur à l'Université Abou-Bakr Belkaid – Tlemcen

Directeur de Thèse

T. BENOUAZ

Professeur à l'Université Abou-Bakr Belkaid – Tlemcen

Examineurs

A. BELGHACHI

Professeur à l'Université de Bechar

A. HELMAOUI

Professeur à l'Université de Bechar

A. CHEKNANE

Maître de Conférence à l'université Amar Telidji – Laghouat

Année Universitaire 2009 ~ 2010



THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE ABOU-BAKR BELKAÏD – TLEMCEM

Pour obtenir le grade de

Docteur en Sciences physiques

Option : Physique Electronique et Modélisation

Par

Mr CHIKHAOUI Abdelhak

Relation entre la Dérivée Optimale et la Stabilité Asymptotique

Soutenu en Décembre 2009

Devant le jury d'examen

Président

S.M. BOUGUIMA

Directeur de Thèse

T. BENOUAZ

Examineurs

A. BELGHACHI

A. HELMAOUI

A. CHEKNANE

Professeur à l'Université Abou-Bakr Belkaïd – Tlemcen

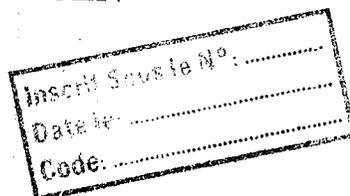
Professeur à l'Université Abou-Bakr Belkaïd – Tlemcen

Professeur à l'Université de Bechar

Professeur à l'Université de Bechar

Maître de Conférence à l'université Amar Telidji – Laghouat

Année Universitaire 2009 ~ 2010



Résumé

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle ordinaire est une tâche presque triviale si la fonction définissant l'équation est suffisamment régulière, disons, au voisinage de l'équilibre, et si sa linéarisation en ce point est hyperbolique. Dans ce cas, on sait que l'équation est équivalente à l'équation linéaire obtenue par linéarisation. Par contre, en l'absence de régularité, une question de stabilité se pose : y a-t'il d'autres moyens d'associer à un système non linéaire un système linéaire, dont le comportement asymptotique soit le même? Cette question s'est avérée d'une très grande importance et retient de plus en plus l'attention des physiciens depuis plusieurs années. L'objectif de ce travail inscrit dans la ligne des travaux entrepris par Benouaz et Arino est de contribuer à la réponse à cette question. Ceci a été accompli en examinant la relation entre une nouvelle méthode de linéarisation appelée *dérivée optimale* et la notion de stabilité en particulier *la stabilité asymptotique* de l'équation non linéaire. Pour ce faire, deux parties sont envisagées à savoir : la confrontation et la validation des résultats de l'application de la méthode de dérivation optimale aux modèles physiques. Ces modèles engendrent le phénomène de bifurcation (changement brusque de stabilité et comportement de solution) et ceci à travers une comparaison par rapport aux résultats obtenus en utilisant le code de simulation le plus répondu pour la continuation numérique de bifurcation AUTO2000. Une deuxième partie destinée à l'approfondissement de cette relation pour une classe particulière d'équations non linéaires dont la linéarisé classique présente un centre (elle prédit la stabilité sans avoir des informations sur la stabilité asymptotique). Un résultat très important a été prouvé définissant le lien entre la méthode et la stabilité asymptotique à travers notre étude de la trace de la matrice optimale.

Enfin, le travail se termine par une partie représentant la généralisation de la méthode de linéarisation optimale, suivie d'une application pour l'étude d'un système physique. Une autre partie consacrée à l'application de la méthode dérivée optimale aux systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires modélisant des systèmes non linéaires commandés a été illustré en détail.

Mots-clefs :

Dérivée optimale – Equation différentielle ordinaire non linéaire E.D.O – Analyse de bifurcation – Stabilité locale – Stabilité asymptotique – linéarisation au sens de Fréchet – Linéarisation optimale – Système non linéaire avec commande.

Abstract

The study of the stability of an equilibrium point of an ordinary differential equation is an almost trivial task if the function defining the equation is sufficiently regular near equilibrium, and if its linearization at this point is hyperbolic. In this case, we know that the equation is equivalent to the linear equation obtained by linearization. In the absence of regularity, a question of stability arises: are there other ways to associate a nonlinear system a linear system, whose asymptotic behaviour is the same? This issue has been of great importance and has attracted increasing attention of physicists for many years. The objective of this work included in the line of work undertaken by Benouaz and Arino is to give answer to this question. This was accomplished by examining the relationship between a new method of linearization called *optimal derivative* and the notion of stability in particular the asymptotic stability of nonlinear equation. To do this, both parties are considered namely: a comparison and validation of the results of applying the *optimal derivative* method to study physical models. These models generate the bifurcation phenomena (sudden change in behaviour and solution stability) and this through a comparison with results obtained using the simulation code for numerical continuation of bifurcation AUTO2000. A second part intended to deepen this relationship for a particular class of nonlinear equations whose *classical linearization* present a complex eigenvalues purely imaginary (it predicts stability without information on the asymptotic stability). A very important result was proved in our study establishing the link between the *optimal derivative* method and the *asymptotic stability* of the trace of the matrix optimal.

Finally, the work ends with a party representing the generalization method of optimal linearization, followed by an application to the study of a physical system. Another section on the application of the method derived optimal systems of ordinary differential equations non-linear modelling of nonlinear controlled systems has been illustrated in detail.

Key words:

Optimal derivative – Nonlinear Ordinary differential Equation O.D.E – Bifurcation analysis – Local stability – Asymptotic stability – Freshet linearization – Optimal linearization – Commanded nonlinear system.

**A mes parents chéris
Des larmes de gratitude
Pour leur loyauté prodigue
Et leur sacrifice désintéressé.**

**A ma femme celle qui a su comprendre et partager
Les sacrifices qu'implique un tel investissement.
A mon fils Mohammed El Amine
Avec toute mon amour et affection.**

**A mes soeurs et frères ainsi que leurs petites familles
Avec toute mon affection.
A tous ceux qui me sont chère**

Alid Abdou

Remerciements

Le présent travail a été effectué au sein de l'équipe approximation et stabilité des systèmes non linéaires du laboratoire d'Automatique L.A.T. à l'université de Tlemcen, sous la direction du professeur Tayeb BENOUAZ. Qu'il trouve ici mes sincères remerciements pour avoir initié et soutenu mon travail et d'avoir fait preuve d'une patience, et pour la confiance qu'il m'a accordé tout au long de cette thèse, ainsi que pour s'être toujours préoccupé de mon avenir. Quelques lignes ne suffiront évidemment pas à exprimer l'étendue de ma gratitude à leur égard.

J'exprime mes sincères remerciements à Mr. S.M. BOUGUIMA, professeur à l'Université Abou-Bakr Belkaïd – Tlemcen, pour avoir accepté de juger ce travail et pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie Abderrahmane BELGHACHI, professeur à l'Université de Bechar, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et d'avoir accepté de juger ce travail.

J'exprime mes vifs remerciements à Mr Abderrachid HELMAOUI, Professeur à l'Université de Bechar, pour avoir accepté de juger ce travail.

Je tiens également à exprimé tout ma gratitude à Mr Ali CHEKNANE, Maître de Conférence à l'université Amar Telidji – Laghouat, qui a accepté de juger ce travail et pour m'avoir fait l'honneur d'être parmi les examinateurs.

Je remercie mon frère Docteur CHIKHAOUI Djilali pour son soutien incommensurable et sa main toujours tendue pour m'aider tout au long de mes études. Qu'il trouve ici mes remerciements les plus sincères. Je ne pourrais vous remercier assez... que Dieu vous protège.

Je remercie également, ma famille et mes amis, les membres du laboratoire pour leur aide dans la réalisation de ce travail, leur assistance et leur immense soutien moral et affectif pendant toutes ces années.

Enfin, je voudrai également remercier plus profondément Mr ZERGA.A, LADHAM. S, ainsi que toutes les personnes qui ont contribué de près où de loin à la réalisation de ce travail.

Résumé

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle ordinaire est une tâche presque triviale si la fonction définissant l'équation est suffisamment régulière, disons, au voisinage de l'équilibre, et si sa linéarisation en ce point est hyperbolique. Dans ce cas, on sait que l'équation est équivalente à l'équation linéaire obtenue par linéarisation. Par contre, en l'absence de régularité, une question de stabilité se pose : y a-t'il d'autres moyens d'associer à un système non linéaire un système linéaire, dont le comportement asymptotique soit le même? Cette question s'est avérée d'une très grande importance et retient de plus en plus l'attention des physiciens depuis plusieurs années. L'objectif de ce travail inscrit dans la ligne des travaux entrepris par Benouaz et Arino est de contribuer à la réponse à cette question. Ceci a été accompli en examinant la relation entre une nouvelle méthode de linéarisation appelée *dérivée optimale* et la notion de stabilité en particulier *la stabilité asymptotique* de l'équation non linéaire. Pour ce faire, deux parties sont envisagées à savoir : la confrontation et la validation des résultats de l'application de la méthode de dérivation optimale aux modèles physiques. Ces modèles engendrent le phénomène de bifurcation (changement brusque de stabilité et comportement de solution) et ceci à travers une comparaison par rapport aux résultats obtenus en utilisant le code de simulation le plus répondu pour la continuation numérique de bifurcation AUTO2000. Une deuxième partie destinée à l'approfondissement de cette relation pour une classe particulière d'équations non linéaires dont la linéarisé classique présente un centre (elle prédit la stabilité sans avoir des informations sur la stabilité asymptotique). Un résultat très important a été prouvé définissant le lien entre la méthode et la stabilité asymptotique à travers notre étude de la trace de la matrice optimale.

Enfin, le travail se termine par une partie représentant la généralisation de la méthode de linéarisation optimale, suivie d'une application pour l'étude d'un système physique. Une autre partie consacrée à l'application de la méthode dérivée optimale aux systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires modélisant des systèmes non linéaires commandés a été illustré en détail.

Mots-clefs :

Dérivée optimale – Equation différentielle ordinaire non linéaire E.D.O – Analyse de bifurcation – Stabilité locale – Stabilité asymptotique – linéarisation au sens de Fréchet – Linéarisation optimale – Système non linéaire avec commande.

Abstract

The study of the stability of an equilibrium point of an ordinary differential equation is an almost trivial task if the function defining the equation is sufficiently regular near equilibrium, and if its linearization at this point is hyperbolic. In this case, we know that the equation is equivalent to the linear equation obtained by linearization. In the absence of regularity, a question of stability arises: are there other ways to associate a nonlinear system a linear system, whose asymptotic behaviour is the same? This issue has been of great importance and has attracted increasing attention of physicists for many years. The objective of this work included in the line of work undertaken by Benouaz and Arino is to give answer to this question. This was accomplished by examining the relationship between a new method of linearization called *optimal derivative* and the notion of stability in particular the asymptotic stability of nonlinear equation. To do this, both parties are considered namely: a comparison and validation of the results of applying the *optimal derivative* method to study physical models. These models generate the bifurcation phenomena (sudden change in behaviour and solution stability) and this through a comparison with results obtained using the simulation code for numerical continuation of bifurcation AUTO2000. A second part intended to deepen this relationship for a particular class of nonlinear equations whose *classical linearization* present a complex eigenvalues purely imaginary (it predicts stability without information on the asymptotic stability). A very important result was proved in our study establishing the link between the *optimal derivative* method and the *asymptotic stability* of the trace of the matrix optimal.

Finally, the work ends with a party representing the generalization method of optimal linearization, followed by an application to the study of a physical system. Another section on the application of the method derived optimal systems of ordinary differential equations non-linear modelling of nonlinear controlled systems has been illustrated in detail.

Key words:

Optimal derivative – Nonlinear Ordinary differential Equation O.D.E – Bifurcation analysis – Local stability – Asymptotic stability – Freshet linearization – Optimal linearization – Commanded nonlinear system.

Table des matières

Introduction Générale	5
1 Généralités et rappels	16
1.1 Rappels	16
1.1.1 Introduction	16
1.1.2 Notion de stabilité	17
1.1.3 Stabilité globale et stabilité locale	17
1.1.4 Stabilité des solutions	18
1.1.5 Stabilité de l'équilibre	20
1.1.6 Présentation de la stabilité par linéarisation	21
1.1.7 Théorèmes de linéarisation classique	22
1.1.8 Classification topologique des points d'équilibres	23
1.1.9 Equivalence topologique	26
1.1.10 Méthode directe de Lyapunov	31
1.1.11 Théorème de stabilité par la méthode directe	32
1.1.12 Présentation de la méthode de dérivation optimale	33
1.1.13 Critère de Routh-Hurwitz	42
1.1.14 Présentation du code de simulation Auto2000	45
1.2 Lien entre les résultats obtenus dans le cadre du magistère et la continuation numérique en utilisant le logiciel AUTO2000	50

2	Comparaison entre Méthode de dérivation optimale, Méthode de continuation Numérique (Auto2000)	53
2.1	Introduction	53
2.2	Problématique	54
2.3	Application du critère de Routh Hurwitz	55
2.4	Application de la méthode de dérivation optimale	57
2.4.1	Comparaison	69
2.5	Application du logiciel Auto2000	70
2.5.1	Construction du diagramme de bifurcation	70
2.5.2	Analyse de bifurcation	72
2.5.3	Interprétation	73
2.5.4	Conclusion	80
3	Relation entre la dérivée optimale et la Stabilité Asymptotique	83
3.1	Introduction	83
3.2	Idée du problème	85
3.3	Dérivée optimale	86
3.4	La dérivée optimale et la stabilité asymptotique	88
3.4.1	Cas scalaire	88
3.4.2	Cas Vectoriel	89
3.5	Application	90
3.6	Perturbation de $DF(0)$	97
3.6.1	Estimation de la trace de $r(A)$	100
3.7	Analyse de Bifurcation	101
3.8	Conclusion	105
4	Applications	108
4.1	Application de la généralisation de Linéarisation Optimale d'une Equation Différentielle Ordinaire Non linéaire	108

4.1.1	introduction	108
4.1.2	Linéarisation optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire	110
4.1.3	Méthode de généralisation de la linéarisation optimale	112
4.1.4	Application	120
4.2	Application aux systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires avec commande	129
4.2.1	Introduction	129
4.2.2	Approximation linéaire d'un système commandé	132
4.2.3	Méthode de dérivation optimale pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires commandés	132
4.2.4	Application	138
	Conclusion Générale	156
	ANNEXE	160

INTRODUCTION GENERALE

Introduction Générale

Note historique

Lorsque nous voulons prédire ou décrire un phénomène physique concret, nous pouvons généralement passer par un modèle analytique où les différentes grandeurs sont exprimées par des indéterminées (valeurs abstraites) et les lois de la physique par des fonctions, dans la mesure où elles sont connues (le cas échéant, nous pouvons faire une hypothèse et la tester). En mettant en équation un phénomène physique, nous traduisons la réalité en une expérience mathématique, virtuelle, selon certaines règles. Par ailleurs, les équations différentielles représentent une bonne candidate pour la description de ce phénomène, depuis son invention au 17^{ème} siècle. Ces équations font partie des concepts qui assurent remarquablement la relation entre les mathématiques et les domaines de la science.

L'étude de ces équations est un domaine mathématique qui historiquement a fait l'objet de nombreuses recherches, et continue cependant à marquer l'actualité, par le fait qu'elle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique, la physique et plus récemment la biologie et l'électronique. Des spécialités où de nombreux "modèles" conduisent à des équations du même type. Il convient de souligner que la plupart de ces équations sont globalement de nature non-linéaire. Du fait que la description d'un système, à partir des lois régissant son fonctionnement, conduit souvent à un modèle non linéaire, la manipulation peut se révéler complexe. De ce fait il n'existe pas, en l'état actuel des choses, une théorie d'ensemble des équations non-linéaires. Pour ce faire, des calculs approchés basés sur la méthode des petites perturbations, des méthodes de linéarisation...etc, sont effectués afin de décrire ces phénomènes, sur lesquels on dispose souvent de très peu d'information. A partir de tels calculs, il a été déduit des conjectures que les chercheurs s'efforceront par la suite de démontrer. Cette démarche s'est révélée particulièrement féconde.

Toutefois, dans de nombreux cas, il peut s'avérer que plusieurs systèmes peuvent admettre un domaine de comportement linéaire, la linéarité étant toujours une approximation de la réalité.

Dès lors, les méthodes de linéarisation jouent un rôle important dans l'étude des équations différentielles ordinaires non linéaires, dont on peut dire que tout système linéaire n'est jamais que le modèle simplifié d'un système non-linéaire que l'on veut ignorer. Bien entendu, un certain nombre de questions propres aux problèmes linéaires peuvent se généraliser aux problèmes non linéaires si, d'une part, les perturbations dues aux non-linéarités sont petites et, d'autre part, à la structure des problèmes linéarisés correspondants qui introduit assez de régularité.

C'est pourquoi, on parvient à rester dans le domaine d'application du modèle linéaire qui est séduisant par sa simplicité dans les calculs et, pour lequel la disponibilité d'une théorie relativement complète permet de résoudre totalement les équations linéaires. Cette théorie est en fait une branche de l'algèbre linéaire. Elle est, par ailleurs, utile en première approximation dans la résolution de problèmes non-linéaires et permet, entre autres, d'étudier la stabilité de l'équilibre ainsi que le type topologique des points singuliers des champs de vecteurs dans le cas générique.

Il est alors important de noter que l'étude de la stabilité d'un système non-linéaire est menée sur le système linéarisé, dont le problème de stabilité revêt une importance évidente. En effet, en partant de l'hypothèse selon laquelle la stabilité d'un système constitue en principe une garantie qu'une perturbation ne conduira pas à une catastrophe [1].

Il s'agit donc d'un renseignement important. Mais, généralement, il n'existe pas une définition absolue de la stabilité. Elle a évolué de façon continue historiquement, et elle a toujours été ajustée aux exigences spécifiques à des problèmes particuliers. Donc, il convient de souligner, en premier lieu, que le concept est relatif et dépend du système de référence employé[2].

Les systèmes d'équations différentielles paramétrées peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un équilibre, un cycle limite. . .) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre (l'attracteur du système était un équilibre et devient un cycle par exemple). Ce changement d'état qualitatif est une

bifurcation et la valeur du paramètre associée est appelée valeur de bifurcation. Les différentes bifurcations sont répertoriées en fonction de leurs caractéristiques mathématiques intrinsèques puis en fonction des changements qu'elles font apparaître dans le comportement du système. On distingue ainsi les bifurcations locales, dont les méthodes de linéarisation si elles existent alors elle jouent un rôle très important dans la théorie de leur analyse et identification au voisinage des points singuliers (diagramme de bifurcation, analyse de stabilité, point critique de bifurcation, type de bifurcation). De ce fait, la question de stabilité constitue une démarche importante pour la description et l'étude des systèmes dynamiques.

Afin d'élucider cette question générale de l'analyse de stabilité qui reste complexe, il y a lieu de noter que les premières fondations rigoureuses du problème général de la stabilité datent de la fin du siècle dernier. Ces fondations sont issues de la mécanique céleste dont les travaux de Routh (1884) [3], Thomson (1879), Joukovsky (1882) ne retenaient des équations différentielles que leurs approximations linéaires au premier ordre tout en reconnaissant que le procédé n'était pas rigoureux, et sans en proposer aucune justification. Cependant l'étude de la stabilité du système non linéaire était alors menée sur le système linéarisé.

S'inspirant de ces propositions et du théorème de Lagrange [4] sur la stabilité de l'équilibre dans le cas où il y aurait une fonction de force. Un apport majeur de Lyapunov et simultanément, de Poincaré, a été de fournir des conditions de validité de cette approximation, basée sur les propriétés des solutions du modèle linéarisé. Cette méthode permet de conclure localement sans avoir à donner de renseignements quantitatifs.

En fait, depuis l'apparition du célèbre mémoire de Lyapunov [5] " Problème général de la stabilité du mouvement " en (1892) justifiant et étendant les propriétés locales déduites du modèle linéarisé. L'un des résultats principaux est la première méthode de Lyapunov : si l'origine est asymptotiquement stable pour le système linéarisé alors il est localement asymptotiquement stable pour le système non linéaire. Cependant elle ne donne aucun renseignement quantitatif sur le domaine de stabilité asymptotique. Cette

lacune fut contournée par l'introduction des célèbres fonctions de Lyapunov: c'est la seconde méthode de Lyapunov. Plusieurs définitions et études ont été menées: certaines lui sont équivalentes tandis que d'autres lui sont différentes dans certains cas particuliers. Enfin, sans la contredire, ont pour intérêt de la préciser. On cite parmi eux I. Milkin (1952), Hahn (1963), Lasalle et Lefschetz (1961), etc. Cependant, la détermination d'une fonction de Lyapunov constitue une difficulté majeure.

Plusieurs méthodes de recherche de cette fonction ont été proposées, méthode du gradient variable Schultz et Gibson (1962), Zoubov (1957); à partir des formes quadratiques Aizerman et Gantmacher (1964),....etc.

Exemple 1 Cas où la dérivée est nulle au point $(0, 0)$, présence de valeur propre double nulle [15].

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{x^4}{x^2 + y^2} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{y^4}{x^2 + y^2} \end{cases}, (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \quad (0.1)$$

La dérivée étant nulle au point $(0, 0)$, on ne peut déduire le comportement de la solution de l'équation non-linéaire de celle de la linéarisation en ce point (en plus présence de valeur propre double nulle).

Exemple 2 L'équilibre est un centre (valeurs propres purement imaginaires)

Considérons le système d'équations différentielles ordinaire non linéaires

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \frac{dy}{dt} = -x - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (0.2)$$

Le système linéaire classique possède une paire de valeur propre purement imaginaire alors le point d'équilibre est un centre (stable) mais on ne peut rien conclure sur la stabilité asymptotique.

Contribution

Parfois nous sentons le désir ardent pour aller apprendre les mathématiques derrière des

images simulées par les moyens informatiques, et voir comment les idées mathématiques peuvent être appliquées aux problèmes de la science (physique, biologie...etc). Ainsi, la science aussi bien que les mathématiques auront besoin d'être expliquées. Mais, ce devrait être important, et il peut être instructif de voir les rapports qui existent entre les mathématiques et les différents champs de la science. En particulier, les liens avec l'analyse numérique qui sont continus, et basés sur l'analyse des équations différentielles ordinaires non linéaires par des techniques d'approximation et de linéarisation. Le but étant de construire des algorithmes numériques utilisés de plus en plus systématiquement, en se servant de l'ordinateur comme outil de calcul. Le travail présenté ici se veut une contribution à l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires et, plus précisément les équations différentielles ordinaires non linéaires.

Notre contribution se divise en quatre objectifs à savoir :

1 □ L'étude d'une équation différentielle dépendant d'un paramètre:

Vu le besoin croissant d'outils numériques de calcul et de visualisation pour l'étude des systèmes dynamiques qui apparaissent dans des applications physiques importantes modélisées par des systèmes d'équations différentielles ordinaires compliquées. Ces outils de calcul doivent permettre d'aller bien au-delà de la simple simulation: par exemple ils identifient et classifient d'importantes bifurcations.

Notre objectif dans le cas où l'équation change de stabilité, l'application de la méthode de dérivation optimale aux modèles physiques qui engendrent le phénomène de bifurcation. Ainsi l'exigence de maîtriser un outil numérique pour la continuation des bifurcations des équations différentielles ordinaires, nous a suscité à faire des simulations en utilisant le logiciel le plus répandu pour l'étude de ce type de problème "Auto2000" Notre objectif est d'utiliser la méthode de dérivation optimale pour l'étude de la stabilité de certaines classes de modèles physiques en vue de tester et de montrer les potentialités de cette technique, pour la description du comportement réel de ces modèles, qui fournissent des comportements complexes d'une grande séduction.

2 □ L'approfondissement de la relation entre la stabilité asymptotique et la

dérivée optimale :

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle ordinaire est une tâche presque triviale si la fonction F qui définit l'équation est suffisamment régulière, disons C^1 , au voisinage de l'équilibre, et si sa linéarisation en ce point est hyperbolique. Dans ce cas, on sait que l'équation est équivalente à l'équation linéarisée, dans le sens, qu'il existe un difféomorphisme local qui transforme les trajectoires voisines du point d'équilibre en celles voisines de zéro de l'équation linéaire. Par contre, la tâche est tout autre en l'absence de régularité, ou si le point d'équilibre est un centre. Concentrons nous sur le cas non régulier. Dans ce cas, on ne peut pas dériver l'équation et on ne peut donc pas étudier l'équation linéarisée. Une question naturelle se pose alors: y a-t'il d'autres moyens d'associer à l'équation non linéaire une équation linéaire, dont le comportement asymptotique soit le même?

Une deuxième question se pose également: quel est alors le lien entre la stabilité asymptotique de l'équation non linéaire et la dérivée optimale? Cette question n'est résolue que dans le cas scalaire [6], [7]. Notre contribution dans le cadre de la réponse à cette question réside dans le chapitre III. Dont le but est de prouver un résultat important pour l'étudier une forme particulière d'équations dont la linéarisé au sens de Fréchet présente un centre (valeurs propres purement imaginaires).

3 □ Généralisation de linéarisation optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire

En effet, la linéarisation la plus classique est celle déterminée par la dérivée au sens de Fréchet en ces points. Mais, cette technique ne permet pas de répondre par exemple, au cas où la fonction n'est pas assez régulière et celui où elle est nulle. L'existence d'écueils importants à la bonne utilisation de cette méthode, a suscité plusieurs recherches pour établir d'autres techniques de linéarisation permettant d'approcher mieux les systèmes non linéaires; l'une d'elles, appelée *Linéarisation optimale*, est basée sur le principe de moindres contraintes de Gauss, a été introduite à l'origine par Vujanovic (1973), [8] initialement pour l'étude des vibrations non linéaires. Récemment, elle a été utilisée par

Jordan et al., [10], [9][11] dans le cas du transfert de chaleur et de la linéarisation des équations d'états non linéaires. Dans la même alternative, on se propose de donner une généralisation de linéarisation optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire en se basant sur le principe d'approximation au sens des moindres carrés.

4 □ Application de la méthode de dérivation optimale aux systèmes d'équations différentielles commandés

Vu l'importance du système linéarisé des systèmes non linéaires avec commande plus particulièrement pour l'étude de la contrôlabilité et l'observabilité. L'intérêt qu'il présente actuellement est de mettre à la disposition de l'ingénieur automaticien en particulier dont le but principal est de réaliser pratiquement cette linéarisation dans le domaine fréquentiel.

Nous allons opter pour l'application de la méthode de dérivation optimale aux trois exemples représentant des modèles de circuits électronique non linéaire, dont un contient une jonction de Josephson qui sont utilisés pour illustrer l'application de cette nouvelle méthode aux problèmes avec commande.

La thèse est structurée selon le plan suivant :

Dans le premier chapitre, Nous commençons par rappeler le concept de la stabilité selon Lyapunov ainsi que la stabilité asymptotique. Nous donnerons les approches suivies afin d'élaborer l'équivalence entre les modèles non linéaires et leur linéarisés tangents ainsi que la seconde méthode de Lyapunov. Nous présentons ensuite le critère de Routh-Hurwitz qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité d'une équation polynômiale. Par la suite nous présentons le logiciel de continuation numérique de bifurcation des équations différentielles ordinaires Auto2000 afin de mieux saisir la comparaison faite dans le chapitre suivant par rapport aux résultats obtenus dans le cadre du travail de magister.

Enfin, nous présentons l'approximation au sens des moindres carrés des systèmes d'équations différentielles non linéaires proposée par Benouaz et Arino [12],[13], [14], [15], [16], [?], dite dérivée optimale. Nous citerons dans ce cadre les propriétés les plus importantes.

Un deuxième chapitre, présente une étude comparaison et confrontation des résultats obtenus dans le cadre du magister pour ce faire nous allons: Commencé par une analyse analytique en utilisant le critère de *Routh Hurwitz* , afin de localiser les points critiques représentant les limites de stabilité et le changement de comportement accompagnant le phénomène de bifurcation. Ensuite analyse en utilisant la méthode de dérivation optimale est proposée, une présentation des résultats relatifs a ces propriétés en particulier celles liées à l'ordre de la méthode. ces résultats seront comparés puis confronté en utilisant un nouveau logiciel de continuation de bifurcation pour les équations différentielles ordinaires Auto 2000, appliqué à ce modèle permet de faire: l'analyse de stabilité, tracé le diagramme de bifurcation (point critique de bifurcation). Cette application va nous permettre de bien saisir la comparaison et d'illustrer les performances de la technique de dérivation optimale pour l'étude de problèmes présentant le phénomène de bifurcation.

Dans le troisième chapitre, en supposant les conditions donnant a priori, l'existence, l'unicité et la convergence réunies, une étude des propriétés par rapport à l'équation non-linéaire a été faite [6], [15] concernant particulièrement l'ordre de l'approximation et son lien avec la stabilité asymptotique. Ainsi, concernant l'ordre, l'approximation de dérivation optimale est d'ordre 2 au moins en fonction de la donnée initiale

$$\|x(t) - \tilde{y}(t)\| \leq o(\|x_0\|^2)$$

et en général dépend de la non linéarité. $x(t)$ représente la solution de l'équation non linéaire et $\tilde{y}(t)$ celle donnée après la dérivée optimale. Concernant la stabilité, il à été prouvé que dans le cas scalaire, la dérivée optimale, permet la construction d'une fonction de Lyapunov pour l'équation non linéaire. dans le cas vectoriel, une étude détaillée sur le lien entre la dérivée optimale et la stabilité asymptotique d'une équation non-linéaire dont la linéarisée classique au point d'équilibre présente un centre (c'est-à-dire spectre à valeurs propres purement imaginaire) à été proposée pour des système qui peuvent

s'écrire sous la forme suivante

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = Mx + G(x), x(0) = x_0 \quad (0.3)$$

Nous utilisons le logiciel de continuation numérique des bifurcation utilisé AUTO2000 [17], afin d'analyser la stabilité et les branches de solutions périodiques au voisinage du point d'équilibre non hyperbolique à l'origine $(0,0)$, dont la linéarisé classique possède une paire de valeurs propres purement imaginaire. Les résultats obtenus par le biais de cette analyse de bifurcation AUTO2000 vont permettre de confronter et valider ceux obtenus par la méthode de dérivation optimale.

Enfin, le dernier chapitre est consacré aux applications, il comporte deux parties à savoir :

- 1- La présentation de la généralisation de la méthode de linéarisation optimale, suivie par une application pour l'étude d'un système physique qui modélise un circuit électronique.
- 2- On s'intéresse , dans une deuxième partie à l'étude des systèmes physiques modélisant des circuits électroniques non linéaires avec source d'excitation, c'est-à-dire, une commande. Ces systèmes sont en général décrits par un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, u) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (0.4)$$

Nous allons utilisé la méthode de dérivation optimale pour l'étude de ces équations non linéaires. Notre but dans cette étude est d'associer un système optimal définissant une application linéaire à un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires avec excitation. il y a lieu de noter que le cas des systèmes en régime libre ($u(t) = 0$) à été déjà traité.

Les travaux présentés ici ont été exposés dans des articles : un article "*On the Relationship Between the Optimal Derivative and Asymptotic Stability*" a été publié dans "African

Diaspora Journal of Mathematics”, un deuxième ” *Computational Approach of the Optimal Linearization of the Nonlinear O.D.E: Application to Nonlinear Electronic Circuit* ” a été publié dans ” International Journal of Computers and Electrical Engineering (I.J.C.E.E.) ”. Des résultats préliminaires ont fait l’objet de communications dans des conférences internationales à savoir: ” Analysis of bifurcation and Stability problems of non linear differential equations using continuation package Auto 2000 □ ” Application de La Méthode de Dérivation Optimale pour l’Etude de la Stabilité des Problèmes avec Bifurcation » dans *International Conférence on Electrical /Electronic Engineering Communication & Physical Systems.* ” Analysis of Bifurcation and stability problems of nonlinear differential equations using continuation package Auto 2000 □ dans *World Conference on Differential Equations and Applications.* ” Etude de la stabilité d’une E.D.O Non Linéaire, cas d’un Centre ” dans *Conférence Internationale sur les Systèmes de Télécommunications, d’Electronique Médicale et d’Automatique.*

PREMIER CHAPITRE

GENERALITES ET RAPPELS

Chapitre 1

Généralités et rappels

1.1 Rappels

1.1.1 Introduction

Un des aspects qualitatifs les plus importants des systèmes dynamiques est leur comportement asymptotique, c'est-à-dire le comportement des solutions lorsque le temps tend vers l'infini. De ce fait ce concept qui est directement lié à la stabilité, a fait l'objet d'une recherche abondante depuis la fin du *XIX^{ème}* siècle. Son importance réside dans le fait que la notion de la stabilité est commune à plusieurs domaines, d'une part, et d'autre part, l'analyse de la stabilité est une étape nécessaire pour l'étude du fonctionnement des systèmes (physiques, mécaniques, électroniques...etc.). Pour cette raison il est indispensable d'introduire dans la première partie de ce chapitre les concepts de base de la notion de stabilité ainsi que le critère fondamental de l'analyse de la stabilité Routh-Hurwitz.

La seconde partie du chapitre est consacrée à la présentation d'une nouvelle technique de linéarisation introduite par Benouaz et Arino appelée "dérivée optimale", ainsi que ses propriétés principales. Celle-ci est vue comme une alternative à la dérivée au sens de Fréchet, indispensable dans le cas d'équations comportant des fonctions non régulières et en général non dérivables.

Une dernière partie est réservée à la présentation d'un outil numérique très important pour l'analyse et la continuation de bifurcation (point, cycle. . .) AUTO2000. C'est le logiciel de continuation le plus utilisé actuellement du fait qu'il permet de continuer des bifurcations face auxquelles plusieurs logiciels de continuations sont impuissants [17].

1.1.2 Notion de stabilité

Une question importante est de connaître le comportement des trajectoires initialement voisines de l'équilibre. Pour cela on définit la notion de stabilité d'un point d'équilibre. La stabilité est un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires. C'est un concept qui a donné lieu à différentes terminologies qui vont être brièvement rappelées afin de préciser dans quelle acception le terme stabilité est utilisé dans cette thèse.

1.1.3 Stabilité globale et stabilité locale

Si on compare les comportements possibles dans le cas des systèmes linéaires et non linéaires, on s'aperçoit que les comportements dynamiques des systèmes non linéaires sont beaucoup plus compliqués, avec un éventail beaucoup plus grand. Par exemple, parler de la stabilité de l'équilibre ou de la stabilité du système revient au même dans le cas linéaire, puisqu'il est possible de confondre la stabilité locale et la stabilité globale. Par contre, dans le cas d'un système non linéaire l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre sous la forme la plus complète consiste non seulement à déterminer la nature du point d'équilibre ou sa stabilité asymptotique mais aussi à déterminer le domaine d'attraction, c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales dont les solutions convergent vers l'équilibre. Ainsi, on parle de la stabilité ou de l'instabilité locale ou globale, la stabilité locale signifiant la convergence des solutions avec des conditions initiales proches tandis que l'instabilité globale signifie la divergence de solutions en dehors de toute limite.

1.1.4 Stabilité des solutions

Considérons le cas général d'un système d'équations différentielles autonomes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n, F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; notons que le problème (1.1) est un problème aux valeurs initiales, la solution qui passe par x_0 au temps t_0 s'écrit donc $x(t; x_0, t_0)$ avec $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$. Cette solution étant déterministe à cause des théorèmes d'existence et d'unicité. L'équation (1.1) modélise un très grand nombre de phénomènes dans des domaines très variés. Physiquement parlant, la qualité d'un système qui revient à son état d'équilibre après avoir subi une perturbation de cet état. Pour un système en mouvement ou en oscillation, la stabilité nécessite en général des forces de rappel. Si les forces de rappel d'un système oscillant, électrique ou mécanique, tel qu'un servomécanisme, ne sont pas correctement synchronisées et si l'amortissement est insuffisant, ces forces ne peuvent pas accomplir leur fonction et rendent le système instable et incontrôlable. Cette définition, qui est claire pour la majorité des systèmes physiques, apparaît grossière d'un point de vue mathématique et pose une question importante : comment juger les solutions qui sont à la limite de la stabilité ? Pour répondre à cette question, nous allons introduire la définition exacte de la stabilité selon Lyapunov, en considérant que \tilde{x}_0 est une perturbation de x_0 , $x(t, \tilde{x}_0)$ étant par conséquent la solution perturbée.

Définition 1.1 (Stabilité au sens de Lyapunov)

La solution $x(t; x_0)$ de (1.1) est stable si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < \delta \implies \|x(t; x_0) - x(t; \tilde{x}_0)\| < \epsilon, \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Puisque la solution à tout instant dépend d'une manière continue des conditions initiales, cette définition suggère que, avec une perturbation suffisamment petite, les solutions restent proches dans tout le futur. Cette définition a un aspect local et s'intéresse

au comportement au voisinage de l'équilibre sans prédire à priori de quel ordre de grandeur δ peut être choisi (Figure (1.1)). Si de plus, la solution perturbée converge vers la solution non perturbée, de manière qu'elles deviennent confondues quand le temps tend vers l'infini, on parle d'une notion de stabilité plus forte (stabilité asymptotique).

Définition 1.2 (Stabilité asymptotique)

La solution $x(t, x_0)$ de (1.1) est asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe $r(x_0) > 0$ tel que $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < r(x_0) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x_0) - x(t; \tilde{x}_0)\| = 0$ quand $t \rightarrow \infty$. (Figure (1.1))

Il est clair que cette définition a aussi un aspect local, du fait que le choix de r ne peut se faire que localement. Notons que la notion de stabilité ou d'instabilité d'un système n'est pas adéquate, on parle alors de la stabilité de solutions, en raison du fait que des solutions stables et/ou instables peuvent exister simultanément pour un système donné. La figure 1.1 présente une représentation graphique de la notion de stabilité et la stabilité asymptotique.

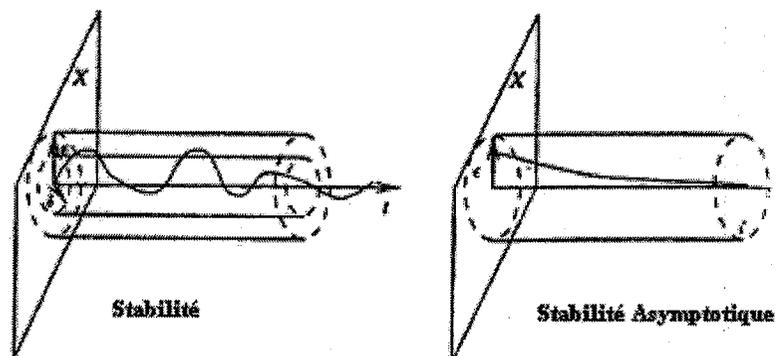


Figure 1.1: Stabilité et stabilité asymptotique

1.1.5 Stabilité de l'équilibre

Alors il est indispensable de définir la notion de point d'équilibre. Les points fixes (points d'équilibres) jouent un rôle capital dans l'étude des systèmes dynamiques *Henri Poincaré (1854-1912)* montra que pour caractériser un système dynamique à plusieurs variables, il n'est pas nécessaire de calculer les solutions détaillées; il suffit en effet de connaître les points fixes (points d'équilibres) et leurs stabilité. Ce résultat de grande importance simplifie considérablement l'étude des systèmes non-linéaires au voisinage de ces points. Alors pour déterminer la stabilité d'un point équilibre, il faut étudier le comportement des solutions dans un petit voisinage de celui-ci.

Définition 1.3 *L'espace des phases d'un système $\dot{x} = F(x)$ est l'ensemble ouvert D où évolue x .*

Définition 1.4 *Un point x_{eq} est un point d'équilibre, ou un point singulier du système (1.1) si $F(x_{eq}) = 0$. On considère toujours l'équilibre en 0. Pour le cas général, il suffit de faire une translation par un simple changement de variable $x \leftarrow x - x_{eq}$.*

Un système non linéaire quelconque peut avoir plusieurs positions d'équilibre qui peuvent être stables ou instables. Dans certaines situations, on exige la *stabilité exponentielle* de l'équilibre qui est plus forte que la stabilité asymptotique et est définie comme suit :

Définition 1.5 Le point d'équilibre x_{eq} est dit exponentiellement stable s'il existe des constantes positives α, γ, r

Definition 1 telles que $\|x_0 - x_{eq}\| < r \implies \|x(t, x_0) - x_{eq}\| \leq \gamma \exp(-\alpha t) \|x_0 - x_{eq}\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Dans ce cas, on s'intéresse le plus souvent à la détermination de α . Un exemple simple de la stabilité exponentielle est donné par un système linéaire possédant des valeurs propres à parties réelles strictement négatives. L'équilibre est asymptotiquement stable et, de plus, il est exponentiellement stable. Alors Si le système est asymptotiquement stable quel que soit le vecteur d'état initial ($x(t=0)$) alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (ou exponentiellement) stable.

1.1.6 Présentation de la stabilité par linéarisation

On sait déjà que l'étude de la stabilité dans le cas des systèmes non linéaires pose un problème très difficile. En effet, en raison de leurs comportements assez compliqués, les méthodes utilisées dans le cas linéaire ne sont plus applicables. Cependant, Lyapunov et autres ont remarqué par l'étude des trajectoires des courbes intégrales au voisinage de l'équilibre que, dans la majorité des cas, les points d'équilibre des systèmes non linéaires peuvent être ramenés aux mêmes types de points d'équilibre des systèmes linéaires. Donc l'étude d'un système linéaire est aisée puisqu'elle se résout dans un critère purement algébrique. De ce fait, la méthode la plus classique pour la détermination de la stabilité non linéaire du point d'équilibre se réduit à la linéarisation du système (1.1) en ce point (point d'équilibre) à l'aide d'un développement de Taylor

$$\frac{dx}{dt} = DF(x_{eq})x + O(|x|^2). \quad (1.2)$$

Puis, pour répondre aux questions de stabilité, il convient de considérer le système linéaire associé à (1.1)

$$\frac{dx}{dt} = DF(x_{eq})x. \quad (1.3)$$

Notons que $DF(x_{eq})$ est la matrice Jacobienne de F au point x_{eq}

$$DF(x_{eq}) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x_{eq}}. \quad (1.4)$$

La détermination de la stabilité du point d'équilibre s'effectue donc en deux étapes :

- La première consiste à déterminer la stabilité de $x = 0$, équilibre de (1.3), partant du fait que l'on sait déjà déterminer la stabilité linéaire à partir des valeurs propres de $DF(x_e)$.
- La deuxième étape, réside dans la manière de déterminer la stabilité de x_e à partir de

celle de $x = 0$. Autrement dit, sous quelles conditions les systèmes (1.1) et (1.3) sont-ils équivalents?

1.1.7 Théorèmes de linéarisation classique

— Si toutes les valeurs propres de $DF(x_{eq})$ sont à partie réelle strictement négative, le système non linéaire (1.1) est asymptotiquement stable.

— Si au moins une valeur propre est à partie réelle strictement supérieure à 0, alors le système non linéaire est instable.

— Si le système linéarisé est stable sans être asymptotiquement stable; c'est le cas critique où on ne peut rien conclure. Les termes non linéaires influent sur les propriétés de la stabilité. Dans ce cas, on fait appel à d'autres procédés pour l'étude de la stabilité non linéaire.

Notons que la linéarisation classique ne permet d'étudier que la stabilité locale "*stabilité du point d'équilibre*" et elle ne donne aucun renseignement sur le domaine d'attraction.

Une autre approche connue sous le nom de théorème de Lyapunov [1899] (méthode indirecte de Lyapunov) cette méthode utilise la linéarisation. Alors elle consiste à utiliser linéarisation du système dynamique défini sous les mêmes conditions au voisinage d'un point d'équilibre. Ceci conduit au théorème suivant :

Théorème 1.1 (Théorème de stabilité en première approximation) Méthode indirecte de Lyapunov

Considérons le système d'équation différentielles (1.1), soit $x_{eq} = 0$ un point d'équilibre de F . Où F est continue et différentiable dans un voisinage $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'origine. La linéarisation du système (1.1) autour du point d'équilibre donne le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

avec la matrice jacobienne $A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_{eq}}$, alors si :

- La partie réelle des valeurs propres du système linéaire à partie réelle sont strictement négative $\text{Rél}(\lambda) < 0$, alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable (λ valeurs propres de A).

Theorem 2 - Si la linéarisé possède des valeurs propres à partie réelle strictement positive

1.1.8 Classification topologique des points d'équilibres

Un flot bidimensionnel vérifie l'équation différentielle

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Désignons par A la matrice du système ci-dessus (1.6). Le polynôme caractéristique de ce système s'écrit

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \quad (1.7)$$

Son discriminant est $\Delta = \text{tr}(A)^2 - 4\det(A)$. Les différentes possibilités conduisent à définir les cas suivants:

* **Point selle (Col)**: Si $\det(A) < 0$, alors les valeurs propres de A sont réelles et de signes opposés et le flot est hyperbolique.. On dit que les courbes intégrales forment un col. Notons $\lambda < 0 < \mu$, les valeurs propres de A . Les orbites suivent l'hyperbole $x_1 = x_{01}(x_2/x_{02})^{\mu/\lambda}$. L'axe $x = 0$ est la variété instable. L'axe $y = 0$ est la variété stable (Figure 1.2.b).

* **Noeuds (Nod)**: Si $\det(A) > 0$ et si $\text{tr}(A)^2 \geq 4\det(A)$ alors les valeurs propres de A sont réelles et de même signe. On dit qu'il s'agit d'un noeud qui est attractif ou stable si $\text{tr}(A) < 0$ et répulsif ou instable si $\text{tr}(A) > 0$. Le noeud est dit propre lorsque A est un multiple de l'identité, et impropre dans le cas contraire (Figure 1.2.a).

* **Foyers (Focus)**: Si $\text{tr}(A) \neq 0$ et si $\text{tr}(A)^2 < 4\det(A)$ alors les valeurs propres de A sont complexes de partie réelle $\text{tr}(A)/2$ et de partie imaginaire non nulle (Figure

1.2.c). On dit que les courbes forment un foyer attractif ou stable si $tr(A) < 0$ et répulsif ou instable si $tr(A) > 0$.

* **Centres** : Si $\det(A) < 0$ et $tr(A) = 0$ et alors les valeurs propres de A sont imaginaires pures $\pm \lambda i$, $\lambda > 0$. Les courbes forment un centre. Les orbites sont les cercles de centre O , périodiques de même période $\frac{2\pi}{\lambda}$ (Figure 1.2.d).

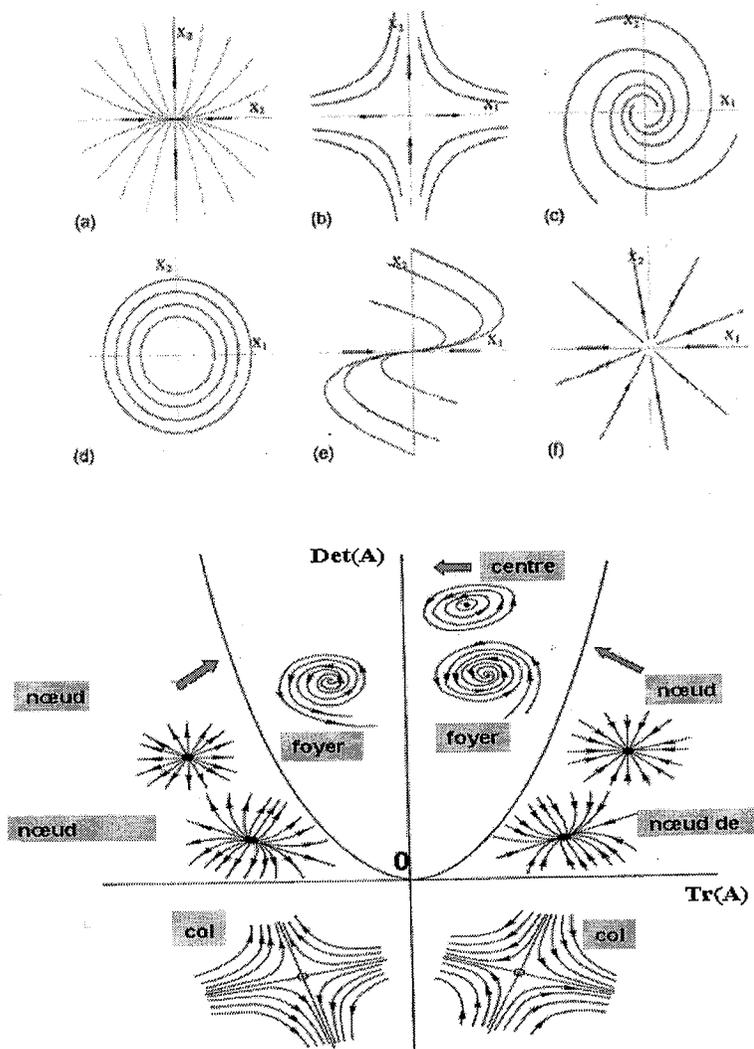


Figure 1.2: Classification topologique des points d'équilibre (points singuliers)

Lorsque A est une matrice non dégénérée, c'est à dire lorsque A n'a pas de valeurs propres nulles, on dit que le point singulier x_{eq} est non dégénéré. Cette notion correspond au cas où l'équation aux variations admet l'origine comme unique point singulier. On parle aussi de point singulier *hyperbolique* si A n'a pas de valeurs propres purement imaginaires. Notons qu'une matrice 'générique' n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire. Le linéarisé tangent d'un point singulier *hyperbolique* correspond donc au cas générique

Remarque 1.1 *les équations du second ordre ont quatre espèces de points singuliers : les cols, les noeuds, les foyers et les cols-foyers. Il serait facile d'étendre cette théorie à des équations d'ordre n . Remarquons seulement que, quand on fait croître n , le nombre des espèces de points singuliers croît très rapidement. Nous avons vu, en effet, qu'il était de 3 pour $n = 1$, de 4 pour $n = 2$; on verrait sans peine qu'il est de 8 pour $n = 3$ et de 10 pour $n = 4$.*

Ainsi, en dimension trois, la matrice jacobienne possède trois valeurs propres. Les deux premières valeurs propres réelles ou complexes conjuguées déterminent la stabilité d'un point fixe (vis-à-vis de la dynamique lente). L'attractivité d'un point fixe (vis-à-vis de la dynamique rapide) dépend du signe de la troisième valeur propre réelle.

On peut ainsi différencier quatre types génériques de points fixes :

les points fixes stables attractifs, les points fixes stables répulsifs, les points fixes instables attractifs, les points fixes instables répulsifs.

Nature des points singuliers (Notion d'attracteur)

La question est de savoir si un point singulier est un attracteur ou non. Ceci signifie que l'on s'interroge pour savoir si une trajectoire de phase démarrant dans un voisinage de ce point, sera attirée vers ce point (attracteur) (cycle limite) ou divergera. Si la trajectoire converge vers le point singulier celui-ci est appelé attracteur asymptotiquement stable. par contre si la trajectoire diverge du point, ce point est instable, si la trajectoire tourne autour du point on dit qu'il est juste stable

1.1.9 Equivalence topologique

Equivalence locale de flots

Nous avons vu que le comportement asymptotique du système non linéaire au voisinage d'un équilibre hyperbolique peut être déduit par comparaison avec le système linéarisé. A ce niveau, on se demande comment peut-on justifier cette comparaison? En d'autres termes, comment peut-on établir une équivalence au voisinage de l'équilibre entre le système linéarisé et le système non linéaire, sachant que ce dernier présente une dynamique beaucoup plus compliquée? D'une manière générale, afin de comparer les flots pour des champs de vecteurs linéaires ou non linéaires, il est évident de définir pour toute classification, une relation d'équivalence pour laquelle il existe une application qui prend pour tout temps, le flot de chacun des champs de vecteurs en le flot de l'autre. Nous commençons par la définition suivante

Définition 1.4 *Soient deux systèmes d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (1.8)$$

et

$$\frac{dx}{dt} = G(x) \quad (1.9)$$

soit $\varphi(t, x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le flot de (1.8) et $\psi(t, x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le flot de (2.7), ces flots sont dit équivalents s'il existe une application bijective $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui transforme le flot $\varphi(t, x_0)$ en le flot $\psi(t, x_0)$ de telle sorte que $h(\varphi(t, x_0)) = \psi(t, h(x_0))$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

Ceci revient à dire que le flot $\varphi(t, x_0)$ se transforme en $\psi(t, x_0)$ lorsqu'on change les coordonnées de h . Il est clair que l'application h doit vérifier certaines propriétés afin de pouvoir garder l'équivalence des flots, le choix de ces propriétés conduisant à plusieurs formes de classification données par des relations d'équivalence différentes dont on définit les plus connues :

Equivalence linéaire: les flots $\varphi(t, x_0)$ et $\psi(t, x_0)$ sont dit linéairement équivalents si l'application $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme linéaire.

Equivalence différentiable: les flots $\varphi(t, x_0)$ et $\psi(t, x_0)$ sont dit différentiablement équivalents si l'application $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme.

Equivalence topologique: les flots $\varphi(t, x_0)$ et $\psi(t, x_0)$ sont dit topologiquement équivalents si l'application $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.

A ce stade, malgré l'intérêt qu'elle présente, l'équivalence linéaire ne nous intéresse pas, du fait qu'elle constitue la forme d'équivalence la plus complète et la plus restrictive et donne une classification très rigoureuse.

Equivalence différentiable à un champ linéaire

Afin d'établir l'équivalence entre le système non linéaire (1.1) et son linéarisé (1.3), la première approche était de choisir l'application h transformant le flot de $F: \varphi(t, x_0)$ en celui de son linéarisé $e^{DF(x_{eq})t}y_0$ pour tout x , avec $x = h(y)$, comme étant un difféomorphisme. Rappelons qu'un difféomorphisme de classe C^r , est une fonction de classe C^r avec une inverse de classe C^r ; si on note par $F^{(r)}$ et $h^{(r)}$ les développements en séries de Taylor de F et h en 0 jusqu'à l'ordre r , et par $\varphi^{(r)}(t, x_0)$ le flot associé au champ $F^{(r)}$, on dit que le champ F est formellement équivalent à $DF(x_{eq})y$ jusqu'à l'ordre r si $\varphi^{(r)}(t, x_0) = h^{(r)}(e^{DF(x_{eq})t}y_0)$ pour tout x, y tels que $x = h(y)$, dans un voisinage de l'origine. Notons que l'équivalence jusqu'à l'ordre r mesure essentiellement la régularité du changement de coordonnées qui transforme le flot du système non linéaire en celui de son linéarisé, puisque l'égalité des développements en série de Taylor a lieu pour toutes les dérivées jusqu'à l'ordre r . La question qui se pose est de savoir sous quelles conditions le flot associé à (1.1) est l'image par difféomorphisme du flot de (1.3). En effet, il est possible de démontrer que le flot non linéaire est différentiablement équivalent au flot de son linéarisé, si les valeurs propres satisfont une condition de non résonance, si $DF(x_{eq})$ n'a pas de résonance d'ordre inférieur ou égal à r , le champ F est r -équivalent à son linéarisé $DF(x_{eq})y$, en particulier, si $DF(x_{eq})$ est non résonante, F est équivalent à $DF(x_{eq})y$.

Si on suppose que les valeurs propres de $DF(x_{eq})$ au voisinage du point d'équilibre sont λ_j avec $1 \leq j \leq n$, la condition de non résonance est donnée par $\lambda_k \neq \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j$ quel que soit le choix de $m_j \geq 0$, avec $\sum_{j=1}^n m_j \geq 2$, dans ce cas l'équation (1.1) peut être transformée en (1.3) par une transformation $x = y + h(y) + \dots$, le pointillé signifiant les termes d'ordres supérieurs. Afin d'interpréter ce résultat, supposons, par exemple, qu'il n'y a pas de résonance pour $m = 2, \dots, r-1$. Pour $m = r$, on trouve une résonance, dans cette situation, les termes 2, 3... jusqu'à $r-1$ peuvent être supprimés de l'équation non linéaire, en revanche le terme résonant r reste. L'équation obtenue par difféomorphisme est non linéaire et est d'ordre r .

Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2x_1 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1^3 + \dots \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + b_1x_2^2 + b_2x_1^2 + b_3x_2x_1 + b_4x_2^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

son linéarisé par la première méthode de Lyapunov est donné par

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \quad (1.11)$$

avec, comme valeurs propres $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -1$; dans ce cas, il existe deux possibilités de résonance: $2m_1 + m_2 = 2$ ou $2m_1 + m_2 = 1$. Il est simple de vérifier que la seule possibilité pour que les conditions $m_j \geq 0$, et $\sum_{j=1}^n m_j \geq 2$ sur les m_j soient vérifiées, correspond à $m_1 = 0$ et $m_2 = 2$; le système équivalent à (1.10) par difféomorphisme est le suivant

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -2y_1 + cy_2^2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

où c est un nombre réel, la solution analytique de (1.12) est donnée par

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{-2t} [-2y_1(0) + ct y_2^2(0)] \\ y_2(t) &= e^{-t} y_2(0) \end{aligned} \quad (1.13)$$

la comparaison du flot de (1.10) à celui de son linéarisé par la première approximation (1.11), revient à comparer à un difféomorphisme près entre le flot de (1.12) et celui du système linéarisé. Les écarts entre les deux solutions notés par δ_1 et δ_2 sont donnés par

$$\delta_1(t) = y_1(t) - x_1(t) = cte^{-2t} y_2^2(0), \delta_2(t) = 0$$

$\delta_1(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini, ce que signifie que l'équation (1.11) a le même comportement asymptotique que son linéarisé malgré qu'on ne peut pas trouver un difféomorphisme qui puisse les rendre équivalents. Ceci montre l'échec de l'équivalence différentiable qui est dû aux problèmes de résonance qui peuvent apparaître même pour des points d'équilibres hyperboliques pour lesquels l'étude de la stabilité se fait par la première approximation. Ce résultat nous permet de conclure que l'équivalence différentiable est très restrictive puisqu'elle donne une classification complète des champs de vecteurs en un point d'équilibre en fonction de leur complexité. L'exemple linéaire suivant montre la restriction de l'équivalence dite différentiable.

Exemple 3 *Considérons les équations scalaires suivantes*

$$\frac{dx}{dt} = -0.1x \quad (1.14)$$

et

$$\frac{dx}{dt} = -x \quad (1.15)$$

d'après la relation $h(\varphi(t, x_0)) = \psi(t, h(x_0))$ citée dans la définition 1.4, il vient

$$h(e^{-0.1t} x_0) = e^{-t} h(x_0) \quad (1.16)$$

En dérivant par rapport à x_0 et en évaluant en $x_0 = 0$, on obtient

$$e^{-0.1t} h'(0) = e^{-t} h'(0) \quad (1.17)$$

Puisque h est inversible, $h'(0)$ doit être différent de 0, ce qui implique dans l'équation (1.17) que $0.1 = 1$ et par conséquent les systèmes (1.14) et (1.15) ne sont pas équivalents sous un difféomorphisme, bien qu'ils aient la même structure d'orbites, car l'origine constitue pour chacun d'eux un point d'équilibre asymptotiquement stable, la seule différence étant la vitesse dont les solutions s'approchent de l'origine. L'autre approche a consisté à effectuer une classification moins précise, moins restrictive et purement qualitative : c'est l'équivalence topologique en renonçant aux difféomorphismes au profit des homéomorphismes.

Equivalence topologique

Définition 1.6 Nous commençons, tout d'abord, par définir ce qu'est un homéomorphisme

Un homéomorphisme de \mathbb{R} est une application bijective continue $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, avec une application inverse continue.

Un théorème remarquable, qui répond à la question posée à propos de la linéarisation classique est le suivant

Théorème 1.2 (Grobman-Hartman)[18]

soit $\dot{x} = F(x)$, $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, un système d'équations différentielles sur \mathbb{R}^n . supposons que $F(0) = 0$ et $A = DF(0)$ n'a pas de valeurs propres à partie réelle nulle. Alors il existe U, V deux voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n et un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ qui envoie les trajectoires de $\dot{x} = F(x)$ sur celles de $\dot{x} = Ax$ en préservant le sens du parcours

Le théorème affirme (sous certaines conditions) que, au voisinage d'un point $x_0 = 0$ tel que $F(x_0) = 0$, le système $\dot{x} = F(x)$ est équivalent au système linéarisé. L'équivalence

s'en écartera davantage. Dans quelques classes de systèmes physiques, la fonction V peut être choisie comme étant l'énergie du système.

1.1.11 Théorème de stabilité par la méthode directe

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Supposons que l'origine est un point singulier de (1.18) et posons $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 définie dans un voisinage U de l'origine, telle que

i) $V(0) = 0$

ii) $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$ $x \in U$

si

iii) $\frac{dV(x)}{dt} \leq 0$ dans $U - \{0\}$ l'origine est donc stable.

iv) $\frac{dV(x)}{dt} < 0$ dans $U - \{0\}$ l'origine est asymptotiquement stable

v) $\frac{dV(x)}{dt} > 0$ dans $U - \{0\}$ l'origine est instable.

Dans ces conditions, la fonction V est appelée fonction de Lyapunov; elle est définie positive si les hypothèses i) et ii) sont vérifiées. Notons qu'avec ces deux hypothèses, la fonction V est seulement une fonction candidate "fonction de Lyapunov définie". Les propriétés de stabilité sont dites globales si U est égal à \mathbb{R}^n .

Exemple 4 Considérons maintenant le système défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1(x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_1(x_1^2 + 1) \end{cases} \quad (1.19)$$

qui présente un point d'équilibre à l'origine et considérons la même fonction de LYAPUNOV candidate :

$$U_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + 2x_2^2}{2} \quad (1.20)$$

au voisinage de l'équilibre et, si la linéarisation en ce point est hyperbolique. Dans ce cas, on sait que l'équation est équivalente à l'équation linéarisée, en ce sens, qu'il existe un difféomorphisme local qui transforme les trajectoires voisines du point d'équilibre en celles voisines de zéro de l'équation linéaire. Par contre, la tâche est toute autre en l'absence de régularité ou si le point d'équilibre est un centre. Concentrons nous sur le cas non régulier. Imaginons même le cas où seul l'équilibre est non régulier. Dans ce cas, on ne peut pas dériver l'équation et on ne peut pas donc étudier l'équation linéarisée.

L'exemple suivant montre que la linéarisation classique ne permet pas de répondre au problème de la stabilité.

Exemple 5 Cas

Dans le but d'améliorer la linéarisation par rapport aux techniques existantes, une nouvelle méthode de linéarisation, appelée dérivation optimale introduite par Benouaz et Arino [13], [15], [12], [20] d'un point d'équilibre. L'approche suivie est de type optimisation au sens des moindres carrés.

Il s'agit de l'étude de comportement des solutions d'une équation non linéaire autour d'un point singulier, la linéarisation classique ne permet pas de répondre dans les cas où la fonction définissant l'équation n'est pas assez régulière. Il s'agit en fait d'une approximation globale, par opposition à la perturbation non linéaire d'une équation linéaire, qui se distingue de l'approximation linéaire classique au voisinage d'un point d'équilibre. L'approche suivie est de type optimisation au sens des moindres carrés

s'agissant de l'étude de comportement des solutions d'une équation non linéaire autour d'un point singulier, la linéarisation ne permet pas de répondre dans les cas suivants :

- 1- Si $DF(0)$ n'existe pas (cas où la fonction non linéaire définissant une équation non régulière et donc non différentiable).
- 2- Si $DF(0)$ est stable, mais non pas asymptotiquement stable.

On considère l'équation différentielle ordinaire non linéaire de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, F est définie dans un certain ouvert Ω à valeurs dans \mathbb{R}^n , avec les hypothèses suivants:

H1) $F(0) = 0$.

H2) Le spectre $\sigma(DF(x))$ est contenu dans l'ensemble $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ pour tout $x \neq 0$ dans un voisinage de 0, où $DF(x)$ existe.

H3) F est continue, Lipschitzienne, de constante de Lipschitz γ .

Le problème posé est de trouver une équation différentielle ordinaire linéaire de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{A}x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

La méthode consiste à déterminer une application linéaire de la forme (??) qui approche l'équation non linéaire dans les mêmes conditions initiales. Elle est basée sur la minimisation au sens des moindres carrées de l'écart $\varepsilon(t)$ entre l'équation non linéaire $F(x(t))$ et l'équation linéaire $Ax(t)$, soit:

$$\varepsilon(t) = F(x(t)) - \tilde{A}x(t). \quad (1.10)$$

Pour ce faire, on considère la fonctionnelle suivante:

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt. \quad (1.11)$$

La minimisation de celle-ci le long d'une solution donnée, permet de construire une procédure itérative, permettant de déterminer une application linéaire définie comme étant la dérivée optimale de l'équation différentielle ordinaire non linéaire, qui démarre

avec la linéarisation par dérivation au sens de Fréchet $DF(x)$ calculée en x_0 si celle-ci existe en x_0 .

En introduisant la fonction Γ définie par:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} [x(t)][x(t)]^T dt \quad (1.12)$$

la matrice optimale \tilde{A} s'écrit alors:

$$\tilde{A} = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))][x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1} \quad (1.13)$$

où \tilde{A} est définie et unique à condition que $\Gamma(x)$ soit inversible.

Algorithme de la procédure

Considérons le système non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Première étape

Calcul de $A_0 = DF(x_0)$.

Deuxième étape

Calcul de A_1 à partir de la solution de l'équation:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_0 y \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.14)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y(t)) - Ay(t)\|^2 dt \quad (1.15)$$

A_1 est déterminée de manière unique par la formule:

$$A_1 = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1} \quad (1.16)$$

Où x est la solution de l'équation. On voit ainsi que, mis-à part la matrice initiale, les matrices déterminées par la procédure ne sont pas les matrices Jacobiennes de F en un point donné.

Troisième étape

Pour calculer A_j , à partir de A_{j-1} , on doit d'abord résoudre:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = [A_{j-1}] y \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Soit $y_j(t)$ la solution de l'équation.

La minimisation de la fonctionnelle

$$G_j(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y_j(t)) - Ay_j(t)\|^2 dt \quad (1.18)$$

conduit à A_j .

On suppose que $\Gamma(y_j)$ est inversible.

$$A_j \Gamma(y_j) = \int_0^{+\infty} [F(y_j)] [y_j]^T dt. \quad (1.19)$$

A_j s'écrit:

$$A_j = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j)] [y_j]^T dt \right] [\Gamma(y_j)]^{-1}. \quad (1.20)$$

Si la suite A_j converge, alors la limite \tilde{A} est appelée la dérivée optimale de F en x_0 [13],[15],[12],[20],[6].

La dérivée optimale dans le cas scalaire

Considérons une équation différentielle scalaire non linéaire:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

avec $x \in R, f: R \rightarrow R$

Le problème est d'approcher par une équation différentielle linéaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{a}x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$G(a) = \int_0^{+\infty} |f(x(t)) - ax(t)|^2 dt. \quad (1.23)$$

Dans ce cas, les hypothèses sur f sont les suivantes:

- i) $f(0) = 0$.
- ii) $f'(x) < 0$, en tout point où f' existe dans l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$.
- iii) f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le calcul se fait d'une manière analogue à celle du cas vectoriel. On commence par le

calcul de $a_0 = f'(x_0)$ puis on calcule a_1 en résolvant le système:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_0 x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

a_1 est donnée par (1.24) en substituant F par f :

$$a_1 = \frac{\int_0^{x_0} f(x(t)) x(t) dt}{\int_0^{x_0} x^2(t) dt} \frac{1}{x_0} \quad (1.24)$$

en changeant la variable t par $x(t) = \exp(a_0 t) x_0$, il vient:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\int_0^{x_0} f(x) dx}{\int_0^{x_0} x dx} \\ &= \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \end{aligned} \quad (1.25)$$

Où a_1 ne dépend pas de a_0 ; par conséquent, la procédure de la dérivation optimale converge au premier pas, c'est-à-dire:

$$\tilde{a} = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \quad (1.26)$$

Quelques propriétés de la dérivée optimale

Cas où l'application est linéaire Si F est linéaire et le spectre $\sigma(F)$ est contenu dans le plan complexe à partie réelle strictement négative, la procédure donne alors F à la première itération:

$$\tilde{A} = F \quad (1.27)$$

On peut donc affirmer que la dérivée optimale d'un système linéaire est le système lui-même.

Relation entre la dérivée optimale et celle obtenue par dérivation au sens de Fréchet en 0.

Dans le cas vectoriel, il est possible d'écrire l'expression qui donne la matrice optimale \tilde{A} en fonction de la dérivée de F en 0.

$$\tilde{A} = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] \left[\left[\int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \right] \right]^{-1} \quad (1.22)$$

si $DF(0)$ existe, il vient

$$F(x) = DF(0)x + o(|x|) \quad (1.23)$$

En substituant l'équation (1.23) dans l'expression (1.22), on obtient

$$\tilde{A} = DF(0) + \underbrace{\left[\int_0^{+\infty} [o(|x(t)|)] [x(t)]^T dt \right]}_{o(1)} \left[\int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \right]^{-1} \quad (1.24)$$

où $o(1)$ désigne une quantité qui tend vers 0 quand $x_0 \rightarrow 0$, en supposant bien sûr que $|x(t)|$ reste de l'ordre de $|x_0|$.

Ordre de la méthode L'ordre de la méthode est obtenu en comparant la solution $x(t)$ de l'équation non linéaire (4.6) et la solution $\tilde{y}(t)$ de la dérivée optimale, en partant de la même condition initiale

Proposition 1.1 [6], sous les hypothèses $H1), H2), H3)$ sur la fonction F et pour tout temps $T > 0$, il existe $M \geq 0$ tel que:

$$\|x(t) - \tilde{y}(t)\| \leq M (\|x_0\|^2), \quad (1.25)$$

pour $0 \leq t \leq T$, et tout x_0 dans un voisinage de 0, indépendant de T .

Cette proposition, [19], montre que la méthode de la dérivée optimale est au moins d'ordre

2 en fonction de la donnée initiale et dépend, en général de la non-linéarité du problème initial considéré.

Cas où F est une somme de termes linéaires et non linéaires Considérons un système général d'équations non linéaires avec une non linéarité de la forme:

$$F(x) = Mx + \widehat{F}(x), \quad x(0) = x_0 \quad (1.28)$$

où M désigne la partie linéaire; le calcul de la matrice A_1 donne:

$$A_1 = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x(t))]^{-1} \quad (1.29)$$

qui peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} A_1 &= M + \left[\int_0^{+\infty} [\widehat{F}(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x(t))]^{-1} \\ &= M + \widehat{A}_1 \end{aligned} \quad (1.30)$$

d'une manière générale, pour l'itération j :

$$A_j = M + \widehat{A}_j \quad (1.31)$$

avec

$$\widehat{A}_j = \left[\int_0^{+\infty} [\widehat{F}(x_j(t))] [x_j(t)]^T dt \right] [\Gamma(x_j(t))]^{-1} \quad (1.32)$$

Si la composante f_k de F est linéaire, \widehat{f}_k est alors nulle, la $k^{\text{ième}}$ ligne de la matrice optimale A_j est égale à \widehat{f}_k .

1.1.13 Critère de Routh-Hurwitz

Ce critère consiste à examiner les coefficients du polynôme caractéristique de la linéarisé classique et de construire une matrice appelée matrice de Hurwitz. Pour appliquer ce critère, il faut d'abord construire une matrice carrée de dimension n . Elle contient les coefficients du polynôme dès le deuxième, en ordre décroissant disposés dans la diagonale principale. Dans une colonne, les termes supérieurs au terme de la diagonale contiennent les coefficients successifs du polynôme en ordre décroissant. Les termes inférieurs à la diagonale contiennent les coefficients successifs du polynôme en ordre croissant. La matrice suivante est appelée Matrice de Hurwitz donnée par [18]:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

On considère les principaux déterminants mineurs diagonaux de la matrice (1.26)

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \quad (1.27)$$

Théorème 1.3 (*critère de Routh-Hurwitz*) soit P un polynôme tel que $a_0 > 0$. Pour que P soit uniformément asymptotiquement stable (u. a. s), il faut que les déterminants principaux de la matrice de Hurwitz soient strictement positifs

$$\Delta_1 = a_0 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \quad (1.28)$$

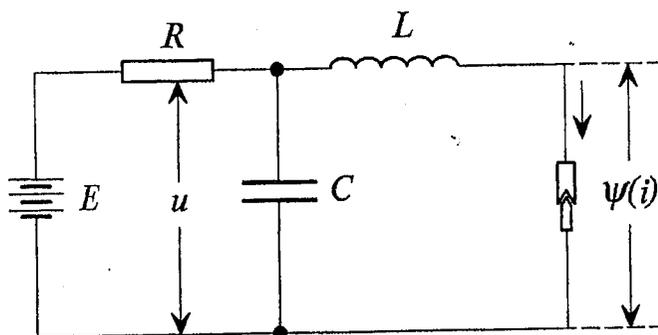
Si $n = 3$, on trouve

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

et le critère s'énonce comme suit :

Proposition 1.2 soit $P(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$. Pour que P soit uniformément asymptotiquement stable (u. a. s), il faut et il suffit que $\Delta_1 = a_1 > 0$, $\Delta_2 = a_1a_2 - a_3a_0 > 0$ et $\Delta_3 = a_3\Delta_2 > 0$, quand $a_0 > 0$; une condition nécessaire pour que toutes les racines du polynôme caractéristique admettent une partie réelle négative il faut que tous les coefficients doivent être positifs c'est-à-dire : $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$.

Exemple 6 [18] détermination de condition de stabilité du régime stationnaire d'un arc voltaïque dans un circuit avec une résistance, Inductance, et une capacité shuntée. (circuit sur la figure suivante)



En utilisant les lois de Kirchhoff, nous obtenons le système d'équations différentielle suivant:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = u - \psi(i) \\ C \frac{du}{dt} = \frac{E - u}{R} - i \end{cases} \quad (1.30)$$

L : auto-induction, C : la capacité, R : Résistance Ohmique, E : la force électromotrice de la source de courant directe, $\psi(i) = v$. Prenons $i = I + x$, $u = U + y$ comme états

perturbés ($I = \text{const}, U = \text{const}$) représentent le courant et la tension à l'état statique alors le système (1.30) s'écrit comme suit

$$\begin{cases} L \frac{dx}{dt} = y - kx \\ C \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{R} - x \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{k}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique du système linéaire est donné par : $CL\lambda^2 + \left(\frac{L}{R} + kC\right)\lambda + \frac{k}{R} + 1$.

Exemple 3 En utilisant le critère de Routh-Hurwitz pour un système d'ordre deux : la matrice et la condition de Hurwitz sont :

$$H = \begin{bmatrix} \left(\frac{L}{R} + kC\right) & 0 \\ CL & \frac{k}{R} + 1 \end{bmatrix}, \Delta_1 = \left(\frac{L}{R} + kC\right) > 0, \Delta_2 = \left(\frac{L}{R} + kC\right) \left(\frac{k}{R} + 1\right) > 0$$

$L, R,$ et C sont positives, $k = \psi'(I)$: pente de la caractéristique tension. Alors on peut obtenir une condition de stabilité sur k : $\frac{L}{R} + kC > 0, \frac{k}{R} + 1 > 0$

- Si $k \geq 0$ les deux Inégalités sont valides, et le régime stationnaire correspondant est asymptotiquement stable.

- Si $k < 0$ le régime stationnaire de l'arc voltaïque est asymptotiquement stable à condition que k satisfait les deux conditions suivantes : $k > -\frac{L}{CR}$ et $k > -R$.

Intérêt pour la physique

La stabilité d'un système d'oscillateurs linéaires est liée à celle de son polynôme caractéristique, à coefficients réels positifs. Idem pour les filtres électriques linéaires.

Pour qu'un système soit stable, il faut que son polynôme caractéristique ait toutes ses

racines à partie réelle négative. Cela revient à dire que ce polynôme est un polynôme de Hurwitz. Il est important donc de trouver les conditions à réaliser par les coefficients pour qu'il en soit ainsi (c'est stable).

1.1.14 Présentation du code de simulation Auto2000

Note historique

Les logiciels d'analyse de bifurcation sont en fait des logiciels de continuation d'objets de l'espace des phases (point, cycle. . .) dans l'espace des paramètres selon une ou plusieurs contraintes. En effet, quand les paramètres changent, ces objets changent aussi en général. Les continuer, c'est suivre leur évolution lorsqu'un ou plusieurs paramètres changent. Par exemple, suivre un point d'équilibre ou un cycle de période constante dans l'espace des paramètres correspond à un problème avec une seule contrainte (c'est à dire. que le point soit un équilibre ou que la période du cycle soit $T=cste$) et se fait donc en activant (c'est à dire. rendant variable) un seul paramètre. En suivant ces objets, le logiciel permet de tester certaines fonctions qui lui permettent de détecter les points de bifurcation. Ces fonctions font intervenir des critères. Ensuite, suivre un point de Bifurcation d'équilibre, par exemple, est un problème à deux contraintes: que le point soit un équilibre et un point de bifurcation. La continuation des bifurcations nécessite donc l'activation d'un deuxième paramètre. Des courbes dans un espace à deux dimensions sont obtenues: c'est le *diagramme de bifurcation*. Auto2000 un logiciel (code de simulation) qui date à l'origine en 1980, est un programme employé couramment par la communauté de systèmes dynamiques [17].

Voici un tableau qui présente l'évolution historique dans le développement de l'auto dans un ordre chronologique de développement de ce logiciel:

année	Spécification de la version
1976	Programme anticipée pour BVP en ODEs
1980	la première version distribuée
1986	AUTO86
1994	X/Motif version : AUTO94
1994	AUTO94P version parallèle
1997	AUTO97, avec HOMCONT
2000	Version en langage C

Tableau (I-1): développement du logiciel Auto2000 dans un ordre chronologique.

Une nouvelle version AUTO-07P successeur des deux version Auto97 et Auto2000. Elle permet de calculer les diagrammes de bifurcation, et ses applications s'étendant actuellement de l'étude de la dynamique des fluides, électrophysiologie cardiaque, modèles de continuum de grands biomolécules, et le problème de la gravité de N-corps. Ce logiciel est actuellement en cours de modernisation afin d'améliorer ses potentialités. La dernière version. Une composante clé de ce programme récemment introduite est la langage python, qui a été employée intensivement pour améliorer l'interface utilisateur AUTO2000 et pour fournir la fonctionnalité de développement de ce dernier. Plusieurs interfaces utilisateurs ont été développées en utilisant le python.

En traçant les courbes de bifurcation, AUTO teste encore d'autres fonctions qui permettent de détecter des points singuliers, appelés points de bifurcation de codimension 2, qui correspondent grossièrement à des intersections de courbes de bifurcation. En théorie, ces points sont continuable en activant un troisième paramètre mais aucun logiciel à l'heure actuelle ne produit de diagramme de bifurcation en trois dimensions. Ce n'est pas que cela qui pose un problème théorique particulièrement difficile mais plutôt parce que de tels

diagrammes seraient complètement illisibles : les courbes de bifurcation deviendraient des surfaces qui se chevaucheraient, se croisent, s'enveloppent les unes les autres.

Les méthodes de continuation

La continuation correspond évidemment à une approximation numérique de la courbe implicitement définie par les contraintes. Cette continuation numérique est une méthode de calcul des solutions approchées d'un système d'équations non linéaires paramétrées de la forme

$$F(u, \alpha) = 0 \quad (1.32)$$

$F : IR^n \times IR \longrightarrow IR^n$ Les techniques de continuation numériques ont trouvé un grand degré d'acceptation dans l'étude des systèmes dynamiques chaotiques et divers autres systèmes qui appartiennent au domaine de la théorie des catastrophes. La raison de cet usage vient du fait que divers fonctionnements non-linéaires des systèmes dynamiques se comportent de façon déterministe et prévisible en fonction d'une série de paramètres qui sont inclus dans les équations du système. Toutefois, pour une valeur de paramètre certain que le système démarre un comportement chaotique, et donc qu'il devient nécessaire de suivre les paramètres afin d'être en mesure de déchiffrer les événements du moment où le système commence à être non prévisible. Théoriquement, le système devient instable. L'analyse de continuation des paramètres peut conduire à des idées plus sur les différentes bifurcations stable / et point critique (la selle-noeud, transcritique, fourche, doublement de la période, Hopf, secondaire Hopf (Neimark)). Bifurcations de solutions stables permet une réflexion théorique sur les circonstances et les événements qui surviennent aux points critiques. la continuation des paramètres donne également un système plus fiable pour analyser un système dynamique car il est plus stable et plus interactive. Surtout dans les cas où le système dynamique est sujette à certaines valeurs de paramètre (ou une combinaison de valeurs pour les paramètres multiples).

Il existe plusieurs méthodes de continuation on cite: continuation par le paramètre, continuation par la norme, continuation par la longueur d'arc (Pseudo-arclength Conti-

uation) (c'est la méthode qui est la plus couramment utilisée en pratique) elle l'utilise le code de simulation Auto2000. nous allons la rappeler brièvement comme suit.

Continuation par la longueur d'arc Cette méthode, a été proposée par H.B. Keller à la fin des années 1970, est basée sur le constat que «l'idéal» de paramétrage d'une courbe est la longueur d'arc . La méthode de la longueur d'arc est une approximation dans l'espace tangent de la courbe. Le solveur itératif est nécessaire pour trouver un point situé à la pseudo-longueur d'arc donnée, ce qui nécessite l'ajout d'une contrainte supplémentaire (le pseudo-contrainte de la longueur d'arc) à la n par $n+1$ Jacobienne. Il produit une jacobienne carrée, et si la discrétisation est suffisamment petite, la modification de la jacobienne est de rang maximal.

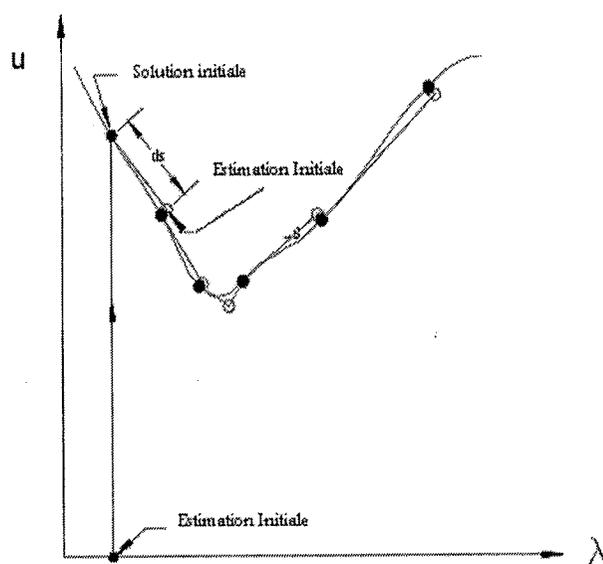


Figure 1.3 : Méthode de continuation par la longueur d'arc

L'analyse de bifurcations avec AUTO

A partir du point X pour trouver le point $X + 1$, le logiciel AUTO réalise un pas, de longueur optimisée, dans la direction du vecteur tangent à la courbe en X . Ensuite, plusieurs répétitions d'un algorithme de correction 1 (Il s'agit de l'algorithme de Moore-Penrose modifié) sont faites, pour arriver à une distance de la courbe inférieure à un seuil de précision défini par l'utilisateur. Enfin, entre les deux points, la courbe est approximée par un polynôme.

Pour fonctionner, AUTO nécessite trois types de fichiers pour un modèle nommé xxx

1. Un fichier xxx.c, écrit en langage C, qui définit :

- le modèle (un système d'équations différentielles)
- le statut des paramètres ("activable" ou non) et leur valeur (qui pourra changer pour les paramètres activables et qui restera constante pour les paramètres non activables).
- le Jacobien au sens strict et le Jacobien en fonction des paramètres activables (i.e. matrice des dérivées partielles du système en fonction de chaque paramètre activable). Définir analytiquement ces dérivées ou non est un choix à l'introduire par l'utilisateur (AUTO peut en générer des approximations numériques si cela est nécessaire) mais il est fortement recommandé de le faire.

2. Un ensemble de fichiers de type c.xxx.1 et c.xxx.2 qui spécifient les constantes que devra utiliser AUTO (telles que le pas initial pour la continuation, le seuil de Précision utilisé etc.)

3. Un fichier Makefile qui indique au logiciel dans quel ordre traiter les différentes Continuations, donc dans quel ordre appeler les fichiers de constantes.

Toutes les informations concernant (solutions du système, stabilité (valeurs propres, multiplicateurs de Floquet), données permettant de construire le diagramme de bifurcation) seront stockées dans des fichiers de sortie de données : b.xxx (diagramme de bifurcation), s.xxx (solutions), d.xxx (dynamique de la stabilité des solutions).

1.2 Lien entre les résultats obtenus dans le cadre du magistère et la continuation numérique en utilisant le logiciel AUTO2000

Pour ce faire, on illustre une étude comparative qui représente une continuation et validation des résultats obtenus dans le cadre de travail du magister [23]. Le modèle étudié est celui d'un circuit électronique assez particulier, l'amplificateur chaotique. Dont le but était d'étudier une équation dépendant d'un paramètre, dans le cas où celle-ci change de stabilité, c'est-à-dire, l'application de la méthode de dérivation optimale aux modèles physiques qui engendrent le phénomène de bifurcation.

En utilisant un logiciel de continuation numérique de bifurcation Auto2000 qui reste parmi les outils informatiques les plus puissants son efficacité étant démontré à travers un très grand nombre d'applications et de travaux dans divers domaines. Nous avons pu remarquer à travers l'étude faite que les simulations et l'analyse réalisée en utilisant la technique de dérivation optimale, que le comportement asymptotique du système changeait selon une valeur appelée paramètre de bifurcation. Nous allons ici tenter d'identifier toutes les combinaisons de valeurs de paramètres pour lesquelles le comportement du système change. L'ensemble de ces valeurs de bifurcations nous permettra de tracer un diagramme de bifurcation. A cet effet nous allons utiliser un nouveau logiciel de continuation de bifurcation pour les équations différentielles ordinaires Auto 2000, appliqué au même modèle de l'amplificateur chaotique. Ce logiciel va nous permettre de faire :

- Une analyse complète de la stabilité.
 - Le tracé du diagramme de bifurcation (détection et continuation des points critiques avec une analyse complète du phénomène bifurcation (cycles limites, solutions, stabilité)).
- Cette application va nous permettre de bien saisir la comparaison et d'illustrer les performances de la technique de dérivation optimale pour l'étude de problèmes présentant le phénomène de bifurcation.

Continuation numérique du phénomène de bifurcation pour l'amplificateur chaotique

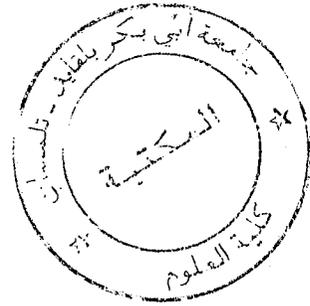
l'objectif du chapitre II est d'utiliser le logiciel Auto2000 pour l'analyse et la continuation numérique du phénomène de bifurcation de l'amplificateur chaotique, modélisé par un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires et dépendant d'un paramètre physique représenté par le gain de l'amplificateur (2.1). Dont la variation de ce dernier provoque un changement du comportement qualitatif de la solution, et une apparition de nouveaux points d'équilibre avec un échange (perte) de stabilité. Le but est de confronter et confirmer les résultats obtenus par la technique de dérivation optimale pour la description du comportement qualitative ce phénomène.

Ce logiciel permet de fournir un diagramme de bifurcation (graphiquement en plus des données importantes sous forme de fichiers de données permettant la compréhension détaillé de l'évolution des systèmes dynamique étudiés). Ce diagramme est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation. Les expériences réelles montrent que pour obtenir assez de données en fonction de l'espace de paramètre pour construire les diagrammes expérimentaux de bifurcation (complexité des systèmes) sont susceptibles d'être extrêmement cher et peuvent prendre beaucoup de temps. En outre, il y a souvent des régions de l'espace de paramètre qui ne sont pas expérimentalement accessibles (pour, peut-être, des raisons technologiques ou morales). Des simulations sur ordinateur des systèmes dynamiques seront employées de plus en plus en tant qu'expériences virtuelles, pour rassembler les données nécessaires pour la conception de tels diagrammes pour l'analyse de bifurcation.

Le logiciels de continuation et d'analyse de la bifurcation O.D.E Auto 2000 et un outil très puissant parmi les outils numériques de continuation qui existe. Un avantage non négligeable de ce logiciel est qu'il permet de représenter les choses graphiquement, que ce soit pour l'identification des bifurcations ou pour la synthèse des résultats au niveau du diagramme.

DEUXIEME CHAPITRE

**COMPARAISON ENTRE DERIVEE
OPTIMALE, METHODE DE
CONTINUATION NUMERIQUE
AUTO2000**



Chapitre 2

Comparaison entre Méthode de dérivation optimale, Méthode de continuation Numérique (Auto2000)

2.1 Introduction

Ce chapitre est une mise au point de l'utilisation de la méthode de dérivation optimale pour l'analyse de la stabilité de système physique présentant le phénomène de bifurcation (changement de comportement pour des valeurs critiques accompagné d'un échange de stabilité) . Pour cela, on exploite les propriétés importantes de la méthode de dérivation optimale surtout celles liées à l'ordre (influence du choix de la condition initiale) moyennant une techniques d'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires à savoir : le critère de Routh Hurwitz. Ainsi, nous allons localiser les points critiques représentant les limites et les conditions de stabilité ainsi que le changement de comportement accompagnant le phénomène de bifurcation.

Une étude comparative par rapport au résultat obtenu dans le cadre de travail du magistère [23], sera présenté en utilisant la continuation numérique par le logiciel Auto2000.

2.2 Problématique

L'amplificateur chaotique représenté dans le figure 2.1, est un circuit autonome [24], régi par le système d'équations (2.1)

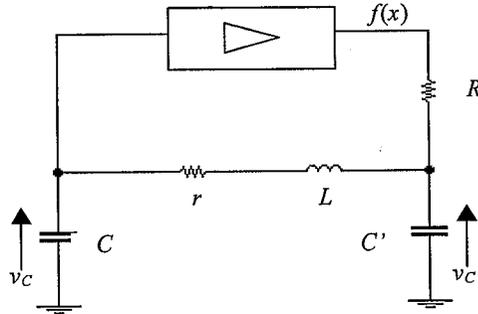


Figure 2.1: Circuit de l'amplificateur chaotique

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - \delta y + z \\ \frac{dz}{dt} = \gamma [\alpha f(x) - z] - \sigma y \end{cases} \quad (2.1)$$

avec:

$$\begin{cases} x = v_c \\ y = \sqrt{\frac{L}{C}} i \\ z = v_{c'} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \gamma = \frac{\sqrt{LC}}{RC'} \\ \delta = r \sqrt{\frac{C}{L}} \\ \sigma = \frac{C}{C'} \end{cases} \quad (2.2)$$

La non linéarité exprimée par $f(x)$ s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} -0.528 \text{ si } x \leq -1.2 \\ x(1-x^2) \text{ si } |x| < 1.2 \\ +0.528 \text{ si } x > 1.2 . \end{cases} \quad (2.3)$$

Les points d'équilibre peuvent être obtenus par la résolution du système $\dot{X} = 0$ qui conduit à

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x + z = 0 \Rightarrow x = z \\ \gamma [\alpha f(x) - x] = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\alpha} x \end{cases} \quad (2.4)$$

Les points d'équilibre sont donc donnés par l'intersection de la caractéristique non linéaire $f(x)$ et la droite de charge de pente $\frac{1}{\alpha}$ (où α représente le gain.)

$$\begin{aligned} x(1-x^2) &= \frac{1}{\alpha}x \\ \Rightarrow x \left(1-x^2 - \frac{1}{\alpha}\right) &= 0 \\ \Rightarrow x = 0 \text{ où } x^2 = 1 - \frac{1}{\alpha} &\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha \leq 1$, on obtient un seul point d'équilibre à l'origine $(0, 0, 0)$. En revanche, si α augmente, deux autres points apparaissent (P_+, P_-) , ayant les coordonnées

$$\left(\pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, 0, \pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right).$$

Pour l'application numérique, on utilise les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} R = 3380 \Omega \quad C = 343 \text{ nF} \quad r = 347 \Omega \quad C' = 225 \text{ nF} \quad L = 145 \text{ mH} \\ (\gamma = 0.2932, \delta = 0.5337, \sigma = 1.5244). \end{aligned}$$

2.3 Application du critère de Routh Hurwitz

C'est une approche qui consiste à exprimer le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle en fonction des coefficients (a_i) qui sont des fonctions des coordonnées du point fixe et du paramètre de bifurcation choisi. Donc l'application de ce critère au système de l'amplificateur chaotique permet de localiser la limite de stabilité

caractérisé par une valeur critique du paramètre de bifurcation α défini comme étant le gain de l'amplificateur alors :

La linéarisation classique du système (2.1) autour du point d'équilibre P_+ , permet de donner la matrice suivante

$$DF(P_+) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\delta & 1 \\ \gamma\alpha \left(1 - 2\left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)\right) & -\sigma & -\gamma \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 \quad (2.6)$$

Alors les éléments de la matrice de Hurwitz sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \gamma + \delta \\ a_2 &= \delta\gamma + \sigma + 1 \\ a_3 &= \gamma - \gamma\alpha + 2\gamma\alpha\sqrt{\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)} \end{aligned}$$

D'après le critère de Routh pour que le système soit uniformément asymptotiquement stable (u. a. s), il faut que les déterminants principaux de matrice de Hurwitz soient strictement positifs. Pour notre modèle il faut que :

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_3a_0 > 0$$

A partir de cette condition on peut déterminer la valeur critique du paramètre de bifurcation α pour laquelle le point d'équilibre change de stabilité.

Pour des valeurs inférieures à la valeur critique $\alpha = 1$, le système possède un seul point

d'équilibre à l'origine asymptotiquement stable, tandis que l'apparition de deux autres points est causés par une bifurcation fourche, suivie d'une bifurcation Hopf. Le critère de Routh-hurwitz montre que ces deux nouveaux points demeurent globalement stable et change de stabilité dans la région :

$$1 < \alpha < \alpha_H = 1 + \frac{(\delta + \gamma)(1 + \sigma + \delta\gamma)}{2\gamma}$$

Remarque : L'avantage d'utiliser ce critère se résume dans le fait qu'on peut analyser la stabilité d'un système en localisant les limites (α_H) de la stabilité sans avoir des informations sur les vecteurs propres du système linéaire équivalent. Alors l'utilisation du critère de Routh-Hurwitz donne rapidement les conditions de la stabilité des points fixes.

2.4 Application de la méthode de dérivation optimale

Cette partie est consacrée à l'application d'une autre technique appelée dérivée optimale au même exemple modélisé par le système d'équation (2.1), et présentant un comportement assez particulier (phénomène de bifurcation). L'objectif étant l'étude de l'influence du choix des conditions initiales (propriété importante liée à l'ordre) et l'illustration des avantages de la technique proposée, pour la description du comportement qualitative des modèles non linéaires modélisés par des équation dépendants d'un jeu de paramètres dont la variation provoquent un comportement complexe assez important (échange de stabilité, bifurcation des solutions).

L'étude de la stabilité de ces points s'effectuera suivant la valeur critique (paramètre de bifurcation), en linéarisant le système par la méthode de dérivation optimale autour de chaque point, comme suit :

* linéarisation autour de l'origine pour $\alpha \leq 1$.

* linéarisation autour de (P_+, P_-) pour $\alpha > 1$.

Puis, nous déterminons les valeurs propres du système linéarisé,

Pour l'application numérique, on utilise les valeurs suivantes: $R = 3380 \Omega$, $C = 343 nF$, $r = 347 \Omega$, $C' = 225 nF$, $L = 145 mH$ ($\gamma = 0.2932$, $\delta = 0.5337$, $\sigma = 1.5244$).

L'application de la dérivée optimale autour de deux cas critiques. Cette application va nous permettre de mieux apprécier la fiabilité et l'efficacité de la méthode pour la détection et le suivi du phénomène de bifurcation.

• 1^{er} Cas:

$\alpha < 1$: le système possède un seul point d'équilibre à l'origine asymptotiquement stable. On choisit $\alpha = 0.75$ et on applique la méthode de dérivation optimale, avec $(x_0, y_0, z_0) = (1.10^{-1}, 2.10^{-1}, 4.10^{-1})$

La procédure de la dérivation optimale donne

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ 0.1992 & -1.5264 & -0.2806 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.0307 \\ \lambda_2 = -0.3918 + 1.5807i \\ \lambda_3 = -0.3918 - 1.5807i. \end{cases} \quad (2.8)$$

• 2^{er} Cas:

$\alpha = 1$: est un point où l'on passe du point d'équilibre à l'origine qui devient instable lorsque α augmente ($\alpha > 1$) vers deux nouveaux points d'équilibres (P_+, P_-) (*Bifurcation Pitch-fork*). On choisit $\alpha = 1.1$ et on applique la méthode de dérivation optimale, avec $(x_0, y_0, z_0) = (1.10^{-2}, 3.10^{-2}, 4.10^{-2})$

La matrice initiale pour le système non-linéaire (2.1) s'écrit

$$A_0 = DF(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.53369 & 1 \\ 0.2459 & -1.5244 & -0.2932 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

La procédure de la dérivation optimale donne

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ 0.243679678 & -1.523974 & -0.2976634 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.020245 \\ \lambda_2 = -0.40555 + 1.5819i \\ \lambda_3 = -0.40555 - 1.5819i. \end{cases} \quad (2.11)$$

L'utilisation de la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (1.10^{-1}, 3.10^{-1}, 4.10^{-1})$ a donné le résultat suivant

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ 0.2949578 & -1.522138 & -0.3154912 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Les courbes des figures (2.2) et (2.3) représentent respectivement les variations de la composante $x(t)$ en fonction du temps de la solution du système linéaire optimal (2.12) et (2.9) obtenu comparée à celle du système non linéaire (2.1) pour des conditions initiales respectivement $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.3, 0.4)$ et $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.03, 0.04)$

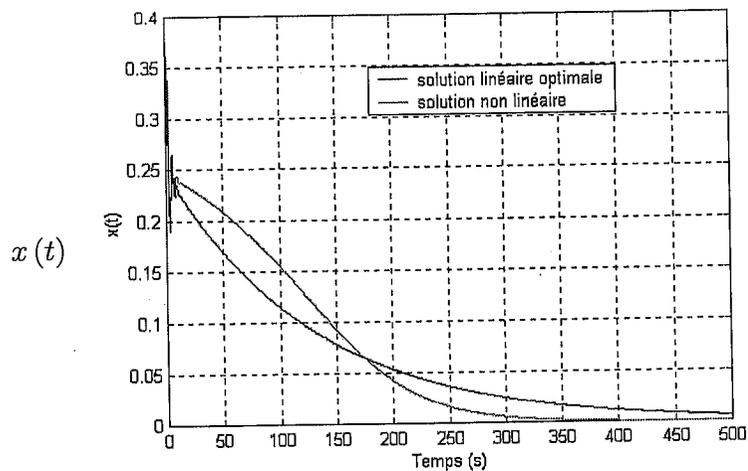


Figure 2.2

Variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.3, 0.4)$.

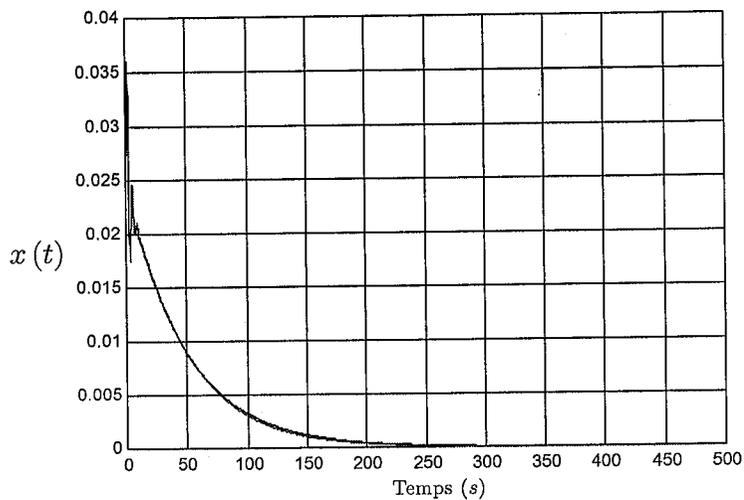


Figure 2.3

Variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.03, 0.04)$.

La figure (2.3) montre que les deux courbes sont confondues, et elle confirme la proposition liée à l'ordre, c'est à dire que la qualité de l'approximation dépend du choix de la condition initiale. Ce qui n'est pas le cas de la figure (2.2) où l'on observe un écart entre les deux courbes. Afin de valider et confronter les résultats obtenus dans le cas des conditions initiales très près de l'origine par rapport à celles prises près de l'origine, nous avons comparé l'erreur relative obtenue dans les deux cas donné par la Tableau (I-2).

t	Er1	Er2
10	4.31E-002	1.57E-002
40	1.91E-001	1.44E-002
50	2.34E-001	1.76E-002
60	2.72E-001	1.81E-002
70	3.04E-001	1.10E-002
80	3.27E-001	1.03E-002
90	3.41E-001	1.17E-002
100	3.44E-001	1.32E-002
110	3.35E-001	1.49E-002
120	3.14E-001	1.67E-002
130	2.81E-001	1.87E-002
140	2.35E-001	2.08E-002
150	1.80E-001	2.30E-002
160	1.15E-001	2.52E-002
170	4.30E-002	2.74E-002
180	3.38E-002	2.96E-002
190	1.13E-001	3.17E-002
200	2.48E-001	3.29E-002
250	5.41E-001	4.09E-002
300	7.63E-001	4.42E-002
350	8.82E-001	4.55E-002
400	9.42E-001	4.06E-002

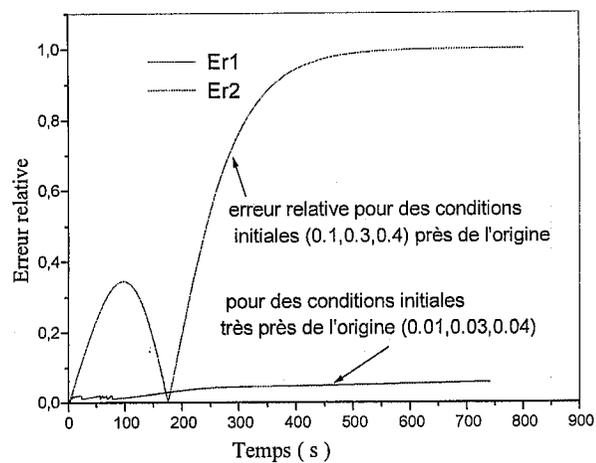
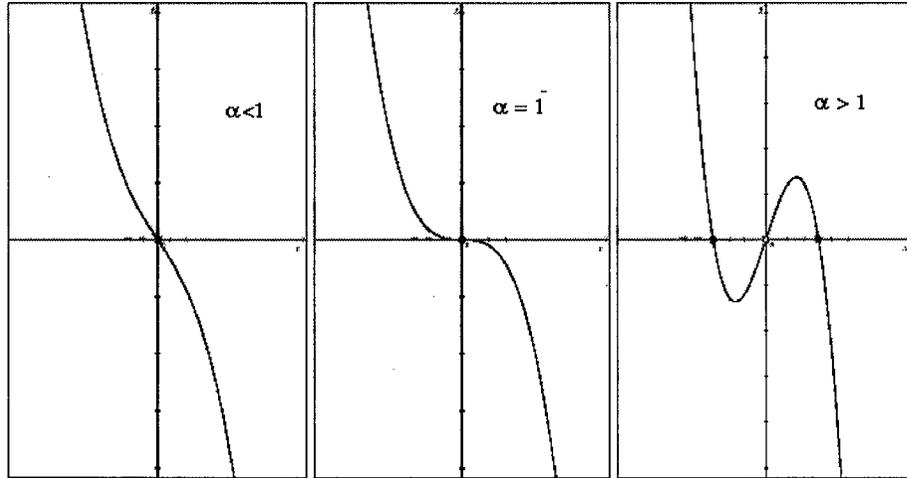


Figure représentant
l'évolution de l'erreur relative $Er1$, $Er2$ en fonction du temps

On peut résumer ces cas en utilisant les diagrammes suivants



• 3^{ème} Cas:

$\alpha_H = 4.7804$: c'est un point critique, à partir duquel le système donne des solutions périodiques avec un changement de la stabilité des points d'équilibres. Le système subit une autre bifurcation appelée *bifurcation Poincaré-Androw-Hopf* [25], où il commence à osciller autour de l'un des deux nouveaux points d'équilibre (P_+ ou P_-). On va confirmer que pour la même valeur, par l'application de la dérivation optimale, on obtient la même chose, mais en prenant un $x(0)$ très proche de l'origine.

Avec $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.3)$ La matrice initiale pour le système non linéaire (2.1) est donnée par

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.533694 & 1 \\ -1.1630 & -1.7685 & -0.1665 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.0021 + i 1.636078 \\ \lambda_2 = 0.0021 - i 1.636078 \\ \lambda_3 = -0.3716. \end{cases} \quad (2.14)$$

En utilisant la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (1.10^{-3}, 2.10^{-3}, 3.10^{-3})$, la matrice optimale est donnée par

$$A_0 = DF(x(0)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ -1.9162 & -1.5244 & -0.2932 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

La procédure de la dérivation optimale donne

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.533694 & 1 \\ -1.9148 & -1.5272 & -0.2880 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -5.18 \cdot 10^{-6} + i 1.637350 \\ \lambda_2 = -5.18 \cdot 10^{-6} - i 1.637350 \\ \lambda_3 = -8.21667 \cdot 10^{-1} \end{cases} \quad (2.17)$$

En se plaçant très près de l'origine, on remarque que la dérivée optimale permet de donner un système linéaire optimale avec deux valeurs propres complexes. Dans ce cas, plus la partie réelle des valeurs propres est d'autant plus proche de zéro et plus la décroissance de la partie exponentielle de la solution vers zéro est lente. Ainsi, la présence de ces valeurs propres complexes conjuguées (2.17) provoque un comportement oscillatoire périodique (*bifurcation Hopf*) comme le montrent les figures (2.4) et (2.5) (courbe en rouge solution non linéaire, courbe en bleu solution linéaire optimale). Ces figures illustrent des solutions périodiques (changement de la nature des solutions du système dynamique démontré par la méthode décrite dans (1.2)). Ces changements correspondent à l'apparition d'un cycle limite au niveau de l'espace de phase qui peut être expliqué par le fait que l'origine reste instable et tend à repousser loin de l'origine toutes les trajectoires oscillantes autour de P_{\pm} .

Les courbes des figures (2.4) et (2.5) représentent les variations de la composante $x(t)$ en fonction du temps de la solution du système linéaire optimal obtenu en comparaison à celles du système non linéaire 2.1.

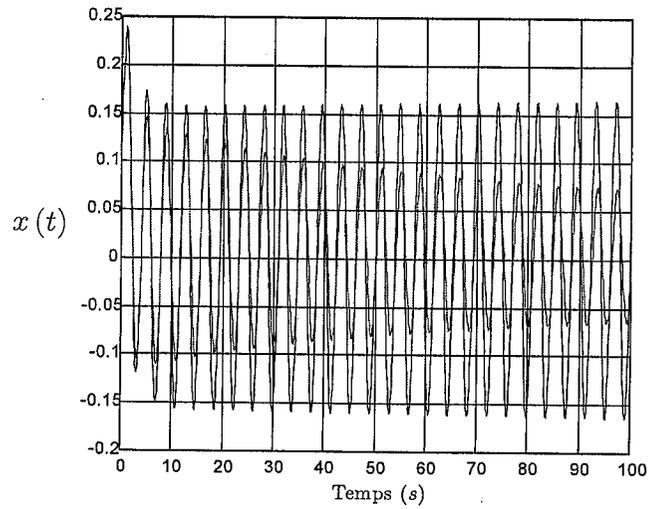


Figure 2.4: représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.3)$.

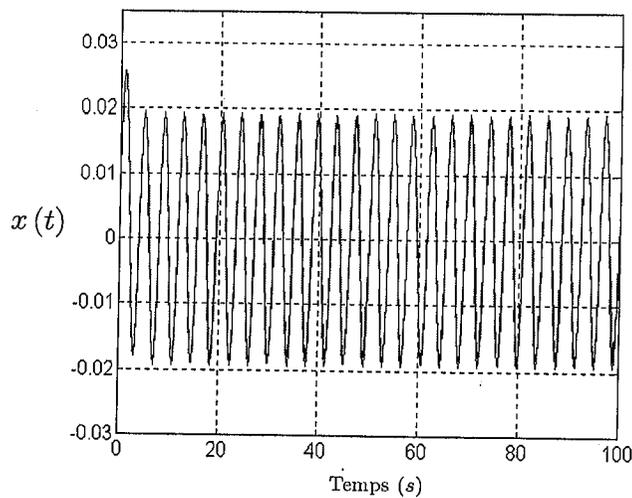


Figure 2.5: représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$.

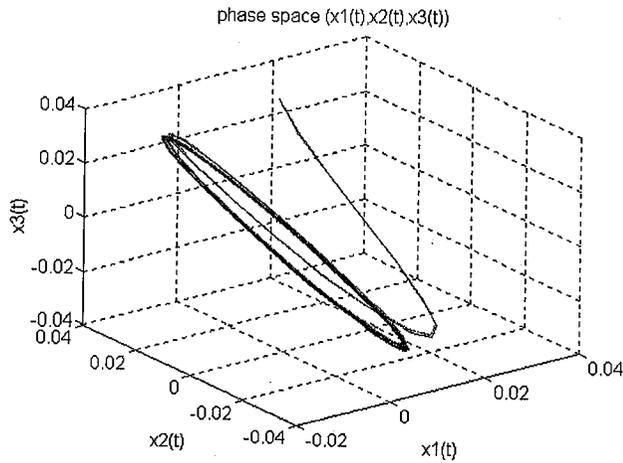


Figure 2.6 : représente la solution $(x(t),y(t),z(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(0.01, 0.02, 0.03)$

• **4^{ème} Cas:** Que se passe t'il lorsque α dépasse α_H ?

exemple pour $\alpha = 5 > \alpha_H = 4.7804$: il s'agit d'un point critique à partir duquel le système donne des solutions périodiques, avec un changement de la stabilité des points d'équilibre ainsi que la stabilité des solutions périodiques. Les deux nouveaux points d'équilibre (P_+ et P_-) deviennent instables tandis que l'origine devient stable. On va confirmer ces résultats par l'application de la méthode de dérivation optimale pour $x(0) = (0.01, 0.02, 0.03)$. La matrice initiale pour le système non linéaire (2.1) s'écrit

$$A_0 = DF(0.01, 0.02, 0.03) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.533694 & 1 \\ -1.803814 & -1.5244 & -0.29345 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

La procédure de la dérivée optimale donne au premier pas

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.533694 & 1 \\ -1.96129 & -1.551841 & -0.239282 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.01937 + i 1.64639 \\ \lambda_2 = 0.01937 - i 1.64639 \\ \lambda_3 = -0.8117234 \end{cases} \quad (2.20)$$

La dérivée optimale détecte l'échange de stabilité qui se traduit par des valeurs propres, complexes à partie réelle positive pour les points (P_+, P_-) . Pour le système linéaire optimal, elle s'écrivent sous la forme (2.20). Ceci montre que les deux points critiques P_+ et P_- deviennent instables alors que l'origine est stable ($\lambda_3 < 0$). L'analyse des deux figures (2.7), (2.8) (courbe en rouge solution non linéaire, courbe en bleu solution linéaire optimale), confirment les résultats obtenus en se plaçant très près de l'origine).

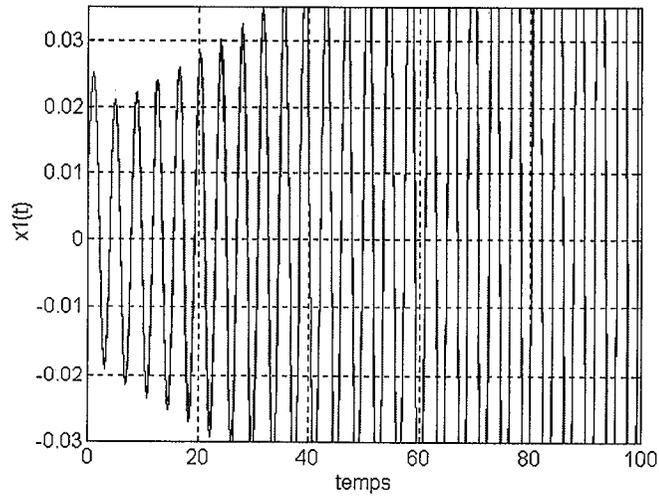


Figure 2.7

représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$

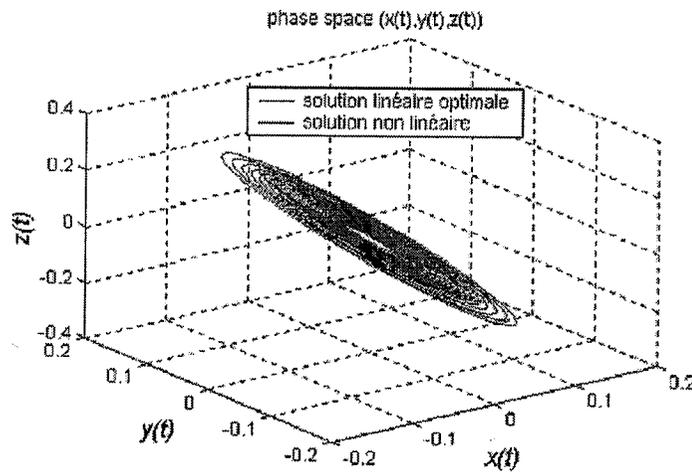
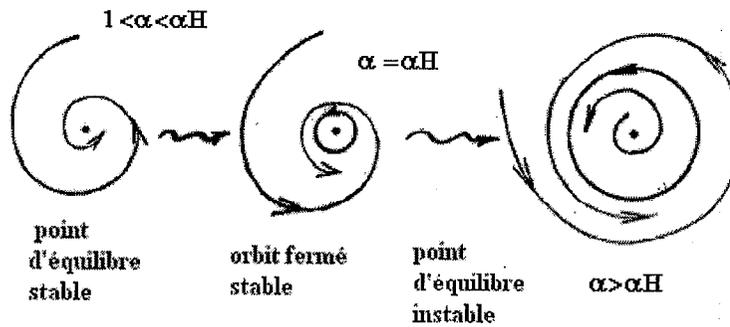


Figure 2.8

représente la solution $(x(t), y(t), z(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$



Figure~2-1:

2.4.1 Comparaison

La comparaison entre les résultats obtenus, pour des conditions initiales près de l'origine, montre une nette amélioration concernant la description du comportement réel, en obéissant à la même dynamique du système non linéaire initial. Ceci est illustré par les figures (2.1) et (2.2) qui représentent la solution optimale comparée à celle non linéaire (numérique) du système (2.1).

En plus, en se basant sur les résultats obtenus par l'application de la méthode aux points critiques, par exemple, (pour $\alpha_H = 4.7804$ et $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$), on constate que la dérivée optimale est capable de détecter le changement de stabilité à partir du changement de signe des parties réelles des valeurs propres données par les expressions (2.8) et (2.20). Le changement de comportement de la solution pour $\alpha = 1.1$ en une solution périodique pour $\alpha = 4.7804$ (apparition de la bifurcation Hopf) figure(2.6) est mis en évidence par les figures (2.3) à (2.7). Deux valeurs propres complexes conjuguées de la dérivée optimale traversent l'axe des imaginaires. Le sens de traversée type de bifurcation. (*super critique*). C'est à dire pour $\alpha < \alpha_H$ (point d'équilibre stable), puis augmentant α jusqu'à la valeur $\alpha = \alpha_H$ (orbite fermé stable), $\alpha > \alpha_H$

Enfin, les résultats élaborés en choisissant des conditions initiales très près de l'origine, montrent clairement que la méthode de dérivée optimale suit le comportement du

système non linéaire. Elle détecte les grands effets engendrés par les variations du paramètre de bifurcation, qui réside essentiellement dans l'échange de stabilité entre deux points singuliers stable et instable ou le passage d'un point singulier stable à une orbite périodique. En plus un résultat important qu'on peut définir à partir de l'application de cette méthode au point critique c'est la possibilité de définir le sens de bifurcation des solutions. Ainsi les échanges de stabilité qui ont lieu brusquement à la valeur de bifurcation, sont suivis rigoureusement par la dérivée optimale (les valeurs propres de la matrice optimale passent du demi plan droit au demi plan gauche, en gardant les parties réelles des valeurs propres non nulles à la valeur de bifurcation).

[25],[26].

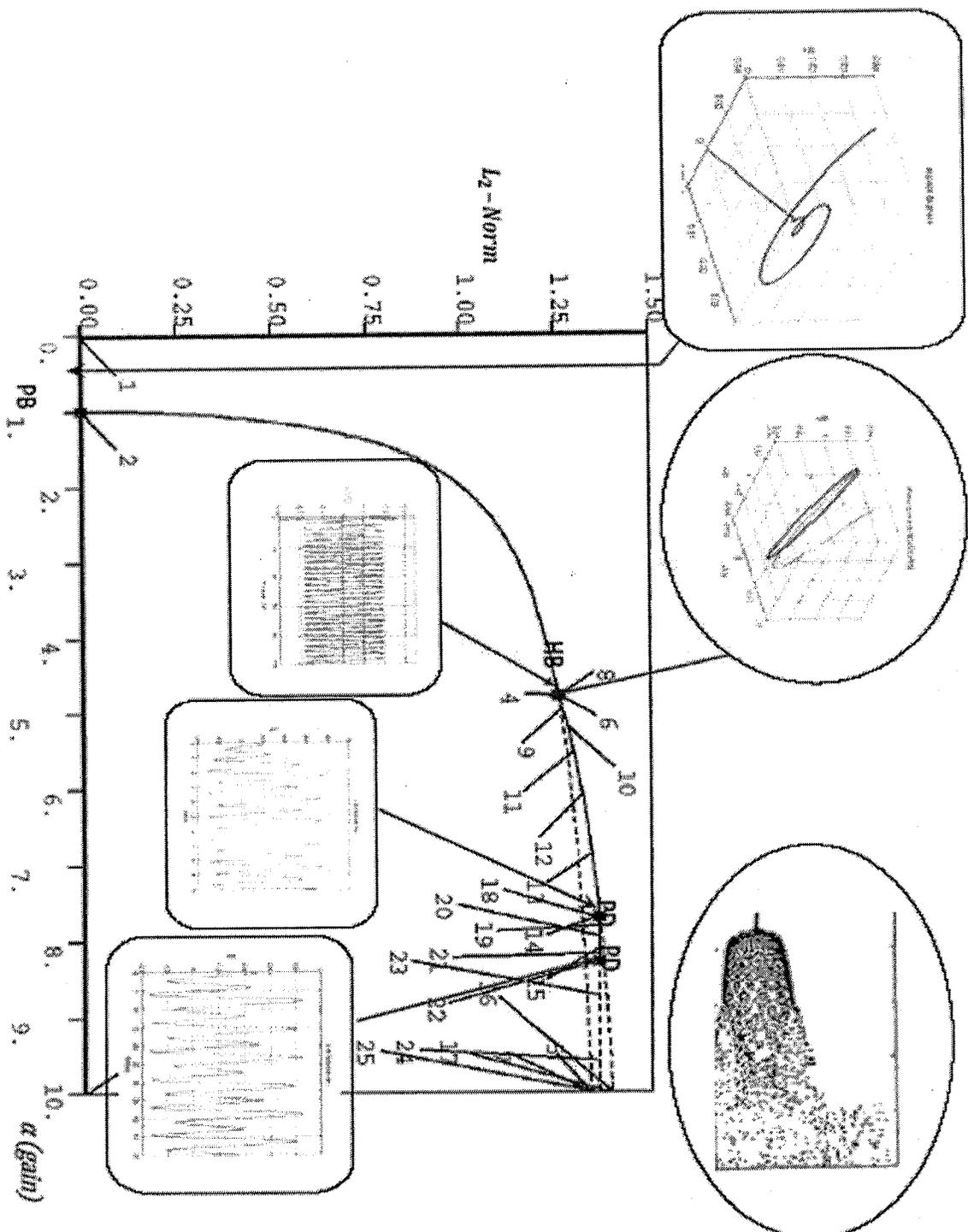
2.5 Application du logiciel Auto2000

2.5.1 Construction du diagramme de bifurcation

A partir de l'analyse du système dynamique non linéaire (2.1) étudié, nous avons pour objectif premièrement de construire le diagramme de bifurcation en faisant varier le gain pour mettre en évidence son influence sur le régime dynamique, deuxièmement de montrer que l'ensemble des informations de l'analyse menée en utilisant la dérivée optimale précédente, peuvent être réunies sous la forme d'un diagramme de bifurcation.

L'utilisation du logiciel Auto2000 permet de construire et tracer le diagramme de bifurcation illustré par la figure suivante :

Figure 2.9 : Diagramme de bifurcation du système (2.1) représentant la variation de la norm L_2 en fonction du paramètre α (gain) : trait plein solution stable, en pointillé solution instable



2.5.2 Analyse de bifurcation

Les différents type de points et symboles rencontrés sur le diagramme de bifurcation où pendant l'exécution du logiciel Auto2000 [22], sont définis selon les deux tableaux suivants

TY:	Abréviation du nom du type de la solution
TY:	Numéro de la solution
BR:	Nombre de branches
PT:	Nombre de points
LAB:	Etiquette de la solution

LAB	TY	signification
BP	1	point de bifurcation
HB	3	bifurcation de Hopf
PD	7	Bifurcation à dédoublement de période
EP	9	début et fin d'exécution normale

Tableau (II-1): Définition des symboles rencontrés sur le diagramme de bifurcation où pendant l'exécution du logiciel Auto2000.

PAR(1) est le paramètre de continuation, ici e. U(1) et U(2), U(3) sont x et y , z .

La première exécution donne le **Tableau (II-2)**:

BR	PT	TY	LAB	PAR(1)	L2-NORM	U(1)	U(2)	U(3)
1	1	EP	1	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1	-8	BP	2	1.000000E-00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1	26	EP	3	1.000000E+01	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00

Les résultats issus de la deuxième exécution sont représentés dans le **tableau (II-3)**:

BR	PT	TY	LAB	PAR(1)	L2-NORM	U(1)	U(2)	U(3)
2	1		0	1.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	-85	HB	4	4.780389E+00	1.257626E+00	8.892761E-01	0.000000E+00	8.892761E-01
2	96	EP	5	9.999999E+00	1.341641E+00	9.486833E-01	0.000000E+00	9.486833E-01
2	-85	HB	6	4.780389E+00	1.257626E+00	-8.892761E-01	0.000000E+00	-8.892761E-01
2	96	EP	7	9.999999E+00	1.341641E+00	-9.486833E-01	0.000000E+00	-9.486833E-01

Les résultats issus de la troisième exécution sont représentés dans le tableau (II - 4) :

BR	PT	TY	LAB	PAR (1)	L2-NORM	MAX(1)	MAX(2)	PERIOD
-4	1		0	4.780389E+00	1.257626E+00	8.892761E-01	0.000000E+00	3.837436E+00
-4	-5		8	4.795564E+00	1.258594E+00	9.300095E-01	6.809985E-02	3.837627E+00
-4	-10		9	4.960066E+00	1.268640E+00	1.018447E+00	2.269799E-01	3.839732E+00
-4	-15		10	5.179697E+00	1.280891E+00	1.069277E+00	3.279843E-01	3.842617E+00
-4	-20		11	5.535011E+00	1.298314E+00	1.116267E+00	4.305745E-01	3.847471E+00
-4	-25		12	6.086952E+00	1.320684E+00	1.158045E+00	5.317565E-01	3.855487E+00
-4	-30		13	6.872561E+00	1.345258E+00	1.190040E+00	6.206343E-01	3.867961E+00
-4	-34	PD	14	7.692558E+00	1.364466E+00	1.207884E+00	6.789607E-01	3.882434E+00
-4	35		15	8.075029E+00	1.371742E+00	1.213556E+00	6.987557E-01	3.889740E+00
-4	40		16	9.991459E+00	1.396994E+00	1.228525E+00	7.548669E-01	3.932558E+00
-4	41	EP	17	1.000000E+01	1.397074E+00	1.228562E+00	7.550066E-01	3.932775E+00
-5	-5		18	7.724652E+00	1.364449E+00	1.226887E+00	6.805386E-01	7.763557E+00
-5	-10		19	7.819517E+00	1.364404E+00	1.243254E+00	6.804301E-01	7.759904E+00
-5	-15		20	7.955947E+00	1.364341E+00	1.255480E+00	6.792427E-01	7.755196E+00
-5	-20		21	8.184046E+00	1.364236E+00	1.268356E+00	6.752456E-01	7.748811E+00
-5	-22	PD	22	8.282694E+00	1.364188E+00	1.272109E+00	6.731800E-01	7.746650E+00
-5	25		23	8.731551E+00	1.363928E+00	1.283065E+00	6.636637E-01	7.741712E+00
-5	30		24	9.579063E+00	1.363017E+00	1.291473E+00	6.442088E-01	7.757761E+00
-5	33	EP	25	9.999998E+00	1.362197E+00	1.293005E+00	6.329127E-01	7.781246E+00
-6	-5		26	8.304497E+00	1.364409E+00	1.274284E+00	6.801591E-01	1.549389E+01
-6	-10		27	8.357386E+00	1.364940E+00	1.275985E+00	6.859757E-01	1.549548E+01
-6	-13	PD	28	8.413241E+00	1.365492E+00	1.276641E+00	6.932324E-01	1.549734E+01
-6	15		29	8.494775E+00	1.366281E+00	1.277478E+00	7.053976E-01	1.550042E+01
-6	20		30	8.768501E+00	1.368771E+00	1.278844E+00	7.320771E-01	1.551380E+01
-6	25		31	9.220465E+00	1.372343E+00	1.278651E+00	7.590447E-01	1.554631E+01
-6	30		32	9.957324E+00	1.376675E+00	1.276990E+00	7.843037E-01	1.563148E+01
-6	31	EP	33	1.000000E+01	1.376867E+00	1.277061E+00	7.852625E-01	1.563791E+01

2.5.3 Interprétation

La variation de l'un des paramètres (le gain de l'amplificateur) du système (2.1) peut changer le type de régime dynamique observé. La figure (2.9) représentant le diagramme de bifurcation va permettre d'observer l'évolution de la solution dynamique en fonction

de la valeur d'un paramètre α (le gain) du système sur une plage de variation. Un tel diagramme permet d'avoir une vision plus globale de la succession de plusieurs bifurcations.

La détermination des points d'équilibre montre que le système possède trois points d'équilibre : un seul point d'équilibre à l'origine $(0, 0, 0)$. En revanche, si α augmente, deux autres points apparaissent (P_+, P_-) , ayant les coordonnées

$$\left(\pm \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}}, 0, \pm \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} \right).$$

Comme nous pouvons le voir sur la figure (1.9), le tracé du diagramme de bifurcation en fonction des variations du gain α est fidèle à l'analyse numérique menée en utilisant la dérivation optimale. Il se décompose en trois intervalles de variation du paramètre de bifurcation :

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1. \alpha < 1 : \text{Le regime reste stationnaire, de type point fixe stable.} \\ 2. 1 < \alpha < \alpha_H \\ 3. \alpha > \alpha_H \end{array} \right.$$

Notons que le système étudié est symétrique sous la transformation suivante: $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$. alors cette symétrie particulière joue un rôle très important pour la **bifurcation fourche (pitchfork)**, comme nous allons le voir.

Pour $\alpha < 1$, le système possède alors un point fixe stable à l'origine $O(0, 0, 0)$, l'ensemble des trajectoires convergent vers le seul point d'équilibre stable à l'origine (voir espace de phase pour $\alpha < 1$ sur le diagramme de la figure), Cette stabilité est traduite graphiquement par un trait plein sur le diagramme, et signe moins $(-)$ (de la valeur $PAR(1) = \alpha = 0$ jusqu'au $\alpha = 1$) au niveau des résultats de la première exécution comme il est indiqué dans une partie du fichier de sortie donné comme suit :

Tableau (II-5):

0	PT	TY	LAB	PAR(1)	L2-NORM	U(1)	U(2)	U(3)
1	1	9	1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	-2	0	0	2.00000E-02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	-3	0	0	4.00000E-02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	-4	0	0	8.00000E-02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	-5	0	0	1.60000E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	-6	0	0	3.20000E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	-7	0	0	6.40000E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	-8	1	2	1.00000E-00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	9	0	0	1.50000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	10	0	0	2.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	11	0	0	2.50000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	12	0	0	3.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	13	0	0	3.50000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

Bifurcation Pitchfork (fourche)

$1 \leq \alpha < \alpha_H$: Lorsque α atteint la valeur 1 , le système se déstabilise: le point fixe perd sa stabilité et sa nature topologique change. Il y a bifurcation. On voit apparaître alors deux points fixes stables (P_+, P_-). Il y a eu en quelque sorte un dédoublement du point fixe donnant naissance de deux états symétriques. Le diagramme de bifurcation figure(2.9) correspondant montre une branche qui bifurque en augmentant la valeur de α à partir de la valeur critique de bifurcation $\alpha = 1$. Pour une raison de symétrie, nous avons restreint notre étude pour un seul point P_+ . Les résultats de simulation on fait ressortir un point point particulier pour la valeur ($PAR(1) = 1.00000E - 00$) et son type est donné dans la colonne TY: **BP**. Dans ce cas BP signifiant branching point où la bifurcation observée est une *bifurcation fourche* (Pitchfork). La bifurcation fourche apparaît souvent en physique, car elle reflète une invariance par parité du système. Son diagramme de bifurcation est donné en général par la figure suivante:

on peut conclure que dans un système qui va se déstabiliser par une bifurcation fourche, existe une symétrie ponctuelle de centre 0 des solutions: si $x(t)$ est une solution du système, alors $-x(t)$ en est une aussi. Cette symétrie apparaît de façon évidente sur le diagramme de bifurcation :

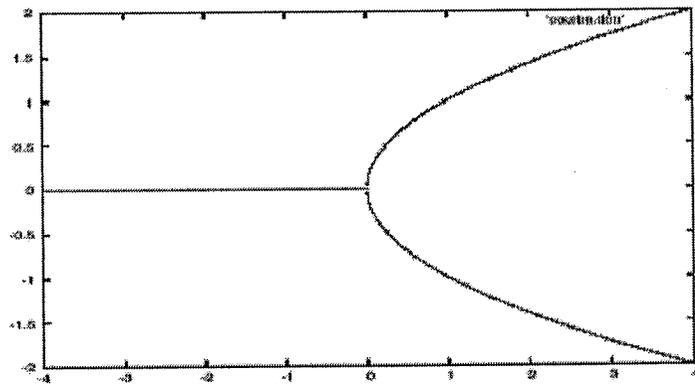


Figure 2.10 : Diagramme de bifurcation fourche (pitchfork)
supercritique

Elle est caractérisée par l'apparition de deux autres points d'équilibre pour le système, accompagné d'un échange de stabilité. Dans le problème étudié il y a brisure spontanée de symétrie puisque le système, à priori, a le choix lors de la transition (en fourche) et qu'il choisit l'une des deux voies (il suffit d'une petite perturbation dans un sens ou dans l'autre en fait).

Bifurcation Hopf

Lorsque $\alpha = \alpha_H$, le logiciel auto2000 recense un autre type de bifurcation noté **HB** Bifurcation Hopf pour la valeur critique $PAR(1) = 4.780389E+00$, comme l'indique la deuxième exécution (voir tableau (I-2)). Cette bifurcation se manifeste par l'apparition d'un terme imaginaire dans la stabilité d'un point fixe et l'apparition spontanée d'un cycle limite comme il est indiqué sur le diagramme de la figure (2.9) c'est-à-dire un attracteur périodique (un ensemble de solutions périodiques marquées par le label 4,6,8,9,10,11,12,13 sur la figure(2.9)), la trajectoire est attirée par une trajectoire circulaire. Ce résultat confirme celui obtenu par la méthode de dérivation optimale (Voir figure(2.6)). Ceci correspond à la déstabilisation d'un point fixe au profit d'un cycle limite. Des oscillations d'amplitude finie apparaissent brusquement au point de bifurca-

tion. Ceci peut être traduit physiquement par le fait que le régime oscillant se raccorde continûment à l'état d'équilibre du système. Son diagramme de bifurcation pour les deux types supercritique et sous-critique est donné en général par la figure suivante :

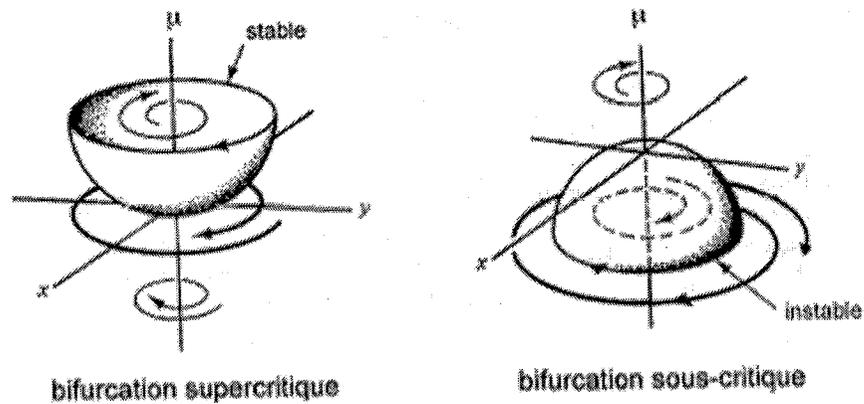


Figure 1.11: diagramme de bifurcation Hopf

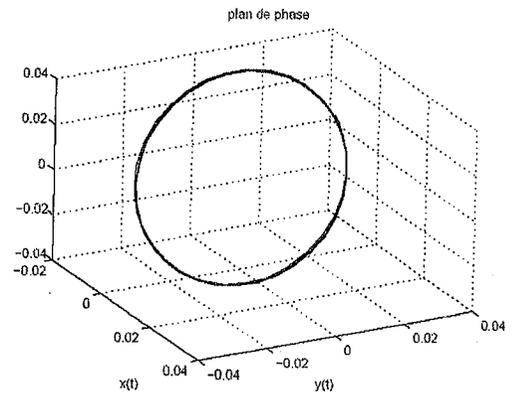
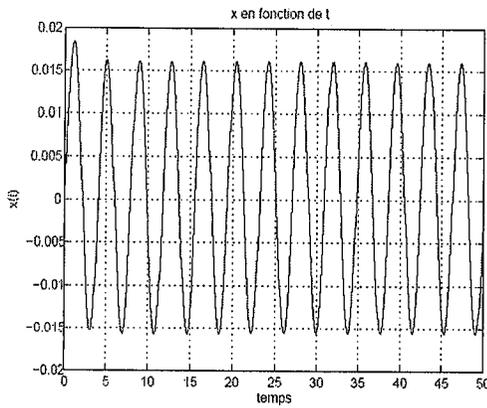
Bifurcation de dédoublement de période

En augmentant la valeur du gain (paramètre de bifurcation), la troisième exécution (voir tableau 3) montre que le logiciel détecte pour les valeurs critiques ($PAR(1) = \alpha = 7.692558E+00, 8.282694E+00, 8.413241E+00$), un autre type de bifurcation notée PD (Periodic doubling Bifurcation). Le diagramme de bifurcation permet de mieux visualiser l'évolution d'un système vers le chaos après une cascade de bifurcation de doublement de période (bifurcation flip) voir figure (2.9). La période du système double, autrement dit, il met deux fois plus de temps à retrouver son état initial.

Pour mieux saisir et comprendre ce phénomène de bifurcation de dédoublement de période, nous allons faire une lecture à travers le diagramme de bifurcation (auto2000), afin de montrer ces capacité de visualiser le comportement du système.

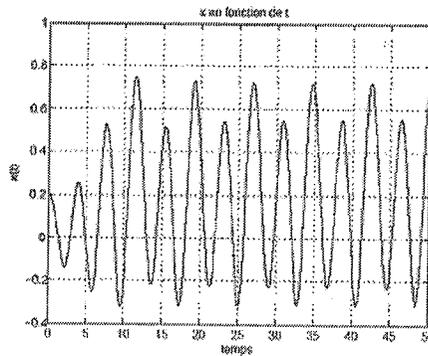
Le diagramme montre que pour la valeur $\alpha = \alpha_H = 4.780389E+00$, il y a bifurcation Hopf (HB), le comportement devient périodique, existence d'une solution de période T , les figures suivantes représentant respectivement (la solution $x(t)$ en fonction du temps

et l'espace de phase), montre existence d'un orbite pour cette valeur dans l'espace des états ($x = v_C, y = i, z = v_C'$)

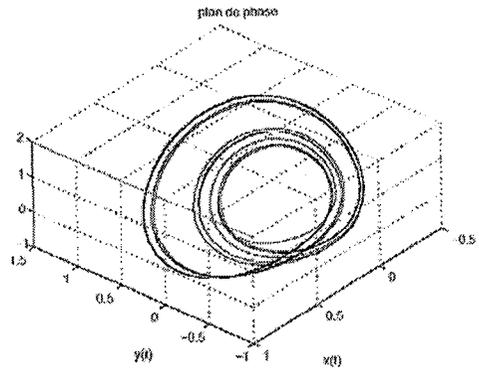
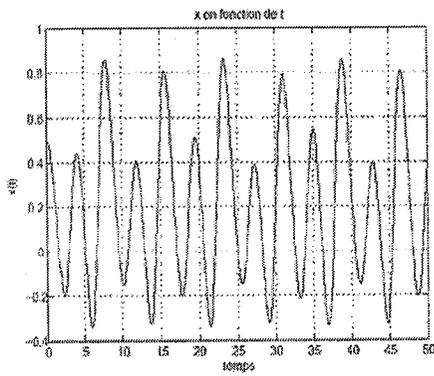


Ce résultat confirme celui obtenu par l'application de la méthode dérivation optimale voir figure 2.5 et 2.6.

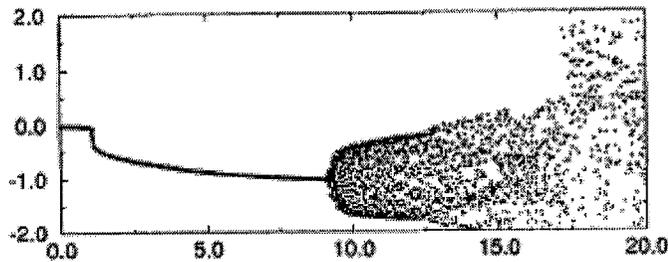
Ce comportement existe jusqu'à la valeur critique $\alpha = 7.692558E + 00$, caractérisée par l'apparition de solutions avec une période de $2T$, la figure suivante illustre ce comportement



dans le cas de la valeur critique $\alpha = 8.413241E + 00$, les figures suivantes (la solution $x(t)$ en fonction du temps et l'espace de phase) illustre ce comportement



Remarque 2.1 on remarque également une bifurcation de solutions périodiques de période $2T$ en des solutions périodiques de période $4T$, le dédoublements se succèdent à des points plus rapprochés sur l'abscisse, on ne peut plus représenter une solution périodique de période plus élevée par exemple $20T$ dans le diagramme de bifurcation comme il est indiquée sur la figure suivante représentant le diagramme de bifurcation expérimental [24], du circuit donné par la figure 2.1.



La description correcte du dédoublement de période est donc la suivante : une solution de période mT stable devient instable, et en même temps, deux solutions stables de période $2mT$ sont créées.

La question qui se pose : que se passe-t-il au-delà de ces valeurs ? un nouveau phénomène se produit. Une des raisons de croire qu'au delà d'environ $\alpha = 11$, un nouveau phénomène se produit. au delà d'un point limite, on se trouverait avec des régimes dont la période serait $> \infty$!. C'est le chaos!!!

La solution poursuit un mouvement désordonnée dont l'orbite ne se referme jamais sur elle même. De telle solutions sont appelées chaotique

2.5.4 Conclusion

A la lumière des résultats obtenus, il ressort qu'en se basant sur une propriété importante de la méthode, déterminée à partir de l'estimation de l'erreur commise, la méthode de la dérivée optimale permet de détecter les différents échanges de stabilité qui accompagnent le phénomène complexe de bifurcation. Cette méthode décrit bien le changement de comportement des solutions et détecte le changement de stabilité surtout au voisinage immédiat du point de bifurcation, en obéissant d'une façon satisfaisante à la dynamique du système non-linéaire initial.

Par ailleurs, il apparaît clairement que le choix des conditions initiales pour l'application de la procédure de dérivation optimale est déterminant. Pour une bonne utilisation de cette méthode, particulièrement pour l'étude des points critiques, le choix de conditions initiales appropriées s'impose.

Cependant, le théorème Hurwitz va s'avérer très utile dans le calcul de la valeur du paramètre de bifurcation de Hopf présenté ci-dessous.

Une confrontation en utilisant le logiciel auto2000, permet de valider les résultats obtenus par la méthode de dérivation optimale. En utilisant ce logiciel on peut conclure que :

- Les échanges de stabilité qui ont lieu brusquement à la valeur de bifurcation, sont suivis rigoureusement par la dérivée optimale (les valeurs propres de la matrice optimale passent de demi plan droit au demi plan gauche, en gardant les parties réelles des valeurs propres non nulles à la valeur de bifurcation).
- Selon la valeur du paramètre, la dynamique du système se révèle ainsi plus ou moins complexe: il peut s'agir d'un simple point fixe attracteur, d'un attracteur périodique de topologie plus ou moins raffinée, ou d'un régime chaotique caractérisé par un attracteur étrange. Naturellement, le comportement des systèmes physiques est souvent très différent dans chacun de ces régimes.

Vu le besoin croissant d'outils de calcul et de visualisation pour l'étude des systèmes dynamiques qui apparaissent dans des applications physiques importantes modélisées par des systèmes d'équations à grande échelle compliquées. on peut conclure que les outils de calcul de continuation et en particulier Auto2000 permettent d'aller bien au-delà de la simple simulation : par exemple ils identifient et classifient d'importantes bifurcations et déterminent les variétés critiques dans l'espace des phases ou dans l'espace des paramètres qui séparent les régions de dynamiques fondamentalement différentes.

TROISIEME CHAPITRE

RELATION ENTRE

LA DERIVEE OPTIMALE ET

LA STABILITE ASYMPTOTIQUE

Chapitre 3

Relation entre la dérivée optimale et la Stabilité Asymptotique



3.1 Introduction

L'étude des équations différentielles est un domaine mathématique qui historiquement a fait l'objet de nombreuses recherches, et continue cependant de rester d'actualité, par le fait qu'elle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique, les sciences physiques et plus récemment la biologie, l'électronique, spécialités où de nombreux modèles conduisent à des équations du même type. Il faut savoir que la plupart de ces équations sont globalement de nature non linéaire. La dénomination non linéaire rassemble des systèmes extrêmement divers ayant peu de points communs dans leur comportement. Il en résulte qu'il n'existe pas, jusqu'à présent, de théorie d'ensemble des équations non linéaires. Parmi ces problèmes non linéaires, une classe importante est modélisée par les équations différentielles ordinaires non linéaires.

Routh (1884), Thomson et Tait (1879), Joukovsky (1882) ne retenaient des équations différentielles que leur approximation linéaire au premier ordre. Tout en reconnaissant que le procédé n'était pas rigoureux, et sans en proposer aucune justification, l'étude de stabilité du système non linéaire était alors menée sur le système linéarisé.

Un apport majeur de Lyapunov et simultanément, de Poincaré, a été de donner des conditions de validité de cette approximation, basées sur les propriétés des solutions du modèle linéarisé. Cette méthode permet de conclure localement sans avoir à donner de renseignements quantitatifs. En fait, depuis l'apparition du célèbre mémoire de Lyapunov " problème général de la stabilité du mouvement " en 1892, beaucoup d'études ont été menées : Hahn (1963), LaSalle et lefschetz (1961)...etc. Cependant, la détermination d'une fonction de Lyapunov constitue une difficulté majeure. Plusieurs méthodes de recherche de cette fonction ont été proposées, dont la méthode du gradient variable Schultz et Gibson (1962), Zoubov (1957) ; à partir des formes quadratiques Aizerman et Gantmacher (1962) et autres.

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle ordinaire non linéaire de la forme

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

où $x \in IR^n$. est une tâche presque triviale si la fonction F qui définit l'équation est suffisamment régulière, et si sa linéarisation au point d'équilibre est hyperbolique (aucune valeur propre ne rencontre l'axe imaginaire). Dans ce cas on sait que l'équation est équivalente à l'équation linéarisée. Dans ce cas, on sait que l'équation est équivalente à l'équation linéarisée, en ce sens qu'il existe un difféomorphisme local qui transforme les trajectoires voisines du point d'équilibre en celles voisines du point d'équilibre de l'équation linéaire. Par contre si la situation n'est pas hyperbolique, cas d'un centre où une valeur propre est nulle, la détermination de la stabilité devient plus délicate, et le comportement réel du système est déterminé par le terme non linéaire de haut degré négligé. La question qui se pose est de savoir si les orbites nées dans un voisinage de suffisamment petit d'un point d'équilibre, resteront à proximité de ce point et si les courbes intégrales du champ de vecteurs d'un système non linéaire, ressemblent toujours à celles du système linéaire qui lui est associé [28].

Les propos de ce chapitre sont consacrés à étudier la relation entre la méthode de dérivation optimale et la stabilité asymptotique [29], en particulier, à l'étude de la sta-

bilité d'une équation différentielle ordinaire non linéaire, dont la linéarisation classique obtenue par dérivation au sens de Fréchet, présente un centre, c'est-à-dire, des valeurs propres purement imaginaires.

Après un bref rappel de la procédure de dérivée optimale, une section est consacrée à l'étude de la relation entre la dérivée optimale et la stabilité asymptotique (une comparaison avec la linéarisation classique sera présentée). Comme application, nous considérons deux exemples permettant de présenter un résultat sur le signe de la trace de la matrice optimale obtenue et son apport pour analyse de la stabilité asymptotique. Une analyse de bifurcation en utilisant le logiciel de continuation (Auto2000) est offert suivie d'une conclusion.

3.2 Idée du problème

L'idée proposée est basée sur la méthode d'approximation de la dérivée optimale [12],[13], [15], [14], [16], qui est une sorte d'une linéarisation globale contrairement à la perturbation non-linéaire d'une équation linéaire, qui se distingue de celle linéaire classique au voisinage d'un point stationnaire. L'approche suivie est basée sur la minimisation au sens des moindres carrés.

Nous examinons, dans ce qui suit, le lien entre la notion de fonction de Lyapunov ou plus généralement la stabilité d'un point d'équilibre et les propriétés de la dérivée optimale en ce point. Dans cette ordre d'idée, nous considérons l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = Mx + G(x), \quad x(0) = x_0 \quad (3.2)$$

où M est une matrice dont les valeurs propres sont égales à $\pm i$.

$F = (f_1, f_2)$ est une fonction définie sur un certain ouvert Ω de \mathbb{R}^2 contenant $(0, 0)$, avec les hypothèses suivantes:

H1) $F(0) = 0$.

H2) Le spectre $\sigma(DF(x))$ est contenu dans l'ensemble $\{z : \text{Re}z < 0\}$ pour tout $x \neq 0$,

dans un voisinage de 0, où $DF(x)$ existe.

H3) F est localement Lipschitzienne.

H4) M est une matrice dont les valeurs propres sont égales à $\pm i$.

H4) G est de classe C^1 .

On se place dans le cas où G est une fonction qui vérifie

$$G(x) = -\Phi(\|x\|)x + G_3(x) \quad (3.3)$$

$$\Phi(\|x\|) = o(\|x\|)$$

G_3 est une fonction de l'ordre de $O(\|x\|^3)$.

En particulier, on a $G(0) = 0$, et $DG(0) = 0$.

Pour illustrer davantage la relation entre la dérivée optimale et l'équation non linéaire, nous examinons un exemple qui est de la forme (3.2) dans lequel la linéarisation en utilisant la jacobienne associée à une équation non linéaire n'a que des valeurs propres de partie réelle strictement négative au voisinage de 0 (sauf en $x = 0$), et la solution ne tend pas vers 0. Il n'y a pas de résultat théorique qui pourrait déterminer la nature de la stabilité de l'origine dans un tel cas. L'exemple étudié montre que le comportement dépend de l'équation non linéaire. La procédure de dérivée optimale peut détecter les équations pour lesquelles il y a stabilité.

3.3 Dérivée optimale

Considérons le problème différentiel ordinaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

où

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

$F = (f_1, \dots, f_n)$ est une fonction définie sur un certain ouvert Ω de \mathbb{R}^n contenant $(0, 0)$, avec les hypothèses suivantes:

$$H1) F(0) = 0.$$

H2) Le spectre $\sigma(DF(x))$ est contenu dans l'ensemble $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ pour tout $x \neq 0$, dans un voisinage de 0, où $DF(x)$ existe.

H3) F est continue γ -Lipschitzienne.

Prenons un x_0 et choisissons une application initiale A_0 . Par exemple si F est différentiable en x_0 , on peut prendre $A_0 = DF(x_0)$ où la dérivée en un point arbitraire pris dans un voisinage de 0. Ceci est possible si F est localement lipschitzienne c'est-à-dire F soit presque partout différentiable.

supposons que y_0 soit la solution du problème à valeur initiale suivant:

$$\frac{dy}{dt} = Ay(t), y(0) = y_0, \quad (3.5)$$

En minimisant la fonctionnelle

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y_0) - Ay_0(t)\|^2 dt \quad (3.6)$$

on obtient

$$A_1 = \left(\int_0^{+\infty} [F(y_0(t))] [y_0(t)]^T dt \right) \left(\int_0^{+\infty} [y_0(t)] [y_0(t)]^T dt \right)^{-1}. \quad (3.7)$$

Maintenant on définit y_0 comme solution de (3.5), en remplaçant A_0 par A_1 et en minimisant (3.6) avec y_0 est remplacée par y_1 . Puis nous continuons dans cette manière en construisant une suite donnée par

$$A_j = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j)] [y_j]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} [y_j(t)] [y_j(t)]^T dt \right]^{-1}. \quad (3.8)$$

Alors si la suite A_j converge, la limite \tilde{A} est appelée la dérivée optimale de F en x_0 .

3.4 La dérivée optimale et la stabilité asymptotique

Bien que les critères de stabilité par linéarisation soient clairement définis et rigoureusement justifiés, la linéarisation classique tombée parfois en défaut, car elle suppose que la matrice jacobienne au point d'équilibre existe. Toutefois, cette hypothèse n'est pas toujours vraie. Envisageons par exemple un système non linéaire avec une fonction de type valeur absolue tel que la non-linéarité n'est pas dérivable au voisinage du point d'équilibre. La linéarisation classique donne une condition nécessaire mais non suffisante, car elle ne permet pas l'étude de stabilité en présence de valeurs propres purement imaginaires. La recherche d'une fonction de Lyapunov elle-même constitue un sujet sensible car elle est basée en général sur l'expérience et la chance.

3.4.1 Cas scalaire

Remarque 3.1 [6] la dérivée optimale obtenue dans le cas scalaire

$$\tilde{a}(x_0) = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx, \quad (3.9)$$

permet de construire une fonction de Lyapunov pour l'équation non linéaire de la forme

$$v(x) = x^2 \tilde{a}(x). \quad (3.10)$$

Le cas scalaire est très intéressant dans le sens où on peut écrire la dérivée optimale en fonction de la linéarisation classique de f en 0 (si f' existe en 0)

3.4.2 Cas Vectoriel

Pour mieux illustrer le lien qui peut exister entre la dérivée optimale et l'équation non linéaire, on va présenter un exemple dans lequel la jacobienne du champ linéaire associée à l'équation non linéaire a un spectre à partie réelle strictement négative au voisinage de 0, sauf en $x = 0$, et les solutions ne tendent pas vers 0.

Il n'existe pas de résultat théorique permettant de conclure à partir de cette hypothèse sur la nature de la stabilité de l'origine.

Exemple 7 *Considérons l'exemple suivant*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -xg(x) \\ \frac{dy}{dt} = -|x|^n y + |x|^{n-1} \end{cases} \quad (3.11)$$

$n \geq 2$ et $g(x) > 0$. Si $y \rightarrow 0$, alors $\dot{y} > 0$, et si $y(0) > 0$, alors $y(t) > 0$.

Exemple 4 *La jacobienne du champ linéaire associé à l'équation (3.11) s'écrit, pour $n = 2$, et $g(x) = \frac{x^2}{2}$*

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{3x^2}{2} & 0 \\ a(x, y) & -|x|^n \end{bmatrix}$$

Avec $DF(x, y)$ représente la matrice dont le déterminant est positif $\det(DF(x)) > 0$, et la trace est négative $\text{tr}(DF(x)) < 0$. On en conclue que le spectre de la jacobienne associée à l'équation non-linéaire est à partie réelle strictement négative, donc asymptotiquement stable sauf en $x = 0$.

Le calcul de la dérivée optimale donne au premier pas avec $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.340938 & 0.227282 \\ 0.909119 & -0.1704017 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

dont les valeurs sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.65595 \\ \lambda_2 = 0.314995. \end{cases}$$

La dérivée optimale appliquée à cet exemple, donne au premier pas une matrice avec une valeur propre > 0 et une valeur propre < 0 . La conclusion obtenue par utilisation de la dérivée optimale est donc conforme au résultat observé.

Remarque 3.2 *Cet exemple tend à illustrer le fait que le résultat dépend de l'équation. La procédure de dérivée optimale permet de détecter celles des équations pour lesquelles il y a stabilité.*

3.5 Application

Lorsque les valeurs propres de la linéarisation en un point d'équilibre sont purement imaginaires, la dynamique locale autour du point d'équilibre ne peut pas être déterminée par l'approximation linéaire. En effet la détermination de la stabilité devient plus délicate, et le comportement réel du système est déterminé par les termes non linéaires de haut degré; selon ces termes, l'équilibre peut être instable, stable ou même asymptotiquement stable. Dans cette optique, par conséquent nous étudions une classe particulière d'équation différentielle ordinaire de la forme

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = Mx + G(x), \quad x(0) = x_0 \quad (3.12)$$

Dans cet exemple, nous considérons le cas où

$$\begin{cases} G(X) = a\Phi(\|X\|)X, \quad X = (x, y) \\ \text{avec } \Phi(\|X\|) = o(\|X\|) \\ a = \pm 1. \end{cases}, \quad (3.13)$$

La fonction non linéaire définissant l'équation différentielle s'écrit donc

$$F(X) = M \cdot X + a [o(\|X\|)] X, \quad (3.14)$$

et le système obtenu s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + ax(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + ay(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (3.15)$$

Dans ce cas, l'étude de la stabilité du point d'équilibre pose un problème. En effet la linéarisation classique ne permet pas de conclure car le système possède des valeurs propres purement imaginaires.

En fonction de la valeur de la constante (a), on distingue les deux exemples suivants:

1^{er} Cas: $a = -1$, le système (3.15) s'écrit, avec $(x_0, y_0) = (0, 0.1)$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x - y(x^2 + y^2) \end{cases}, \quad (x_0, y_0) = (0, 0.1) \quad (3.16)$$

la linéarisation classique de F au point d'équilibre $(0, 0)$ donne

$$DF(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

dont les valeurs propres sont: $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Avec $DF(x_0, y_0)$, calculée en $(x_0, y_0) = (0, 0.1)$,

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -10^{-2} & 1 \\ -1 & -3 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

le calcul de la linéarisée optimale donne

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -5.0822 \cdot 10^{-3} & 1 \\ -1 & -5.0942 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

ou encore

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5.0822 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & -5.0942 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\tilde{A} = M + r(x_0),$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -5.0882 \cdot 10^{-3} + i \\ \lambda_2 = -5.0882 \cdot 10^{-3} - i. \end{cases} \quad (3.21)$$

$\text{Re}(\lambda_1) < 0$ et $\text{Re}(\lambda_2) < 0$. La linéarisée optimale est asymptotiquement stable et fait apparaître l'origine comme un foyer. Alors, l'origine est asymptotiquement stable.

Les figures (3.1), (3.2) et (3.3) montrent respectivement la représentation des champs de vecteurs du système linéaire classique (3.17), du système non linéaire (3.16) et le système linéaire optimal (3.19)

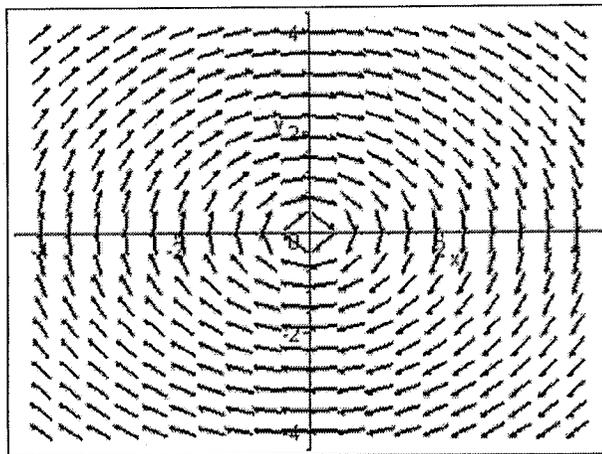


Figure 3.1 : représente le champ de vecteurs du système linéaire classique (3.17)

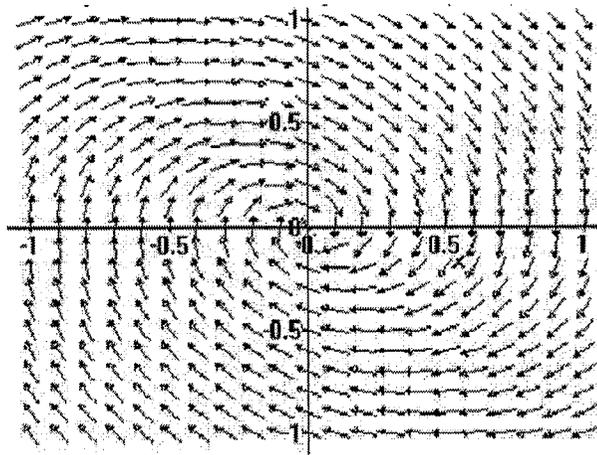


Figure 3.1 : représente le champ de vecteurs du système linéaire optimal (3.19)

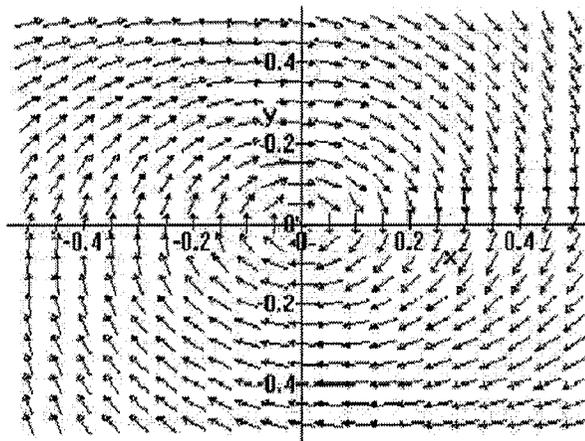


Figure 3.3 : représente le champ de vecteurs du système non linéaire (3.16)

2^{ème} Cas: $a = 1$, le système (3.15) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + y(x^2 + y^2) \end{cases}, (0,0.1) \quad (3.22)$$

Dans ce cas, on savait au départ, l'existence du problème posé par la convergence de l'intégrale définie par

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt. \quad (3.23)$$

Dans le cas présent de dimension 2, on calcule l'intégrale entre 0 et $-\infty$, c'est à dire

$$G(A) = \int_0^{-\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt. \quad (3.24)$$

La procédure de linéarisation optimale donne le résultat suivant

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 5.08221 \cdot 10^{-3} & 1 \\ -1 & 5.094196 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.0822 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 5.09416 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\tilde{A} = M + r(x_0),$$

et dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 5.088205 \cdot 10^{-3} + i \\ \lambda_2 = 5.088205 \cdot 10^{-3} - i. \end{cases} \quad (3.27)$$

$\text{Re}(\lambda_1^*) > 0$ et $\text{Re}(\lambda_2^*) > 0$. La linéarisation optimale est instable en faisant apparaître l'origine comme un foyer. L'origine alors est asymptotiquement instable.

Pour le vérifier sur l'équation non linéaire, prenons comme fonction de Lyapunov

$$V(X) = x_1^2 + x_2^2 \text{ qui est positive (définie positive)}. \quad (3.28)$$

Calculer la dérivée de cette fonction le long de la trajectoire, équivaut à prendre la dérivée $\dot{V}(X) = \frac{dV}{dt}$, soit

$$\dot{V}(X) = \frac{dV}{dt} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2. \quad (3.29)$$

En remplaçant \dot{x}_1 et \dot{x}_2 par les équations du système de départ (3.16), on obtient

$$\dot{V}(X) = -2(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0. \quad (3.30)$$

$\dot{V}(X)$ est donc définie négative. D'autre part, $V(X)$ est décroissante; ($|X| \rightarrow 0$, $V(X) \rightarrow 0$) et radialement illimitée car $|X| \rightarrow \infty \rightarrow V(X) \rightarrow \infty$, l'équilibre est donc asymptotiquement stable globalement.

Les figures (3.4) et (3.5) montrent respectivement les champs de vecteurs du système linéaire optimal (3.25) et du système non linéaire (3.22)

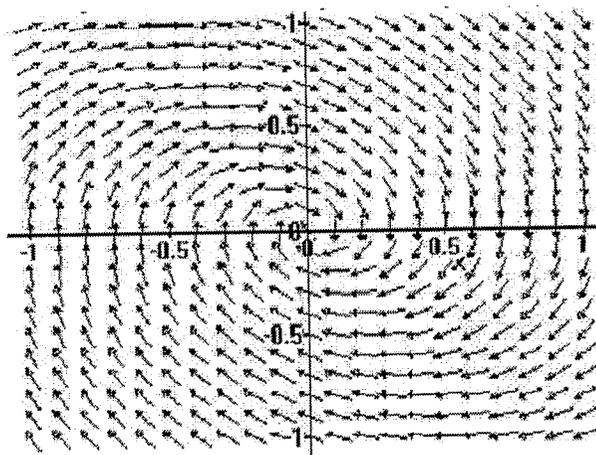


Figure 3.4 : représente le champ de vecteurs du système linéaire optimal (3.25)

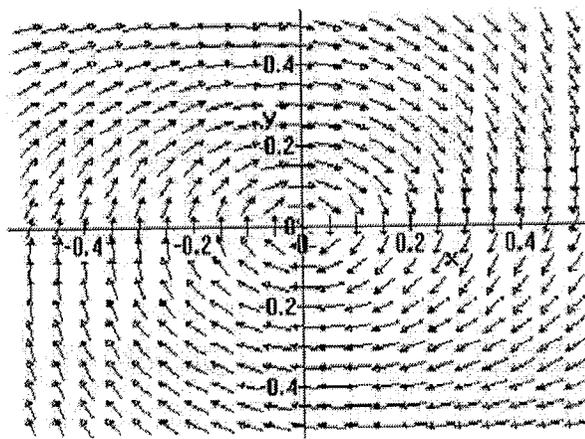


Figure 3.5 : représente le champ de vecteurs du système non linéaire (3.22)

Remarque 3.3 Dans les deux exemples que nous venons de voir, il y a lieu de noter que le système non linéaire s'écrit après application de la méthode de dérivation optimale comme suit

$$\begin{cases} \tilde{A} = M + r(x_0) \\ x_0 = x(0) \end{cases} \quad (3.31)$$

ou encore

$$\tilde{A} = DF(0) + r(x_0),$$

avec

$$r(X_0) = \left[\int_0^{+\infty} G(e^{tA}x_0) [e^{tA}x_0]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} [e_0^{tA}x_0] [e_0^{tA}x_0]^T dt \right]^{-1}. \quad (3.32)$$

Le premier terme étant linéaire, le deuxième terme, qui est en fait la linéarisation optimale de la fonction non linéaire $G(x)$, devient dépendant de la donnée initiale x_0 .

Tout se passe comme si on avait perturbé $DF(0)$, en écrivant la matrice optimale de la forme

$$\tilde{A} = DF(0) + o(\|x_0\|). \quad (3.33)$$

Dans ce qui suit, nous donnerons la signification de $o(\|x_0\|)$ et son influence sur l'étude de la stabilité du système (3.12)

3.6 Perturbation de $DF(0)$

Nous allons considérer l'équation suivante

$$F(x) = Mx + G(x), \quad x(0) = x_0 \quad (3.34)$$

où

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Les valeurs propres de M sont égales à $\pm i$.

$x \in \mathbb{R}^2$, $G(x) = a\Phi(\|x\|)x$ avec $\Phi(z) > 0$ $z > 0$ telle que $\Phi(\|x\|) = o(\|x\|)$.

On fixe $x_0 \neq 0$ et on définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'application $\varphi : A \rightarrow \varphi(A)$ telle que

$$\varphi(A) = \left[\int_0^{+\infty} F(e^{tA}x_0) [e^{tA}x_0]^T dt \right] [\Gamma(A)]^{-1} \quad (3.36)$$

$$= M + \left[\int_0^{+\infty} G(e^{tA}x_0) [e^{tA}x_0]^T dt \right] [\Gamma(A)]^{-1}. \quad (3.37)$$

On pose

$$r(A) = \left[\int_0^{+\infty} G(e^{tA}x_0) [e^{tA}x_0]^T dt \right] [\Gamma(A)]^{-1} \quad (3.38)$$

avec

$$\Gamma(A) = \int_0^{+\infty} [e^{tA}x_0] [e^{tA}x_0]^T dt. \quad (3.39)$$

Maintenant, on construit l'approximation $A_{j+1} = \varphi(A_j)$, avec

$$A_{j+1} = \varphi(A_j) = M + r(A_j) \quad (3.40)$$

La matrice initiale A_0 étant $A_0 = DF(x_0)$, on suppose que G à été choisi tel que $\sigma(A_0)$ soit très proche de celui de M . On choisit x_0 voisin de 0 pour que $r(A_0)$ soit très petit dans un voisinage de x_0 . $e_0^{tA_0}x_0$ tend exponentiellement vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, et $\Gamma(A_0)$ est définie positive.

En posant $r(A)$ sous la forme (3.38), on peut construire la suite d'approximation $A_{j+1} = \varphi(A_j)$, il vient que

$$A_{j+1} = M + r(A_j) \quad (3.41)$$

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses de la présente section, si $\|G\|$ est aussi petit que nécessaire et $DG(x)$ est uniformément bornée,*

Theorem 5 *alors*

$$\text{sgn}(\text{trace}(\tilde{A})) = \text{sgn}(a) \quad (3.42)$$

Preuve. Le calcul de la trace de \tilde{A} donne

$$tr(A_{j+1}) = tr\left(M + \left[\int_0^{+\infty} G(e^{tA_j}x_0)(e^{tA_j}x_0)^T dt\right] [\Gamma(A_j)]^{-1}\right) \quad (3.43)$$

$$= tr(M) + tr\left(\left[\int_0^{+\infty} G(e^{tA_j}x_0)(e^{tA_j}x_0)^T dt\right] [\Gamma(A_j)]^{-1}\right), \quad (3.44)$$

or $tr(M) = 0$, il s'ensuit que

$$tr(A_{j+1}) = tr\left(\left[\int_0^{+\infty} G(e^{tA_j}x_0)(e^{tA_j}x_0)^T dt\right] [\Gamma(A_j)]^{-1}\right). \quad (3.45)$$

En vertu de la propriété $tr(AB) = tr(BA)$, il vient

$$\begin{aligned} tr(A_{j+1}) &= \int_0^{+\infty} tr\left([\Gamma(A_j)]^{-1} \left[G(e^{tA_j}x_0)(e^{tA_j}x_0)^T\right]\right) dt. \\ &= \int_0^{+\infty} tr\left([\Gamma(A_j)]^{-1} G(e^{tA_0}x_0)(e^{tA_j}x_0)^T\right) dt. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Sachant que $([\Gamma(A_j)]^{-1} G(e^{tA_j}x_0)) = C$ est un vecteur colonne et $((e^{tA_j}x_0)^T) = L$ est un vecteur ligne, et en tenant compte de $tr(CL) = tr(LC) = LC$, nous pouvons écrire

$$tr(A_{j+1}) = \int_0^{+\infty} (e^{tA_j}x_0)^T [\Gamma(A_j)]^{-1} G(e^{tA_0}x_0) dt \quad (3.47)$$

Dans le cas ou $G(x) = a\Phi(\|X\|)$ alors

$$tr(A_{j+1}) = \int_0^{+\infty} (e^{tA_j}x_0)^T [\Gamma(A_j)]^{-1} (a\Phi(\|e^{tA_j}x_0\|)(e^{tA_j}x_0)) dt \quad (3.48)$$

$$= a \int_0^{+\infty} \Phi(\|e^{tA_j}x_0\|)(e^{tA_j}x_0)^T [\Gamma(A_j)]^{-1} (e^{tA_j}x_0) dt. \quad (3.49)$$

Les termes à l'intérieur de l'intégrale étant positifs, $tr(\tilde{A})$ dépend alors du signe de (a) , et par conséquent on a

$$\text{sgn}\left(tr(\tilde{A})\right) = \text{sgn}(a), \quad (3.50)$$

le signe de la trace est donc lié à celui de la perturbation $G(X)$. \square

Remarque 3.4 De plus, par un calcul déjà fait par Benouaz et Arino [19], on a

$$\begin{aligned} \text{trace} \left(r \left(\tilde{A} \right) \right) &\leq aC [O (\|x_0\|)] \\ &\leq a [O (\|x_0\|)]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ceci montre l'influence des conditions initiales sur l'étude de la stabilité de l'équilibre envisagé.

Ce résultat est important dans le sens où il suggère qu'il est possible de retrouver un résultat de stabilité (cas d'un centre) en étudiant la trace de la matrice optimale. De plus dans les exemples présentés les courbes intégrales du système non linéaire et du système optimal étudiés ont la même allure.

3.6.1 Estimation de la trace de $r(A)$

Sachant que le spectre de $\sigma(A_j)$ possède deux valeurs propres complexes conjuguées, on peut donc écrire e^{tA_j} avec $\delta_j = \text{tr}(A_j)$, sous la forme

$$e^{tA_j} = \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} = e^{-\delta_j t} R(t) \quad (3.52)$$

et avec $[\gamma] = \left[(R_j(t))^T [\Gamma(A_j)] (R_j(t)) \right]$. On se place dans le cas où G est une fonction qui vérifie $G(x) = -\Phi(\|x\|)$, on a

$$\text{tr}(A_{j+1}) = - \int_0^{+\infty} \Phi(e^{-\delta_j t} \|x_0\|) (e^{-2\delta_j t} x_0) [\gamma] dt. \quad (3.53)$$

En utilisant la relation

$$\begin{aligned} \text{tr}(r(A)) &= - \int_0^{+\infty} \Phi(\|e^{tA} x_0\|) (e^{tA} x_0)^T [\Gamma(A)]^{-1} (e^{tA} x_0) dt. \\ &\leq -\lambda_{\min} \int_0^{+\infty} \Phi(\|e^{tA} x_0\|) \|e^{tA} x_0\|^2 dt \end{aligned} \quad (3.54)$$

la linéarisé classique possède une paire de valeurs propres purement imaginaires où le paramètre (a) est pris comme paramètre de bifurcation. Les résultats que nous allons présenter montrent l'existence d'une bifurcation Andronov-Hopf à la valeur critique de bifurcation $a = 0$.

Une autre analyse en résolvant le problème initial par utilisation des coordonnées polaires (r, θ) .

L'objectif de est de comparer et valider les résultats obtenus par la méthode de dérivation optimale.

Supposons

$$x = r \cos(\theta) \text{ et } y = r \sin(\theta) \quad (3.62)$$

pour dériver l'équation différentielle, on note

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ alors } x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}$$

En utilisant l'équation (3.15), on obtient

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x(y + a(x^2 + y^2)) + y(-x + ay(x^2 + y^2)) \\ &= a(x^2 + y^2)^2 = ar^4 \end{aligned}$$

alors

$$\dot{r} = ar^3.$$

L'utilisation de ce résultats et de nouveau la première équation dans (3.15), on trouve

$$\begin{aligned} y + axr^2 &= y + ax(x^2 + y^2) = \dot{x} = \dot{r} \cos(\theta) - r\dot{\theta} \sin(\theta) \\ &= ar^3 \cos(\theta) - r\dot{\theta} \sin(\theta) = ay r^2 - \dot{\theta} y \end{aligned}$$

alors on obtient

$$\dot{\theta} = -1$$

Ce résultat montre que si $a < 0$ alors $r(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$. Dans ce cas, l'origine est asymptotiquement stable et les courbes intégrales sont des spirales convergeantes. Si $a = 0$ alors $r(t) = r_0, \forall t$, l'origine est un centre (courbe intégrale sous forme de cercle de rayon r_0). Finalement, si $a > 0$ alors $r(t) \rightarrow +\infty$, et l'origine est instable. Ces résultats est en accord avec la conclusion donnée par la dérivée optimale.

Exécution du logiciel Auto2000 donne les informations du tableau (III-1) (première exécution) et le tableau (III-2) (deuxième exécution)

Les résultats issus de la première exécution sont représentés dans le **tableau III-1**

BR	PT	TY	LAB	PAR(0)	L2-NORM	U(1)	U(2)
1	1	EP	1	-1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	10	HB	2	1.00000E-17	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1	20	EP	3	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

Les résultats issus de la deuxième exécution sont représentés dans le **tableau III-2**

BR	LAB	PAR(0)	L2-NORM	MAX(1)	MAX(2)	PERIOD
-2	4	1.149038E-14	4.00000E-01	3.999710E-01	3.999660E-01	6.283185
-2	5	2.480256E-15	9.00000E-01	8.999145E-01	8.998145E-01	6.283185
-2	6	9.969501E-16	1.40000E+00	1.399865E+00	1.399828E+00	6.283185
-2	7	5.306941E-16	1.90000E+00	1.899815E+00	1.899772E+00	6.283185
-2	8	4.38281E-16	2.00000E+00	1.99981E+00	1.99976E+00	6.283195

Les Figure 3.6 et 3.7 représentent le diagramme de bifurcation du système (3.15) avec (a) comme paramètre de bifurcation. Dans les tableaux III-1 et III-2, BR est le point de branchement, PT pour le nombre associé à un point, TY pour le type de la solution, $PAR(0)$ le paramètre de bifurcation (a), LAB pour l'étiquette de la solution, $U(1)$ et $U(2)$ pour les variables x et y .

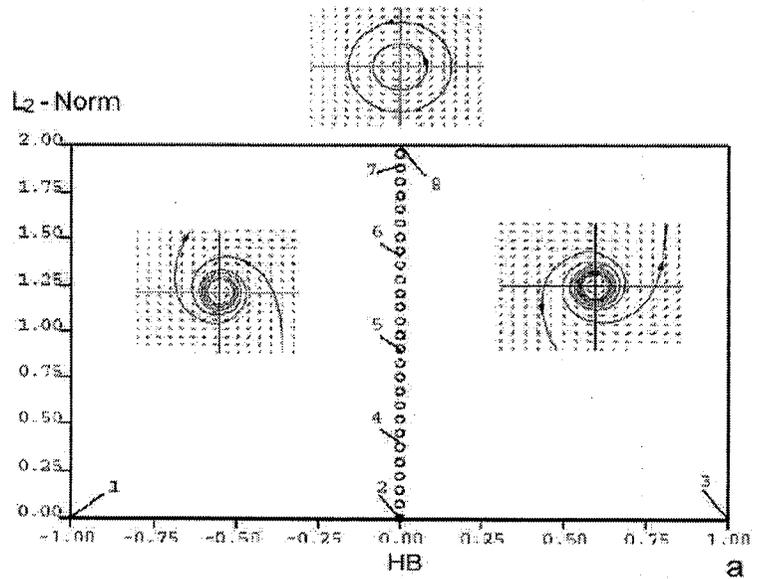


Figure 3.6 : représente le digramme de bifurcation du système non linéaire (3.22)

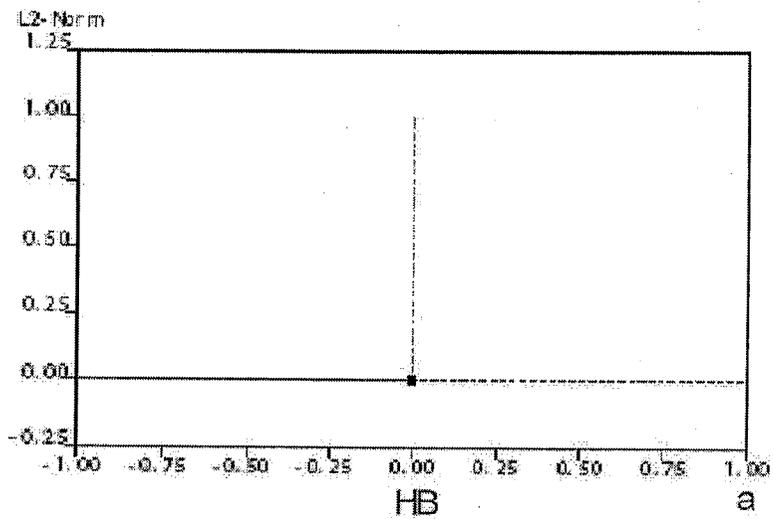


Figure 3.7 : représente le digramme de bifurcation du système non linéaire (3.22)

Trait plein : solution stable, trait en pointillé: solution instable.

Le diagramme de bifurcation de la figure 3.6 montre que pour $a < 0$, on a une courbe qui s'enroule en spirale (spirale qui converge vers 0 quand t augmente). Dans ce cas l'origine est asymptotiquement stable (foyer stable) (ceci confirme les résultats obtenus par la dérivée optimale (voir figure 3.2).

Pour $a = 0$, caractérisé par **HB**, le caractère de la solution change, ce point représente une bifurcation Hopf (Tableau III-1) avec échange de stabilité. Ce changement est souvent accompagné par l'apparition d'orbites périodiques encerclant le point d'équilibre à l'origine. Dans ce cas toutes les solutions sont périodiques et l'origine est un centre. Pour cette valeur du paramètre existe des orbites périodiques entourant l'origine, ces solutions sont instables ou leur stabilité est inconnue (marqués respectivement 4, 5, 6, 7, 8 dans le Tableau III-2).

Pour $a > 0$ l'origine devient instable et l'ensemble des solutions diverge en spirale (voir figures 3.4 - 3.5).

Figure 3.7 représente un résumé de l'analyse de la stabilité obtenue par Auto2000 (les détails sont enregistrés dans un fichier de données). Ces résultats confirment ceux obtenus par la dérivée optimale pour le système à deux dimensions (3.22). En examinant la trace de la matrice optimale, puisque pour $a < 0$, l'origine est asymptotiquement stable (courbe en trait plein figure 3.6), la partie réelle des valeurs propres est strictement négative, pour $a > 0$. La partie réelle devient positive et l'origine est instable (courbe en pointillé figure 3.7)

3.8 Conclusion

En conclusion, la réponse à la question relative à la relation entre les propriétés de la stabilité de l'équation linéaire obtenue par la dérivée optimale et celle de l'équation non-linéaire dans le cas vectoriel est très délicate. Généralement, quand la procédure converge, la matrice obtenue est stable. Toutes ces considérations nous amènent à la conjecture suivante :

Conjecture 6 *Si la procédure de dérivation optimale converge et la limite de la suite A_j est exponentiellement stable (ou si A_j a un point fixe stable), le système non-linéaires est stable.*

Cette étude montre que les conditions dans lesquelles la conjecture a été formulée peut être accomplie, à savoir l'existence, l'unicité et la convergence vers un point fixe stable [20].

La procédure de calcul nous permet également de résoudre les problèmes où la linéarisation classique ne peut pas répondre au problème de la stabilité ou n'existe pas.

L'analyse de bifurcation avec le logiciel de continuation et d'analyse de bifurcation AUTO2000 confirme les résultats obtenus par la dérivée optimale. Il a également montré sa capacité à être un outil puissant pour l'analyse de la stabilité de ce type d'équation différentielle ordinaire à deux-dimensions. du fait qu'on peut avoir un résultat important est direct de la stabilité est prouvé en examinant la trace de la matrice optimale obtenue pour ce type particulier d'équations. Ainsi la dépendance entre la trace de la matrice optimale et les valeurs propres permet de détecter dans quel sens ces valeurs propres traversent l'axe des imaginaires et par la suite définir le type de bifurcation. (*super critique* ou *sous critique*).

QUATRIEME CHAPITRE

APPLICATIONS

Chapitre 4

Applications

4.1 Application de la généralisation de Linéarisation Optimale d'une Equation Différentielle Ordinaire Non linéaire

4.1.1 introduction

Une grande famille des circuits électroniques d'aspect non linéaire, sont modélisés par des équations différentielles ordinaires, où les méthodes de linéarisation jouent un rôle très important pour l'analyse et la description du comportement réel de ces derniers. En occurrence, la méthode de linéarisation classique, dans le but d'améliorer ces techniques de montrer de nouvelles techniques d'approximation et de linéarisation capables de remplacer d'une façon satisfaisante les équations non linéaires initiales. Le but étant de construire des nouveaux algorithmes numériques utilisés de plus en plus systématiquement, en se servant de l'ordinateur comme outil d'investigation.

En réalité, peu de systèmes sont modélisés par des équations linéaires; en électronique, par exemple, les circuits linéaires ne peuvent remplir toutes les fonctions désirées par l'ingénieur. Dès lors que les effets non linéaires sont indispensables pour assurer la majo-

rité des fonctions. Généralement, les modèles non linéaires sont innombrables et restent le plus souvent inclassables; en effet, ils présentent des effets complexes et surprenants tels que les bifurcations, le chaos. Les scientifiques ne disposent pas de techniques générales adéquates pour les traiter. On parvient cependant par construction ou par certains choix, à rester dans le domaine de comportement linéaire. Le modèle linéarisé est très séduisant pour sa simplicité des calculs, l'existence d'une théorie relativement complète de d'algèbre linéaire.

Les méthodes de linéarisation jouent un rôle important dans l'analyse des ces systèmes (ex: circuit électronique dans l'ingénierie, la biologie, la chimie...). La principale méthode pour étudier le comportement et la stabilité des solutions d'une équation différentielle ordinaire au voisinage d'un point d'équilibre est de considérer l'équation obtenue en différenciant (au sens Fréchet) l'équation non linéaire en ce point. Cependant, il y a trois écueils pour la bonne utilisation de cette méthode [19]:

1. Si la non-linéarité n'est pas assez régulière au voisinage du point d'équilibre et si $DF(0)$ n'existe pas (cas où la fonction non linéaire définissant une équation non régulière et donc non différentielle), alors, on ne peut pas calculer la dérivée au sens de Fréchet.
2. Le dérivé de l'équation non linéaire est nul.
3. Cas où les valeurs propres sont purement imaginaires à partie réelles nulles.

Le comportement de la solution au voisinage de ce point ne permet pas de rien conclure. Dans le présent chapitre, nous proposons une méthode qui associe une équation linéaire à une équation différentielle non linéaire ordinaire au voisinage du point d'équilibre, définie comme une généralisation de la linéarisation optimale. c'est une sorte de linéarisation globale contrairement à la perturbation non-linéaire d'une équation linéaire, qui se distingue de celle linéaire classique au voisinage d'un point stationnaire.. L'approche suivie est de type "optimisation". Nos résultats sont à la suite des travaux menés par Vujanovic [8] et Jordan et al.[10], [9][11]. Les premières sections sont consacrées à présenter un formalisme de la méthode de linéarisation dans le cas scalaire et vectoriel. Une dernière partie est consacrée à l'application de la méthode de linéarisation optimale généralisée à un circuit

électronique non linéaire afin d'illustrer la procédure théorique.

4.1.2 Linéarisation optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire

Celle-ci a été introduite par Vujanovic (1973), initialement pour l'étude des vibrations non linéaires [13]. Elle a été appliquée par la suite à l'étude de la non linéarité dans le cas de transfert de chaleur [8], [9]. Récemment, elle a été utilisée par Jordan et al. [11] pour l'analyse des systèmes non linéaires régissant les régimes transitoires de circuits électroniques ainsi que la linéarisation d'équation d'état [11], [10]. Dans leur étude, Jordan et al. [11], [10] ont utilisé la méthode de linéarisation optimale pour résoudre un problème de non-linéarité dans les équations d'état modélisant le fonctionnement de circuits électroniques. Le but recherché étant d'améliorer la linéarisation classique.

Partant de l'équation

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

les auteurs supposaient que :

- i) La solution de l'équation du système non linéaire (4.1) existe et elle est unique.
- ii) Les circuits où les modèles étudiés oscillent lentement avec le temps.
- iii) Les systèmes non linéaires étudiés et les systèmes linéaires obtenus sont stables, c'est à dire que la matrice de l'équation linéarisée admet des valeurs propres dont les parties réelles sont négatives.

Le but étant d'associer une application linéaire à l'équation non linéaire (4.1) de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A^* x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

En minimisant l'écart entre (4.1) et (4.2)

$$\varepsilon(t) = F(x(t)) - Ax(t). \quad (4.3)$$

au sens des moindres carrés le long de la solution de l'équation $A = DF(0)$ ($DF(0)$ étant la Jacobienne de F en 0).

La résolution du problème d'optimisation ainsi posée se réduit à la résolution du système d'équations suivant

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}^* \int_0^{+\infty} dt x_k x_j = \int_0^{+\infty} dt x_j f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n), \quad (4.4)$$

ce qui permet d'aboutir au problème linéaire optimale.

$$\dot{x} = A^* x \quad (4.5)$$

aux même conditions initiales que le problème non linéaire.

Inconvénients

Cette méthode présente des inconvénients qui peuvent se résumer comme suit

1. Si $DF(0)$ n'existe pas: Cas où la fonction non linéaire définissant l'équation est non régulière et donc non différentiable.
2. Si $DF(0) = 0$.
3. Si $DF(0)$ est stable, mais non pas asymptotiquement stable.

Dans ces trois cas, on ne peut pas appliquer la méthode de linéarisation optimale. Dans la section suivante nous allons donner une généralisation de cette méthode, sous les considérations suivantes

- Précisions sur l'existence et l'unicité de la meilleure approximation au sens des moindres carrés.
- Choix de la matrice initiale $A_0 = DF(x_0)$ à la place de $A_0 = DF(0)$.
- Donner une forme générale à la matrice optimale, au lieu de résoudre le système en (a_{ij}) tel que présenté par Jordan et al.

— Précision sur le choix de la matrice initiale A_0 .

4.1.3 Méthode de généralisation de la linéarisation optimale

Formalisme Théorique

Formulation du problème Dans la généralisation de la linéarisation optimale développée dans la référence [30], Chikhaoui et al. ont cerné les inconvénients liés à l'utilisation de cette méthode en insistant en particulier sur les points suivants :

1. Si $DF(0)$ n'existe pas: Cas où la fonction non linéaire, définissant l'équation comporte des fonctions de type valeur absolue ($|\cdot|$), et donc non différentielle en 0.

— Si $DF(0) = 0$.

2. Si $DF(0)$ est stable, mais non pas asymptotiquement stable.

Ce qui a permis de mettre en valeur certains aspects théoriques de cette linéarisation et par conséquent une bonne utilisation.

Rappelons toutefois la procédure suivie pour obtenir la matrice définissant la linéarisation optimale.

On considère l'équation différentielle ordinaire non linéaire de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

$x \in R^n$, F est définie dans un certain ouvert Ω à valeurs dans R^n , avec les hypothèses suivants:

H1) $F(0) = 0$.

H2) Le spectre $\sigma(DF(x))$ est contenu dans l'ensemble $\{z : \text{Re}z < 0\}$ pour tout $x \neq 0$ dans un voisinage de 0, où $DF(x)$ existe.

H3) F est continue, Lipschitzienne, de constante de Lipschitz γ .

Le problème qu'on pose est de trouver une équation différentielle ordinaire linéaire de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{A}x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

$LA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à déterminer. La méthode consiste à déterminer une application linéaire de la forme (??) qui approche l'équation non linéaire (4.6) dans les mêmes conditions initiales. Elle est basée sur la minimisation au sens des moindres carrés de l'écart $\varepsilon(t)$ entre l'équation non linéaire $F(x(t))$ et l'équation linéaire $Ax(t)$, soit

$$\varepsilon(t) = F(x(t)) - \tilde{A}x(t). \quad (4.7)$$

Pour ce faire, on considère la fonctionnelle suivante

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt. \quad (4.8)$$

x est juste une fonction définie sur $[0, +\infty[$, bornée, continue et telle que $x \in L^1(0, +\infty)$ et $F(x(\cdot)) \in L^1(0, +\infty)$. Par la suite, on introduira des Fonctions $x(t)$ qui représentent aussi des solutions des problèmes linéaires. L'approche suivi est de type optimisation au sens des moindres carrés, l'existence et l'unicité de la solution A dans le sens des moindres carrés est assurés par les théorèmes généraux de l'approximation [32],[33][34].

Formalisme En différentiant (4.8) par rapport a A le long d'une fonction x , on obtient

$$DG(A)\alpha = 2 \int_0^{+\infty} \langle Ax(t) - F(x(t)), \alpha x(t) \rangle dt \quad (4.9)$$

pour toute matrice α . En particulier, pour les matrices α telles que $\alpha_{l,m} = 1$; $\alpha_{i,j} = 0$, si $(i,j) \neq (l,m)$, nous avons

$$\int_0^{+\infty} \langle Ax(t) - F(x(t)), \alpha x(t) \rangle dt = \int_0^{+\infty} [Ax(t) - F(x(t))]_l x_m(t) dt \quad (4.10)$$

supposons que A minimise (4.8) le long d'une fonction donnée x . La relation (4.10) est égale à zéro, et

$$\int_0^{+\infty} [Ax(t) - F(x(t))]_l x_m(t) dt = 0, \forall 1 \leq l, m \leq n. \quad (4.11)$$

En notation $(a_{i,j})$ le terme général de la matrice A , on obtient

$$\sum a_{l,j} \left(\int_0^{+\infty} x_j(t) x_m(t) dt \right)_{1 \leq l, m \leq n} = \left(\int_0^{+\infty} f_l(x(t)) x_m(t) dt \right)_{1 \leq l, m \leq n} \quad (4.12)$$

En introduisant la fonction Γ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} [x(t)][x(t)]^T dt = \left(\int_0^{+\infty} x_j(t) x_m(t) dt \right)_{1 \leq l, m \leq n}, \quad (4.13)$$

on obtient

$$A = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))][x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1} \quad (4.14)$$

A est définie et unique à condition que

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} [x(t)][x(t)]^T dt \quad (4.15)$$

soit inversible.

Procédure La procédure de calcul se fait en deux étapes. La matrice initiale est la matrice Jacobienne de F en x_0 qui, en principe, est un point arbitraire pris dans un voisinage de 0 et tel que F soit différentiable en x_0 .

Considérons le système (4.16)

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)), x(0) = x_0. \quad (4.16)$$

Première étape:

Calcul de $A_0 = DF(x_0)$

Deuxième étape:

Pour calculer A^* à partir de A_0 , on doit d'abord résoudre l'équation

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y(t), y(0) = x_0. \quad (4.17)$$

On notera la solution $y_0(t)$ du système (4.17) s'écrit

$$y_0(t) = e^{A_0 t} x_0. \quad (4.18)$$

La minimisation de la fonctionnelle au sens des moindres carrées

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y_0(t)) - A y_0(t)\|^2 dt \quad (4.19)$$

nous conduit à \tilde{A}

$$\tilde{A} = \left[\int_0^{+\infty} [F(e^{A_0 t} x_0)] [e^{A_0 t} x_0]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} [e^{A_0 t} x_0] [e^{A_0 t} x_0]^T dt \right]^{-1}. \quad (4.20)$$

En introduisant la fonction Γ définie par

$$\Gamma(x) = \left[\int_0^{+\infty} [e^{A_0 t} x_0] [e^{A_0 t} x_0]^T dt \right], \quad (4.21)$$

la matrice linéaire optimale \tilde{A} s'écrit

$$\tilde{A} = \left[\int_0^{+\infty} [F(e^{A_0 t} x_0)] [e^{A_0 t} x_0]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1}. \quad (4.22)$$

Où \tilde{A} est définie et unique à condition que Γ soit inversible.

\tilde{A} est par définition la linéarisation optimale de l'application non linéaire F en x_0 .

Cas où l'application F est linéaire Si F est linéaire et le spectre $\sigma(F)$ est contenu dans le plan complexe à partie réelle strictement négative, dans ce cas l'équation (4.12)

s'écrit

$$A\Gamma(x) = F\Gamma(x) \quad (4.23)$$

il est clair que $A = F$ est une solution. Elle est unique si $\Gamma(x)$ est inversible.

On peut donc affirmer que la linéarisation optimale d'un système linéaire est le système lui même.

Cas général Considérons un système général d'équations non linéaires avec une non linéarité de la forme

$$F(x) = Mx + \tilde{F}(x), \quad x(0) = x_0 \quad (4.24)$$

où M est linéaire.

Le calcul de la matrice \tilde{A} donne

$$\tilde{A} = \left[\int_0^{+\infty} [F(e^{A_0 t} x_0)] [e^{A_0 t} x_0]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1}. \quad (4.25)$$

qui peut s'écrire comme suit

$$\tilde{A} = \left[M\Gamma(x) + \left(\int_0^{+\infty} [\tilde{F}(x)] [x(t)]^T dt \right) \right] [\Gamma(x)]^{-1} \quad (4.26)$$

Finalement

$$\tilde{A} = M + \left[\int_0^{+\infty} [\tilde{F}(x)] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1}. \quad (4.27)$$

Donc, $\tilde{A} = M + A_1$ avec

$$A_1 = \left[\int_0^{+\infty} [\tilde{F}(x)] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1}. \quad (4.28)$$

Si en particulier, certaines composantes de F sont linéaires, alors les composantes correspondantes de \tilde{F} sont égales à zéro, et les composantes correspondantes de \tilde{A} sont celles de F .

Donc, si la composante f_k de F est linéaire, alors elle est nulle, la $k^{\text{ième}}$ ligne de la matrice

optimale \tilde{A} est égale à f_k .

Cas scalaire Nous donnons dans cette section l'expression de la linéarisation optimale dans le cas scalaire. Considérons l'équation différentielle scalaire non linéaire suivante

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.29)$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dans ce cas les hypothèses sur f sont les suivantes

H1) $f(0) = 0$.

H2) $f'(0) < 0$; en tout point où $f'(x)$ existe dans l'intervalle $] -\alpha, +\alpha[$, $\alpha > 0$.

H3) f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Choisissons $x_0 \in] -\alpha, +\alpha[$ telle que $f'(x)$, on pose $a_0 = f'(x_0)$ et en utilisant la procédure exposée dans le section 4.1.3.

on résout l'équation

$$\frac{dx}{dt} = a_0 x(t), x(0) = x_0, \quad (4.30)$$

qui donne comme solution

$$x(t) = e^{(a_0 t)} x_0. \quad (4.31)$$

En substituant, dans l'expression (1.18) f à F , on obtient alors

$$\tilde{a} = \frac{\left(\int_0^{+\infty} f(e^{a_0 t} x_0) e^{a_0 t} dt \right)}{\left(\int_0^{+\infty} e^{2a_0 t} dt \right)} \frac{1}{x_0}. \quad (4.32)$$

On vérifie que, avec $x_0 \neq 0$, $f(x(t))$ est presque partout dérivable

$$\frac{d}{dt} [f(e^{a_0 t} x_0)] = f'(e^{a_0 t} x_0) e^{a_0 t} x_0 a_0. \quad (4.33)$$

D'où

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} f(x(t)) e^{a_0 t} dt \\ &= \frac{1}{a_0} [f(x(t)) e^{a_0 t}]_0^{+\infty} - \frac{1}{a_0} \int_0^{+\infty} (f'(x(t)) e^{2a_0 t} dt) x_0 a_0, \end{aligned} \quad (4.34)$$

Enfin \tilde{a} s'écrit

$$\tilde{a} = 2 \left(\frac{f(x_0)}{x_0} + a_0 \int_0^{+\infty} f'(x(t)) e^{2a_0 t} dt \right). \quad (4.35)$$

En Changeant la variable t en $x(t)$ dans l'intégrale et après calculs, on obtient

$$\tilde{a}(x_0) = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(z) dz. \quad (4.36)$$

$\tilde{a}(x_0)$ est le résultat de la linearisation optimale dans le cas scalaire.

Remarque 4.1 *Le rôle de la linéarisation optimale pour l'étude de la stabilité [13], [?], dans le cas scalaire est évident du fait que dans ce cas, la fonction $x \rightarrow v(x) = x^2 \tilde{a}(x)$ est une fonction de Lyapunov de l'équation non linéaire (4.29). Donc si $x(t)$ est une solution de l'équation (4.29)*

$$[(x(t))^2 \tilde{a}(x(t))] \quad (4.37)$$

par dérivation par rapport à t , on obtient alors

$$\frac{d}{dt} [(x(t))^2 \tilde{a}(x(t))] = (f(x(t)))^2. \quad (4.38)$$

Puisque, d'un autre côté $v(x) < 0$; (à cause l'hypothèse H1 et H2), nous obtenons $v(x(t)) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, et donc $x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Ordre de la linéarisation

Pour estimer l'ordre de la linéarisation, nous allons évaluer la fonctionnelle définie par

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y(t)) - Ay(t)\|^2 dt \quad (4.39)$$

A étant une matrice quelconque. on part d'une matrice A_0 , la matrice optimale définissant la linéarisation optimale est obtenue en minimisant la fonctionnelle

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y_0(t)) - \tilde{A}y_0(t)\|^2 dt \quad (4.40)$$

où $y_0(t)$ est la solution de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y(t), \quad y(0) = x_0 \quad (4.41)$$

on a la relation entre la matrice \tilde{A} et A

$$\int_0^{+\infty} \|F(\tilde{y}(t)) - \tilde{A}\tilde{y}(t)\|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} \|F(\tilde{y}(t)) - A\tilde{y}(t)\|^2 dt \quad (4.42)$$

où $\tilde{y}(t)$ est la solution de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = \tilde{A}y(t). \quad (4.43)$$

Par conséquent nous avons

$$\int_0^{+\infty} \|F(\tilde{y}(t)) - \tilde{A}\tilde{y}(t)\|^2 dt = \inf_{\forall A \in M(R)} \int_0^{+\infty} \|F(\tilde{y}(t)) - A\tilde{y}(t)\|^2 dt \quad (4.44)$$

$\forall A \in M(R)$, tel que $\text{Re } \sigma(A) \subset]-\infty, 0[$.

En particulier, pour $A = DF(0)$, on a

$$\int_0^{+\infty} \|F(\tilde{y}(t)) - \tilde{A}\tilde{y}(t)\|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} \|F(\tilde{y}(t)) - DF(0)\tilde{y}(t)\|^2 dt. \quad (4.45)$$

Avec

$$\|\tilde{y}(t)\| \leq C \|x_0\| \quad \text{et} \quad \|F(x) - DF(0)x\| = O(\|x\|^2), \quad (4.46)$$

on obtient

$$\int_0^{+\infty} \left\| F(\tilde{y}(t)) - \tilde{A}\tilde{y}(t) \right\|^2 dt \leq O(\|x_0\|^2)^2. \quad (4.47)$$

nous allons évaluer la différence $\|x(t) - \tilde{y}(t)\|$, où x est la solution de l'équation (4.6) et \tilde{y} la solution l'équation linéaire optimale, les deux ayant la même valeur initiale. Evaluons maintenant la différence

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{d\tilde{y}}{dt} &= F(x(t)) - \tilde{A}\tilde{y}(t) \\ &= F(x(t)) - F(\tilde{y}(t)) + F(\tilde{y}(t)) - \tilde{A}\tilde{y}(t). \end{aligned} \quad (4.48)$$

De l'hypothèse *H3* in section 4, il vient

$$\frac{d}{dt} \|x(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \gamma \|x(t) - \tilde{y}(t)\| + \left\| F(\tilde{y}(t)) - \tilde{A}\tilde{y}(t) \right\|, \quad (4.49)$$

et en utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned} \|x(t) - \tilde{y}(t)\| &\leq \int_0^t e^{\gamma s} \left\| F(\tilde{y}(s)) - \tilde{A}\tilde{y}(s) \right\| ds \\ &\leq \left(\int_0^t e^{2\gamma(t-s)} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left\| F(\tilde{y}(s)) - \tilde{A}\tilde{y}(s) \right\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Pour $T > 0$, il existe $M \geq 0$ tel que

$$\|x(t) - \tilde{y}(t)\| \leq M \|x_0\|^2, \text{ pour } 0 \leq t \leq T, \quad (4.51)$$

et chaque x_0 au voisinage de 0, indépendant de T .

La méthode de linéarisation optimale est d'ordre deux au moins en fonction de la donnée initiale. En général, elle est du même ordre que la non-linéarité du problème.

4.1.4 Application

Nous présentons un exemple d'application afin d'illustrer l'efficacité et l'utilité de la théorie présentée dans la section . C'est le cas où la non linéarité n'est pas assez régulière

au voisinage du point d'équilibre et par conséquent les théorèmes de linéarisation classique ne sont pas applicables. En effet, la Jacobienne au point d'équilibre n'existe pas autrement dit $DF(0)$ n'existe pas : Cas où la fonction non linéaire, définissant l'équation comporte des fonctions de type valeur absolue ($|\cdot|$), et donc non différentiable en 0. Une telle situation peut être rencontrée, par exemple, dans le cas du circuit représenté par la figure 4.1 [42].

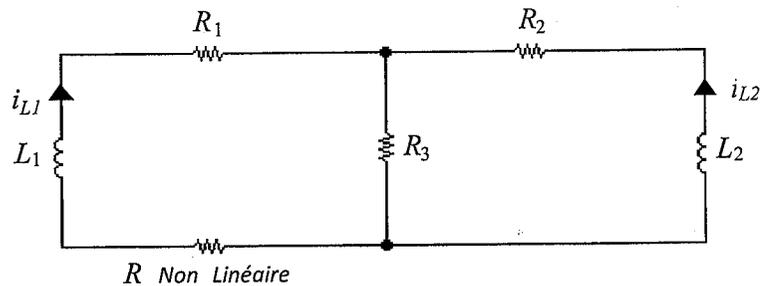


Figure 4.1. Circuit électronique avec une résistance non linéaire

Ce circuit contient une résistance non linéaire dont la caractéristique présente une non linéarité de type valeur absolue :

$$v_N = R_0 (i_N + |i_N|) \quad (4.52)$$

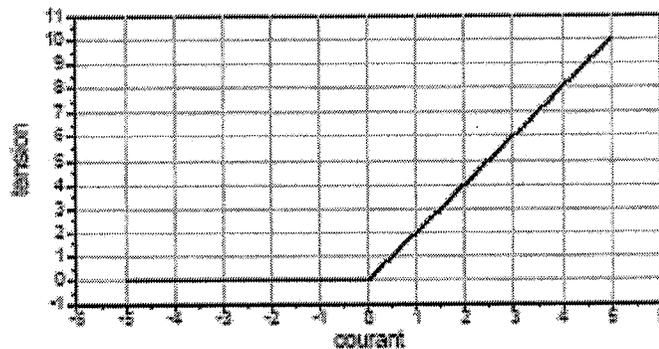


Figure 4.2 La caractéristique non linéaire

Les équations d'état définissant ce système sont

$$\begin{cases} \frac{di_{L_1}}{dt} = -\frac{R_1 + R_3 + R_0}{L_1} i_{L_1} - \frac{R_0}{L_1} |i_{L_1}| - \frac{R_3}{L_1} i_{L_2} \\ \frac{di_{L_2}}{dt} = -\frac{R_3}{L_2} i_{L_1} - \frac{R_2 + R_3}{L_2} i_{L_2}, \end{cases} \quad (4.53)$$

où

$$x = i_{L_1}, y = i_{L_2}. \quad (4.54)$$

En normalisant les valeurs des composants à 1, le système (4.53) devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - |x| - y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y. \end{cases} \quad (4.55)$$

la matrice jacobienne $DF(x)$ calculée au point initial $(x_0, y_0) = (0.5, 0.3)$

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

la matrice donnée par linéarisation optimale donne

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -3.9621 & -1.0554 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Pour $(x_0, y_0) = (-0.5, 0.3)$

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

la linéarisation optimale peut être écrite ainsi

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

Les Figure 4.3, 4.4 , 4.5, 4.6 et 4.7, représentent, respectivement les solutions du système non linéaire (4.55), comparées aux solutions du système linéaire optimal (4.57), pour la condition initiale $(x_0, y_0) = (0.5, 0.3)$, et l'erreur quadratique entre le système non linéaire (4.55) et le système linéaire optimal (4.57).

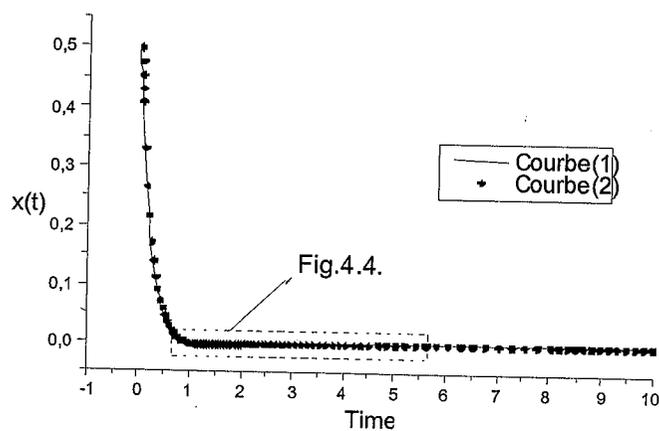


Figure 4.3. la variation en fonction du temps de la solution $x(t)$ pour la condition initiale $(x_0, y_0) = (0.5, 0.3)$.

Courbe(1) : correspond à la solution du système (4.55)

Courbe(2) : correspond à la solution du système (4.57)

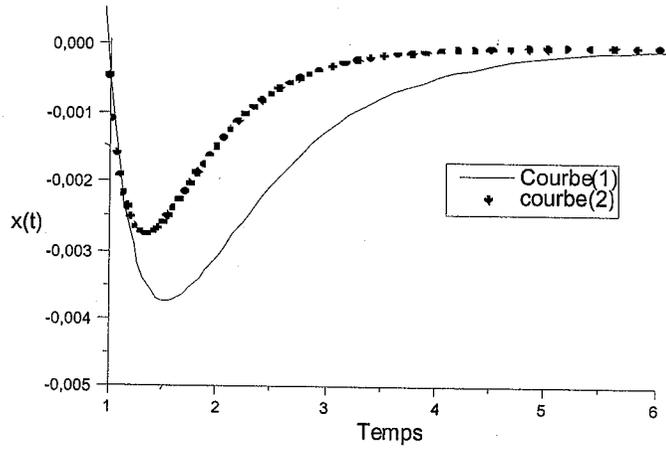


Figure 4.4. représente un zoom d'une partie de la solution $x(t)$

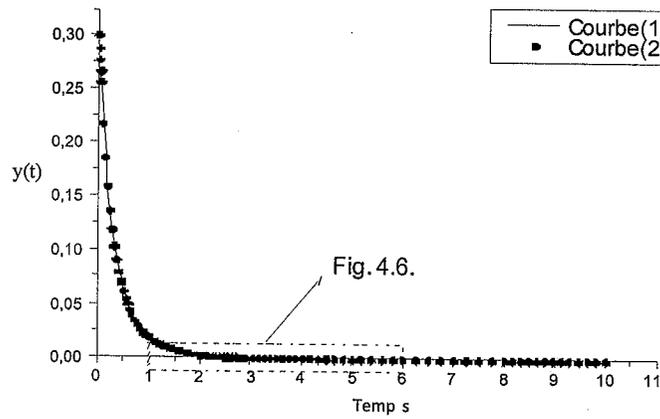


Figure 4.5. la variation en fonction du temps de la solution $y(t)$

pour la condition initiale $(x_0, y_0) = (0.5, 0.3)$.

Courbe(1) : correspond à la solution du système (4.55)

Courbe(2) : correspond à la solution du système (4.57)

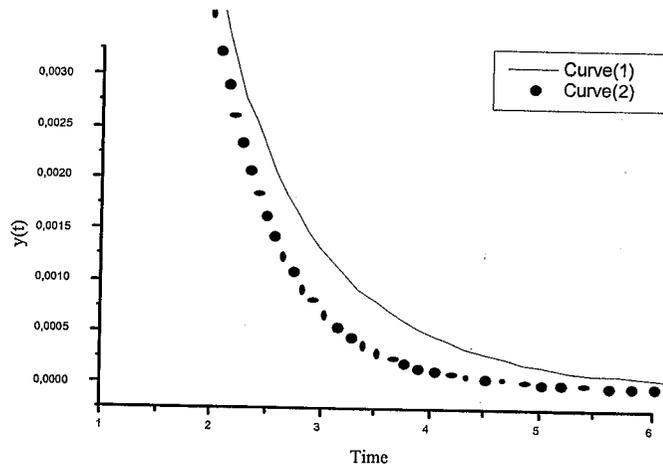


Figure 4.6. représente un zoom d'une partie de la solution $y(t)$

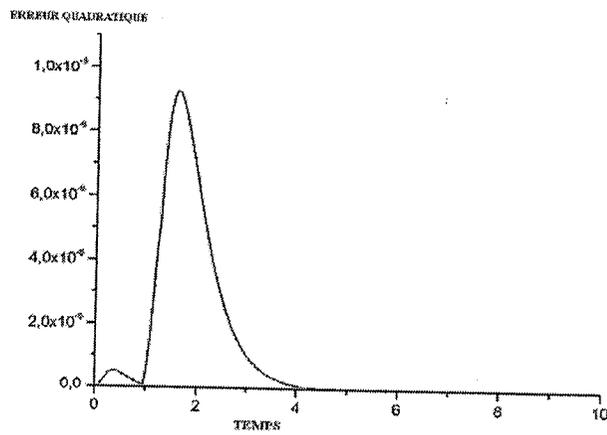


Figure 4.7. représente la variation en fonction du temps de l'erreur quadratique entre la solution non linéaire et linéaire optimal

Commentaires

L'exemple présenté montre l'efficacité de la méthode de linéarisation optimale pour la description du comportement du système non linéaire au voisinage du point d'équilibre $(0, 0)$, lorsque la linéarisation classique tombe en défaut: soit ne peut rien conclure, soit qu'il n'existe pas comme le cas de l'exemple étudié). Les figures 4.3, 4.5 (solutions), et figure 4.7 (représentant l'erreur quadratique) présentent un bon accord entre les résultats de l'approximation par linéarisation optimale et les résultats exactes (non linéaire). Ceci est confirmé par le calcul de l'erreur quadratique qui n'excède pas 0.09%, même s'il existe une variation (un écart) entre les solutions linéaires optimales et celles non linéaires présentées par les figures 4.4 et 4.6 correspondant respectivement au zoom d'une partie de la solution $x(t)$ et $y(t)$. Cet écart explique la variation (augmentation puis pic suivi d'une diminution) de la courbe de l'erreur quadratique figure 4.7 correspondant à l'intervalle du temps $[1, 6]$ des solutions. Cette erreur est de l'ordre de 10^{-5} .

On remarque que cette variation n'influe pas sur la qualité de l'approximation et sur son efficacité à approcher le système non linéaire (4.55), par un système linéaire optimal (4.57) adéquat.

Analyse de la stabilité

Puisque la linéarisation classique au point d'équilibre n'existe pas, alors on ne peut pas prédire la stabilité du point d'équilibre ainsi que sa nature. Une alternative est donc proposée pour accomplir cette tâche, et elle consiste à l'utilisation de la généralisation de la méthode de linéarisation optimale en examinant les valeurs propres de la linéarisée optimale au voisinage du point d'équilibre.

Le système linéaire optimal donné par (4.57) possède deux valeurs propres réelles strictement négatives données par

$$\begin{cases} \lambda_1 = -4.4016 \\ \lambda_2 = -1.5605 \end{cases}, \quad (4.60)$$

Alors la linéarisation optimale prédit un noeud stable à l'origine

L'analyse qualitative des résultats obtenus est illustrée graphiquement par les figures 4.8, 4.9, 4.10, qui représentent respectivement le champ de vecteur du système non linéaire, l'espace de phase et le champ de vecteur du système linéaire optimal (4.57), pour la condition initiale $(x_0, y_0) = (0.5, 0.3)$.

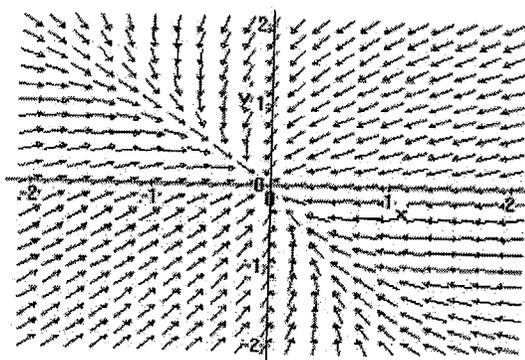


Figure 4.8 Champ de vecteurs du système non linéaire (4.55)

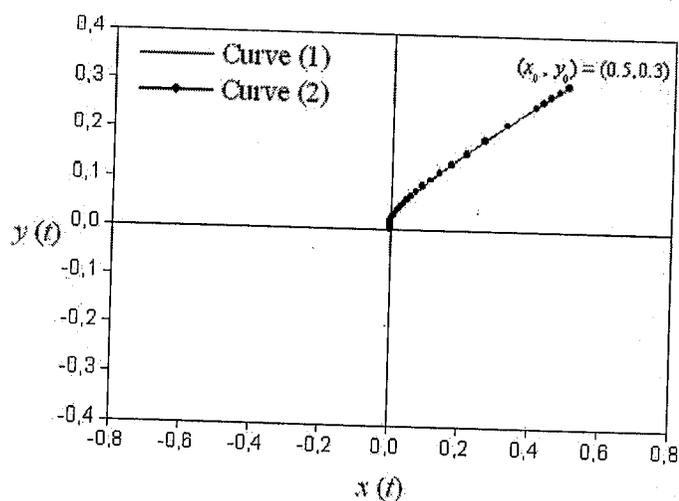


Figure 4.9. Solution $(x(t), y(t))$ dans l'espace de phase pour la condition initiale $(x_0, y_0) = (0.5, 0.3)$.

Courbe(1): correspond à la solution du système (4.55)

Courbe(2): correspond à la solution du système (4.57)

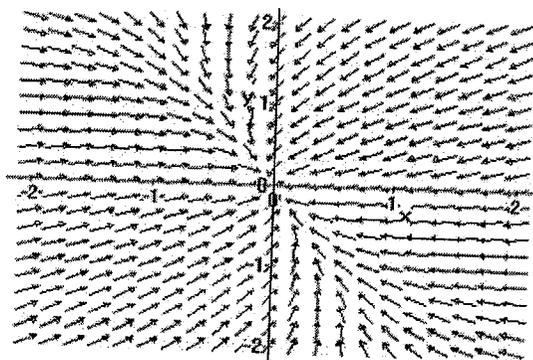


Figure 4.10. Champ de vecteurs du système linéaire optimal (4.57)

Les figures 4.8 et 4.10 montrent respectivement des champs de vecteurs du système linéaire optimal (4.57) et du système non linéaire (4.55). Ainsi dans la figure 4.9 représentant le champ de vecteur du système non linéaire et celui linéaire optimal, on voit

bien que le champ de vecteur du système non linéaire et celui linéaire optimale sont identiques et conduisent à la même conclusion c'est à dire que le point d'équilibre est un noeud stable.

Conclusion

L'application de la méthode de généralisation de linéarisation optimale à un exemple dont la non-linéarité n'est pas assez régulière au voisinage du point d'équilibre, c'est-à-dire $DF(0)$ n'existe pas (cas où la fonction non linéaire définissant une équation non régulière et donc non différentielle fonction de type valeur absolue $|\cdot|$), montre que cette technique décrit bien le comportement qualitatif du modèle étudié. En outre, elle répond à la question de stabilité du point d'équilibre dont les méthodes de linéarisation restent impuissantes à répondre.

4.2 Application aux systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires avec commande

4.2.1 Introduction

Une classe d'équations différentielles ordinaires non linéaires est celle caractérisant le comportement des circuits électroniques. Parmi l'infinité de dépendances temporelles possibles, les circuits en régime libre et les circuits avec sources d'excitation sinusoïdales jouent un rôle important.

Les systèmes en régime libre servent surtout à modéliser le comportement des circuits en l'absence de signaux. C'est l'état d'équilibre du circuit avant qu'il ne soit excité par un signal de durée finie et le retour à l'état d'équilibre après l'injection de celui-ci.

On s'intéresse, dans cette étude aux systèmes physiques modélisant des circuits électroniques avec source d'excitation (commande) qui sont en général décrits par des systèmes

d'équations différentielles ordinaires non linéaires avec commande u de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, u) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.61)$$

$x(t) \in M$ (M est un ouvert connexe de \mathbb{R}^n). Ces équations modélisent des systèmes dynamiques commandés: par exemple en chimie cinétique d'une réaction simple les systèmes sont toujours non linéaires une ou plusieurs concentrations jouant le rôle des commandes. Ainsi en biologie dynamique des populations il s'agit par exemple de modèles de type proie prédateur en temps continu Lotka-Volterra ou de modèle de croissance de population structurée en âge en temps discret (l'échelle de temps est le mois, le trimestre, l'année).

Nous allons utiliser le formalisme de la méthode de dérivation optimale développé dans [31], pour l'étude de ces équations non linéaires. Cette méthode de linéarisation a déjà été utilisée dans le cas des systèmes en régime libre ($u(t) = 0$) (Un système libre ou système autonome est un modèle d'état sans commande (un système dynamique est un modèle d'état stationnaire sans commande)). Les résultats obtenus dans le cadre du régime libre montrent que sont satisfaisante sur le plan qualitative. Notre objectif à travers cette application est de montrer les potentialités e de la méthode de dérivée optimale pour linéarisation du système d'équations non linéaires avec commande.

Définition 4.1 *Un système non linéaire commandé est un ensemble d'équations (différentielles par exemple) non linéaires, décrivant l'évolution temporelle des variables constitutives du système sous l'action d'un nombre fini de variables indépendantes appelées entrées ou variables de commande, ou simplement commandes, que l'on peut choisir librement pour réaliser certains objectifs. dont voici quelques exemple de problème physique.*

Exemple en électricité : circuit électronique

Considérons un circuit électrique alimenté par une tension u constitué des éléments suivants, une résistance R , une inductance L et une capacité C en série. Notons q la charge à l'une des bornes du condensateur et i l'intensité du courant qui traverse le circuit. On trouve en appliquant les lois de Kirchhoff

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{LC}q + u \\ \frac{dq}{dt} = i \end{cases} \quad (4.62)$$

on peut le réécrire sous la forme

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

on s'intéresse à des systèmes dynamiques en une variable interne de dimension finie l'état $x \in \mathbb{R}^n$ commandés par une variable externe l'entrée $u \in \mathbb{R}^n$. en temps continu $t \in \mathbb{R}^+$.

En mécanique du point matériel : le pendule simple

Les lois de la mécanique des solides en rotation permettent de décrire la dynamique du second ordre de l'angle d'écartement du pendule par rapport à la verticale. On ainsi, commande le pendule par un couple $\Gamma(t)$

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta + \Gamma \quad (4.64)$$

Ce système devient du premier ordre en temps avec un vecteur d'état (x_1, x_2)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \Gamma \quad (4.65)$$

4.2.2 Approximation linéaire d'un système commandé

Le système linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.66)$$

où A est une matrice $n \times n$ appelée matrice d'état et B une matrice $n \times m$ appelée matrice de commande.

Le système linéaire (4.66) s'obtient généralement par linéarisation du système non linéaire (4.61) autour d'un point d'équilibre (x_e, u_e) pour lequel $F(x_e, u_e) = 0$. En effet, si on pose

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}(x_e, u_e), \quad B = \frac{\partial F}{\partial u}(x_e, u_e) \quad (4.67)$$

on obtient l'équation

$$\dot{X} = AX + BU + o(X, U) \quad (4.68)$$

Le système linéaire commandé (4.68) s'appelle alors l'*approximation linéaire* du système non linéaire (4.61). Un des objectifs de l'automaticien consiste à déduire les propriétés du système non linéaire de celles de son linéarisé.

L'existence des écueils pour la bonne utilisation de cette approximation (absence de régularité, cas où la fonction non linéaire définissant une équation non régulière et donc non différentielle). En général, on ne peut pas calculer la dérivée au sens de Fréchet.

4.2.3 Méthode de dérivation optimale pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires commandés

Problématique

Considérons le système d'équation différentielle ordinaire non linéaire de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.69)$$

où

$x = (x_1, \dots, x_n)$ la fonction inconnue,

$u = (u_1, \dots, u_n)$ représente la source d'excitation qui peut être constante (continue), ou variable en fonction du temps (source sinusoïdale),

$F = (f_1, \dots, f_n)$ est une fonction définie dans un certain ouvert Ω , à valeurs dans \mathbb{R}^n .

En l'absence de toute excitation ($u(t) = 0$), le système est au point d'équilibre.

Nous avons les hypothèses suivantes:

$$H1) \quad F(0, 0) = 0.$$

$$H2) \quad F \text{ est continue, Lipschitzienne, de constante de Lipschitz } \gamma.$$

Le problème posé peut être traduit comme suit:

— Trouver une équation différentielle ordinaire linéaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{A}x + \tilde{B}u \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.70)$$

En approchant l'équation non linéaire (4.69) aux mêmes conditions initiales telle que la fonctionnelle

$$G(A, B) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t), u(t)) - Ax(t) - Bu(t)\|^2 dt \quad (4.71)$$

soit minimale. $F(x(t), u(t))$ étant comme au dessus, et $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ à déterminer.

Le problème ainsi posé est de type optimisation au sens des moindres carrés. Le but étant de chercher à remplacer l'équation initiale non linéaire par une équation linéaire. Cela revient à chercher à faire une approximation de la solution du système (4.69) par celle de (4.70). La minimisation de la fonctionnelle $G(A, B)$ par rapport à A et B se fait par

rapport à des solutions issues du point initial et tendant vers la solution de régime quand $t \rightarrow +\infty$.

La minimisation de la fonctionnelle $G(A, B)$ est obtenue en calculant la différentielle par rapport à A et B .

En posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_A(x) = \int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt = \left(\int_0^{+\infty} x_j(t) x_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} \\ \Phi_A(u, x) = \int_0^{+\infty} [u(t)] [x(t)]^T dt = \left(\int_0^{+\infty} u_j(t) x_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} \\ \Psi_A(x, u) = \int_0^{+\infty} [F(x(t), u(t))] [x(t)]^T dt, \end{array} \right. \quad (4.72)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_B(u) = \int_0^{+\infty} [u(t)] [u(t)]^T dt = \left(\int_0^{+\infty} u_j(t) u_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} \\ \Phi_B(x, u) = \int_0^{+\infty} [x(t)] [u(t)]^T dt = \left(\int_0^{+\infty} x_j(t) u_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} \\ \Psi_B(x, u) = \int_0^{+\infty} [F(x(t), u(t))] [u(t)]^T dt, \end{array} \right. \quad (4.73)$$

Cette minimisation nous permet de calculer les matrices optimales \tilde{A} et \tilde{B} , telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} A = [\Psi_A(x, u) - (B) \Phi_A(u, x)] [\Gamma_A(x)]^{-1} \\ B = [\Psi_B(x, u) - (A) \Phi_B(x, u)] [\Gamma_B(u)]^{-1}. \end{array} \right. \quad (4.74)$$

Procédure de calcul

Schéma de la procédure de la dérivée optimale

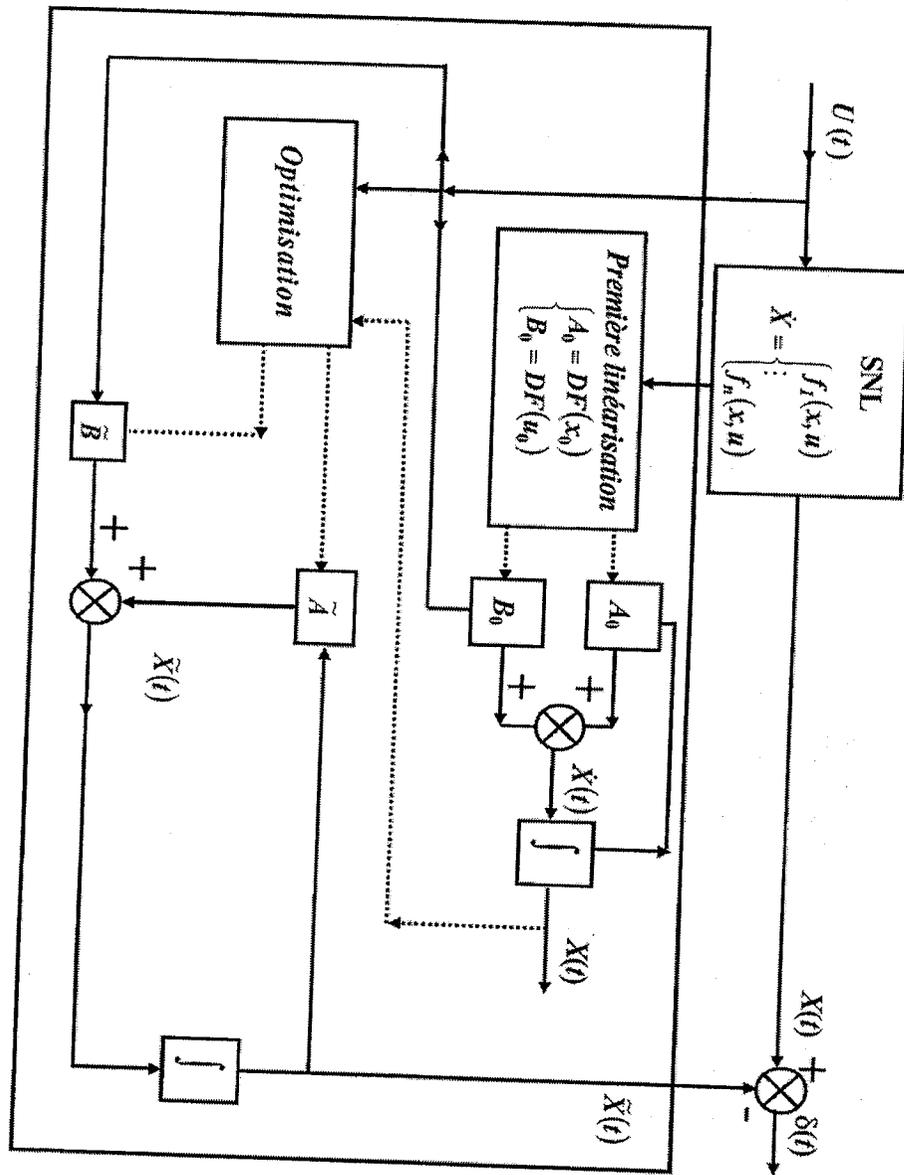


Figure (4.11) Schéma de la procédure de la dérivée optimale

Procédure de calcul

On va utiliser le calcul précédent de manière itérative. On suppose que les matrices successives A_j et B_j sont de type stable, leur spectre est contenu dans $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$. Les matrices initiales A_0 et B_0 sont respectivement les matrices Jacobienne de F en x_0 ou $DF(x)$ existe, et en u_0 ou $DF(u)$ existe. x_0 étant la condition initiale et u_0 l'excitation à l'instant $t = 0$.

Considérons le système (4.69)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.75)$$

Première étape

$$\text{Calcul de } \begin{cases} A_0 = DF(x_0) \\ B_0 = DF(u_0). \end{cases}$$

Deuxième étape

Calcul de A_1 et B_1 à partir de la solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_0 y(t) + B_0 v(t) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.76)$$

qui s'écrit sous la forme suivante

$$y(t) = e^{tA_0} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_0} B_0 v(s) ds, \quad (4.77)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$G(A, B) = \int_0^{+\infty} \|F(y(t), v(t)) - Ay(t) - Bv(t)\|^2 dt. \quad (4.78)$$

A_1 et B_1 sont déterminées de manière unique par le système d'équations (4.74), où x est remplacé par y et $v(t)$ étant l'excitation à l'instant t .

On voit ainsi que mis à part les matrices initiales, les matrices déterminées par la procédure de dérivée optimale ne sont pas les matrices Jacobienne de F en un point donné. Par la suite, il est nécessaire que les conditions du début de cette étude soient satisfaites à chaque pas.

Si nous supposons que cela est vrai alors, la procédure marche comme suit:

Troisième étape

Pour calculer A_j à partir de A_{j-1} et B_j à partir de B_{j-1} , on doit d'abord résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = [A_{(j-1)}] y(t) + [B_{(j-1)}] v(t) \\ y(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.79)$$

On notera y_j la solution de l'équation (4.79) qui s'écrit

$$y_j(t) = e^{tA_{(j-1)}} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_{(j-1)}} B_{(j-1)} v_j(s) ds \quad (4.80)$$

et v_j l'excitation à l'instant t .

La minimisation de la fonctionnelle

$$G_j(A, B) = \int_0^{+\infty} \|F(y_j(t), v_j(t)) - Ay_j(t) - Bv_j(t)\|^2 dt \quad (4.81)$$

conduit à

$$[A_j] = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j(t), v_j(t))] [y_j(t)]^T dt - (B_j) (\Phi(v_j, y_j)) \right] [\Gamma(y_j)]^{-1} \quad (4.82)$$

$$[B_j] = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j(t), v_j(t))] [v_j(t)]^T dt - (A_j) (\Phi(y_j, v_j)) \right] [\Gamma(v_j)]^{-1}. \quad (4.83)$$

Si les suites (A_j, B_j) convergent, alors (\tilde{A}, \tilde{B}) représentent la dérivation optimale de $F(x(t), u(t))$ au point (x_0, u) .

Proposition 4.1 *Sous les hypothèses sur F et pour tout $T > 0$, il existe $M \geq 0$ tel que:*

$$\|x(t) - \tilde{y}(t)\| \leq M (\|x_0\|^2) \quad (4.84)$$

pour tout $0 \leq t \leq T$, et tout x_0 dans un voisinage de 0, indépendant de T .

Donc, l'approximation proposée est d'ordre deux au moins en fonction de la donnée initiale en général, elle est de l'ordre de la non linéarité.

4.2.4 Application

Cette partie est consacrée à l'application de la méthode de dérivée optimale aux exemples de modèles physique avec commande. Deux cas sont envisagés selon la nature de la commande à savoir :

- Cas de la commande où l'excitation est constante (continue).
- Cas de la commande où l'excitation est périodique: le choix de deux exemples (circuit à jonction de Josephson) dont le circuit est commandé par une source sinusoïdale revient au fait que type de circuit modélise surtout des systèmes de distribution d'énergie électrique et des systèmes de transmission de signaux modulés.

Afin de montrer les possibilités que peut offrir la méthode de dérivation optimale pour la description des différents régimes, en démontrant qualitativement la convergence de cette solution vers le point de fonctionnement.

Cas où la commande où l'excitation est constante (continue).

Considérons le schéma suivant

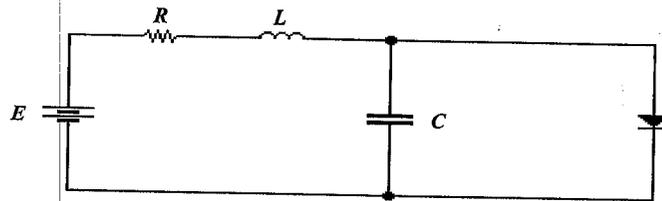


Figure (4.12)

C'est un circuit présentant deux variables d'état (la chute de tension v_c aux bornes de la capacité et le courant i_L circulant dans la bobine) et dont le caractère non linéaire provient de la présence d'une diode de caractéristique non linéaire (i, v) . Ce circuit est excité par une source de tension constante E .

Lorsqu'une tension v est appliquée à une diode dans le sens direct, la loi de variation du courant qui passe par celle-ci est approchée par

$$i = av + bv^2, \quad (4.85)$$

élément non-linéaire, c'est-à-dire un élément dont la valeur dépend (dépendance non linéaire) de la tension à leurs bornes ou du courant qui les traverse. Les paramètres choisis dans le circuit sont

$$\begin{aligned} R &= 100 \Omega & a &= 3,5 \times 10^{-3} \text{ A/V} \\ C &= 5 \times 10^{-6} \text{ F} & b &= 10^{-2} \text{ A/V}^2 \\ L &= 0,5 \times 10^{-3} \text{ H} & E &= 20 \text{ V}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Les lois de Kirchhoff relatives aux noeuds et aux mailles du circuit nous donnent les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [E - Ri_L - v_C] \\ \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} [i_L - (av_C + bv_C^2)] \end{cases}, \quad (i_{L_0}, v_{C_0}) = (0, 0). \quad (4.87)$$

On pose

$$\begin{cases} x = i_L \\ y = v_C \end{cases}, \quad (4.88)$$

alors le système (4.87) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L}x - \frac{1}{L}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{C}x - \frac{a}{C}y - \frac{b}{C}y^2 \end{cases}, (x_0, y_0) = (0, 0). \quad (4.89)$$

En tenant compte des valeurs des composants du circuit, le système (4.89) devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2 \times 10^5 x - 2 \times 10^3 y + u(t) \\ \frac{dy}{dt} = 2 \times 10^5 x - 7 \times 10^2 y - 2 \times 10^3 y^2 \end{cases}, (x_0, y_0) = (0, 0), \quad (4.90)$$

avec: $u(t) = \frac{E}{L} H(t) = [40000] H(t)$, $H(t)$ étant la fonction Heaviside. Cette excitation $u(t)$ est représentée dans la figure (4.18).

Pour déterminer les valeurs du régime permanent dans le cas du système non linéaire, on résoud le système suivant

$$\begin{cases} 0 = -2 \times 10^5 x - 2 \times 10^3 y + 40000 \\ 0 = 2 \times 10^5 x - 7 \times 10^2 y - 2 \times 10^3 y^2 \end{cases}, (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Le calcul donne

$$\begin{cases} x = 0.1615 \\ y = 3.8477. \end{cases}$$

Par dérivation au sens de Fréchet de l'équation (4.90) on obtient $DF(x_0, y_0)$ et $DF(u_0)$

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -2 \times 10^5 & -2 \times 10^3 \\ 2 \times 10^5 & -7 \times 10^2 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

et

$$DF(u_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.92)$$

En appliquant la procédure développée en (3.4.2), et après 10 itérations ($\varepsilon = 10^{-6}$), le système linéaire optimal s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \times 10^5 & -2 \times 10^3 \\ 2.5033 \times 10^5 & -0.1042 \times 10^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.93)$$

t	$X_{nl}(t)$	$X_{lin}(t)$	$Y_{nl}(t)$	$Y_{lin}(t)$	Er
0	0	0	0	0	0
1E-04	1.7242217E-01	1.7310679E-01	2.8470647E+00	2.7632788E+00	1.67E-02
2E-04	1.6340370E-01	1.6447235E-01	3.6757347E+00	3.5761583E+00	1.68E-02
3E-04	1.6190409E-01	1.6211874E-01	3.8180343E+00	3.7923883E+00	4.02E-03
4E-04	1.6167634E-01	1.6149270E-01	3.8430680E+00	3.8501572E+00	1.49E-03
5E-04	1.6164222E-01	1.6134099E-01	3.8468883E+00	3.8656574E+00	3.37E-03
6E-04	1.6150508E-01	1.6130722E-01	3.8476875E+00	3.8698650E+00	3.49E-03
7E-04	1.6155259E-01	1.6130694E-01	3.8477371E+00	3.8709950E+00	3.78E-03
8E-04	1.6157708E-01	1.6118673E-01	3.8477261E+00	3.8714594E+00	4.29E-03
9E-04	1.6159409E-01	1.6120531E-01	3.8477098E+00	3.8715148E+00	4.29E-03
1E-03	1.6143925E-01	1.6126149E-01	3.8478806E+00	3.8714607E+00	3.61E-03

Tableau (IV.1) : Valeurs de la solution à des instants $t \in [0, T]$ du système non linéaire (4.90) et du système linéaire optimal (4.93), ainsi que l'erreur relative Er .

Les valeurs des caractéristiques utilisées dans ce calcul sont : $t_0 = 0, t_f = 1E-3 s, \varepsilon = 10^{-6}$.

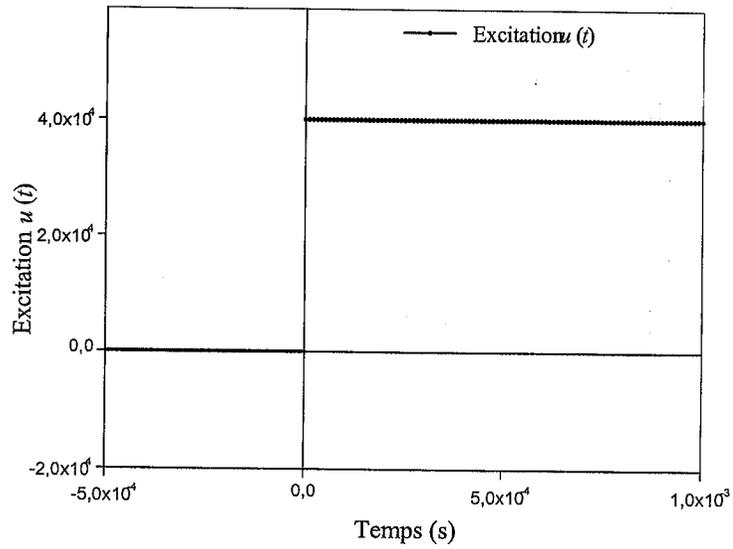


Figure (4.13)

Excitation u en fonction du temps $u(t) = \left[\frac{E}{L} \right] [H(t)]$

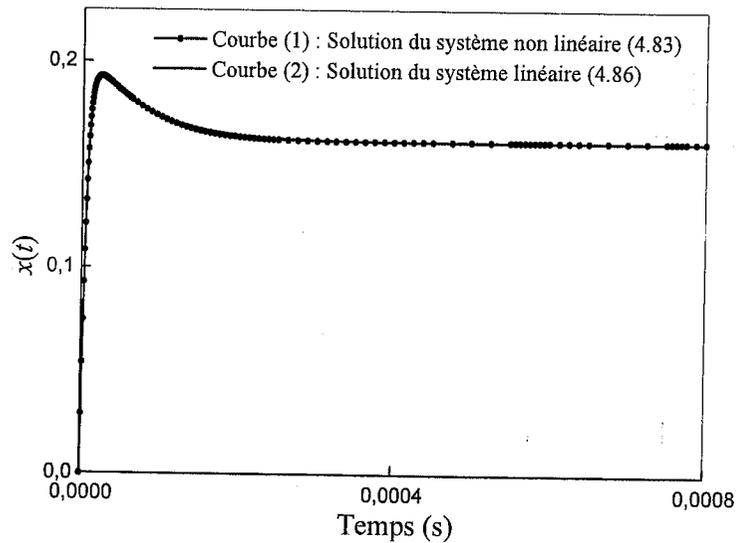


Figure (4.14)

Solution de la variable x en fonction du temps pour les conditions initiales
 $(x_0, y_0) = (0, 0)$

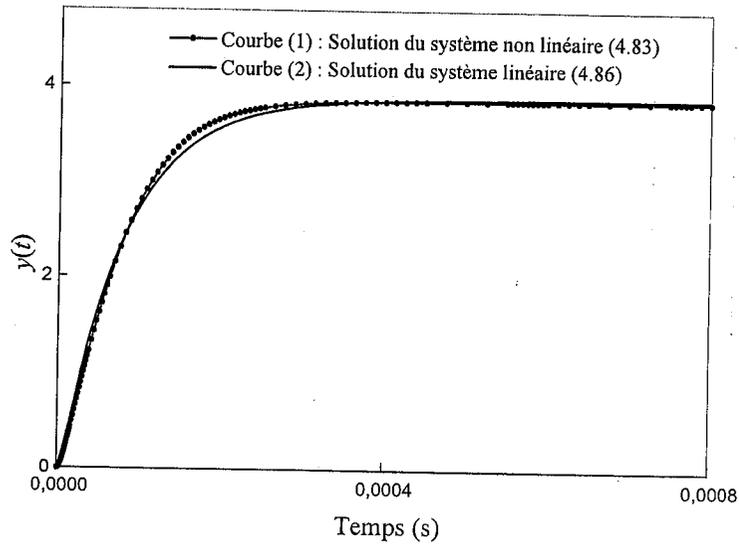


Figure (4.15)

Solution de la variable y en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

Cas où la commande où l'excitation est périodique.

Maintenant nous allons utiliser le même circuit précédent, à la différence que seule l'excitation change, c'est à dire que l'on applique une excitation alternative $e(t)$

$$e(t) = e \cos(\omega t). \quad (4.94)$$

Le système (4.89) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2 \times 10^5 x - 2 \times 10^3 y + u(t) \\ \frac{dy}{dt} = 2 \times 10^5 x - 7 \times 10^2 y - 2 \times 10^3 y^2 \end{cases}, (x_0, y_0) = (0, 0), \quad (4.95)$$

avec: $u(t) = \frac{e}{L} \cos(100 \pi t) H(t)$, $e = 0.2$ Volts. L'excitation $u(t)$ est représentée dans la figure(4.23).

Par dérivation au sens de Fréchet de l'équation (4.95), on obtient $DF(x_0, y_0)$ et $DF(u_0)$

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -2 \times 10^5 & -2 \times 10^3 \\ 2 \times 10^5 & -7 \times 10^2 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

et

$$DF(u_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.97)$$

En appliquant la linéarisation par la méthode de la dérivée optimale et après 9 itérations, on obtient les matrices optimales suivantes ($\varepsilon = 10^{-6}$).

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.2419 \times 10^5 & -2.28346 \times 10^3 \\ 1.97255 \times 10^5 & -6.8753 \times 10^2 \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

et

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

et notre système linéaire optimal s'écrit ainsi

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2419 \times 10^5 & -2.28346 \times 10^3 \\ 1.97255 \times 10^5 & -6.8753 \times 10^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.100)$$

Les courbes des figures (4.15) et (4.16) représentent le graphe des composantes respectives $(x(t), y(t))$ de la solution des systèmes (4.95) et (4.100) en fonction du temps. Le tableau (IV.2) représente les valeurs de la solution à des instants $t \in [0, T]$ de l'équation non linéaire, de son approximation au sens de la dérivée optimale, ainsi que l'erreur relative.

On remarque que la solution donnée par la dérivée optimale est du même ordre de grandeur que celle donnée par l'équation non linéaire. De plus, l'erreur relative atteint son maximum au temps $t = 7s$, 31%. Cette erreur est sous forme de pics. Chaque pic est dû au décalage qui existe au niveau des pics des solutions du système non linéaire et du

système linéaire optimal.

t	$X_{nl}(t)$	$X_{lin}(t)$	$Y_{nl}(t)$	$Y_{lin}(t)$	Er
0	0	0	0	0	0
0.5E-02	-1.5997212E-04	-1.9609472E-04	1.6253648E-02	1.0793472E-02	2.80E-01
1.0E-02	-3.4991234E-04	-5.2781036E-04	-1.6507091E-01	-1.4648971E-01	3.10E-01
1.5E-02	1.8140720E-04	1.9502064E-04	-1.8507829E-02	-1.0976465E-02	2.40E-01
2.0E-02	6.6538146E-04	5.2853815E-04	1.3351527E-01	1.4646631E-01	1.51E-01
2.5E-02	-1.5935063E-04	-1.9436020E-04	1.6685160E-02	1.1217328E-02	2.73E-01
3.0E-02	-3.5082611E-04	-5.2838885E-04	-1.6496412E-01	-1.4646678E-01	3.09E-01
3.5E-02	1.8056840E-04	1.9272798E-04	-1.8874112E-02	-1.1533968E-02	2.28E-01
4.0E-02	6.6547437E-04	5.2869669E-04	1.3347568E-01	1.4644713E-01	1.51E-01
4.5E-02	-1.5674648E-04	-1.9317058E-04	1.6961559E-02	1.1485750E-02	2.77E-01
5.0E-02	-3.5154606E-04	-5.2922690E-04	-1.6486740E-01	-1.4641398E-01	3.08E-01
5.5E-02	1.7845521E-04	1.9159153E-04	-1.9442508E-02	-1.1905060E-02	2.30E-01
6.0E-02	6.6543965E-04	5.2919075E-04	1.3343172E-01	1.4640835E-01	1.51E-01
6.5E-02	-1.5487337E-04	-1.9124085E-04	1.7461175E-02	1.1952182E-02	2.75E-01
7.0E-02	-3.5194545E-04	-5.2970901E-04	-1.6477657E-01	-1.4638951E-01	3.08E-01
7.5E-02	1.7618689E-04	1.8955843E-04	-2.0078456E-02	-1.2287018E-02	2.31E-01
8.0E-02	6.6593859E-04	5.3024976E-04	1.3338650E-01	1.4635662E-01	1.50E-01
8.5E-02	-1.5326390E-04	-1.8924306E-04	1.7880745E-02	1.2573782E-02	2.65E-01
9.0E-02	-3.5321262E-04	-5.2951436E-04	-1.6471033E-01	-1.4635124E-01	3.05E-01
9.5E-02	1.7480754E-04	1.8925931E-04	-2.0547840E-02	-1.2833809E-02	2.29E-01
1.0E-01	6.6637228E-04	5.3064070E-04	1.3333751E-01	1.4631094E-01	1.50E-01

Tableau (IV.4) : Valeurs de la solution à des instants $t \in [0, T]$ du système non linéaire (4.95) et du système linéaire optimal (4.100), ainsi que l'erreur relative Er .

Les valeurs des caractéristiques utilisées dans ce calcul sont : $t_0 = 0$, $t_f = 0.1$ s, $\varepsilon = 10^{-6}$.

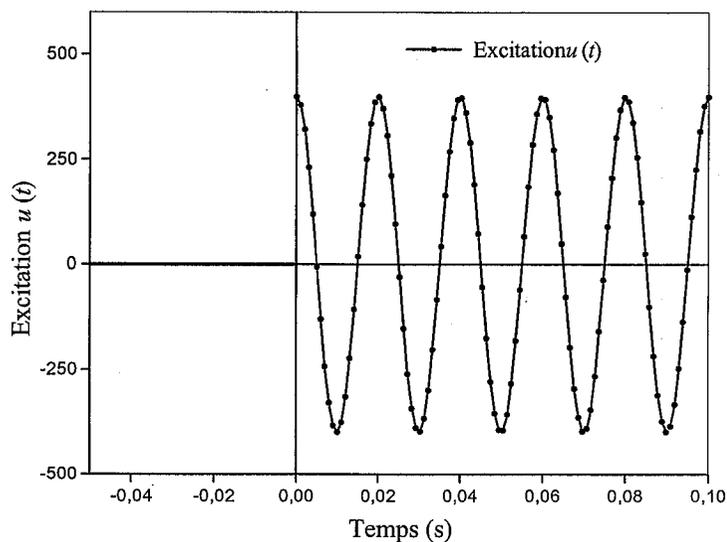
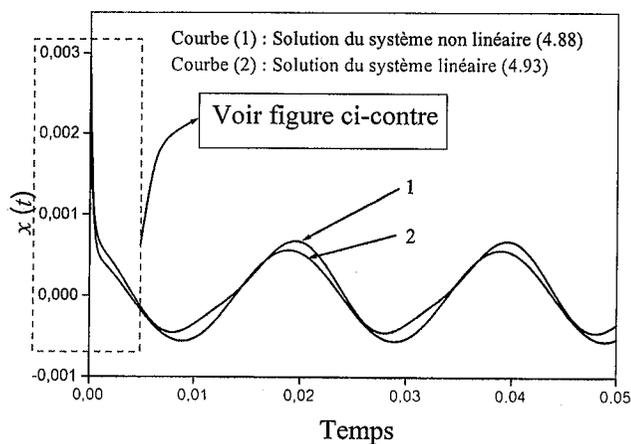
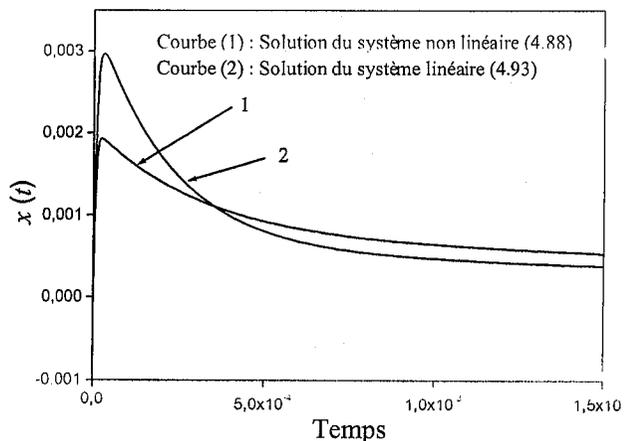


Figure (4.15)

Excitation u en fonction du temps $u(t) = \left[\frac{e(t)}{L} \right] [H(t)]$



Solution $x(t) = x_P(t) + x_T(t)$



Solution $x_T(t)$ du régime transitoire

Figure (4.16)

Solution de la variable x en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Commentaires (Régime continu et régime transitoire)

Par définition, le régime continu est celui où toutes les tensions dans un circuit et toutes les intensités qui le parcourent sont indépendantes du temps.

En pratique, un tel régime ne dure pas longtemps. Entre l'instant où aucun courant ne circule et celui où expérimentalement, on constate que le régime est continu, il existe une période où les courants et tensions évoluent pour atteindre leur valeur définitive; ce régime temporaire est appelé régime transitoire (figure 1.11).

La connaissance des courants et tensions transitoires est souvent de très grande importance, mais leur étude est dans le cas général très complexe. Cependant pour les circuits linéaires, on montre que l'allure des phénomènes transitoires est en fait déconnectée du régime continu final;

On peut interpréter ça, mathématiquement l'évolution des courants ou des tensions dans un circuit linéaire est régie par une équation différentielle linéaire du type $\frac{dx}{dt} + ax = b$ avec *second membre*, le second membre étant lié à l'existence de sources (de tension ou de courant) dans le circuit.

La théorie de ces équations nous indique que la solution générale est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre. C'est la solution générale de l'équation sans second membre qui, compte tenu des conditions initiales, décrit le régime transitoire, solution qui s'amortit au cours du temps à cause des phénomènes dissipatifs, comme l'effet Joule; il ne reste que la solution particulière qui décrit le régime continu ou le régime permanent. Donc la solution générale est défini de la façon suivante

$$x(t) = x_T(t) + x_P(t),$$

avec

$x_T(t)$: solution associée au régime transitoire,

$x_P(t)$: solution associée au régime permanent.

Application à une Jonction non linéaire de type Josephson

On considère, pour cette application, le cas d'un système physique modélisant un circuit électronique simple qui contient une diode avec une jonction de type Josephson. Ces jonctions qui présentent un grand intérêt industriel grâce à leur propriétés physiques .

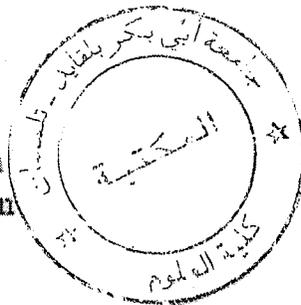
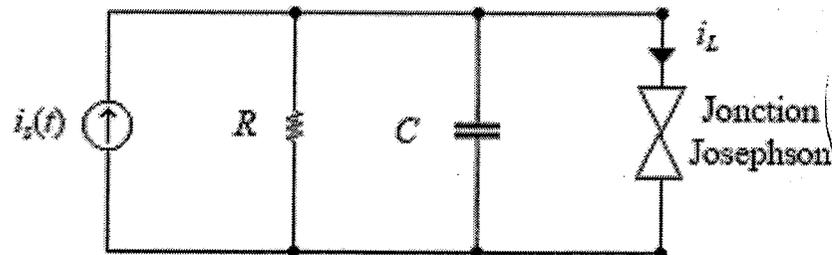
Elles constituent un dispositif de choix pour plusieurs domaines d'application, à savoir:

- C'est le constituant élémentaire du SQUID (Superconducting Quantum Interference Device), le plus fin détecteur de champ magnétique (et donc de courant). Un SQUID est constitué de 2 jonctions en parallèles dans une boucle.

- C'est aussi le constituant de base de la logique rapide dite RSFQ (Rapid Single Flux Quantum) où elles jouent le rôle du transistor et autoriseraient des cadences en centaines de Ghz.

- C'est aussi un des détecteurs de photons les plus performants. On parle alors de jonctions supraconductrices à effet tunnel (STJ en anglais). Ces dispositifs combinent une sensibilité ultime jusqu'aux photons uniques dans une large bande spectrale (des rayons X au proche infrarouge) avec une bonne résolution en énergie.

Soit le circuit suivant contenant une diode avec une jonction de type Josephson représenté par la figure suivante [42]



C'est un circuit présentant deux variables d'état la chute de tension v_C aux bornes de la capacité et le flux Φ_L et dont le caractère non linéaire provient de la présence d'une jonction dite de Josephson qui est en fait équivalente à une inductance non linéaire. Le

courant qui passe à travers cette jonction s'écrit

$$i = I_0 \sin(K\Phi) \quad (4.101)$$

ou Φ représente le flux, $k = \frac{4\pi e}{h}$ est la constante de Josephson, e est la charge de l'électron et h la constante de Plank. Les lois de Kirchhoff relatives aux noeuds et aux mailles du circuit nous donnent les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C} \left[-Rv_c - \underbrace{I_0 \sin(K\Phi_L)}_{i_L} \right] + i_s(t) \\ \frac{d\Phi_L}{dt} = v_c \end{cases} \quad (4.102)$$

On considère que la capacité C est chargée initialement par une tension v_{C_0} , et donc les conditions initiales de ce système non linéaire sont

$$(v_{C_0}, \Phi_{L_0}) = (10, 0). \quad (4.103)$$

Les paramètres choisis dans le circuit sont $C = 1F$, $R = 0.25\Omega$, $I_0 = 1A$, $K = 1$, $i_s(t) = \cos(100\pi t) A$. On pose $x = v_C$ et $y = \Phi_L$ alors le système (4.102) s'écrit, en tenant compte des valeurs des composants du circuit, sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.25x - \sin(y) + u(t) \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (10, 0) \quad (4.104)$$

et où $u(t)$ représente l'excitation

$$u(t) = \frac{1}{C} i_s(t) H(t) = [\cos(100\pi t)] H(t) \quad (4.105)$$

L'excitation $u(t)$ est illustrée dans sur la figure 4.17

En appliquant la procédure développée auparavant, et après 6 itérations ($\varepsilon = 10^{-6}$),

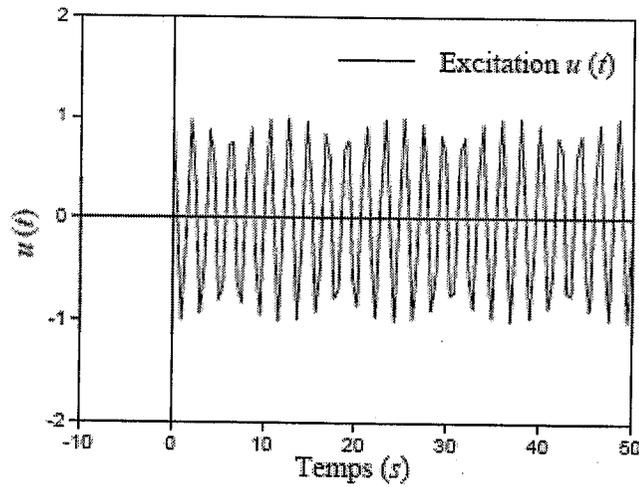
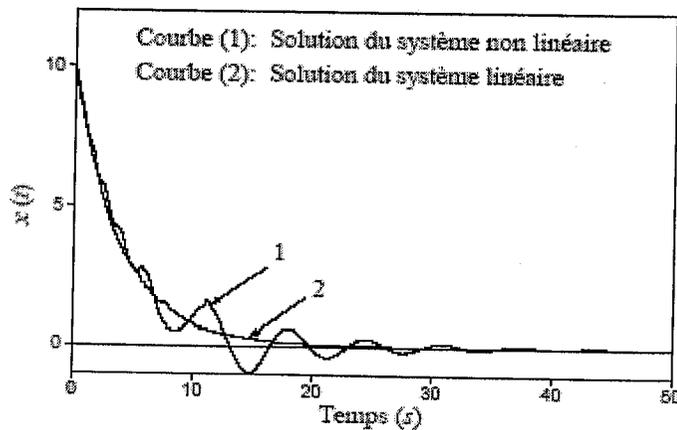


Figure 4-1: Figure (4.17)

le système linéaire optimal s'écrit

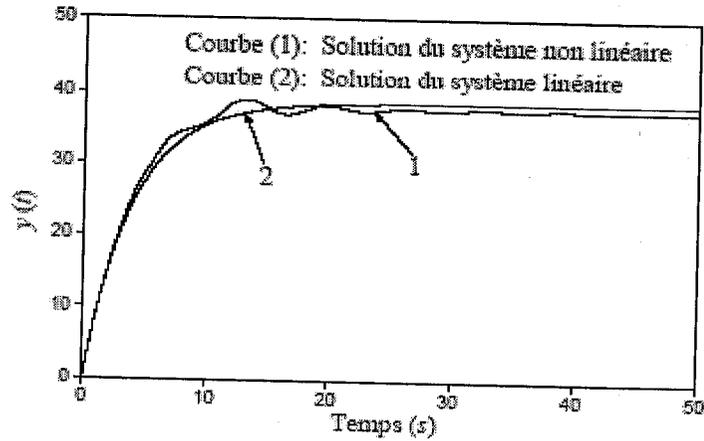
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.26157 & -0.51985 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.106)$$

Les figures (4.18) et (4.19) représentent les composantes respectives $x(t)$, $y(t)$ de la solution des systèmes (4.104) et (4.106) en fonction du temps.



Figure(4.18): Variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions

initiales $(x_0, y_0) = (10, 0)$



Figure(4.19): Variation de la solution $y(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (10, 0)$

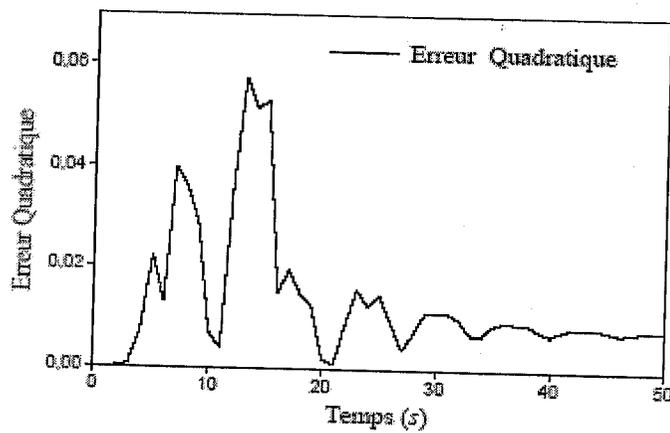


Figure 4.20 : Erreur quadratique en fonction du temps

Commentaires généraux

On remarque que la solution donnée par la dérivée optimale est du même ordre de grandeur que celle donnée par l'équation non linéaire. Ceci est démontré par l'étude de l'erreur quadratique qui atteint son maximum après un temps $t = 13s$, 5.73% et elle reste cependant petite. Cette erreur devient trop petite quand $t \geq 30s$ c'est à dire quand les

solutions atteignent le point de fonctionnement du circuit électronique. A ce niveau la solution du système non linéaire est fidèlement décrite par le système linéaire optimal. La solution du système linéaire optimal est obtenue par dérivation optimale permet d'amener le système après excitation, de sa position d'équilibre vers son point de fonctionnement solution de régime. Les deux courbes montrent que cette solution s'établit après qu'un certain laps de temps se soit écoulé pendant lequel les phénomènes transitoires ont lieu (Figure 4.16, 4.18, 4.16). Alors il faudrait au moins donner l'ordre de grandeur du temps transitoire si l'on veut caractériser la solution de régime (qui diffèrent d'un problème à un autre). Par ailleurs, le temps transitoire n'est connu qu'après l'étude des phénomènes transitoires, ce qui représente une étude détaillée que celle du régime. A partir de ces figures on parvient à séparer qualitativement le régime transitoire du phénomène de régime en définissant la solution de régime comme étant la solution asymptotique quand $t \rightarrow +\infty$.

Les figures (4.14, 4.15, 4.18, 4.19) montrent que cette solution est surtout dictée par le comportement asymptotique des sources qui dépendent du temps.

Il est vérifié que les solutions d'un circuit linéaire strictement stable comportant une seule source, dont la dépendance temporelle est sinusoïdale, convergent vers une même solution sinusoïdale. Si le régime sinusoïdal est unique, alors il possède la même période que la source (principe de superposition des sources).

Une conjoncture à été formulée pour les circuits non linéaires est qui s'énonce comme suit:

« Si les solutions d'un circuit non linéaire excité par une source sinusoïdale restent bornées, elles convergent vers une même solution de régime périodique dont la période fondamentale est identique à celle de la source ».

L'exemple du circuit non linéaire contenant une jonction non linéaire de type Josephson à travers les figures 4.16, 4.18, 4.19 contredit cette conjecture du fait que l'excitation est sinusoïdale tandis que la solution de régime n'est pas purement sinusoïdale.

Conclusion

L'exemple exposé montre que l'approximation obtenue par dérivation optimale donne des résultats satisfaisants par rapport aux résultats exacts tout en respectant la dynamique du problème initial. Nous remarquons bien que les solutions obtenues convergent toutes vers la solution de régime.

Le principe de superposition est invalide pour les circuits non linéaires, donc, on peut dire que la non linéarité d'un montage en électronique (circuit) peut surgir de deux façons :

1. Soit parce que l'on sort du domaine où la représentation linéaire des éléments du montage est valide,
2. Soit parce que l'on utilise à dessein des éléments essentiellement non linéaires (par exemple des diodes ou un amplificateur opérationnel en régime saturé).

La linéarisation des systèmes non linéaires commandés permet :

- D'étudier la contrôlabilité de ces équations non linéaires, en général, en démontrant la contrôlabilité du problème linéarisé selon le théorème suivant

Théorème 4.1 *Si le système (4.61) est commandable au premier ordre au point d'équilibre (x_{eq}, u_{eq}) , il est localement commandable en (x_{eq}, u_{eq}) .*

- De mettre à la disposition de l'ingénieur actuellement un ensemble de méthodes et outils très différents, dont la méthode la plus simple consiste à linéariser le système non linéaire en utilisant la méthode de dérivation optimale. Ceci est surtout lorsque les autres méthodes de la linéarisation tombent en défaut. Le but principal est de réaliser pratiquement cette linéarisation dans le domaine fréquentiel.

En général et afin d'utiliser les méthodes de contrôle pour des systèmes linéaires pour étudier un modèle non linéaire, il est indispensable de faire une linéarisation autour d'un point stationnaire. Néanmoins, très rapidement, l'ingénieur s'est rendu compte que ces

approximations peuvent être pénalisantes du point de vue des performances, et c'est pour-
quoi se sont développées des techniques de « commande non linéaire qui sont pour la plu-
part des applications de la géométrie différentielle (cf. variétés différentiables). D'autres
approches sont fondées sur l'utilisation de l'algèbre différentielle. Tandis que d'autres
encore, sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov (cf. équations différentielles).

CONCLUSION GENERALE

Conclusion Générale

Les travaux présentés dans cette thèse font partie du cadre plus général de l'étude de la stabilité de systèmes d'équations différentielles ordinaires qui modélisent une grande partie des phénomènes de différents champs de la science. L'objectif est de répondre à la question concernant le lien entre la stabilité asymptotique et la dérivation optimale. Dans le but de répondre à cette question deux étapes ont été considérées :

Premièrement dans le cas de l'analyse des équations dépendant d'un paramètre (phénomène de bifurcation) accompagnée d'un échange de stabilité et présentant plusieurs cas critiques aux points de bifurcation, une comparaison et validation des résultats obtenus en utilisant la méthode de dérivation optimale a été établie. En utilisant le logiciel de continuation numérique de bifurcation Auto2000, cette étude a aboutit aux résultats suivants :

- En se basant sur une propriété importante de la méthode, déterminée à partir de l'estimation de l'erreur commise, la méthode de la dérivée optimale permet de détecter les différents échanges de stabilité qui accompagnent le phénomène complexe de bifurcation.
- Un résultat important qu'on peut définir à partir de l'application de cette méthode au point critique c'est la possibilité de définir le sens de bifurcation des solutions, ainsi les échanges de stabilité qui ont lieu brusquement à la valeur de bifurcation, sont suivis rigoureusement par la dérivée optimale (les valeurs propres de la matrice optimale passent du demi plan droit au demi plan gauche, en gardant les parties réelles des valeurs propres non nulles à la valeur de bifurcation).
- Une bonne description du changement du comportement des solutions, en obéissant d'une façon satisfaisante à la dynamique du système non-linéaire initial.

Par ailleurs, il apparaît clairement que le choix des conditions initiales pour l'application de la procédure de dérivation optimale est déterminant.

Deuxièmement, l'étude développée dans le chapitre III, en particulier, la stabilité d'une équation différentielle ordinaire non linéaire E.D.O en utilisant la dérivée optimale est im-

portant. En effet, dans le cas où la linéarisation classique obtenue par dérivation au sens de Fréchet, présente un centre, c'est-à-dire, des valeurs propres purement imaginaires, le lien entre la méthode et la stabilité asymptotique est prouvé à travers l'étude de la trace de la matrice optimale [29].

Les conclusions déduites *du chapitre IV* se résume comme suit:

1) *Nous avons pu donner une généralisation de la méthode de linéarisation optimale, développé par Jordan et al., en précisant :*

- L'existence et l'unicité de la meilleure approximation au sens des moindres carrés.
- Le choix de la matrice initiale $A_0 = DF(x_0)$.
- La forme générale à la matrice optimale, obtenue.

L'application de la méthode de généralisation de linéarisation optimale à un exemple dont la non-linéarité n'est pas assez régulière au voisinage du point d'équilibre (cas où la fonction non linéaire définissant une équation non régulière et donc non différentielle fonction de type valeur absolue $|\cdot|$), montre que cette technique décrit bien le comportement qualitatif du modèle étudié, et elle répond parfaitement à la question de stabilité du point d'équilibre dont les méthodes de linéarisation restent impuissantes de trouver des réponses.

2) *Application aux systèmes d'équations différentielles avec commande, à partir de de cette application on peut tirer les conclusions suivantes:*

- La solution du système linéaire optimal obtenue par dérivation optimale permet d'amener le système après excitation, de sa position d'équilibre vers son point de fonctionnement ou solution de régime.
- De mettre à la disposition de l'ingénieur actuellement un ensemble de méthodes et outils très différents, dont la méthode la plus simple consiste à linéariser le système non linéaire en utilisant la méthode de dérivation optimale surtout lorsque les autres méthode linéarisation tombent en défaut. En particulier, le but principale est de permettre

au ingénieurs de réaliser pratiquement cette linéarisation dans le domaine fréquentiel.

Enfin, il y a lieu de préciser que le travail entrepris dans cette thèse a ouvert une direction de recherche très intéressante qui mérite d'être approfondie, en particulier dans :

- L'étude approfondie sur le plan mathématique de l'application de la méthode aux problèmes avec bifurcation.
- L'extension de l'approximation dans le cas des systèmes commandés.

ANNEXE

ANNEXE

BIFURCATION

Les bifurcations sont une des manifestations les plus intéressantes et les plus surprenantes des systèmes non linéaires.. On dit qu'un système possède une bifurcation si une variation infinitésimale d'un de ses paramètres provoque un brusque changement de régime. Dans certains cas, le système aura le choix entre plusieurs régimes; il apparaîtra alors un caractère aléatoire que l'existence d'un modèle pourtant bien déterministe ne laissait pas présager. Dans beaucoup de systèmes, les bifurcations sont aussi intimement liées à la notion de symétrie.

On distingue deux grandes familles de bifurcation

BIFURCATIONS LOCALES OU ELEMENTAIRES

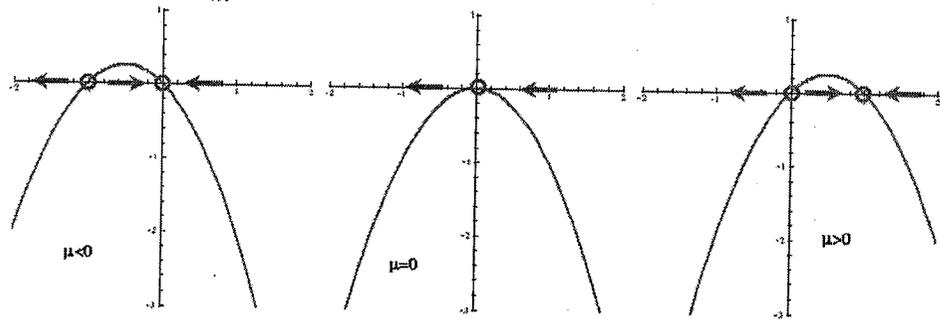
Les bifurcations locales sont appelées ainsi car elles peuvent toujours être identifiées lors d'une linéarisation du système au voisinage de la solution. Dans la suite, chaque bifurcation sera présentée graphiquement puis le critère de détection utilisé dans les algorithmes pour la localiser sera présenté. Ce critère, dans le cas des bifurcations locales, concerne les valeurs propres du Jacobien (étant donné qu'il intervient au premier ordre dans la linéarisation).

1. Bifurcation transcritique

Si le champ de vecteur s'écrit sous la forme suivante

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu \cdot x \pm x^2 \quad (4.107)$$

il est clair que les points d'équilibre sont donnés par $f(x, \mu) = 0$, donc $(x = 0, x = \mu)$. Pour $\mu < 0$ il existe deux points d'équilibre comme la montre la figure $x = 0$ est stable et $x = \mu$ instable ces deux points se confondent en un seul point pour $\mu = 0$. Or pour $\mu > 0$ il y a un lieu d'échange de stabilité entre ces deux points.



Figure~4-2: échange de stabilité entre deux points fixes

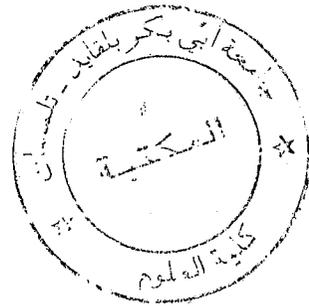
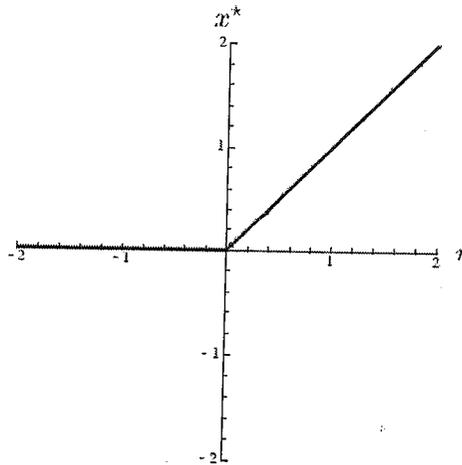


diagramme de bifurcation transcritique

2. Bifurcation fourche super-critique

Ce genre de modèle se rencontre aussi fréquemment en physique statistique (dans les transitions de phase du second ordre), et peut se mettre sous la forme générale

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \tag{4.108}$$

Ses points fixes et le Jacobien sont respectivement ($x = 0$, et $x = \pm\sqrt{\mu}$). Pour $\mu < 0$: il n'y a qu'un seul point fixe ($x = 0$), qui est stable. Le système ne connaît donc qu'un

seul état.

Pour $\mu = 0$: il n'y a toujours qu'un seul point fixe ($x = 0$), qui est metastable. Le système connaît un seul état.

Pour $\mu > 0$: trois points fixes apparaissent ($x = 0$ et $x = \pm\sqrt{\mu}$), dont le premier est instable et deux autres sont stables. Si le système est parfaitement symétrique, il n'y a pas de raison pour préférer un point fixe plutôt que l'autre. Il choisira alors arbitrairement l'un ou l'autre.

La bifurcation fourche super-critique (ou bifurcation normale), dans laquelle un système parfaitement déterministe peut basculer de façon aléatoire dans un régime ou dans l'autre lorsque le paramètre de contrôle augmente. Ce genre de bifurcation décrit par exemple des transitions de phase dans des solides, lorsque la température (à comparer avec le paramètre μ) varie [51].

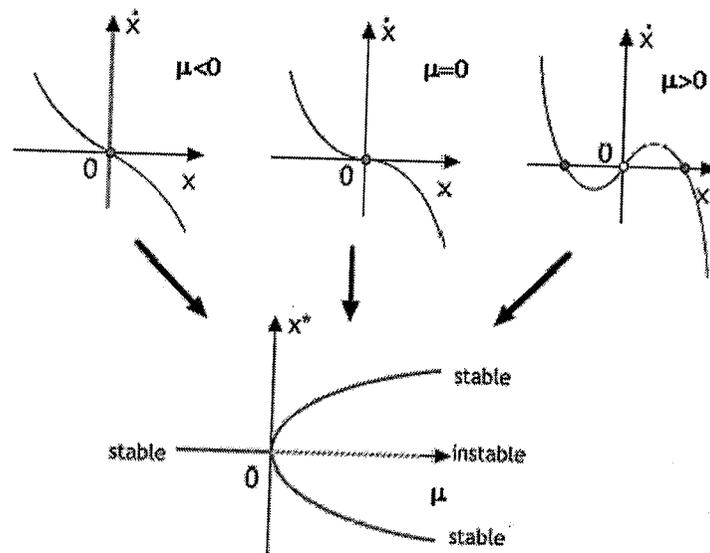


Illustration de la bifurcation fourche super-critique

3. Bifurcation fourche sous-critique

Ce genre de bifurcation se manifeste dans les transitions de phase de premier ordre, par exemple lorsqu'un matériau ferromagnétique en cours de refroidissement bascule spontanément dans un état où il devient magnétisé.

Considérons le système

$$\dot{x} = \mu x + x^3 \quad (4.109)$$

Ses points fixes sont respectivement ($x = 0$, et $x = \pm\sqrt{-\mu}$). Ce système ne possède qu'un seul point fixe stable, qui est $x = 0$ pour $\mu < 0$.

Contrairement au système précédent, il existe ici un régime ($\mu > 0$) dans lequel le système ne possède pas de point fixe. Cela signifie que x diverge jusqu'à l'infini. Une telle instabilité explosive est irréaliste.

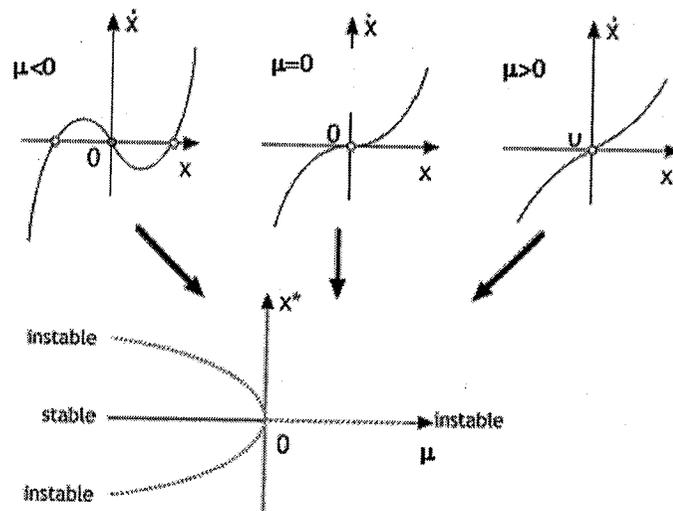
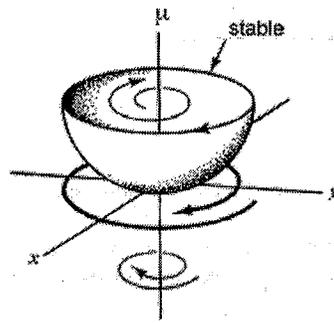


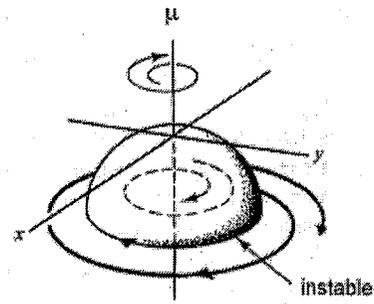
Illustration de la bifurcation fourche sous-critique

4. Bifurcation Andronov-Hopf

Cette bifurcation se manifeste par l'apparition d'un terme imaginaire dans la stabilité d'un point fixe (système linéaire possède deux valeurs propres purement imaginaire $\pm\omega i$). La bifurcation de d'Andronov-Hopf se manifeste donc par l'apparition spontanée d'un cycle limite, ce qui sur le plan macroscopique se traduit pas une oscillation du système. On l'observe dans des réactions chimiques, dans des interactions entre populations d'insectes, dans des fluides, etc.



bifurcation supercritique



bifurcation sous-critique

BIFURCATION GLOBALE

Ces bifurcation correspondent à des collisions de variétés et elles ne font donc pas forcément intervenir le voisinage de la solution. Ici la linéarisation locale autour de la solution ne sera donc d'aucune aide. C'est pour cela que ces bifurcations sont appelées globales exemple : Bifurcation hétéroclinique et homoclinique.

Bibliographie

- [1] J. Ch. Gille, P. Decaulne M. Pelegrin, (1967); *Systèmes Asservis Non Linéaires*, tome 3, Méthodes Topologique, Stabilité, Dunod.
- [2] H. Leipholz, (1970), *Stability Theory, An Introduction to the Stability of Dynamical Systems and Rigid Bodies*. Academic Press.
- [3] E. J. Routh (1877); *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion*, London, Macmillan.
- [4] J. L. Lagrange, (1965); *Mécanique Analytique* (2vols) 1788, Edition Albert Blanchart, Paris.
- [5] A. Lyapunov, *Problème Général de la Stabilité de Mouvement*, Annals of Math. studies, 17. Princeton University Press (traduction de l'édition originale Russe publiée en 1892 par Mathematics Society of Kharkov).
- [6] T. Benouaz and O. Arino, (1996). *Least Square Approximation of a Non-linear Ordinary Differential Equation*, Computers Math. Applic., Vol. 31, N° 8, pp 69-84.
- [7] T. Benouaz, (3–5 December 1996). *Lyapunov Function Generated by Least Square Approximation*, Deuxième Conférence Maghrébine sur l'Automatique Vol.1 pp.73-75, Tlemcen.
- [8] Vujanovic B., (1973), *Application of the optimal linearization method to the heat transfer problem*, International journal heat mass transfer, Vol. N°16, , pp.1111-1117.

- [9] **B. Vujanovic, B. Baclic**, (1975), *Application of Gauss Principe of Least Constraint to the Non-linear Heat Transfer Problem*, Int. Heat. Mass Transfer, vol.13, pp. 721-730. Pergamon Press, Oxford.
- [10] **Jordan A., Benmouna M., Bensenane A., Borucki A.**, (1987), Optimal linearization of nonlinear state equation, RAIRO-APII, Vol. N_21, , pp.263-271.
- [11] **A. Jordan et al**, (1986), *Transient State Temperature Distribution in a Cylindrical Electrical Conductor: Non linear Effects*, Revue de Physique Appliquée, 21.
- [12] **T. Benouaz et O. Arino**, (1995). *Existence, Unicité et Convergence de l'Approximation au Sens des Moindres Carrés d'une Equation Différentielle Ordinaire Non-Linéaire*, 94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204.
- [13] **T. Benouaz**, (13 – 17 August 1995). *Least Square Approximation of a Nonlinear Ordinary Differential Equation: The Scalar Case*, Proceeding of the Fourth International Colloquium on Numerical Analysis pp. 19-22 , Plovdiv, Bulgaria.
- [14] **T. Benouaz**, (2000). *Optimal Derivative of a Nonlinear Ordinary Differential Equation*, Equadiff 99, International Conference on Differential Equations, Vol. 2, pp 1404-1407, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [15] **T. Benouaz and O. Arino**, (1995). *Determination of the Stability of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by Least Square Approximation*. Computational Procedure, Appl. Math. and Comp. Sci., N° 1, Vol. 5, pp 33-48.
- [16] **T. Benouaz and O. Arino**, (1998). *Optimal Approximation of the Initial Value Problem*, Computers Math. Applic. vol. 36, N°1, pp.21-32.
- [17] **E. J. Doedel, R. C. Paffenroth, A. R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Yuri A. Kuznetsov, B. E. Oldeman, B. Sandstede, and X. J. Wang**, (2001) *.AUTO2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*, Applied and Computational Mathematics, California Institute of Technology.

- [18] **David R. Merkin**, (1997), *Introduction to the Theory of Stability*, Springer-Verlag.
- [19] **T. Benouaz**, (1996). *Contribution à l'Approximation et la Synthèse de la Stabilité d'une Equation Différentielle Ordinaire Non Linéaire*, Thèse de Doctorat d'état, Tlemcen.
- [20] **T. Benouaz et O. Arino**, (1995). *Relation entre l'Approximation Optimale et la Stabilité Asymptotique*, Publications de l' U.A, CNRS 1204, N^o.95/10.
- [21] **A. Herwitz**, (1895); *On the Conditions Under Which an Equation has only Roots with Negative Real Parts*, *Mathematische Annalen*, vol 46 pp 273-284.
- [22] **E.J. Doedel et al.** (2000) *AUTO 2000: Continuation and bifurcation software for Ordinary differential Equations (with HomCont)*, Concordia University, Montreal, Canada
- [23] **A. Chikhaoui**, (2000), *Contribution à l'étude de la stabilité des Systèmes non linéaires*, Master Thesis , Université de Tlemcen.
- [24] **N.F. Rulkov; L.S. Tsimring; H. D. I. Abarbanel**, (1994), *Tracking Unstable Orbits in Chaos using dissipative feedback control*, *Physical review E*, Vol. 50, N^o1.
- [25] **Jack K. Hale, Hüseyin. Koçak**, (1991), *Dynamics and Bifurcations*, Springer verlag.
- [26] **Steven Strogatz**, *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Perseus Books, Cambridge MA, 1994.
- [27] **J. K. Hale and H. Koçak**, (1991); *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag.
- [28] **V. Arnold**, (1974), *Equations Différentielles Ordinaires*, Editions Mir. Moscou.
- [29] **T. Benouaz, Martin Bohner, A. CHIKHAOUI**, 2009, *On The Relationship between the optimal Derivative and asymptotique Stability*, *African Diaspora Journal of Mathematics*, Volume8, Number 2, pp.148-162.

- [30] **A. CHIKHAOUI, T. Benouaz and A.Cheknane**, (June2009), *Computational Approach of the Optimal Linearization of the Nonlinear O.D.E: Application to Nonlinear Electronic Circuit*, International Journal of Computer and Electrical Engineering, Vol. 1, No. 2, , 1793-8198.
- [31] **T. Benouaz & F. Bendahmane**, (2004). *Least-Square Approximation of a Non-linear O.D.E. with Excitation*, Computer and Mathematics with Applications, Vol. 47, pp. 473-489.
- [32] **Reinhart H.**, (1982), *Equation différentielles fondements et applications*, Gauthier-Villars.
- [33] **Siboni M., Mardon J.CI.**, (1988), *Approximations et équations différentielles, analyse numérique*, Hermann Editeurs des sciences et des arts.
- [34] **Demailly J.P.**, (1991) , *Analyse numérique et Équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1991.J.
- [35] **Y. A. Kuznetsov**, (1998). *Elements of Applied Bifurcation Theory* (Second Edition),Ed. Springer Volume 112 in Applied Mathematical Sciences.
- [36] **P. Glendinning**, (1994). *Stability, Instability and Chaos: an Introduction to the Theory of Non Linear Diferential Equations*, Ed. Cambridge Text In Applied Mathematics.
- [37] **T. Benouaz et F. Belkhouche** (4 – 6 juin 2001). *Etude de la Bifurcation Engendrée par une Transition de Phase, Application à un Condensateur Non Linéaire*, Congrès Euro-Méditerranéen de la Matière Condensée, Tlemcen.
- [38] **F. Belkhouche**, (2001). *Contribution à l'étude de la stabilité asymptotique par la dérivée optimale*. Master's thesis, Université Tlemcen, Algerie, 2001.

- [39] **T. Sari**, (2003). *Cours donné à l' Ecole CIMPA. UNESCO TLEMCEM ALGERIE sur les Contrôles Non Linéaires et Applications, Perturbations singulières et modes glissants. 26 avril – 8 mai.*
- [40] **J. Guckenheimer, P. Holmes**, (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector fields*, Springer, New York.
- [41] **Benouaz Tayeb, Bohner Martin**, (2007), *On the relationship between the classical linearization and optimal derivative*, Advances in Dynamical Systems and Applications (ADSA), Vol. 2, N° 1, pp. 41-57.
- [42] **M. Hasler; J. Neiryck**, (1985), *Circuits Non linéaires*, Presse Polytechniques Romandes.
- [43] **A. Fossard**, (1972), *Commande des Systèmes Multidimensionnels*, Dunod.
- [44] **Barone A, Paterno G**, (1982) , *Physics and Applications of the Josephson Effect*. New York: John Wiley & Sons;
- [45] **N. Rouche, J. Mawhin**, (1973), *Equations Différentielles Ordinaires, Tome I, Théorie Générale*, Masson et C^{ie}.
- [46] **N. Rouche, J. Mawhin**, (1973), *Equations Différentielles Ordinaires, Tome II, Stabilité et Solutions Périodiques*, Masson et C^{ie}.
- [47] **R.E. Kalman and J.E. Bertram**, (1960); *Control System and Design Via the Second Method of Lyapunov. I Continuous Systems*, Journal of Basic Engineering.
- [48] **E. Freire, L.G. Franquelo, and j. Aracil**, (1984), *Periodicity and Chaos in an Autonomous Electronic System*, IEEE Transaction on Circuit and Systems, Vol. Cas-31, N° 3, pp237-247.
- [49] **S.Wiggins** (1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer verlag.

- [50] **F. Verhulst**, (1990), *Non linear Differential Equation and Dynamical Systems*, Springer verlag.
- [51] **Thierry Dudok de Wit**, (2009), **PHYSIQUE NON-LINÉAIRE**, Université d'Orléans.