République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Analyse Numérique des EDP

Présentée par

Mme : HAMZA CHERIF Née HAMZAOUI Yamina

Soutenue le : 02-02-2014

Systèmes elliptiques semilinéaires avec exposants critiques de Sobolev et poids

Soutenue devant le jury composé de :

Mr. S. M. BOUGUIMA,	Professeur,	Université de Tlemcen	Président
Mr. B. ABDELLAOUI,	Professeur,	Université de Tlemcen	Examinateur
Mr. M. MECHAB,	Professeur,	Université de Sidi Bel Abbes,	Examinateur
Mr. B. MESSIRDI,	Professeur,	Université d'Oran (Es Senia),	Examinateur
Mme Y. NASRI,	Maître de Conférences,	Université de Tlemcen,	Examinatrice
Mr. M. BOUCHEKIF,	Professeur,	Université de Tlemcen,	Directeur de thèse

Année Universitaire : 2013-2014

Dédicaces

A mon Mari qui m'a poussée et encouragée à aller au-delà

de mes capacités.

A ma très chère famille, qui par leur affection et bienveillance

m'a permis d'accomplir ce travail dans la sérénité.

A tous ceux qui m'ont formée.
A ceux qui me liront.

Remerciements

Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans la confiance, la patience et la générosité de mon directeur de thèse Monsieur le Professeur **Bouchekif M.**. Je lui suis reconnaissante pour son enthousiasme, en tant que chercheur, pour sa disponibilité sans faille malgré ses énormes responsabilités et ses encouragements qui sont toujours présents. Qu'il soit remercié pour avoir guidé mes pas de jeune chercheuse.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur **Bouguima S. M.** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je voudrais remercier les membres de jury qui ont bien voulu juger ce travail de thèse :

-Monsieur le Professeur **Abdellaoui B.** de l'université de Tlemcen d'avoir accepté de juger ce travail.

-Monsieur le Professeur **Mechab M.** de l'université de Sidi Bel Abbes, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury qui examinera cette thèse.

-Monsieur le Professeur **Messirdi B.** de l'université d'Oran Es Senia, d'avoir accepté de participer au jury qui examinera ce manuscrit malgré l'éloignement.

-Madame le Professeur **Nasri Y.** de l'université de Tlemcen, pour ses encouragements incessants et sa participation au jury.

Je tiens adresser mes remerciements et sympathie aux membres du Laboratoire de Système Dynamique et Application, à toutes les personnes qui ont contribuées de près ou de loin au bon déroulement de ce travail et à ceux que j'aurais oubliés.

Enfin à celle qui a su patienter que je puisse terminer cette thèse.

Table des Matières

Notations

Géométrie

Ω: Ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

$\partial\Omega$: La frontière de Ω.

$|\Omega|$: La mesure de Ω.

$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$: point générique de $\mathbb{R}^N$.

$r = |x| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2)}$: Module de x.

$dx = dx_1 dx_2 ... dx_N$: mesure de Lebesgue sur Ω.

ds_x: La mesure de surface sur $\partial\Omega$.

δ_{x_0}: La mesure de Dirac centrée en x_0.

ν: La normale unitaire extérieure à Ω.

p.p.: presque partout.

Formules et fonctions

$(.,.)$: Le produit scalaire.

$(u, v) > 0$: i.e. $u > 0$ et $v > 0$.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$: Le vecteur gradient de u.

Δu: Le laplacian de u.

$\mathrm{div}\,(u)$: La divergence d'un vecteur u est: $\mathrm{div}\,(u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$.

$2^* = \frac{2N}{N-2}$: Exposant critique de Sobolev pour $N \geq 3$..

$2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}$: Exposant critique de Sobolev pour la trace.

$supp\ (u)$: Le support de la fonction u.

$B_R(x_0)$: La boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon R centrée en x_0.

V^+: Partie positive de la fonction V, $V^+ = \max(V, 0)$.

V^-: Partie négative de la fonction V, $V^- = \min(V, 0)$.

V_x: Voisinage de x.

Espaces

$C(\Omega)$: Espace des fonctions continues.

$C_0^\infty(\Omega)$: Espace des fonctions indéfiniments dérivables dans Ω à support compacte.

$C^k(\Omega)$: Espace des fonctions de classe k dans Ω.

$L^p(\Omega)$: Espace des fonctions de puissance p-ème intégrables sur Ω pour la mesure dx.

$W^{1,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev, à dérivée d'ordre 1 dans $L^p(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = v|_\Gamma = 0\}$, où γ_0 est l'application trace.

X': Espace dual de X.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles permettent d'aborder d'un point de vue mathématique certains phénomènes observés. Pour se fixer les idées, de ces équations découlent des problèmes de géométrie differentielle (problème de Yamabe [33]), des problèmes d'astrophysique (Yang Mills [34]) et des phénomènes de reaction-diffusion en biologie [24] qu'on appelle chemotaxie dans des états stationnaires.

L'objet de cette thèse est d'étudier les résultats d'existence d'une classe de systèmes elliptiques de deux équations différentielles à deux inconnus faiblement couplés de type Dirichlet ou Neumann dont les formes vectorielles sont les suivantes:

1)

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(P(x)\nabla U) = AU + \nabla H_1(U) & \text{dans } \Omega, \\ (a) \text{ ou } (b) & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$$(a): U = 0 \text{ et } (b): \frac{\partial U}{\partial \nu} = -\zeta(x)U.$$

2)

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \eta(x)\nabla H_2(U) & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \nu} = Q(x)\nabla H_3(U) & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$H_1(U) = |u|^{\alpha}|v|^{\beta}$, $H_2(U) = |u|^{2^*} + |v|^{2^*}$, $H_3(U) = |u|^{\alpha_1}|v|^{\beta_1}$ avec $\alpha + \beta = 2^*$ et $\alpha_1 + \beta_1 = 2_*$; $\dfrac{\partial U}{\partial \nu} = (\dfrac{\partial u}{\partial \nu}, \dfrac{\partial v}{\partial \nu})$; $U = (u, v)$; A est une matrice symétrique; P, Q, ζ et η sont des fonctions poids.

Ces systèmes contiennent des exposants critiques donnant lieu à une perte de compacité en terme mathématique ou une perte d'équilibre en terme physique et des fonctions poids qui représenteront les coefficients de diffusion des cellules. En biologie, les solutions obtenues représentent les concentrations des cellules dans leur milieu et à l'extérieur.

L'une des difficultés majeures dans la recherche des solutions de ce genre de problèmes consiste à récupérer "la compacité". Ces questions ont été étudiées, à notre connaissance, par Brezis et Nirenberg dans leur article bien connu [12]. Nos principales contributions pour contourner la perte de compacité consistent à utiliser: la condition de Palais-Smale (P-S), le principe de Concentration-Compacité dû à Lions [25, 26] et le principe d'Ekeland [18].

Cette thèse est constiuée de quatre chapitres qui présentent des résultats d'existence, de non existence et de multiplicité des solutions pour la même classe de systèmes semilinéaires avec differentes conditions aux bords (Dirichlet ou Neumann).

Nous allons présenter ici d'une manière détaillée le contenue de chacun d'eux.

Le chapitre 1 est entièrement consacré au rappel de quelques résultats de base sur les espaces de Sobolev, on y trouve aussi les définitions et théorèmes qui serons sollicités dans la suite de ce travail.

Le chapitre 2 concerne l'étude de l'existence et la non existence du système suivant:

$$\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)\begin{cases} -\operatorname{div}\left(p\left(x\right)\nabla u\right)=au+bv+\left(\alpha+1\right)\left|u\right|^{\alpha-1}u\left|v\right|^{\beta+1} & \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div}\left(q\left(x\right)\nabla v\right)=bu+cv+\left(\beta+1\right)\left|u\right|^{\alpha+1}\left|v\right|^{\beta-1}v & \text{dans } \Omega, \\ u>0,\, v>0 & \text{dans } \Omega, \\ u=v=0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, un ouvert borné régulier, $N\geq 3$, p, q sont des fonctions positives définies sur $\bar{\Omega}$, telles que $p,\, q\in H^1(\Omega)\cap C\left(\bar{\Omega}\right)$, $a,\, b,\, c\in\mathbb{R}$, $\alpha,\, \beta\geq 0/\ \alpha+\beta=2^*-2$. La valeur 2^* est l'exposant critique de Sobolev pour l'injection $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ qui est continue mais pas compacte.

Le but de ce chapitre est de généraliser les résultats de Alves et al. dans [4] pour un système elliptique avec poids positifs. On étudie l'effet du comportement des poids p et q au voisinage de leur minima sur l'existence des solutions. On suppose alors l'existence de x_1 dans Ω telle que, dans un voisinage de x_1 (V_{x_1}), p et q se comportent comme suit

$$p(x) = p(x_1) + A_k |x - x_1|^k + |x - x_1|^k \theta_p(x), \quad \forall x \in V_{x_1} \tag{1}$$

et

$$q(x) = q(x_1) + B_l |x - x_1|^l + |x - x_1|^l \theta_q(x), \quad \forall x \in V_{x_1}, \tag{2}$$

avec k, l, A_k, B_l des constantes positives, $\theta_p(x)$ et $\theta_q(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_1.

Pour $0 < k, l \leq 2$ la situation est plus délicate, on se restreint au cas où p et q vérifient les conditions supplémentaires suivantes:

$$kA_k \leq \frac{\tilde{p}(x)}{|x - x_1|^k}, \text{ p.p. } x \in \Omega \tag{3}$$

et

$$lB_l \leq \frac{\tilde{q}(x)}{|x - x_1|^l}, \text{ p.p. } x \in \Omega, \tag{4}$$

respectivement, avec $\tilde{p}(x) := \nabla p(x) . (x - x_1)$ et $\tilde{q}(x) := \nabla q(x) . (x - x_1)$.

Soient $\mu_1 \leq \mu_2$ les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

On obtient plus précisement les principaux résultats suivants:

Théorème 0.1 *Supposons que $(\mathcal{H})$ est vérifiée, $p, q \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisfont (1), (2) respectivement et $\alpha, \beta \geq 0$ tel que $\alpha + \beta = 2^* - 2$. Le système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)$ a une solution positive dans chacun des cas suivants:*

(1.a) $N \geq 4$, $k > 2$, $l > 2$ et $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$.

(1.b) $N \geq 4$, $k > 2$, $l = 2$ et $\tilde{B} < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$.

(1.c) *$N \geq 4$, $k = 2$, $l > 2$ $\tilde{A} < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$.*

(1.d) *$N \geq 4$, $k = l = 2$ et $\tilde{A} + \tilde{B} < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$.*

(1.e) *$N \geq 4$, $0 < k < 2$, $l \geq 2$, p satisfait la condition* (3) *et $\mu^* < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$, avec $\mu^* \in \left[\tilde{A}_k \frac{N^2}{4}, \lambda_{1,p}\right[$ et $\tilde{A}_k = A_k \min\left[|\Omega|^{k-2}, 1\right]$.*

(1.f) *$N \geq 4$, $k \geq 2$, $0 < l < 2$, q satisfait la condition* (4) *et $\nu^* < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$, avec $\nu^* \in \left[\tilde{B}_l \frac{N^2}{4}, \lambda_{1,q}\right[$ et $\tilde{B}_l = B_l \min\left[|\Omega|^{l-2}, 1\right]$.*

(2.a) *$N = 3$, $k \geq 2$, $l \geq 2$ et $\tau(k,l,p,q) < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$, où $\tau(k, l, p, q)$ est une constante positive.*

(2.b) *$N = 3$, $0 < k < 2$, $l \geq 2$, p satisfait la condition* (3) *et* $\sup(\mu^*, \tau_2(l)) < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$*, où $\tau_2(l)$ est une constante positive.*

(2.c) *$N = 3$, $k \geq 2$, $0 < l < 2$, q satisfait la condition* (4) *et* $\sup(\nu^*, \tau_1(k)) < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$*, où $\tau_1(k)$ est une constante positive.*

(3) *$N \geq 3$, $0 < k < 2$, $0 < l < 2$, p et q satisfont les conditions* (3) *et* (4) *respectivement et $\tau^* < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$, avec $\tau^* \in \left[\sup(\mu^*, \nu^*), \lambda_{1,(p,q)}\right[$.*

Les solutions sont obtenues, en faisant intervenir le principe de Concentration-Compacité de Lions [25] et une version du Théorème d'Ambrosetit-Rabinowitz [5].

On obtient également le résultat de non existence par l'application de l'identité de Pohozaev dans un domaine borné étoilé.

Dans le chapitre 3, nous étudions le système de Neumann non linéaire contenant deux exposants critiques de Sobolev et des fonctions poids suivant:

$$\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right) \begin{cases} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u) = au + bv + \eta |u|^{2^*-2} u & \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div}(p(x)\nabla v) = bu + cv + \eta |v|^{2^*-2} v & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha Q(x) |u|^{\alpha-2} u |v|^{\beta} & \text{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \beta Q(x) |u|^{\alpha} |v|^{\beta-2} v & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où p, Q sont des poids positifs et continus définis sur $\bar{\Omega}$, $\partial\Omega$ respectivement tel que $p \in H^1(\Omega)$; η est une constante réelle non négative; α, $\beta > 1$ tels que $\alpha + \beta = 2_*$.

Ici $2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev pour l'injection de trace $H^1(\Omega)$ dans $L^{2_*}(\partial\Omega)$ et $2^* = \frac{2N}{N-2}$ désigne l'exposant critique de Sobolev pour l'injection $H^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$. Ces injections sont continues, mais pas compactes.

Le cas où $p \equiv 1$, $Q \equiv 0$ et $u = v$ a été traité par Wang [31] (voir aussi [2]). Il a montré que le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2} u & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution u_λ pour tout $\lambda > 0$. Ces solutions sont non constantes pour $\lambda > \lambda_0 > 0$.

Le cas où $p \equiv 1 \equiv Q$, $u = v$ et $\eta = 0$ a été étudié par [3].

Notre but est d'étendre les résultats obtenus dans [31] et [3] pour un système elliptique avec poids. Plus précisement, on obtient les résultats suivants lorsque $\partial\Omega$ satisfait la condition géométrique (en abrégé $(c.g)$) en un point sur la frontière et la courbure moyenne H en ce point est positive:

Soient $\mu_1 \leq \mu_2$ les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

(1). Si $\mu_1 \leq \mu_2 < 0$ le système admet une solution positive. La preuve est basée sur le Lemme du col pour montrer que la fonctionnelle d'energie vérifie les conditions géométriques, d'où l'existence d'une suite de Palais-Smale. En utilisant aussi le principe de Concentration par Compacité de Lions, et on obtient le résultat suivant:

Théorème 0.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, un domaine borné tel que $\partial\Omega$ satisfait la (c.g) en y et $H(y) > 0$. Supposons que p et Q satisfont*

$$\frac{p(y)}{(Q(y))^{N-2}} = \min_{x\in\partial\Omega} \frac{p(x)}{(Q(x))^{N-2}},$$

$$|p(x) - p(y)| = o(|x-y|),$$

et

$$|Q(x) - Q(y)| = o(|x-y|),$$

respectivement pour x voisin de y, avec $o(|x-y|) \to 0$ quand $x \to y$. Alors, le système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ admet une solution.

(**2**). Si $0 < \mu_1 \leq \mu_2$. On considère maintenant l'opérateur $-\operatorname{div}(p(x)\nabla.)$ avec la condition de Neumann homogène au bord. On note par $(\lambda_{k,p})$ la suite des valeurs propres correspondantes, alors nous avons:

(**2.1**). Pour tout

$$\lambda_{k,p} < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1,p},$$

$$\lambda_{k,p} \leq a - |b| \leq \mu_1 \leq a + |b| < \lambda_{k+1,p} \leq \lambda_{k',p} \leq c - |b| \leq \mu_2 \leq c + |b| < \lambda_{k'+1,p},$$

et sous les même conditions sur p et Q qui figurent dans le théorème précédent, le système admet une solution. On montre le résultat suivant en utilisant le Thèoréme de Linking [5].

(**2.2**). Pour tout $a = \lambda_{k,p}$ et $c = \lambda_{k',p}$, l'existence de la solution est obtenue en utilisant les méthodes variationnelles.

(**3**). Si $\mu_1 < 0 < \mu_2$. On obtient la multiplicité des solutions en faisant usage du même principe utilisé dans (**2.1**).

Le chapitre 4 est une généralisation du problème de Wang [31] au système elliptique suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + \frac{\alpha}{2^*}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta} & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v = bu + cv + \frac{\beta}{2^*}|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta_1(x)u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \eta_2(x)v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u, v > 0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

où $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ sont des fonctions non négatives telles que $\eta_1, \eta_2 \in L^\infty(\partial\Omega)$.

On introduit la meilleure constante de Sobolev

$$S=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx}{\left(\int_\Omega|u|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}$$

On pose

$$S\left(\alpha,\,\beta\right)=\inf_{u,\,v\in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}}\frac{\int_\Omega\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)dx}{\left(\int_\Omega|u|^{\alpha}\,|v|^{\beta}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}},$$

d'après [4]

$$S\left(\alpha,\,\beta\right)=\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right)S.$$

On considère la fonctionnelle associée au système (5)

$$\begin{aligned}I\left(u,\,v\right)&=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2-\left(AU,\,U\right)\right)dx-\frac{1}{2^*}\int_\Omega|u|^{\alpha}\,|v|^{\beta}\,dx+\\&+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\eta_1\left(x\right)u^2+\eta_2\left(x\right)v^2\right)ds_x,\end{aligned}$$

Le résultat principal de cette partie est le suivant:

Théorème 0.3 *Supposons que $A\in M$ et $(\mathcal{A})$ est vérifiée. Alors si $\|\eta_1\|_\infty$ et $\|\eta_2\|_\infty$ sont assez petites, le problème* (5) *admet au moins une solution positive $(u,\,v)\in\left(H^1\left(\Omega\right)\right)^2$ qui satisfait $I\left(u,\,v\right)<\frac{1}{2N}\left(S_{\alpha,\beta}\right)^{N/2}$.*

Où $M=\{A\in M_{2\times2}$ matrice symétrique telle que $a+c<0$ et $b^2<ac\}$ et l'hypothèse $(\mathcal{A})$ $\Omega\subset\mathbb{R}^N\cap\left\{x=(x_1,\ldots,\,x_N)\in\mathbb{R}^N/\;x_N>0\right\}$ est un domaine borné de classe C^1 sue le bord, $H\left(0\right)>0$, $0\in\partial\Omega$, où $H\left(0\right)$ est la courbure moyenne à l'origine.

Pour établir l'existence de cette solution positive, on adopte les mêmes méthodes que celles utilisées dans le chapitre 2 dans (**1**).

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Le chapitre est organisé comme suit: en premier lieu, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces de Sobolev, puis les Sections 2 et 3 ont pour objet de présenter quelques lemmes, théorèmes et outils essentiels que nous utilisons au cours de cette thèse.

1.1 Espaces fonctionnels

Les espaces de Sobolev sont un outil omniprésent dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques. Leur comprehension est donc une étape nécessaire avant d'aborder les équations en question. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de O. Kavian [23] et de H. Brezis [10] sur le sujet, pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra consulter l'ouvrage de R. A. Adams [1].

Par la suite, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour $1 \leq p < \infty$, on note l'espace $L^p(\Omega)$ l'espace défini par

$$L^p(\Omega) = \left\{ u\colon\ \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable; } \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u\colon \ \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable; } ess \sup_\Omega |u| < \infty \right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_\infty = ess \sup_\Omega |u| \, .$$

Définition 1.1 *Soient Ω un espace de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p \leq \infty$. L' espace de Sobolev $W^{1,\,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,\,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \, ; \text{ tels que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \, , \, \forall i = 1, \, 2, \ldots, \, N \right\}.$$

On pose $H^1(\Omega) = W^{1,\,2}(\Omega)$.

Théorème 1.1 *$W^{1,\,p}(\Omega)$, muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,\,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

Il est de plus séparable pour $1 \leq p < \infty$ et reflexif pour $1 < p < \infty$.

Théorème 1.2 *$H^1(\Omega)$, muni du produit scalaire*

$$(u, \, v)_{H^1} = (u, \, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2},$$

est un espace de Hilbert séparable.

Définition 1.2 *On définit $H_0^1(\Omega)$ comme la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

Remarque 1.1 *On a:* $H^1(\mathbb{R}^N) = H_0^1(\mathbb{R}^N)$.

A présent rappelons quelques propriétés de base de ces espaces. Commençons par le critère de compacité de Rellich-Kondrachov.

Théorème 1.3 (Rellich-Kondrachov) *Soit* Ω *un domaine borné de classe* C^1, *on a*

$$\begin{array}{lll} W^{1,\,p}(\Omega) & \hookrightarrow & L^q(\Omega)\,,\ \forall q \in [1,\ 2^*[\qquad si\ p < N. \\ W^{1,\,p}(\Omega) & \hookrightarrow & L^q(\Omega)\,,\ \forall\ q \in [1,\ \infty) \qquad si\ p = N. \\ W^{1,\,p}(\Omega) & \hookrightarrow & C(\bar{\Omega})\,, \qquad\qquad\qquad\qquad si\ p > N, \end{array}$$

avec injections continues et compactes.

Il faut remarquer ici que l'injection $W^{1,\,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ n'est pas compacte.

On peut mentionner le résultat suivant sur la trace des fonctions $W^{1,\,p}(\Omega)$.

Théorème 1.4 *Soient* Ω *un ouvert régulier de* $\mathbb{R}^N$ *et* $1 \leq p \leq q$. *Alors il existe un opérateur linéaire continu* $\tau : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$, *appelé opérateur trace, tel que*

$$\tau : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega) \ \ est\ compact.$$

Si $q = 2_*$, *l'opérateur* τ *de trace est continu et pas compact.*

1.2 Quelques Lemmes

Le résultat suivant de Brezis-Lieb est moins classique, mais nous l'utiliserons plusieurs fois au cours des chapitres suivants :

Lemme 1.1 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* $u_n \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. *Si* u_n *est bornée dans* $L^p(\Omega)$ *et* $u_n \to u$ *presque partout dans* Ω, *alors*

$$\lim\left(\|u_n\|_{L^p(\Omega)}^p - \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}^p\right) = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p\,.$$

Théorème 1.5 (Principe du maximum fort) *Soit* Ω *un domaine borné. Si* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *vérifie* $-\Delta u \leq 0$ *et* u *atteint un maximum* ≥ 0 *à l'interieur de* Ω, *alors* u *est constante sur* Ω.

Le lemme de Concentration-Compacité qui est une méthode introduite par P. L. Lions est la plus générale pour traiter les problèmes de minimisation qui interviennent dans les domaines les plus variés (équations aux dérivées partielles, calculs des variations...etc).

Définition 1.3 $\mathcal{M}(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctionnelles linéaires continues sur* $C_0(\Omega)$. *Une telle fonctionnelle est appelée une mesure finie sur* Ω.

Lemme 1.2 (Concentration-Compacité) *Soit* $(u_n) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *une suite telle que*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ dans } H^1(\mathbb{R}^N) \\ |\nabla(u_n - u)|^2 &\rightharpoonup \mu \text{ dans } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \\ |u_n - u|^2 &\rightharpoonup \nu \text{ dans } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \\ u_n &\to u \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Posons

$$\mu_\infty = \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} |\nabla u_n|^2 \, dx \text{ et } \nu_\infty = \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} |u_n|^{2^*} \, dx.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \|\nu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2}{2^*}} &\leq S^{-1} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} \\ \nu_\infty^{\frac{2}{2^*}} &\leq S^{-1} \mu_\infty, \\ \limsup_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &\geq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} + \mu_\infty \\ \text{et } \limsup_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} &= \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} + \|\nu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} + \nu_\infty. \end{aligned}$$

De plus, si $u = 0$ *et* $\|\nu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2}{2^*}} = S^{-1} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}$, *alors* ν *et* μ *sont concentrées en un seul point.*

Lemme 1.3 (Identité de Pohozaev) *Soit* $u \in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$ *une solution de*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec g *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *et* Ω *borné. Posons* $G(u) = \int_0^u g(s)\, ds$. *Alors*

$$2N \int_\Omega G(u)\, dx - (N-2) \int_\Omega g(u)\, .u dx = \int_{\partial\Omega} (x.\nu) \left|\nabla u\right|^2 ds_x,$$

où $\nu = \nu(x)$ *est le vecteur normal extérieur unitaire à* $\partial\Omega$ *en* x.

1.3 Point critique et théorème du Col

Soit $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle définie sur un espace de Banach X différentiable au sens de Fréchet, on appelle point critique de J un élément u de X qui annule la différentielle F' de F et un régulier de J est un point u tel que $J'(u) \neq 0$. Une valeur critique de J est un nombre réel c tel qu'il existe $u \in X$ point critique de J tel que $J(u) = c$. Une valeur qui n'est pas critique est appelée valeur régulière de J.

Pour exprimer la compacité des suites minimisantes, ou de façon générale des suites qui convergent vers un point dont on espére montrer que c'est un point critique, on a souvent recours à la condition de Palais-Smale (en abrégé (P-S)).

Définition 1.4 *Soit* X *un espace de Banach et* J: $X \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1. *On dit que* J *vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) si de toute suite de* X *telle que*

$$J(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad J'(u_n) \to 0 \text{ dans } X',$$

on peut extraire une sous suite convergente.

Théorème 1.6 (du Col) *Soit X un espace de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ et $r > 0$ tel que $\|e\| > r$ et*

$$b := \inf J(u) > J(0) \geq J(e).$$

Si J satisfait les conditions de $(P\text{-}S)_c$ avec

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J[\gamma(t)],$$

où

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0, 1], X)\,;\, \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\},$$

alors c est une valeur critique pour J.

Le théorème suivant dit de Linking est une généralisation du Théorème du Col:

Théorème 1.7 *Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Banach avec $\dim Y < \infty$. On Suppose que $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ et satisfait*

(i) Il existe ρ, $\alpha > 0$ tel que $J\,|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \alpha$.

(ii) Il existe $e \in \partial B_1 \cap X$ et $R > \rho$ tel que si $Q = \left(\bar{B}_R \cap Y\right) \oplus \{re/\ 0 < r < R\}$, alors $J\,|_{\partial Q} \leq 0$. Si J satisfait les conditions de $(P\text{-}S)_c$ avec

$$c := \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in Q} J[h(u)],$$

où

$$\Gamma := \{h \in C(Q, X)\,;\, h\,|_{\partial Q} = id\,|_{\partial Q}\}.$$

Alors c est une valeur critique pour J.

1.4 Principe variationnel d'Ekeland

En général, une fonctionnelle bornée et semi-continue inférieurement J n'atteint pas nécessairement son infinimum. Par exemple, la fonction analytique $f(x) = \arctan(x)$ n'atteint ni son infinimum ni son supremum sur la droite réelle.

Théorème 1.8 *Soit (M, d) un espace métrique complet et soit $J : M \to \mathbb{R} \cup +\infty$ semi-continue inférieurement, bornée inférieurement et $\not\equiv +\infty$. Alors pour chaque ε, $\delta > 0$ et tout $u \in M$ avec*

$$J(u) \leq \inf_M J + \varepsilon,$$

il existe un élément $v \in M$ minimisant strictement la fonctionnelle

$$J_v(w) \equiv J(w) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(v, w).$$

En plus on a

$$J(v) \leq J(u) \quad \textit{dés que } d(u, v) \leq \delta.$$

Comme corollaire du principe d'Ekeland, nous avons

Corollaire 1.1 *Si X est un espace de Banach et $J \in C^1(X)$ bornée inférieurment alors il existe une suite minimisante (v_n) pour J dans X telle que*

$$J(v_n) \to \inf_X J, \quad J'(v_n) \to 0 \textit{ dans } X' \quad \textit{quand } n \to \infty.$$

Chapitre 2

Système elliptique de Dirichlet avec exposant critique de Sobolev et poids

Ce chapitre est le développement de l'article [8].

2.1 Introduction et principaux résultats

Dans cet article, nous étudions l'existence et la non existence des solutions positives pour le système elliptique suivant:

$$\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)\begin{cases} -\operatorname{div}\left(p\left(x\right)\nabla u\right)=au+bv+\left(\alpha+1\right)\left|u\right|^{\alpha-1}u\left|v\right|^{\beta+1} & \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div}\left(q\left(x\right)\nabla v\right)=bu+cv+\left(\beta+1\right)\left|u\right|^{\alpha+1}\left|v\right|^{\beta-1}v & \text{dans } \Omega, \\ u>0,\, v>0 & \text{dans } \Omega, \\ u=v=0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, p et q sont donnés des poids positifs définis sur Ω telle que $p,\ q \in H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$, a, b, c sont des paramètres réels et α, $\beta \geq 0$ satisfait $\alpha + \beta = 2^* - 2$. Ici $2^* = \frac{2N}{N-2}$ désigne l'exposant critique de Sobolev pour l'injection $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$.

Le cas scalaire a été largement étudié. Le type modèle s'écrit comme suit:

$$\left(\mathcal{P}^h\right)\begin{cases} -\operatorname{div}\left(h(x)\nabla u\right)=\lambda u+|u|^{2^*-2}u & \text{dans } \Omega,\\ u>0 & \text{dans } \Omega,\\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega,\end{cases}$$

où h est une fonction non négative mesurable pondérée.

Le cas où h est une fonction constante positive a été traité par Brezis et Nirenberg dans [12]. Ils ont prouvé que le problème $(\mathcal{P}^1)$ possède au moins une solution positive pour $0<\lambda<\lambda_1$ si $N\geq 4$ et pour $\lambda^*<\lambda<\lambda_1$ si $N=3$. λ_1 désigne ici la première valeur propre de l'opérateur $(-\Delta,\ H_0^1(\Omega))$ et λ^* est une constante positive.

Le cas où la fonction h n'est pas constante a été rarement étudié, nous ne trouvons que des résultats [14, 22]. En [22], Hadiji et Yazidi établissent l'existence de solutions au problème $\left(\mathcal{P}^h\right)$. Celle-ci dépend de la première valeur propre $\lambda_{1,h}$ de $-\operatorname{div}\left(h(x)\nabla.\right)$ dans $H_0^1(\Omega)$, le comportement de la fonction h au voisinage de ses minimas et la géométrie du domaine Ω.

En notant

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), U=(u,v),\ \ P=(p,q),\ H(U)=|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1},$$

et

$$\operatorname{div}(P\nabla U)=(\operatorname{div}(p\nabla u),\ \operatorname{div}(q\nabla v)).$$

Le système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)$ peut être réecrit sous la forme

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(P\nabla U\right)=AU+\nabla H & \text{dans } \Omega,\\ U>0 & \text{dans } \Omega,\\ U=0 & \text{sur } \partial\Omega.\end{cases}$$

Par $U > 0$ on signifie que $u > 0$ et $v > 0$.

Les valeurs propres réelles de la matrice A seront notées par μ_1, μ_2, nous allons supposer que $\mu_1 \leq \mu_2$.

De nombreux résultats d'existence ont été donné pour les systèmes elliptiques impliquant laplacien ou pseudo-laplacien opérateur qui dérivent du potentiel, voir, par exemple de Figueiredo [20], de Thélin et Vélin [30], Boccardo et de Figueiredo [7] et les références qui sont citées.

Le système $\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(1,1)}$ a été étudié par Alves et al. [4]. Ils ont obtenu les résultats suivants

(1) Si $N \geq 4$ et $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$, il existe une solution.

(2) Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est une boule, alors pour $\frac{\lambda_1}{4} \leq \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$, le système $\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(1,1)}$ a une solution et pour $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \frac{\lambda_1}{4}$, le système $\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(1,1)}$ n'a pas de solution.

(3) Si Ω est un domaine étoilé par rapport à 0 et $\mu_2 \leq 0$, alors le système $\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(1,1)}$ n'a pas de solution.

Une question naturelle se pose: peut-on étendre le travail de Alves et al. pour les systèmes avec des poids positifs?

Afin d'énoncer nos principaux résultats, nous introduisons quelques préliminaires.

Nous supposons l'existence de x_1 dans Ω telle que, dans V_{x_1}, p et q se comportent comme suit:

$$p(x) = p(x_1) + A_k |x - x_1|^k + |x - x_1|^k \theta_p(x), \qquad \text{q}^{\text{d}}\ x \in V_{x_1} \tag{2.1}$$

et

$$q(x) = q(x_1) + B_l |x - x_1|^l + |x - x_1|^l \theta_q(x), \qquad \text{q}^{\text{d}}\ x \in V_{x_1}, \tag{2.2}$$

avec k, l, A_k, B_l des constantes positives, $\theta_p(x)$ et $\theta_q(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_1.

Les paramètres k et l jouerons un rôle essentiel dans l'étude de notre système. En effet, *a*) Si $N \geq 4$, le cas $(k, l\ )$ avec $k > 2$ et $l > 2$ est traité par une approche classique. Pour les autres cas, nous devons supposer que les fonctions p, q satisfont aux conditions supplémentaires suivantes

$$kA_k \leq \frac{\tilde{p}\,(x)}{|x - x_1|^k}, \text{ p.p. } x \in \Omega, \tag{2.3}$$

et

$$lB_l \leq \frac{\tilde{q}\,(x)}{|x - x_1|^l}, \text{ p.p. } x \in \Omega, \text{ respectivement} \tag{2.4}$$

où

$$\tilde{p}\,(x) := \nabla p\,(x)\,.\,(x - x_1) \text{ et } \tilde{q}\,(x) := \nabla q\,(x)\,.\,(x - x_1)\,.$$

b) Le cas $N = 3$, $k > 0$ et $l > 0$ est beaucoup plus délicat et il existe une différence avec $N \geq 4$ pour $k > 2$ et $l > 2$.

c) Notons que les éléments (k, l) de l'ensemble $]2, \infty[\times\{2\} \bigcup \{2\}\times]2, \infty[\bigcup]0, 2[\times]0, 2[\bigcup \{(2, 2)\}$ sont des valeurs critiques dans la dimension $N = 4$.

Nous travaillons dans l'espace $E = \left[H_0^1\,(\Omega)\right]^2$ muni de la norme

$$\|(u, v)\| = \left(\int_\Omega p\,(x)\,|\nabla u\,(x)|^2\,dx + \int_\Omega q\,(x)\,|\nabla v\,(x)|^2\,dx \right)^{1/2}.$$

La fonctionnelle d'énergie correspondante au système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)$ est définie dans E par

$$J\,(u, v) := \frac{1}{2}\,\|(u, v)\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (AU, U)\,dx - \int_\Omega |u|^{\alpha+1}\,|v|^{\beta+1}\,dx, \tag{2.5}$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire usuel $\mathbb{R}^2$.

Il est clair $J \in C^1\,(E, \mathbb{R})$.

Un couple de fonctions $(u,\ v) \in E$ est dit solution de $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)$ si $u,\ v > 0$ sur Ω, satisfait $\langle J'\,(u,\ v)\,,\ (\varphi,\ \phi)\rangle = 0$, pour tout $(\varphi,\ \phi) \in E$. Ici $J'\,(u,\ v)$ désigne la dérivée au sens de Fréchet de J au point $(u,\ v)$.

La théorie de la régularité elliptique standard du système montre que $u,\ v \in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$.

Définissons

$$S_{\mu,2^*}^{(p)} := \inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} Q_{\mu,2^*}^{(p)}(u) \text{ et } S_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)} := \inf_{(u,v)\in E\setminus\{0\}} Q_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}(u,v)\,, \tag{2.6}$$

où

$$Q_{\mu,2^*}^{(p)}(u) = \frac{\int_\Omega p(x)\,|\nabla u|^2\,dx - \mu\int_\Omega |u|^2\,dx}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}},$$

$$Q_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}(u,v) = \frac{\int_\Omega \left(p(x)\,|\nabla u|^2 + q(x)\,|\nabla v|^2\right)dx - \int_\Omega (AU,U)\,dx}{\left(\int_\Omega |u|^{\alpha+1}\,|v|^{\beta+1}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}},$$

respectivement, et

$$\gamma(p,q) := \inf_{(u,v)\in E\setminus\{0\}} I_{p,q}(u,\,v)\,,$$

avec $I_{p,q}(u,\,v) := \frac{1}{2}\frac{\int_\Omega\left(\tilde{p}(x)|\nabla u|^2+\tilde{q}(x)|\nabla v|^2\right)dx}{\int_\Omega(u^2+v^2)dx}$.

Soit $\lambda_{1,(p,q)} = \min(\lambda_{1,p},\,\lambda_{1,q})$,

$$\tilde{B} = \frac{(N-2)\,N\,(N+2)}{4\,(N-1)}B_2\left(\frac{(\alpha+1)\,S_{0,2^*}^{(q)}}{(\beta+1)\,S_{0,2^*}^{(p)}}+1\right)^{-1}$$

et

$$\tilde{A} = \frac{(N-2)\,N\,(N+2)}{4\,(N-1)}A_2\left(\frac{(\beta+1)\,S_{0,2^*}^{(p)}}{(\alpha+1)\,S_{0,2^*}^{(q)}}+1\right)^{-1}.$$

L'hypothèse suivante est nécessaire:

($\mathcal{H}$) Les constantes réelles a et c sont positives et $b^2 < ac$.

Ainsi, $0 < \mu_1 \leq \mu_2$.

Nos principaux résultats sont les suivants.

Théorème 2.1 *Supposons que $\mu_2 \leq \gamma(p,q)$, $\alpha+\beta = 2^*-2$ et Ω un domaine étoilé par rapport à x_1. Alors $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)$ n'a pas de solution.*

Théorème 2.2 *Supposons que $(\mathcal{H})$ est vérifiée et*

$$b \geq 0,\ \mu_2 \geq \lambda_{1,(p,q)}.$$

ou

$$b \leq 0,\ \mu_1 \geq \lambda_{1,(p,q)}.$$

Alors le système $\left(S_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)$ n'a pas de solution.

Théorème 2.3 *Supposons que $(\mathcal{H})$ est vérifiée, $p, q \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisfont (2.1), (2.2) respectivement et $\alpha, \beta \geq 0$ tel que $\alpha + \beta = 2^* - 2$. Le système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)$ a une solution positive dans chacun des cas suivants:*

(1.a) $N \geq 4,\ k > 2,\ l > 2$ et $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$.

(1.b) $N \geq 4,\ k > 2,\ l = 2$ et $\tilde{B} < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$.

(1.c) $N \geq 4,\ k = 2,\ l > 2\ \tilde{A} < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$.

(1.d) $N \geq 4,\ k = l = 2$ et $\tilde{A} + \tilde{B} < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$.

(1.e) $N \geq 4,\ 0 < k < 2,\ l \geq 2$, p satisfait la condition (2.3) et $\mu^* < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$, avec $\mu^* \in \left[\tilde{A}_k \frac{N^2}{4}, \lambda_{1,p}\right[$ et $\tilde{A}_k = A_k \min\left[|\Omega|^{k-2}, 1\right]$.

(1.f) $N \geq 4,\ k \geq 2,\ 0 < l < 2$, q satisfait la condition (2.4) et $\nu^* < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$, avec $\nu^* \in \left[\tilde{B}_l \frac{N^2}{4}, \lambda_{1,q}\right[$ et $\tilde{B}_l = B_l \min\left[|\Omega|^{l-2}, 1\right]$.

(2.a) $N = 3,\ k \geq 2,\ l \geq 2$ et $\tau(k,l,p,q) < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$, où $\tau(k,\ l,\ p,\ q)$ est une constante positive.

(2.b) $N = 3,\ 0 < k < 2,\ l \geq 2$, p satisfait la condition (2.3) et $\sup(\mu^*,\ \tau_2(l)) < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$, où $\tau_2(l)$ est une constante positive.

(2.c) $N = 3,\ k \geq 2,\ 0 < l < 2$, q satisfait la condition (2.4) et $\sup(\nu^*,\ \tau_1(k)) < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$, où $\tau_1(k)$ est une constante positive.

(3) $N \geq 3,\ 0 < k < 2,\ 0 < l < 2$, p et q satisfont les conditions (2.3) et (2.4) respectivement et $\tau^* < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{1,(p,q)}$, avec $\tau^* \in \left[\sup(\mu^*,\ \nu^*), \lambda_{1,(p,q)}\right[$.

Ce chapitre est organisé comme suit: Dans la Section 2.2, nous donnons quelques estimations préliminaires. La Section 3.2 est concernée par des résultats de non existence.

Dans la Section 4.2 nous établissons quelques relations pour prouver nos résultats, et la Section 5.2 est consacrée aux résultats d'existence.

2.2 Préliminaires

On a besoin de l'inégalité de Hardy suivante, voir par exemple [13]:

Lemme 2.1 *Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $N + t > 0$, on a*

$$\int_{\Omega} |x|^t |u|^2 \, dx \leq \left(\frac{2}{N+t} \right)^2 \int_{\Omega} |x|^t |x.\nabla u|^2 \, dx, \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

De plus, la constante $\left(\frac{2}{N+t}\right)^2$ est optimale et elle n'est pas atteinte.

Donnons maintenant la proposition suivante pour $\gamma(p, q)$.

Proposition 2.1 (1) *Supposons que $p, q \in C^1(\Omega)$ et il existe $b \in \Omega$ tel que $\tilde{p}(b) + \tilde{q}(b) < 0$, alors $\gamma(p, q) = -\infty$.*

(2) *Supposons que $p, q \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisfont* (2.1), (2.2) *respectivement et*

$\tilde{p}(x) \geq 0$, $\tilde{q}(x) \geq 0$ p.p $x \in \Omega$, on a pour

(2.*i*) *Si $k > 2$, $l > 2$ et $p, q \in C^1(\Omega)$, $\gamma(p, q) = 0$.*

(2.*ii*) *Si $k = 2$, $l > 2$ ou $k > 2$, $l = 2$,*

$$0 \leq \gamma(p, q) \leq \frac{A_2}{2} \lambda_1 |\Omega|^2 \quad ou \; 0 \leq \gamma(p, q) \leq \frac{B_2}{2} \lambda_1 |\Omega|^2,$$

respectivement.

(2.*iii*) *Si $0 < k \leq 2$, $0 < l \leq 2$, p, q satisfont les conditions* (2.3) *et* (2.4) *respectivemenet, alors*

$$\frac{N^2}{8} \min \left(k A_k |\Omega|^{k-2}, \, l B_l |\Omega|^{l-2} \right) \leq \gamma(p, q).$$

Remarque 2.1 *Si $k = l = 2$ et $p,\, q \in C^1(\Omega)$, on obtient l'estimation suivante:*

$$\frac{N^2}{4}\min\left(A_2,\, B_2\right) \leq \gamma\left(p,\, q\right) \leq \frac{\lambda_1}{2}\left(A_2 + B_2\right)\left|\Omega\right|^2.$$

Preuve: (1) Soit $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ tel que $0 \leq \varphi \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$, $\varphi \equiv 1$ sur $B(0, r)$ et $\varphi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^N \backslash B(0, 2r)$, où $0 < r < 1$.

Posons $\varphi_j(x) = \varphi(j(x - b))$ pour $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\gamma\left(p,\, q\right) &\leq \frac{1}{4}\frac{\int\limits_{\Omega}\left(\tilde{p}(x) + \tilde{q}(x)\right)\left|\nabla\varphi_j(x)\right|^2 dx}{\int\limits_{\Omega}\varphi_j^2(x)\, dx} \\
&\leq \frac{1}{4}\frac{\int\limits_{B\left(b, \frac{2r}{j}\right)}\left(\tilde{p}(x) + \tilde{q}(x)\right)\left|\nabla\varphi_j(x)\right|^2 dx}{\int\limits_{B\left(b, \frac{2r}{j}\right)}\varphi_j^2(x)\, dx}.
\end{aligned}$$

Utilisons le changement de variable $y = j(x - b)$, on obtient

$$\gamma\left(p,\, q\right) \leq \frac{j^2}{4}\frac{\int\limits_{B(0,2r)}\left(\tilde{p}\left(\frac{y}{j} + b\right) + \tilde{q}\left(\frac{y}{j} + b\right)\right)\left|\nabla\varphi(y)\right|^2 dy}{\int\limits_{B(0,2r)}\varphi^2(y)\, dy}.$$

Appliquons le Théorème de Convergence Dominé, on aboutit au resultat désiré lorsque j tend vers l'infini.

Maintenant on va montrer $(2.i)$.

Utilisons (2.1), (2.2) et puisque $p,\, q \in C^1(\Omega)$ dans un voisinage V de x_1, on écrit

$$p(x) = p(x_1) + A_k\left|x - x_1\right|^k + \theta_p(x) \tag{2.7}$$

et

$$q(x) = q(x_1) + B_l\left|x - x_1\right|^l + \theta_q(x), \tag{2.8}$$

où θ_p et $\theta_q \in C^1(V)$ sont tels que

$$\lim_{x\to x_1} \frac{|\theta_p(x)|}{|x-x_1|^k} = 0 \text{ et } \lim_{x\to x_1} \frac{|\theta_q(x)|}{|x-x_1|^l} = 0. \tag{2.9}$$

De (2.9), on obtient l'existence de r, $0 < r < 1$, telle que

$$|\theta_p(x)| \leq |x-x_1|^k \text{ et } |\theta_q(x)| \leq |x-x_1|^l, \text{ pour tout } x \in B(x_1, 2r) \subset V. \tag{2.10}$$

Soit $\varphi_j(x) = \varphi(j(x-x_1))$ définie comme dans la preuve de (1), on a

$$0 \leq \gamma(p, q) \leq \frac{1}{4} \frac{\int\limits_\Omega (\tilde{p}(x) + \tilde{q}(x)) \left|\nabla\varphi_j(x)\right|^2 dx}{\int\limits_\Omega \varphi_j^2(x)\, dx}.$$

Utilisons (2.7) et (2.8), il résulte

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \gamma(p, q) \leq \frac{1}{4} \frac{\int\limits_{B\left(x_1, \frac{2r}{j}\right)} \left(kA_k |x-x_1|^k + lB_l |x-x_1|^l\right) \left|\nabla\varphi_j(x)\right|^2 dx}{\int\limits_{B\left(x_1, \frac{2r}{j}\right)} \varphi_j^2(x)\, dx} + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\int\limits_{B\left(x_1, \frac{2r}{j}\right)} \left(\nabla\theta_p(x) \,.\, (x-x_1) + \nabla\theta_q(x) \,.\, (x-x_1)\right) \left|\nabla\varphi_j(x)\right|^2 dx}{\int\limits_{B\left(x_1, \frac{2r}{j}\right)} \varphi_j^2(x)\, dx}. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $y = j(x-x_1)$, et une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq \gamma(p, q) \leq{}& \frac{kA_k}{4j^{k-2}} \frac{\int\limits_{B(0,2r)} |y|^k |\nabla\varphi(y)|^2 dy}{\int\limits_{B(0,2r)} \varphi^2(y)\, dy} - \frac{j}{4} \frac{\int\limits_{B(0,2r)} \theta_p\left(\frac{y}{j} + x_1\right) . \operatorname{div}\left(y |\nabla\varphi(y)|^2\right) dy}{\int\limits_{B(0,2r)} \varphi^2(y)\, dy} + \\ &+ \frac{lB_l}{4j^{l-2}} \frac{\int\limits_{B(0,2r)} |y|^l |\nabla\varphi(y)|^2 dy}{\int\limits_{B(0,2r)} \varphi^2(y)\, dy} - \frac{j}{4} \frac{\int\limits_{B(0,2r)} \theta_q\left(\frac{y}{j} + x_1\right) . \operatorname{div}\left(y |\nabla\varphi(y)|^2\right) dy}{\int\limits_{B(0,2r)} \varphi^2(y)\, dy}. \end{aligned}$$

En utilisant (2.10), nous arrivons à

$$\begin{aligned}0 \quad \leq \quad \gamma(p,\, q) \leq \frac{kA_k}{4j^{k-2}} \frac{\int\limits_{B(0,2r)} |y|^k |\nabla\varphi(y)|^2 \, dy}{\int\limits_{B(0,2r)} \varphi^2(y) \, dy} + \frac{C}{j^{k-1}} \frac{\int\limits_{B(0,2r)} |y|^k \, dy}{\int\limits_{B(0,2r)} \varphi^2(y) \, dy} + \\ + \frac{lB_l}{4j^{l-2}} \frac{\int\limits_{B(0,2r)} |y|^l |\nabla\varphi(y)|^2 \, dy}{\int\limits_{B(0,2r)} \varphi^2(y) \, dy} + \frac{C}{j^{l-1}} \frac{\int\limits_{B(0,2r)} |y|^l \, dy}{\int\limits_{B(0,2r)} \varphi^2(y) \, dy},\end{aligned}$$

où $C = \max\limits_{y \in B(0,2r)} \left| \operatorname{div}\left(y \, |\nabla\varphi(y)|^2\right) \right|$.
Par conséquent, pour $k > 2$ et $l > 2$, nous atteignons que $\gamma(p,\, q) = 0$. Ceci conclut la preuve de $(2.i)$.

Pour montrer $(2.ii)$, nous commençons par le cas $k = 2$ et $l > 2$.

Soit $\zeta_j(x) = \varphi_1(j(x - x_1))$ pour $j \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, où φ_1 est la fonction propre positive correspondante à la première valeur propre λ_1 de l'opérateur $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Nous avons

$$0 \leq \gamma(p,\, q) \leq \frac{1}{4} \frac{\int\limits_{\Omega} (\tilde{p}(x) + \tilde{q}(x)) \left|\nabla\zeta_j(x)\right|^2 dx}{\int\limits_{\Omega} \zeta_j^2(x) \, dx}.$$

Utilisons (2.7) et (2.8), on voit que

$$\begin{aligned}0 \quad \leq \quad \gamma(p,\, q) \leq \frac{1}{4} \frac{\int\limits_{x_1 + \frac{1}{j}\Omega} \left(2A_2 |x - x_1|^2 + lB_l |x - x_1|^l\right) \left|\nabla\zeta_j(x)\right|^2 dx}{\int\limits_{x_1 + \frac{1}{j}\Omega} \zeta_j^2(x) \, dx} + \\ + \frac{1}{4} \frac{\int\limits_{x_1 + \frac{1}{j}\Omega} \left(\nabla\theta_p(x) \,.\, (x - x_1) + \nabla\theta_q(x) \,.\, (x - x_1)\right) \left|\nabla\zeta_j(x)\right|^2 dx}{\int\limits_{x_1 + \frac{1}{j}\Omega} \zeta_j^2(x) \, dx}.\end{aligned}$$

Par un simple changement de variable $y = j(x - x_1)$ et intégrant par partie, on obtient par (2.4)

$$\begin{aligned}0 \;\le\; \gamma(p,\,q) &\le \frac{A_2}{2}\frac{\int\limits_\Omega |y|^2\,|\nabla\varphi_1(y)|^2\,dy}{\int\limits_\Omega \varphi_1^2(y)\,dy}+\frac{C}{j}\frac{\int\limits_\Omega |y|^k\,dy}{\int\limits_\Omega \varphi_1^2(y)\,dy}+\\&+\frac{lB_l}{4j^{l-2}}\frac{\int\limits_\Omega |y|^l\,|\nabla\varphi_1(y)|^2\,dy}{\int\limits_\Omega \varphi_1^2(y)\,dy}+\frac{C}{j^{l-1}}\frac{\int\limits_\Omega |y|^l\,dy}{\int\limits_\Omega \varphi_1^2(y)\,dy},\end{aligned}$$

où $C=\max\limits_{y\in\Omega}\left|\operatorname{div}\left(y\,|\nabla\varphi_1(y)|^2\right)\right|$. tendant $j\to\infty$, on obtient

$$0\le\gamma(p,\,q)\le\frac{A_2}{2}\frac{\int\limits_\Omega |y|^2\,|\nabla\varphi_1(y)|^2\,dy}{\int\limits_\Omega \varphi_1^2(y)dy},$$

donc

$$0\le\quad\gamma(p,\,q)\le\frac{A_2}{2}\lambda_1\,|\Omega|^2\,.$$

De même, on déduit dans le cas $k>2$ et $l=2$, que

$$0\le\quad\gamma(p,\,q)\le\frac{B_2}{2}\lambda_1\,|\Omega|^2\,.$$

Montrons maintenant (2.*iii*).

Puisque p et q satisfont (2.3) et (2.4) respectivement, alors pour tout $(u,\,v)\in E\backslash\{0\}$, nous avons

$$\begin{aligned}I_{p,q}(u,\,v) &\ge \frac{k}{2}A_k\frac{\int_\Omega |x-x_1|^{k-2}\,||x-x_1|\,.\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega (u^2+v^2)\,dx}+\frac{l}{2}B_l\frac{\int_\Omega |x-x_1|^{l-2}\,||x-x_1|\,.\nabla v|^2\,dx}{\int_\Omega (u^2+v^2)\,dx}\\&\ge \frac{k}{2}A_k\,|\Omega|^{k-2}\,\frac{\int_\Omega ||x-x_1|\,.\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega (u^2+v^2)\,dx}+\frac{l}{2}B_l\,|\Omega|^{l-2}\,\frac{\int_\Omega ||x-x_1|\,.\nabla v|^2\,dx}{\int_\Omega (u^2+v^2)\,dx}\end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 2.1 pour $t=0$, on trouve

$$I_{p,q}(u,\,v)\ge\frac{k}{2}A_k\,|\Omega|^{k-2}\left(\frac{N}{2}\right)^2\frac{\int_\Omega u^2dx}{\int_\Omega (u^2+v^2)\,dx}+\frac{l}{2}B_l\,|\Omega|^{l-2}\left(\frac{N}{2}\right)^2\frac{\int_\Omega v^2dx}{\int_\Omega (u^2+v^2)\,dx}.$$

Donc

$$\gamma(p,q) \geq \frac{N^2}{8} \min\left(kA_k |\Omega|^{k-2}, lB_l |\Omega|^{l-2}\right).$$

■

2.3 Résultats de non existence

Le principal objectif de cette section est le résultat de non existence. En utilisant l'identité de Pohozaev, nous prouvons le Théorème 2.1.

Preuve: [Preuve du Théorème 2.1] Supposons que (u, v) est une solution de $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)$. En multipliant la première équation dans le système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)$ par $\nabla u.(x-x_1)$ et intégrant sur Ω; on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{2-N}{2}\int_\Omega p(x)|\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \tilde{p}(x)|\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} p(x)(x-x_1).\nu \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma \\
&= -\frac{N}{2}\int_\Omega au^2 dx + \int_\Omega bv\nabla u(x).(x-x_1)dx + \int_\Omega \nabla\left(|u|^{\alpha+1}\right).(x-x_1)|v|^{\beta+1}dx. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

où ν est le vecteur normal extérieur du bord $\partial\Omega$.

De même, on obtient pour la seconde équation de $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)$

$$\begin{aligned}
&\frac{2-N}{2}\int_\Omega q(x)|\nabla v(x)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \tilde{q}(x)|\nabla v(x)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} q(x)(x-x_1).\nu \left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma \quad (2.12)\\
&= -\frac{N}{2}\int_\Omega cv^2 dx + \int_\Omega bu\nabla v(x).(x-x_1)dx + \int_\Omega |u|^{\alpha+1}\nabla\left(|v|^{\beta+1}\right).(x-x_1)dx,
\end{aligned}$$

Combinons (2.11) et (2.12), nous écrivons

$$\begin{aligned}
& \frac{2-N}{2}\int_{\Omega}\left(p\left(x\right)\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{2}+q\left(x\right)\left|\nabla v\left(x\right)\right|^{2}\right)dx+ \\
& -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\tilde{p}\left(x\right)\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{2}+\tilde{q}\left(x\right)\left|\nabla v\left(x\right)\right|^{2}\right)dx+ \\
& -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(p\left(x\right)\left(x-x_{1}\right).\nu\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^{2}+q\left(x\right)\left(x-x_{1}\right).\nu\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^{2}\right)dx \\
= & -\frac{N}{2}\int_{\Omega}\left(au^{2}+cv^{2}\right)dx-N\int_{\Omega}buvdx-N\int_{\Omega}\left|u\right|^{\alpha+1}\left|v\right|^{\beta+1}dx.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

D'autre part, multiplions les équations de $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)$ par $\left(\frac{N-2}{2}\right)u$ et $\left(\frac{N-2}{2}\right)v$, respectivement, intégrons et sommons les résultats obtenus, on aboutit

$$\begin{aligned}
& \frac{N-2}{2}\int_{\Omega}\left(p\left(x\right)\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{2}+q\left(x\right)\left|\nabla v\left(x\right)\right|^{2}\right)dx \\
= & \frac{N-2}{2}\int_{\Omega}\left(au^{2}+cv^{2}\right)dx+\left(N-2\right)\int_{\Omega}buvdx+N\int_{\Omega}\left|u\right|^{\alpha+1}\left|v\right|^{\beta+1}dx.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Combinons (2.13) et (2.14), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega}\left(AU,\,U\right)dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\tilde{p}\left(x\right)\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{2}+\tilde{q}\left(x\right)\left|\nabla v\left(x\right)\right|^{2}\right)dx+ \\
& -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(p\left(x\right)\left(x-x_{1}\right).\nu\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^{2}+q\left(x\right)\left(x-x_{1}\right).\nu\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^{2}\right)dx=0.
\end{aligned}$$

Si Ω est étoilé par rapport a x_1, on aura

$$\int_{\Omega}\left(AU,\,U\right)dx>\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\tilde{p}\left(x\right)\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{2}+\tilde{q}\left(x\right)\left|\nabla v\left(x\right)\right|^{2}\right)dx.$$

Puisque la forme quadratique $(AU,\,U)$ est définie positive et satisfait

$$\mu_{1}\left(u^{2}+v^{2}\right)\leq\left(AU,\;U\right)\leq\mu_{2}\left(u^{2}+v^{2}\right), \tag{2.15}$$

nous aboutissons à

$$\mu_2 > \frac{\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\tilde{p}(x)\left|\nabla u(x)\right|^2 + \tilde{q}(x)\left|\nabla v(x)\right|^2\right)dx}{\int_\Omega \left(u^2+v^2\right)dx} := \gamma(p,q),$$

qui est une contradiction. ■

Montrons maintenant le Théorème 2.2.

Preuve: [Preuve de Théorème 2.2] Nous procédons par contradiction.

Supposons que $(u,\, v)$ est une solution pour $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)$ et le vecteur propre $X = (r,\, s)$ associé à μ_2 est non-négatif avec $r > 0$ ou $s > 0$.

Multiplions la première et la seconde équations dans $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)$ par $r\phi_{1,p}$ et $s\phi_{1,q}$, respectivement, et intégrons sur Ω, on obtient

$$(\lambda_{1,p}-\mu_2)\int_\Omega r\phi_{1,p}u dx = (\alpha+1)\int_\Omega r\phi_{1,p}u^\alpha v^{\beta+1} + \int_\Omega b\,(rv-su)\,\phi_{1,p},$$

de même

$$(\lambda_{1,q}-\mu_2)\int_\Omega s\phi_{1,q}v dx = (\beta+1)\int_\Omega s\phi_{1,q}u^{\alpha+1}v^\beta dx - \int_\Omega b\,(rv-su)\,\phi_{1,q},$$

où $\phi_{1,p},\ \phi_{1,q}$ sont des fonctions propres positives correspondantes aux valeurs propres $\lambda_{1,p},\ \lambda_{1,q}$ respectivement. Par suite, on a que $\mu_2 < \lambda_{1,p}$ ou $\mu_2 < \lambda_{1,q}$, ce qui est une contradiction.

Le cas $b \leq 0$,suit en utilisant les mêmes arguments. ■

2.4 Relation importante

En s'inspirant de [4], on obtient la double inégalité suivante pour un domaine non nécessairement borné et exposant non nécessairement critique.

Proposition 2.2 *Soit Ω un domaine et $\alpha + \beta \leq 2^* - 2$. Alors, nous avons*

$$K(\alpha,\beta)\left(S^{(p)}_{0,\alpha+\beta+2}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}}\left(S^{(q)}_{0,\alpha+\beta+2}\right)^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}} \leq S^{(p,q)}_{0,(\alpha,\beta)} \leq K(\alpha,\beta)\ S^{(h)}_{0,\alpha+\beta+2}, \tag{2.16}$$

avec

$$K(\alpha,\beta) = \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}} + \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{-\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}},$$

et

$$h(x) = p(x)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}}\, q(x)^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}}.$$

Preuve: On considère la suite minimisante ω_n pour $S^{(h)}_{0,\alpha+\beta+2}$. $s_n,\ t_n > 0$ seront choisis plus tard. Prenons $u_n = s_n\omega_n$ et $v_n = t_n\omega_n$ dans le quotient (2.6), alors nous obtenons

$$S^{(p,q)}_{0,(\alpha,\beta)} \leq \frac{\int_\Omega \left(s_n^2 p(x) + t_n^2 q(x)\right)|\nabla\omega_n|^2\,dx}{s_n^{2\frac{(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}}\, t_n^{2\frac{(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}}\left(\int_\Omega |\omega_n|^{\alpha+\beta+2}\,dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta+2}}}. \tag{2.17}$$

On voit que

$$\frac{s_n^2 p(x) + t_n^2 q(x)}{s_n^{2\frac{(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}}\, t_n^{2\frac{(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}}} = \left(\frac{s_n}{t_n}\right)^{2\frac{(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}} p(x) + \left(\frac{s_n}{t_n}\right)^{-2\frac{(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}} q(x),$$

soit $r = \left(\frac{s_n}{t_n}\right)^2$ et définissons la fonction

$$f(r) = r^{\frac{(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}} p(x) + r^{-\frac{(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}} q(x),\quad r > 0.$$

Le minimum de la fonction f est atteint au point $r_0(x) = \frac{(\alpha+1)q(x)}{(\beta+1)p(x)}$ avec valeur minimale

$$f(r_0(x)) = K(\alpha,\ \beta)\ p(x)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}}\, q(x)^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}}.$$

Choisissons s_n et t_n dans (2.17) tels que $s_n^2 (\beta+1) p(x) = t_n^2 (\alpha+1) q(x)$, pour $x \in \Omega$, on obtient

$$S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)} \leq K(\alpha,\,\beta) \frac{\int_\Omega h(x) \left|\nabla \omega_n\right|^2 dx}{\left(\int_\Omega \left|\omega_n\right|^{\alpha+\beta+2} dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta+2}}},$$

d'où

$$S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)} \leq K(\alpha,\,\beta)\;\; S_{0,\alpha+\beta+2}^{(h)}.$$

Pour compléter la preuve, soit $(u_n,\,v_n)$ une suite minimisante pour $S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}$ et on définie $z_n = s_n v_n$, avec

$$(s_n)^{\alpha+\beta+2} = \frac{\int_\Omega \left|u_n\right|^{\alpha+\beta+2} dx}{\int_\Omega \left|v_n\right|^{\alpha+\beta+2} dx}.$$

Alors

$$\int_\Omega \left|z_n\right|^{\alpha+\beta+2} dx = \int_\Omega \left|u_n\right|^{\alpha+\beta+2} dx. \tag{2.18}$$

Par l'inégalité de Young, il s'en suit

$$\int_\Omega \left|u_n\right|^{\alpha+1} \left|z_n\right|^{\beta+1} dx \leq \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} \int_\Omega \left|u_n\right|^{\alpha+\beta+2} dx + \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2} \int_\Omega \left|z_n\right|^{\alpha+\beta+2} dx.$$

Par (2.18), on aura

$$\left(\int_\Omega \left|u_n\right|^{\alpha+1} \left|z_n\right|^{\beta+1} dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta+2}} \leq \left(\int_\Omega \left|u_n\right|^{\alpha+\beta+2} dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta+2}} = \left(\int_\Omega \left|z_n\right|^{\alpha+\beta+2} dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta+2}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{\int_\Omega \left(p(x) \left|\nabla u_n\right|^2 + q(x) \left|\nabla v_n\right|^2\right) dx}{\left(\int_\Omega \left|u_n\right|^{\alpha+1} \left|v_n\right|^{\beta+1} dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta+2}}} = s_n^{2\frac{(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}} \frac{\int_\Omega \left(p(x) \left|\nabla u_n\right|^2 + q(x) \left|\nabla v_n\right|^2\right) dx}{\left(\int_\Omega \left|u_n\right|^{\alpha+1} \left|z_n\right|^{\beta+1} dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta+2}}} \\
&\geq s_n^{2\frac{(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}} \frac{\int_\Omega p(x) \left|\nabla u_n\right|^2 dx}{\left(\int_\Omega \left|u_n\right|^{\alpha+\beta+2} dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta+2}}} + s_n^{2\frac{(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}} s_n^{-2} \frac{\int_\Omega q(x) \left|\nabla z_n\right|^2 dx}{\left(\int_\Omega \left|z_n\right|^{\alpha+\beta+2} dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta+2}}} \\
&\geq S_{0,\alpha+\beta+2}^{(p)} s_n^{2\frac{(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}} + S_{0,\alpha+\beta+2}^{(q)} s_n^{-2\frac{(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}},
\end{aligned}$$

on sait que

$$\min_{t>0}\left(S^{(p)}_{0,\alpha+\beta+2}t^{2\frac{(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}}+S^{(q)}_{0,\alpha+\beta+2}t^{-2\frac{(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}}\right)=K\left(\alpha,\,\beta\right)\left(S^{(p)}_{0,\alpha+\beta+2}\right)^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}}\left(S^{(q)}_{0,\alpha+\beta+2}\right)^{\frac{(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}},$$

alors

$$I_n\geq K\left(\alpha,\,\beta\right)\left(S^{(p)}_{0,\alpha+\beta+2}\right)^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}}\left(S^{(q)}_{0,\alpha+\beta+2}\right)^{\frac{(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}},$$

donc

$$S^{(p,q)}_{0,(\alpha,\beta)}\geq K\left(\alpha,\,\beta\right)\ \left(S^{(p)}_{0,\alpha+\beta+2}\right)^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}}\left(S^{(q)}_{0,\alpha+\beta+2}\right)^{\frac{(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}}.$$

■

2.5 Preuve du Théorème 2.3

On sait que $S^{(1)}_{0,\,2^*}$ est atteinte par la fonction $U\left(x\right)=C\left(1+\left|x-x_1\right|^2\right)^{-\frac{N-2}{2}}$ ou (après mise à l'échelle) par n'importe qu'elle fonction $U_\varepsilon\left(x\right)=C_\varepsilon\left(\varepsilon+\left|x-x_1\right|^2\right)^{-\frac{N-2}{2}}$, où C, C_ε sont des constantes normalisées et ε est une constante positive très petite, pour plus de détails voir Talenti [29].

On pose $u_\varepsilon\left(x\right)=\xi\left(x\right)U_\varepsilon\left(x\right)$, où $\xi\in C_0^\infty\left(\bar{\Omega}\right)$ est une fonction fixée telle que $0\leq\xi\leq1$ et $\xi\equiv1$ sur un voisinage de x_1.

Nous commençons par le lemme suivant:

Lemme 2.2 *Soit Ω un domaine borné. Supposons que $(\mathcal{H})$ est vérifiée et l'une des conditions suivantes est saisfaite*

(1.a) $N\geq4,\ k>2,\ l>2$ *et* $\mu_1>0$.

(1.b) $N\geq4,\ k>2,\ l=2$ *et* $\mu_1>\tilde{B}$.

(1.c) $N\geq4,\ k=2,\ l>2$ *et* $\mu_1>\tilde{A}$.

(1.d) $N\geq4,\ k=2,\ l=2$ *et* $\mu_1>\tilde{A}+\tilde{B}$.

(1.e) $N\geq4,\ 0<k<2,\ l\geq2$ *et* $\mu_1>\mu^*$, *avec* $\mu^*>\frac{N^2}{4}\tilde{A}_k$.

(1.f) $N\geq4,\ k\geq2,\ 0<l<2$ *et* $\mu_1>\nu^*$, *avec* $\nu^*>\frac{N^2}{4}\tilde{B}_l$.

(2.a) $N=3,\ k\geq 2,\ l\geq 2$ *et* $\mu_1>\tau(k,\ l,\ p,\ q)$.

(2.b) $N=3,\ 0<k<2,\ l\geq 2$ *et* $\mu_1>\sup(\mu^*,\ \tau_2(l))$.

(2.c) $N=3,\ k\geq 2,\ 0<l<2$ *et* $\mu_1>\sup(\nu^*,\ \tau_1(k))$.

(3) $N\geq 3,\ 0<k<2,\ 0<l<2$ *et* $\mu_1>\sup(\mu^*,\ \nu^*)$.

Alors

$$S_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}<S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}.$$

Ici $\tau_1(k)$, $\tau_2(l)$, $\tau(k,\ l,\ p,\ q)$ *sont des constantes positives.*

Preuve: Soit $B,\, C>0$ tel que

$$\left(\frac{B}{C}\right)^2=\frac{(\alpha+1)\,S_{0,2^*}^{(q)}}{(\beta+1)\,S_{0,2^*}^{(p)}}=s^2 \text{ et } \eta:=\eta(\alpha,\ \beta,\ p,\ q)=\left(s^{2\frac{(\beta+1)}{2^*}}+s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^*}}\right) \tag{2.19}$$

Alors, par (2.6), (2.15) et (2.19) on a

$$\begin{aligned}
Q_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}(Bu_\varepsilon,\ Cu_\varepsilon) &\leq \frac{\int_\Omega \left(p(x)\,B^2+q(x)\,C^2\right)|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx-\mu_1\int_\Omega\left(B^2+C^2\right)|u_\varepsilon|^2\,dx}{\left(B^{\alpha+1}C^{\beta+1}\right)^{\frac{2}{2^*}}\left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}\\
&\leq s^{2\frac{(\beta+1)}{2^*}}\frac{\int_\Omega\left(p(x)\,|\nabla u_\varepsilon|^2-\mu_1\,|u_\varepsilon|^2\right)dx}{\left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}+\\
&\quad +s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^*}}\frac{\int_\Omega\left(q(x)\,|\nabla u_\varepsilon|^2-\mu_1\,|u_\varepsilon|^2\right)dx}{\left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}\\
&\leq s^{2\frac{(\beta+1)}{2^*}}Q_{\mu_1,2^*}^{(p)}(u_\varepsilon)+s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^*}}Q_{\mu_1,2^*}^{(q)}(u_\varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

On connait par [22], les estimations suivantes:

$$Q_{\mu_1,2^*}^{(p)}(u_\varepsilon)\leq\begin{cases}
p(x_1)\,S_{0,2^*}^{(1)}-\mu_1 A_1'\varepsilon+o(\varepsilon) & \text{si } N\geq 4,\ k>2,\\[2ex]
p(x_1)\,S_{0,2^*}^{(1)}-(\mu_1-A_2')\,A_1'\varepsilon+o(\varepsilon) & \text{si } N\geq 4,\ k=2,\\[2ex]
p(x_1)\,S_{0,2^*}^{(1)}-(\mu_1-A(\xi))\,A_4'\varepsilon^{\frac{1}{2}}+O(\varepsilon) & \text{si } N=3,\ k\geq 2,
\end{cases} \tag{2.20}$$

et

$$Q^{(q)}_{\mu_1,2^*}(u_\varepsilon) \leq \begin{cases} q(x_1)\, S^{(1)}_{0,2^*} - \mu_1 A'_1 \varepsilon + o(\varepsilon) & \text{si } N \geq 4,\ l > 2, \\ \\ q(x_1)\, S^{(1)}_{0,2^*} - (\mu_1 - A'_3)\, A'_1 \varepsilon + o(\varepsilon) & \text{si } N \geq 4,\ l = 2, \\ \\ q(x_1)\, S^{(1)}_{0,2^*} - (\mu_1 - B(\xi))\, A'_4 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon) & \text{si } N = 3,\ l \geq 2, \end{cases} \tag{2.21}$$

avec $A'_2 = \frac{(N-2)N(N+2)}{4(N-1)} A_2$, $A'_3 = \frac{(N-2)N(N+2)}{4(N-1)} B_2$,

$$A(\xi) = \frac{\int_0^R \left(p(x_1) + (A_k + M_p)\, r^k\right) |\xi'(r)|^2\, dr + k \int_0^R |\xi(r)|^2\, r^{k-2} dr}{\int_0^R |\xi(r)|^2\, dr},$$

$$B(\xi) = \frac{\int_0^R \left(q(x_1) + (B_l + M_q)\, r^l\right) |\xi'(r)|^2\, dr + l \int_0^R |\xi(r)|^2\, r^{l-2} dr}{\int_0^R |\xi(r)|^2\, dr}$$

et A'_1, A'_4 sont des constantes positives.

Ici $M_p = \max_{x \in \overline{V}} |\theta_p(x)|$ et $M_q = \max_{x \in \overline{V}} |\theta_q(x)|$.

Utilisons (2.20) et (2.21), nous distinguons les cas suivants:

(1) Pour $N \geq 4$, $k > 2$ et $l > 2$, on a

$$Q^{(p,q)}_{A,(\alpha,\beta)}(Bu_\varepsilon, Cu_\varepsilon) \leq s^{2\frac{(\beta+1)}{2^*}} p(x_1)\, S^{(1)}_{0,2^*} + s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^*}} q(x_1)\, S^{(1)}_{0,2^*} - \eta A'_1 \mu_1 \varepsilon + o(\varepsilon). \tag{2.22}$$

(2.a) Pour $N \geq 4$, $k > 2$ et $l = 2$, on obtient

$$\begin{aligned} Q^{(p,q)}_{A,(\alpha,\beta)}(Bu_\varepsilon, Cu_\varepsilon) \leq\ & s^{2\frac{(\beta+1)}{2^*}} p(x_1)\, S^{(1)}_{0,2^*} + s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^*}} q(x_1)\, S^{(1)}_{0,2^*} + \\ & - \left(\mu_1 - s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^*}} \frac{A'_3}{\eta}\right) \eta A'_1 \varepsilon + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.23}$$

$(2.b)$ De même, pour $N \geq 4$, $k=2$ et $l>2$, on aura

$$Q_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\left(Bu_{\varepsilon},\, Cu_{\varepsilon}\right) \leq s^{2\frac{(\beta+1)}{2^{*}}} p\left(x_{1}\right) S_{0,2^{*}}^{(1)} + s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^{*}}} q\left(x_{1}\right) S_{0,2^{*}}^{(1)} + \\ - \left(\mu_{1} - s^{2\frac{(\beta+1)}{2^{*}}} \frac{A_{2}'}{\eta}\right) \eta A_{1}' \varepsilon + o\left(\varepsilon\right) \tag{2.24}$$

$(2.c)$ Pour $N \geq 4$, $k=2$ et $l=2$, il résulte

$$Q_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\left(Bu_{\varepsilon},\, Cu_{\varepsilon}\right) \leq s^{2\frac{(\beta+1)}{2^{*}}} p\left(x_{1}\right) S_{0,2^{*}}^{(1)} + s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^{*}}} q\left(x_{1}\right) S_{0,2^{*}}^{(1)} + \\ - \left(\mu_{1} - \frac{1}{\eta}\left(s^{2\frac{(\beta+1)}{2^{*}}} A_{2} + s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^{*}}} A_{3}'\right)\right) \eta A_{1}' \varepsilon + o\left(\varepsilon\right). \tag{2.25}$$

(3) Pour $N=3$, $k \geq 2$ et $l \geq 2$, on a

$$Q_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\left(Bu_{\varepsilon},\, Cu_{\varepsilon}\right) \leq s^{2\frac{(\beta+1)}{2^{*}}} p\left(x_{1}\right) S_{0,2^{*}}^{(1)} + s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^{*}}} q\left(x_{1}\right) S_{0,2^{*}}^{(1)} + \\ - \left(\mu_{1} - \frac{1}{\eta}\left(A\left(\xi\right) s^{2\frac{(\beta+1)}{2^{*}}} + B\left(\xi\right) s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^{*}}}\right)\right) \eta A_{4}' \varepsilon^{1/2} + \\ + O\left(\varepsilon\right), \tag{2.26}$$

En utilisant le fait que,

$$p\left(x_{1}\right) S_{0,2^{*}}^{(1)} \leq S_{0,2^{*}}^{(p)} \text{ et } q\left(x_{1}\right) S_{0,2^{*}}^{(1)} \leq S_{0,2^{*}}^{(q)}$$

et d'après la proposition 2.2, nous aurons

$$s^{2\frac{(\beta+1)}{2^{*}}} p\left(x_{1}\right) S_{0,2^{*}}^{(1)} + s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^{*}}} p\left(x_{1}\right) S_{0,2^{*}}^{(1)} \leq K\left(\alpha,\, \beta\right) \left(S_{0,2^{*}}^{(q)}\right)^{\frac{(\beta+1)}{2^{*}}} \left(S_{0,2^{*}}^{(p)}\right)^{\frac{(\alpha+1)}{2^{*}}} \\ \leq S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)} \tag{2.27}$$

En combinant (2.22) – (2.27), (2.19) et par un calcul standard nous obtenons

$Q_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}(Bu_\varepsilon, Cu_\varepsilon)$

$$\leq \begin{cases} S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)} - \eta A_1'\mu_1\varepsilon + o(\varepsilon) & \text{si} \begin{cases} N \geq 4, \\ k > 2, \, l > 2 \end{cases} \\ S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)} - \left(\mu_1 - \frac{A_3'}{s^2+1}\right)\eta A_1'\varepsilon + o(\varepsilon) & \text{si} \begin{cases} N \geq 4, \\ k > 2, \, l = 2 \end{cases} \\ S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)} - \left(\mu_1 - \frac{A_2's^2}{s^2+1}\right)\eta A_1'\varepsilon + o(\varepsilon) & \text{si} \begin{cases} N \geq 4, \\ k = 2, \, l > 2 \end{cases} \\ S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)} - \left(\mu_1 - \frac{A_2's^2+A_3'}{s^2+1}\right)\eta A_1'\varepsilon + o(\varepsilon) & \text{si} \begin{cases} N \geq 4, \\ k = 2, \; l = 2 \end{cases} \\ S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)} - (\mu_1 - C(\xi))\eta A_4'\varepsilon + O(\varepsilon) & \text{si} \begin{cases} N = 4, \\ k \geq 2, \; l \geq 2, \end{cases} \end{cases}$$

où $C(\xi) = \frac{1}{s^2+1}\left(A(\xi)s^2 + B(\xi)\right)$, posons $\tau(k,l,p,q) = \inf\limits_H C(\xi)$ et H est defini, pour un R fixé positif petit par

$$H = \left\{\xi \in C_0^\infty\left(\bar{\Omega}\right), 0 \leq \xi \leq 1, \, \xi = 1 \text{ dans } \{x \,/\, |x - x_1| < \frac{R}{2}\} \text{ et } \xi = 0 \text{ dans } \{x \,/\, |x - x_1| \geq R\}\right\}.$$

Les assertions $(1.a) - (1.d)$ et $(2.a)$ du Lemme 2 se déduisent directement pour un ε très petit.

Maintenant, on montre les assertions $(1.e)$, $(1.f)$, $(2.b)$, $(2.c)$ et (3). Par (2.20), (2.21) et utilisons [[22], Lemmes 3.3 et 3.4], il existe des constantes $\tilde{A}_k$, $\tilde{B}_l$, telles que

$(1.e)$ Pour $N \geq 4$, $0 < k < 2$, $l \geq 2$ et $\mu^* \geq \frac{N^2}{4}\tilde{A}_k$, on obtient

$$Q_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}(Bu_\varepsilon, Cu_\varepsilon) < \; s^{2\frac{(\beta+1)}{2^*}} p(x_1) S_{0,2^*}^{(1)} + s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^*}} q(x_1) S_{0,2^*}^{(1)},$$

pour tout $\mu_1 > \mu^*$.

(1.f) De même, pour $N \geq 4$, $k \geq 2$, $0 < l < 2$ et $\nu^* \geq \frac{N^2}{4}\tilde{B}_l$, il résulte

$$Q^{(p,q)}_{A,(\alpha,\beta)}\left(Bu_\varepsilon,\, Cu_\varepsilon\right) < \; s^{2\frac{(\beta+1)}{2^*}} p\left(x_1\right) S^{(1)}_{0,2^*} + s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^*}} q\left(x_1\right) S^{(1)}_{0,2^*},$$

pour tout $\mu_1 > \nu^*$.

(2.b) Pour $N = 3$, $0 < k < 2$, $l \geq 2$ et $\mu^* \geq \frac{9}{4}\tilde{A}_k$, on trouve

$$Q^{(p,q)}_{A,(\alpha,\beta)}\left(Bu_\varepsilon,\, Cu_\varepsilon\right) < \; s^{2\frac{(\beta+1)}{2^*}} p\left(x_1\right) S^{(1)}_{0,2^*} + s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^*}} q\left(x_1\right) S^{(1)}_{0,2^*},$$

pour tout $\mu_1 > \sup\left(\mu^*,\, \tau_2\left(l\right)\right)$, où $\tau_2\left(l\right) = \inf\limits_H B\left(\xi\right)$.

(2.c) De même, pour $N = 3$, $k \geq 2$, $0 < l < 2$ et $\nu^* \geq \frac{9}{4}\tilde{B}_l$, on aura

$$Q^{(p,q)}_{A,(\alpha,\beta)}\left(Bu_\varepsilon,\, Cu_\varepsilon\right) < \; s^{2\frac{(\beta+1)}{2^*}} p\left(x_1\right) S^{(1)}_{0,2^*} + s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^*}} q\left(x_1\right) S^{(1)}_{0,2^*},$$

pour tout $\mu_1 > \sup\left(\nu^*,\, \tau_1\left(k\right)\right)$, où $\tau_1\left(k\right) = \inf\limits_H A\left(\xi\right)$

(3) Pour le cas $N \geq 3$, $0 < k < 2$, $0 < l < 2$, $\mu^* \geq \frac{N^2}{4}\tilde{A}_k$ et $\nu^* \geq \frac{N^2}{4}\tilde{B}_l$, on a

$$Q^{(p,q)}_{A,(\alpha,\beta)}\left(Bu_\varepsilon,\, Cu_\varepsilon\right) < \; s^{2\frac{(\beta+1)}{2^*}} p\left(x_1\right) S^{(1)}_{0,2^*} + s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^*}} q\left(x_1\right) S^{(1)}_{0,2^*},$$

pour tout $\mu_1 > \sup\left(\mu^*,\, \nu^*\right)$.

Enfin, ceci avec (2.27) donne le résultat souhaité. ■

Rappelons la variante suivante du théorème du Col d'Ambrosetti-Rabinowitz sans les conditions de (P-S), (voir [5]).

Théorème 2.4 *Soit J une fonctionelle de classe C^1 définie sur un espace de Banach E. Supposons qu'il existe un voisinage V de 0 dand E et une constante positive ρ tels que*

(i) $J(u,\, v) \geq \rho$ pour tout $(u,\, v)$ dans un voisinage de V.

(ii) $J(0,\, 0) = 0$ et $J(\varphi,\, \psi) \leq 0$ pour $\Psi := (\varphi,\, \psi) \notin V$.

On pose

$$c = \inf_{\phi \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\phi(t)), \tag{2.28}$$

avec

$$\Gamma = \{\phi \in C([0,\, 1], E) :\ \phi(0) = 0,\ \phi(1) = \Psi\}.$$

Alors il existe une suite $(u_n,\, v_n)$ *dans* E *de Palais-Smale au niveau* c*, en bref* $(P\text{-}S)_c$*, i.e.* $J(u_n,\, v_n) \to c$ *et* $J'(u_n,\, v_n) \to 0$ *dans* E' *(topological dual of* E *) quand* $n \to \infty$*.*

Dans le Lemme suivant, on voit que J satisfait (i) et (ii) dans le Théorème 2.4 dans notre situation.

Lemme 2.3 *Supposons que* $(\mathcal{H})$ *est vérifiée; alors*

(i) *Il existe* $\rho > 0$ *et* $R > 0$ *tel que* $J(u,\, v) \geq \rho$ *pour tout* $(u,\, v) \in E$ *avec* $\|(u,\, v)\| = R$*.*

(ii) *Il existe* $(\varphi,\, \psi) \in E$*, avec* $\|(\varphi,\, \psi)\| > R$ *tel que* $J(\varphi,\, \psi) \leq 0$*.*

Preuve: De l'inégalité de Hölder, l'injection de Sobolev et (2.15) nous aurons

$$\begin{aligned} J(u,v) &= \frac{1}{2}\|(u,\, v)\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (AU,\, U)\, dx - \int_\Omega |u|^{\alpha+1}\, |v|^{\beta+1}\, dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|(u,\, v)\|^2 - \frac{\mu_2}{2}\int_\Omega \left(u^2 + v^2\right) dx - c'\|(u,\, v)\|^{2^*} \\ &\geq \frac{1}{2}\min\left[\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{1,p}}\right),\ \left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{1,q}}\right)\right]\|(u,\, v)\|^2 - c'\|(u,\, v)\|^{2^*}, \end{aligned}$$

où c' est une constante positive. Alors, il existe $(u,\, v) \in E$ tel que $J(u,\, v) \geq \rho > 0$, pour $\|(u,\, v)\| = R$ avec $R > 0$ très petit, .

Puisque $J(t\varphi,\, t\psi) \to -\infty$ quand $t \to \infty$, pour tout $(\varphi,\, \psi) \in E\backslash\{(0,0)\}$, il existe $t_0 > 0$ tel que $(t_0\varphi,\, t_0\psi) \notin V$ et $J(t_0\varphi,\, t_0\psi) < 0$. $\blacksquare$

On définie

$$c_A = \inf_{\phi \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\phi(t)),$$

avec

$$\Gamma = \{\phi \in C([0,\, 1]\,,\, E) : \ \phi(0) = 0,\ J(\phi(1)) < 0\}\,.$$

Lemme 2.4 *Supposons que* $\mu > 0$. *Alors, il existe une constante positive* $C_\mu := C(N,\alpha,\beta,\mu)$ *telle que*

$$G_\mu(u,\ v) = |u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1} - \mu\left(u^2 + v^2\right) \geq -C_\mu,$$

pour tout $(u,\, v) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$ *et* $C_\mu := \frac{2}{N}\mu(1+k^2)\left(\frac{2\mu\left(1+k^2\right)}{2^* k^{\beta+1}}\right)^{\frac{N-2}{2}}$ *avec* $k = \left(\dfrac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Preuve: On dit que $(u,\, v)$ est un point extremum de G_μ si

$$(\alpha+1)\, u\, |u|^{\alpha-1}|v|^{\beta+1} - 2\mu u = 0, \tag{2.29}$$

$$(\beta+1)\, |u|^{\alpha+1} v\, |v|^{\beta-1} - 2\mu v = 0. \tag{2.30}$$

En multipliant (2.29), (2.30) par $(\beta+1)\, u$, $(\alpha+1)\, v$ respectivement et en les soustrayons, nous obtenons

$$\left|\frac{u}{v}\right| = \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ i.e. } |v| = k\,|u|\,.$$

Mettons

$$g(u) := G_\mu(|u|\,,\ k\,|u|) = k^{\beta+1}|u|^{2^*} - \mu\left(1+k^2\right)u^2,$$

la fonction $g(u)$ atteint son minimum au point

$$u_0 = \left(\frac{2\mu(1+k^2)}{2^* k^{\beta+1}}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}, \text{ avec } g(u_0) = -C_\mu.$$

■

Lemme 2.5 *Si* $c < c_0 := \frac{2}{N-2}\left(\frac{1}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}}\left(S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)^{\frac{N}{2}}$, *alors* J *satisfait la condition de* $(P\text{-}S)_c$.

Preuve: On montre que la suite (u_n, v_n) est bornée dans E. Puisque $(u_n,\ v_n)$ satisfait

$$\frac{1}{2}\left\|(u_n,\, v_n)\right\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (AU_n,\, U_n)\, dx - \int_\Omega |u_n|^{\alpha+1} |v_n|^{\beta+1}\, dx = c + \circ(1)\,, \tag{2.31}$$

et

$$\left\|(u_n,\, v_n)\right\|^2 - \int_\Omega (AU_n,\, U_n)\, dx - 2^* \int_\Omega |u_n|^{\alpha+1} |v_n|^{\beta+1}\, dx = \langle \varepsilon_n,\ (u_n,\, v_n)\rangle\,, \tag{2.32}$$

avec $\varepsilon_n \to 0$ dans E' quand $n \to \infty$. Avec (2.31) et (2.32) nous obtenons ce qui suit

$$\begin{aligned} 2J\,(u_n,\, v_n) - \langle J'\,(u_n,\, v_n)\,,\ (u_n,\, v_n)\rangle &= (2^* - 2)\int_\Omega |u_n|^{\alpha+1} |v_n|^{\beta+1}\, dx \\ &\leq 2c + \circ(1)\,. \end{aligned} \tag{2.33}$$

De (2.31) – (2.33) et Lemme 2.4, on a

$$\begin{aligned} \left\|(u_n,\ v_n)\right\|^2 &= 2J\,(u_n,\, v_n) + \int_\Omega (AU_n,\, U_n)\, dx + 2\int_\Omega |u_n|^{\alpha+1} |v_n|^{\beta+1}\, dx \\ &\leq 2J\,(u_n,\, v_n) + \mu_2 \int_\Omega \left(u_n^2 + v_n^2\right) dx + 2\int_\Omega |u_n|^{\alpha+1} |v_n|^{\beta+1}\, dx \\ &\leq c, \end{aligned}$$

ce qui implique que (u_n, v_n) est bornée dans E. Quitte à extraire une sous suite si nécessaire, on peut supposer que quand $n \to \infty$

$$\begin{aligned} (u_n,\, v_n) &\rightharpoonup (u,\, v) \text{ faiblement dans } E, \\ (u_n,\, v_n) &\to (u,\, v) \text{ fortement dans } L^p \times L^q \text{ pour tout } 1 \leq p, q < 2^*, \end{aligned}$$

et

$$(u_n,\, v_n) \to (u,\, v) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Il s'en suit que (u, v) est une solution faible du système, i.e.

$$\langle J'(u,\ v),\ (\varphi,\ \psi)\rangle = 0, \text{ pour tout } (\varphi,\ \psi) \in E.$$

On pose

$$\tilde{u}_n = u_n - u \text{ et } \tilde{v}_n = v_n - v.$$

Du Lemme de Brezis-Lieb [11], on a les relations suivantes

$$\begin{aligned} \|\nabla u_n\|_2^2 &= \|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla \tilde{u}_n\|_2^2 + \circ(1), \\ \|\nabla v_n\|_2^2 &= \|\nabla v\|_2^2 + \|\nabla \tilde{v}_n\|_2^2 + \circ(1), \end{aligned} \tag{2.34}$$

et

$$\int_\Omega |u_n|^{\alpha+1} |v_n|^{\beta+1} dx = \int_\Omega |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta+1} dx + \int_\Omega |\tilde{u}_n|^{\alpha+1} |\tilde{v}_n|^{\beta+1} dx + \circ(1). \tag{2.35}$$

En utilisant (2.34), (2.35), nous obtenons

$$J(u,\ v) + \frac{1}{2}\|(\tilde{u}_n,\ \tilde{v}_n)\|^2 - \int_\Omega |\tilde{u}_n|^{\alpha+1} |\tilde{v}_n|^{\beta+1} dx = c + \circ(1), \tag{2.36}$$

et

$$\|(u,\ v)\|^2 + \|(\tilde{u}_n,\ \tilde{v}_n)\|^2 = \int_\Omega (AU_n, U_n)\, dx + 2^* \int_\Omega \left(|u|^{\alpha+1} |v|^{\beta+1} + |\tilde{u}_n|^{\alpha+1} |\tilde{v}_n|^{\beta+1}\right) dx + \circ(1).$$

Puisque $\langle J'(u,\ v),\ (u,\ v)\rangle = 0$, alors

$$\|(\tilde{u}_n,\ \tilde{v}_n)\|^2 = 2^* \int_\Omega |\tilde{u}_n|^{\alpha+1} |\tilde{v}_n|^{\beta+1} dx + \circ(1).$$

Par conséquent, le long d'une séquence, on peut supposer que

$$\|(\tilde{u}_n,\ \tilde{v}_n)\|^2 \to K \text{ et } 2^* \int_\Omega |\tilde{u}_n|^{\alpha+1} |\tilde{v}_n|^{\beta+1} dx \to K \text{ quand } n \to +\infty.$$

Par la définition de $S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}$, on obtient

$$\|(\tilde{u}_n,\ \tilde{v}_n)\|^2 \geq S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)} \left(\int_\Omega |\tilde{u}_n|^{\alpha+1} |\tilde{v}_n|^{\beta+1}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Donc, $K \geq S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)} \left(\frac{K}{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}$. Supposons que $K > 0$, alors $K \geq (2^*)^{1-\frac{N}{2}} \left(S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}\right)^{\frac{N}{2}}$.

Passons à la limite dans (2.36), il résulte

$$J(u,\ v) + \frac{K}{N} = c < \frac{2}{N-2} \left(\frac{S_{0,(\alpha,\beta)}^{(p,q)}}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}},$$

et donc $J(u,\ v) < 0$, pour $(u,\ v) \in E$.

D'autre part, nous avons

$$J(u,\, v) = \left(\frac{2^*}{2} - 1\right) \int_\Omega |\tilde{u}_n|^{\alpha+1} |\tilde{v}_n|^{\beta+1}\, dx \geq 0,$$

qui est une contradiction. Donc $(u_n,\, v_n) \to (u,\, v)$ fortement dans E. ■

Lemme 2.6 *Nous avons*

$$\sup_{t\geq 0} J(tBu_\varepsilon,\ tCu_\varepsilon) < c_0.$$

Preuve: Soit $B,\ C$ satisfont (2.19) et u_ε est définie comme dans le Lemme 2.2 avec $\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} dx = 1$. Alors

$$J(tBu_\varepsilon,\ tCu_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} t^2 \left(\|(Bu_\varepsilon,\, Cu_\varepsilon)\|^2 - \mu_1 \left(B^2 + C^2\right) \|u_\varepsilon\|_2^2\right) - t^{2^*} B^{\alpha+1} C^{\beta+1}.$$

Notons par $r(tu_\varepsilon)$ la fonction à droite de la dernière inégalité. Puisque la fonction dérivée de $t \mapsto r(tu_\varepsilon)$ s'annule au point $t = t_\varepsilon$, nous aurons

$$t_\varepsilon \left(\|(Bu_\varepsilon,\, Cu_\varepsilon)\|^2 - \mu_1 \left(B^2 + C^2\right) \|u_\varepsilon\|_2^2\right) - 2^* t_\varepsilon^{2^*-1} B^{\alpha+1} C^{\beta+1} = 0,$$

par conséquent

$$t_{\varepsilon} := \left[\frac{\|(Bu_{\varepsilon},\, Cu_{\varepsilon})\|^2 - \mu_1 \left(B^2 + C^2\right) \|u_{\varepsilon}\|_2^2}{2^* B^{\alpha+1} C^{\beta+1}} \right]^{\frac{1}{2^*-2}}.$$

Donc

$$J\left(tBu_{\varepsilon},\ tCu_{\varepsilon}\right) \leq \left(\frac{2}{N-2}\right)\left(\frac{1}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}} \left[s^{2\frac{(\beta+1)}{2^*}} Q^{(p)}_{\mu_1,2^*}\left(u_{\varepsilon}\right) + s^{-2\frac{(\alpha+1)}{2^*}} Q^{(q)}_{\mu_1,2^*}\left(u_{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{N}{2}}.$$

Par la Proposition 2.2, Lemme 2.2 et pour ε petit, on obtient

$$\sup_{t \geq 0} J\left(tBu_{\varepsilon},\ tCu_{\varepsilon}\right) < c_0,$$

et donc, (2.37) est vérifiée. ■

Preuve: [Preuve du Théorème 3] Du Lemme 2.3, on sait que J satisfait (i) et (ii) dans le Théorème 2.4, alors il existe une suite de (P-S)_{c_A} dans E. Les Lemmes 2.5 et 2.6 impliquent que J vérifie la condition de (P-S)_{c_A}. En utilisant le Théorème du Col chaque fois que $c_A > 0$ et la version de Ghousoub-Preiss dans [21] quand $c_A = 0$ respectivement, on obtient un point critique non trivial $(u,\, v)$ de J.

Posons $h^+ = \max\{h,\, 0\}$. Nous considérons

$$J^+(u,\, v) = \frac{1}{2}\|(u,\, v)\|^2 - \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left(AU^+,\, U^+\right) dx - \int_{\Omega} \left|u^+\right|^{\alpha+1} \left|v^+\right|^{\beta+1} dx,$$

où $U^+ = (u^+,\, v^+)$. Répétons le processus ci dessus pour J^+, on obtient une solution non négative $(u,\, v)$ pour le problème $\left(\mathcal{S}^{(p,q)}_{A,(\alpha,\beta)}\right)$. De $(\mathcal{H})$, et en utilisant le principe du maximum, nous concluons que $u > 0$ et $v > 0$. ■

Chapitre 3

Système elliptique de Neumann avec des nonlinéarités critiques sur le bord

Ce chapitre est le développement de l'article [9]

3.1 Introduction et principaux résultats

Dans ce chapitre, nous allons étudier le système elliptique non linéaire suivant:

$$\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)\begin{cases} -\operatorname{div}\left(p\left(x\right)\nabla u\right) = au + bv + \eta\left|u\right|^{2^*-2}u & \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div}\left(p\left(x\right)\nabla v\right) = bu + cv + \eta\left|v\right|^{2^*-2}v & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha Q\left(x\right)\left|u\right|^{\alpha-2}u\left|v\right|^{\beta} & \text{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \beta Q\left(x\right)\left|u\right|^{\alpha}\left|v\right|^{\beta-2}v & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ avec de bord régulier $\partial\Omega$, $N \geq 3$; p, Q sont des poids positifs, continus et définis sur $\bar{\Omega}$, $\partial\Omega$ respectivement tel que $p \in H^1(\Omega)$; a, b et c sont des paramétres réels; η est une constante réelle non négative, α, $\beta > 1$ tel que $\alpha + \beta = 2_*$. Ici $2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev pour l'injection de trace

$H^1(\Omega)$ dans $L^{2_*}(\partial\Omega)$ et $2^* = \frac{2N}{N-2}$ désigne l'exposant critique de Sobolev pour l'injection $H^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$. Ces injections sont continues, mais pas compactes.

Ce genre d'équations exprime la relation entre les différents domaines comme la biologie, la physique et les mathématiques. Par exemple, l'étude du mouvement des bactéries en terme de réaction-diffusion conduit à ce problème (voir [24, 27]).

Nous travaillons dans l'espace $H = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ muni de la norme

$$\|(u,\, v)\| = \left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)^{1/2},$$

où

$$\|w\| = \left(\int_\Omega \left(|\nabla w|^2 + w^2\right) dx\right)^{1/2}.$$

La fonctionnelle d'énergie correspondante au problème $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ est définie dans H par

$$\begin{aligned} J_\eta(u,\, v) \quad : \quad &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(p(x)\left(|\nabla u(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2\right) - (AU,\, U)\right) dx + \\ &- \frac{\eta}{2^*}\int_\Omega \left(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}\right) dx - \int_{\partial\Omega} p(x)\, Q(x)\, |u|^\alpha\, |v|^\beta\, ds_x, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $(.,\ .)$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Il est bien connu que la solution non triviale du problème $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ est équivalente au point critique non nul de J_η dans H.

Une fonction $(u,\, v) \in H$ est dite solution faible du problème $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ si

$$\left\langle J_\eta'(u,\, v),\ (\varphi,\, \psi)\right\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \ (\varphi,\, \psi) \in H.$$

Le problème décrit dans cet article est étroitement lié aux meilleurs constantes de Sobolev S pour l'injection $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ dans $L^{2^*}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et S_1 pour l'injection de trace $H^1\left(\mathbb{R}_+^N\right)$ dans $L^{2_*}\left(\mathbb{R}^{N-1}\right)$. Ici $\mathbb{R}_+^N = \left\{x = (x',\, x_N) :\ x' \in \mathbb{R}^{N-1},\, x_N > 0\right\}$.

Nous rappelons que

$$S = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx;\ u \in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right),\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = 1 \right\},$$

et

$$S_1 = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u|^2 \, dx;\ u \in H^1\left(\mathbb{R}^N_+\right),\ \int_{\partial\mathbb{R}^N_+} |u|^{2_*} ds_x = 1 \right\},$$

sont atteintes par les fonctions

$$U(x) = \frac{\gamma_N}{\left(1 + |x|^2\right)^{\frac{(N-2)}{2}}},$$

et

$$W(x) = \frac{c_N}{\left(|x'|^2 + (x_N + (N-2))^2\right)^{\frac{N-2}{2}}},$$

respectivement, où γ_N, $c_N > 0$ sont des constantes positives normalisées dépendent de N et $D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) = \left\{u \in L^{2^*}\left(\mathbb{R}^N\right);\ \nabla u \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right\}$, (voir [19], pour plus de détails).

Pour $y \in \partial\Omega$ et $\varepsilon > 0$, on pose

$$U_{\varepsilon,y}(x) = \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} U\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \tag{3.2}$$

et

$$W_{\varepsilon,y}(x) = \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} W\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right). \tag{3.3}$$

Notons

$$S_{\alpha,\beta} = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N_+} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx;\ (u, v) \in \left(H^1\left(\mathbb{R}^N_+\right)\right)^2,\ \int_{\partial\mathbb{R}^N_+} |u|^\alpha |v|^\beta ds_x = 1 \right\}.$$

La relation entre $S_{\alpha,\beta}$ et S_1 est:

$$S_{\alpha,\beta} = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] S_1, \tag{3.4}$$

elle peut être obtenue en modifiant la preuve du Théorème 5 dans [4]. De plus si ω_0 réalise S_1 alors $(B\omega_0, C\omega_0)$ réalise $S_{\alpha,\beta}$ pour toutes constantes positives B et C telles que $\frac{B}{C} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Nous rappelons la définition de la condition géométrique.

Définition 3.1 *$\partial\Omega$ est dit être satisfait à la condition géométrique (c.g) en $x_0 \in \partial\Omega$ s'il existe un voisinage $U(x_0)$ de x_0 tel que $\Omega \cap U(x_0)$ est situé sur un côté du plan tangent au point x_0.*

Lorsque $\alpha = \beta = \frac{N-1}{N-2}$, $a = c = \lambda$, $b = 0$ et $u = v$, le système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ se réduit au problème suivant:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u) = \lambda u + \eta |u|^{q-2} u & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = Q(x)|u|^{2_*-2} u & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

Le problème (3.5) avec $p \equiv 1 = \eta$, $Q \equiv 0$ et $q = 2^*$ a été largement étudié, en particulier par [2, 17, 31]. Les premiers résultats d'existence de solutions positives sont dues à Adimurthi-Mancini [2] et X.J. Wang [31].Ils ont prouvé l'existence de solutions pour $\lambda < \Lambda$,où Λ est une constante négative, lorsque $\partial\Omega$ satisfait la condition géométrique $(c.g)$ en un point x_0 et la courbure moyenne en ce point est positive.

Si $p \equiv 1$, $\eta = 0$ et $Q \not\equiv$ constante, le problème (3.5) a été traité par Chabrowski et Yang dans [16], ils ont étudié l'effet conjoint de la courbure moyenne de $\partial\Omega$ et la forme de la courbe de Q sur l'existence de solutions.

Le cas où $p \not\equiv 1$ et $Q \not\equiv$ constante, Yazidi [35] a considéré le problème (3.5) avec $q < 2_*$. Il a prouvé l'existence de solutions sous certaines conditions suffisantes sur p, Q et la courbure moyenne sur le bord $\partial\Omega$ en un point. Plus précisément, il considére les cas suivants:

(1) $N \geq 3$, $\lambda < 0$ et $\eta \in \mathbb{R}$.

(2) $N \geq 3$, $\lambda \in]\lambda_{k,p}, \lambda_{k+1,p}[$ et $\eta \geq 0$,

où $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_{k,p}$ est la valeur propre de $-\operatorname{div}(p(x)\nabla u)$ avec les conditions aux limites de Neumann dans $H^1(\Omega)$.

Nous pouvons réécrire le système ci-dessus $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ sous la forme vectorielle comme

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(p\left(x\right)\nabla U\right) = AU + \dfrac{\eta}{2^*}\nabla H_1\left(U\right) & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \nu} = Q\left(x\right)\nabla H_2\left(U\right) & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $H_1(U) = \dfrac{1}{2^*}\left(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}\right)$, $H_2(U) = |u|^{\alpha}|v|^{\beta}$, $\frac{\partial U}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, \frac{\partial v}{\partial \nu}\right)$ et $U = (u, v)$.
Les valeurs propres réelles de la matrice A seront notées par μ_1 et μ_2, nous supposerons tout au long de ce travail que $\mu_1 \leq \mu_2$. Ainsi, la forme quadratique (AU, U) satisfait

$$\mu_1\left(u^2 + v^2\right) \leq (AU, U) \leq \mu_2\left(u^2 + v^2\right). \tag{3.6}$$

On note par $H(y)$ la courbure moyenne du bord $\partial\Omega$ en y.

Remarque 3.1 *Dans notre travail, nous distinguons différentes possibilités*
$(\mathcal{A}_1)$ $ac - b^2 > 0$, $a + c < 0$ *alors* $\mu_1 \leq \mu_2 < 0$.
$(\mathcal{A}_2)$ $ac - b^2 > 0$, $a + c > 0$ *alors* $0 < \mu_1 \leq \mu_2$.
$(\mathcal{A}_3)$ $ac - b^2 < 0$ *alors* $\mu_1 < 0 < \mu_2$.

Nos principaux résultats sont les suivants:

Théorème 3.1 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, *un domaine borné tel que* $\partial\Omega$ *satisfait la (c.g) en* y *et* $H(y) > 0$. *Supposons que* $(\mathcal{A}_1)$ *détient,* p *et* Q *satisfont*

$$\frac{p(y)}{(Q(y))^{N-2}} = \min_{x\in\partial\Omega} \frac{p(x)}{(Q(x))^{N-2}}, \tag{3.7}$$

$$|p(x) - p(y)| = o(|x - y|), \tag{3.8}$$

et

$$|Q(x) - Q(y)| = o(|x - y|), \tag{3.9}$$

respectivement pour x voisin de y, avec $o(|x-y|) \to 0$ quand $x \to y$. Alors, le système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ admet une solution.

Théorème 3.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, un domaine borné tel que $\partial\Omega$ satisfait la (c.g) en y et $H(y) > 0$.Supposons que $(\mathcal{A}_2)$ est vérifiée, p et Q satisfont $(3.7)-(3.9)$ respectivement et l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

(1) Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda_{k,p} < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1,p}$.

(2) Il existe k, $k' \in \mathbb{N}^*$, $k < k'$ tel que

$$\lambda_{k,p} \leq a - |b| \leq \mu_1 \leq a + |b| < \lambda_{k+1,p} \leq \lambda_{k',p} \leq c - |b| \leq \mu_2 \leq c + |b| < \lambda_{k'+1,p}.$$

Alors, le système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ admet une solution.

Théorème 3.3 *Supposons $(\mathcal{A}_2)$ et l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

(i) Il existe k, $k' \in \mathbb{N}^*$, $k \leq k'$ tel que $a = \lambda_{k,p}$, $c = \lambda_{k',p}$ et $|b| = \min(\lambda_{k+1,p} - \lambda_{k,p},\ \lambda_{k'+1,p} - \lambda_{k',p})$.

(ii) Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu_2 = \lambda_{k,p}$.

Alors, le système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ a au moins une solution.

Théorème 3.4 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ un domaine borné tel que $\partial\Omega$ satisfait la (c.g) en y et $H(y) > 0$. Supposons que $(\mathcal{A}_3)$ est vérifiée, p et Q satisfont $(3.7)-(3.9)$ respectivement. Soit $\lambda_+ = \min\{\lambda_{k,p};\ \mu_2 < \lambda_{k,p}\}$. Si*

$$c^* = \min(C,\ D) > \frac{1}{N}(\lambda_+ - \mu_1)^{\frac{N}{2}}(2|\Omega|)\,\eta^{\frac{2-N}{2}}, \tag{3.10}$$

avec

$$C := \eta^{\frac{2-N}{2}}\frac{(p(y)\,S)^{\frac{N}{2}}}{2N}, \quad et \quad D := \frac{1}{N-2}\frac{p(y)}{(Q(y))^{N-2}}\left(\frac{1}{2_*}S_{\alpha,\beta}\right)^{N-1}.$$

Alors, le système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ admet au moins $2m$ paires de solutions, où m est la multiplicité de λ_+.

Ce chapitre est organisé comme suit. En Sect. 3.2, nous déterminons le niveau d'énergie associé à notre système en utilisant le principe de concentration-compacité de

P. L. Lions, Sect. 3.3 s'intéresse à la preuve de la solution positive en utilisant le Lemme du Col. Les sections 3.4 et 3.5 sont consacrées aux cas où les paramètres μ_1 et μ_2 interférent avec le spectre de l'opérateur $-\operatorname{div}(p(x)\nabla.)$ avec les conditions aux limites de Neumann.

3.2 La condition de Palais-Smale locale

Dans cette Section, nous allons trouver le rang c où les conditions de Palais Smale au niveau c pour la fonctionnelle J_η est vérifiée(en abrégé $\left(\text{P-S}\right)_c$).

On dit que J_η satisfait les conditions de $\left(\text{P-S}\right)_c$ au niveau $c \in \mathbb{R}$, si pour toute suite $(u_n, v_n) \in H$ telle que

$$J_\eta\left(u_n, v_n\right) \to c \text{ dans } H, \tag{3.11}$$

et

$$J'_\eta\left(u_n, v_n\right) \to 0 \text{ dans } H' \text{ (le dual de l'espace } H\text{), lorsque } n \to \infty, \tag{3.12}$$

possède une sous suite convergente.

Lemme 3.1 *Pour tout $\eta \geq 0$ fixé, J_η satisfait les conditions de $(P\text{-}S)_c$ pour tout $c < c^*$.*

Preuve: Soit $(u_n, v_n) \subset H$ une suite de $\left(\text{P-S}\right)_c$ avec $c < c^*$ pour J_η. Il est très simple de voir que (u_n, v_n) est bornée dans H. D'après le Principe de Concentration-Compacité de P. L. Lions, (voir [25] et [26]), il existe une sous suite, notée $\left\{(u_n, v_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, un ensemble au plus dénombrable $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \cup \mathfrak{J}_2$, une famille de points distincts $\left\{x_j\right\}_{j\in\mathfrak{J}}$ dans $\bar{\Omega}$ et des nombres réels σ_{x_j}, ρ_{x_j}, τ_{x_j}, $\bar{\sigma}_{x_j}$, $\bar{\rho}_{x_j}$, $j \in \mathfrak{J}$, tels que la convergence suivante est vérifiée au sens de mesure

$$\begin{cases} |\nabla u_n|^2 \rightharpoonup d\sigma \geq |\nabla u|^2 + \sum\limits_{j\in\mathfrak{J}} \sigma_{x_j}\delta_{x_j}, \\ |\nabla v_n|^2 \rightharpoonup d\bar{\sigma} \geq |\nabla v|^2 + \sum\limits_{j\in\mathfrak{J}} \bar{\sigma}_{x_j}\delta_{x_j}, \\ |u_n|^{2^*} \rightharpoonup d\rho = |u|^{2^*} + \sum\limits_{j\in\mathfrak{J}} \rho_{x_j}\delta_{x_j}, \\ |v_n|^{2^*} \rightharpoonup d\bar{\rho} = |v|^{2^*} + \sum\limits_{j\in\mathfrak{J}} \bar{\rho}_{x_j}\delta_{x_j}, \\ |u_n|^{\alpha} |v_n|^{\beta} \rightharpoonup d\tau = |u|^{\alpha} |v|^{\beta} + \sum\limits_{j\in\mathfrak{J}_2} \tau_{x_j}\delta_{x_j}, \end{cases} \tag{3.13}$$

où δ_x est la masse de Dirac au point x.

Pour $\varepsilon > 0$ petit, prenons $\psi^{\varepsilon}_{x_j} \in C_0^{\infty}(B_{\varepsilon}(x_j))$ la fonction de plateau tel que $\psi^{\varepsilon}_{x_j} = 1$ dans $B_{\varepsilon/2}(x_j)$, $0 \leq \psi^{\varepsilon}_{x_j} \leq 1$ et $\left|\nabla \psi^{\varepsilon}_{x_j}\right| \leq \frac{4}{\varepsilon}$ dans $B_{\varepsilon}(x_j)$. Alors

$$\begin{aligned} \left\langle J'_{\eta}(u_n, v_n), \left(u_n\psi^{\varepsilon}_{x_j}, 0\right)\right\rangle &= \int_{\Omega} p(x) |\nabla u_n|^2 \psi^{\varepsilon}_{x_j} dx + \int_{\Omega} p(x) u_n \nabla u_n \nabla \psi^{\varepsilon}_{x_j} dx - a \int_{\Omega} u_n^2 \psi^{\varepsilon}_{x_j} dx + \\ & -\eta \int_{\Omega} |u_n|^{2^*} \psi^{\varepsilon}_{x_j} dx - \alpha \int_{\partial\Omega} p(x) Q(x) |u_n|^{\alpha} |v_n|^{\beta} \psi^{\varepsilon}_{x_j} ds_x. \end{aligned}$$

De (2.3), on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} p(x) u_n \nabla u_n \nabla \psi^{\varepsilon}_{x_j} dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} u_n^2 \psi^{\varepsilon}_{x_j} dx = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} p(x) |\nabla u_n|^2 \psi^{\varepsilon}_{x_j} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega} \psi^{\varepsilon}_{x_j} d\sigma$$

$$\geq \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{\Omega} p(x) |\nabla u|^2 \psi^{\varepsilon}_{x_j} dx + p(x_j)\sigma_{x_j} \right) = p(x_j)\sigma_{x_j},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}|u_n|^{2^*}\psi^{\varepsilon}_{x_j}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega}\psi^{\varepsilon}_{x_j}d\rho = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Omega}|u|^{2^*}\psi^{\varepsilon}_{x_j}dx+\rho_{x_j}\right)=\rho_{x_j},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega}p(x)Q(x)|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}\psi^{\varepsilon}_{x_j}ds_x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega}\psi^{\varepsilon}_{x_j}d\tau$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\partial\Omega}p(x)Q(x)|u|^{\alpha}|v|^{\beta}\psi^{\varepsilon}_{x_j}ds_x+p(x_j)Q(x_j)\tau_{x_j}\right)=p(x_j)Q(x_j)\tau_{x_j}.$$

Par conséquent,

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\left\langle J'_{\eta}(u_n, v_n),\ \left(u_n\psi^{\varepsilon}_{x_j}, 0\right)\right\rangle \geq p(x_j)\sigma_{x_j}-\eta\rho_{x_j}-\alpha p(x_j)Q(x_j)\tau_{x_j}.$$

De même,

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\left\langle J'_{\eta}(u_n, v_n),\ \left(0, v_n\psi^{\varepsilon}_{x_j}\right)\right\rangle \geq p(x_j)\bar{\sigma}_{x_j}-\eta\bar{\rho}_{x_j}-\beta p(x_j)Q(x_j)\tau_{x_j},$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\left\langle J'_{\eta}(u_n, v_n),\ \left(u_n\psi^{\varepsilon}_{x_j}, v_n\psi^{\varepsilon}_{x_j}\right)\right\rangle \\ &\geq p(x_j)\left(\sigma_{x_j}+\bar{\sigma}_{x_j}\right)-\eta\left(\rho_{x_j}+\bar{\rho}_{x_j}\right)-2_*p(x_j)Q(x_j)\tau_{x_j}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Sobolev on aura

$$S\left(\rho_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \sigma_{x_j},\ S\left(\bar{\rho}_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \bar{\sigma}_{x_j},\ \text{for } j\in\mathfrak{J}_1 \tag{3.14}$$

et

$$\frac{S}{2^{\frac{2}{N}}}\left(\rho_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \sigma_{x_j},\ \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}}\left(\bar{\rho}_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \bar{\sigma}_{x_j},\ \ S_{\alpha,\beta}\left(\tau_{x_j}\right)^{\frac{2}{2_*}} \leq \sigma_{x_j}+\bar{\sigma}_{x_j}, \text{ for } j \in \mathfrak{J}_2, \tag{3.15}$$

ainsi

$$\sigma_{x_j}+\bar{\sigma}_{x_j} \leq \frac{1}{p\left(x_j\right)}\eta\left(\rho_{x_j}+\bar{\rho}_{x_j}\right)+2_*Q\left(x_j\right)\tau_{x_j},\ j \in \mathfrak{J}. \tag{3.16}$$

Par conséquent, dans le cas où $j \in \mathfrak{J}_1$, on obtient de (3.14) et (3.16)

$$S\left(\left(\rho_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}}+\left(\bar{\rho}_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}}\right) \leq \frac{1}{p\left(x_j\right)}\eta\left(\rho_{x_j}+\bar{\rho}_{x_j}\right),$$

$$S\left(\rho_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}}-\eta\frac{1}{p\left(x_j\right)}\rho_{x_j} \leq 0,$$

ou

$$S\left(\bar{\rho}_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}}-\eta\frac{1}{p\left(x_j\right)}\bar{\rho}_{x_j} \leq 0,$$

et dans le cas où $j \in \mathfrak{J}_2$, de (3.15) et (3.16), on aboutit à

$$\frac{S}{2^{\frac{2}{N}}}\left(\left(\rho_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}}+\left(\bar{\rho}_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}}\right)+\ S_{\alpha,\beta}\left(\tau_{x_j}\right)^{\frac{2}{2_*}} \leq \frac{1}{p\left(x_j\right)}\eta\left(\rho_{x_j}+\bar{\rho}_{x_j}\right)+2_*Q\left(x_j\right)\tau_{x_j},$$

$$\left(\frac{S}{2^{\frac{2}{N}}}\left(\rho_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}}-\eta\frac{1}{p\left(x_j\right)}\rho_{x_j}\right)+\left(\frac{S}{2^{\frac{2}{N}}}\left(\bar{\rho}_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}}-\eta\frac{1}{p\left(x_j\right)}\bar{\rho}_{x_j}\right)+\left(S_{\alpha,\beta}\left(\tau_{x_j}\right)^{\frac{2}{2_*}}-2_*Q\left(x_j\right)\tau_{x_j}\right) \leq 0,$$

Qui implique que soit

$$\frac{S}{2^{\frac{2}{N}}}\left(\rho_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}}-\eta\frac{1}{p\left(x_j\right)}\rho_{x_j} \leq 0,$$

ou

$$\frac{S}{2^{\frac{2}{N}}}\left(\bar{\rho}_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}}-\eta\frac{1}{p\left(x_j\right)}\bar{\rho}_{x_j} \leq 0,$$

ou

$$S_{\alpha,\beta}\left(\tau_{x_j}\right)^{\frac{2}{2_*}}-2_*Q\left(x_j\right)\tau_{x_j} \leq 0,$$

Par conséquent, l'un des cinqs cas suivants doivent être vrais

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J} \text{ est finie et soit } \rho_{x_j} &= 0 \text{ ou } \rho_{x_j} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{p(x_j)\,S}{\eta}\right)^{\frac{N}{2}}, \text{ pour } x_j \in \partial\Omega, && (3.17)\\
\mathfrak{J} \text{ est finie et soit } \bar{\rho}_{x_j} &= 0 \text{ ou } \bar{\rho}_{x_j} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{p(x_j)\,S}{\eta}\right)^{\frac{N}{2}}, \text{ pour } x_j \in \partial\Omega, && (3.18)\\
\mathfrak{J} \text{ est finie et soit } \tau_{x_j} &= 0 \text{ ou } \tau_{x_j} \geq \left(\frac{S_{\alpha,\,\beta}}{2_* Q(x_j)}\right)^{N-1}, \text{ pour } x_j \in \partial\Omega, && (3.19)\\
\mathfrak{J} \text{ est finie et soit } \rho_{x_j} &= 0 \text{ ou } \rho_{x_j} \geq \left(\frac{p(x_j)\,S}{\eta}\right)^{\frac{N}{2}}, \text{ pour } x_j \in \Omega, && (3.20)\\
\mathfrak{J} \text{ est finie et soit } \bar{\rho}_{x_j} &= 0 \text{ ou } \bar{\rho}_{x_j} \geq \left(\frac{p(x_j)\,S}{\eta}\right)^{\frac{N}{2}}, \text{ pour } x_j \in \Omega. && (3.21)
\end{aligned}$$

D'autre part, de (3.11) et (3.12), nous avons

$$\begin{aligned}
c &= J_\eta(u_n,\, v_n) - \frac{1}{2}\left\langle J'_\eta(u_n,\, v_n),\ (u_n,\, v_n)\right\rangle + o_n(1)\\
&= \eta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega \left(|u_n|^{2^*} + |v_n|^{2^*}\right) dx + \left(\frac{2_*}{2} - 1\right)\int_{\partial\Omega} p(x)\,Q(x)\,|u_n|^\alpha\,|v_n|^\beta\, ds_x + o_n(1)\,.
\end{aligned}$$

Tendant $n \to \infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
c &= \frac{\eta}{N}\int_\Omega \left(|u|^{2^*} + |v|^{2^*} + \sum_{j\in\mathfrak{J}}\left(\rho_{x_j} + \bar{\rho}_{x_j}\right)\right) dx + \\
&\quad + \frac{1}{N-2}\int_{\partial\Omega}\left(p(x)\,Q(x)\,|u|^\alpha\,|v|^\beta + \sum_{j\in\mathfrak{J}} p(x_j)\,Q(x_j)\,\tau_{x_j}\right) ds_x.
\end{aligned}$$

Utilisant l'hypothèse que $c < c^*$ et de (3.17) – (3.21), il résulte

$$\rho_{x_j} = \bar{\rho}_{x_j} = \tau_{x_j} = 0, \text{ for all } j \in \mathfrak{J}.$$

Cela donne la convergence forte de $(u_n,\, v_n) \to (u,\, v)$ dans $\left[L^{2^*}(\Omega)\right]^2$ et $\left[L^{2_*}(\partial\Omega)\right]^2$. Puisque $(u_n,\, v_n) \to (u,\, v)$ converge fortement dans $\left[L^2(\Omega)\right]^2$ et testons (3.12) successivement par $(u_n,\, v_n)$ et $(u,\, v)$, nous déduisons que $(u_n,\, v_n) \to (u,\, v)$ fortement dans H.

Donc la preuve du Lemme est confirmée. ■

3.3 Existence de solution positive

Rappelons la variante suivante du théorème du Col d'Ambrosetti-Rabinowitz sans les conditions de (P-S), (voir [5]).

Théorème 3.5 *Soit J_η une fonctionnelle de classe C^1 dans l'espace de Banach H. Supposons qu'il existe un voisinage V de 0 dans H et une constante positive ρ telle que*

$$(i)\ J_\eta(u,\, v) \geq \rho \text{ pour tout } (u,\, v) \text{ dans un voisinage de } V.$$

$$(ii)\ J_\eta(0,0) = 0 \text{ et } J_\eta(\varphi,\psi) \leq 0 \text{ pour } (\varphi,\, \psi) \notin \bar{V}.$$

On pose

$$c = \inf_{\phi\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_\eta\left(\phi\left(t\right)\right), \tag{3.22}$$

avec

$$\Gamma = \left\{\phi \in C\left([0,\ 1],\ H\right) :\ \phi\left(0\right) = 0,\ J_\eta\left(\phi\left(1\right)\right) < 0\right\}.$$

Alors il existe une suite de $(P\text{-}S)_c$.

Dans le lemme suivant, on voit que J_η satisfait (i) et (ii) du Théorème 5.

Lemme 3.2 *Supposons que $(\mathcal{A}_1)$ est satisfaite, alors*

(i) Il existe $\rho > 0$ and $R > 0$ tel que $J_\eta\left(u,\, v\right) \geq \rho$ pour tout $(u,\, v) \in H$ avec $\|(u,\ v)\| = R$.

(ii) Il existe $(u_0,\, v_0) \in H$, avec $\|(u_0,\, v_0)\| > R$ tel que $J_\eta(u_0,\, v_0) \leq 0$.

Preuve: Sous l'hypothèse $(\mathcal{A}_1)$, et utilisant les injections de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned}
J_\eta(u,\, v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega p(x)\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (AU,\, U)\,dx + \\
&\quad -\frac{\eta}{2^*}\int_\Omega \left(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}\right)dx - \int_{\partial\Omega} p(x)\,Q(x)\,|u|^\alpha\,|v|^\beta\,ds_x \\
&\geq \frac{1}{2}c_1\,\|(u,\, v)\|^2 - c_2\,\|(u,\, v)\|^{2^*} - c_3\,\|(u,\, v)\|^{2_*}.
\end{aligned}$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes positives. Alors, il existe $(u,\, v) \in H$ tel que $J_\eta(u,\, v) \geq \rho > 0$, pour $\|(u,\, v)\| = R$ avec $R > 0$ assez petit.

Puisque $J_\eta(tu,\, tv) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$, pour tout $(u,\, v) \in H\backslash\{(0,\, 0)\}$, alors on peut trouver $t_0 > 0$ tel que $\|(t_0u,\, t_0v)\| > R$ et $J_\eta(t_0u,\, t_0v) < 0$. Il suffit de prendre $u_0 = t_0u$ et $v_0 = t_0v$. ■

Lemme 3.3 *Avec les hypothèses du Théorème* 3.1*, il existe* $(\tilde{u},\, \tilde{v}) \in H\backslash\{(0,\, 0)\}$ *tel que*

$$\sup_{t\geq 0} J_\eta(t\tilde{u},\, t\tilde{v}) < c^*.$$

Preuve: Nous vérifions ce Lemme dans deux cas:

1$^{\text{er}}$ **Cas.** $c^* = C$.

Choisissons la fonction plateau $\varphi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$ tel que $0 \leq \varphi \leq 1$ dans $B_r(x_0)$ et $\varphi \equiv 1$ dans $B_{r/2}(x_0)$. Posons $u_{\varepsilon,x_0}(x) = \varphi(x)\,U_{\varepsilon,x_0}(x)$, où $U_{\varepsilon,x_0}(x)$ est définie comme dans (3.2).

De [31], on obtient

$$\int_\Omega p(x)\,|\nabla u_{\varepsilon,x_0}|^2\,dx \leq \frac{1}{2}p(x_0)\,K_1 - p(x_0)\,K_2\varepsilon^{1/2}\,|\log\varepsilon| + o\left(\varepsilon^{1/2}\right) \quad \text{si } N = 3, \tag{3.23}$$

$$\int_\Omega p(x)\,|\nabla u_{\varepsilon,x_0}|^2\,dx = \frac{1}{2}p(x_0)\,K_1 - p(x_0)\,I_1(\varepsilon) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right) \quad \text{si } N \geq 4, \tag{3.24}$$

$$\int_\Omega |u_{\varepsilon,x_0}|^2\,dx = \begin{cases} O\left(\varepsilon^{1/2}\right) & \text{si } N=3, \\ \\ O\left(\varepsilon\left|\log\varepsilon\right|\right) & \text{si } N=4, \\ \\ O\left(\varepsilon\right) & \text{si } N\geq 5, \end{cases} \tag{3.25}$$

et

$$\int_\Omega |u_{\varepsilon,x_0}|^{2^*}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}K_3 - H\left(x_0\right)K_4\varepsilon^{1/2} + o\left(\varepsilon^{1/2}\right) & \text{si } N=3, \\ \\ \frac{1}{2}K_3 - I_2\left(\varepsilon\right) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right) & \text{si } N\geq 4, \end{cases} \tag{3.26}$$

où $\{K_i\}_{i=1}^4$ sont des constantes positives.

Notons que $\dfrac{K_1}{(K_3)^{\frac{2}{2^*}}} = S$ et $I_1\left(\varepsilon\right)$, $I_2\left(\varepsilon\right)$ satisfont

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}I_1\left(\varepsilon\right) = H\left(x_0\right)B_N \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}I_2\left(\varepsilon\right) = H\left(x_0\right)D_N,$$

respectivement, avec B_N, D_N sont des constantes positives dépendantes de N.

Par (3.6), nous obtenons

$$J_\eta\left(tu_{\varepsilon,x_0}, tu_{\varepsilon,x_0}\right) \leq g_1\left(t\right) := t^2\int_\Omega\left(p\left(x\right)\left|\nabla u_{\varepsilon,x_0}\right|^2 - \mu_1 u_{\varepsilon,x_0}^2\right)dx - \frac{2\eta t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |u_{\varepsilon,x_0}|^{2^*}\,dx,$$

alors

$$\max_{t\geq 0} g_1\left(t\right) \leq \frac{\eta^{(2-N)/2}}{N}\left(\frac{\int_\Omega\left(p\left(x\right)\left|\nabla u_{\varepsilon,x_0}\right|^2 - \mu_1 u_{\varepsilon,x_0}^2\right)dx}{\left(\int_\Omega |u_{\varepsilon,x_0}|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}\right)^{\frac{N}{2}}.$$

En combinant les estimations ci-dessus $(3.23)-(3.26)$, nous dérivons l'estimation suivante pour $g_1(t)$

$$\max_{t\geq 0} g_1(t) \leq \begin{cases} \dfrac{\eta^{(2-N)/2}}{2N}\left(p(x_0)S\right)^{N/2} - H(x_0)a_N\varepsilon^{1/2} - \mu_1 O(\varepsilon) & \text{si } N\geq 5, \\ \\ \dfrac{\eta^{(2-N)/2}}{2N}\left(p(x_0)S\right)^{N/2} - H(x_0)b_N\varepsilon^{1/2} - \mu_1 O(\varepsilon\left|\log\varepsilon\right|) & \text{si } N=4, \\ \\ \dfrac{\eta^{(2-N)/2}}{2N}\left(p(x_0)S\right)^{N/2} - H(x_0)d_N\varepsilon^{1/2}\left|\log\varepsilon\right| - \mu_1 O\left(\varepsilon^{1/2}\right) & \text{si } N=3, \end{cases}$$

où a_N, b_N et d_N sont des constantes positives.

$2^{\text{ème}}$ **Cas.** $c^* = D$.

Posons $\tilde{u} = \sqrt{\alpha}V_{\varepsilon,x_0}$, $\tilde{v} = \sqrt{\beta}V_{\varepsilon,x_0}$, où $V_{\varepsilon,x_0}(x) = \phi(x)W_{\varepsilon,x_0}(x)$ avec $W_{\varepsilon,x_0}(x)$ est définie comme dans (3.3) et $\phi \in C_0^\infty(B_\rho(x_0))$ la fonction de Plateau, $0\leq\phi\leq 1$ dans $B_\rho(x_0)$ et $\phi\equiv 1$ dans $B_\rho(x_0)$. Utilisant (3.6) et le fait que $\eta\geq 0$, on aura

$$J_\eta\left(t\sqrt{\alpha}V_{\varepsilon,x_0},t\sqrt{\beta}V_{\varepsilon,x_0}\right) \leq g_2(t),$$

où

$$g_2(t) := \frac{t^2}{2}(\alpha+\beta)\int_\Omega \left(p(x)\left|\nabla V_{\varepsilon,x_0}\right|^2 - \mu_1 V_{\varepsilon,x_0}^2\right)dx - t^{2_*}\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}}\int_\Omega p(x)Q(x)\left|V_{\varepsilon,x_0}\right|^{2_*}ds_x.$$

On peut voir que

$$\sup_{t\geq 0} J_\eta\left(t\sqrt{\alpha}V_{\varepsilon,x_0},\, t\sqrt{\beta}V_{\varepsilon,x_0}\right) \leq \sup_{t\geq 0} g_2(t).$$

En utilisant (3.8), (3.9) et de [3], on obtient les estimations suivantes:

$$\int_\Omega p(x)\left|\nabla V_{\varepsilon,x_0}\right|^2 dx = p(x_0)A_1 - p(x_0)H(x_0)\begin{cases} A_2\varepsilon\left|\log\varepsilon\right| + o(\varepsilon\left|\log\varepsilon\right|) & \text{si } N=3, \\ \\ A_3\varepsilon + o(\varepsilon) & \text{si } N\geq 4, \end{cases} \tag{3.27}$$

$$\int_{\Omega} |V_{\varepsilon,x_0}|^2 \, dx = \begin{cases} O(\varepsilon) & \text{si } N = 3, \\ O(\varepsilon^2 |\log \varepsilon|) & \text{si } N = 4, \\ A_4 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) & \text{si } N \geq 5, \end{cases} \tag{3.28}$$

et

$$\int_{\partial\Omega} p(x) Q(x) |V_{\varepsilon,x_0}|^{2_*} \, ds_x = p(x_0) Q(x_0) (A_5 - H(x_0) A_6 \varepsilon) + o(\varepsilon), \tag{3.29}$$

où A_i sont des constantes positives pour $i = 1,...,6$. Notons que $S_1 = \dfrac{A_1}{(A_5)^{\frac{2}{2_*}}}$.

Selon les équations $(3.27) - (3.29)$, un calcul direct montre que les cas $N = 3$ ey $N \geq 4$ sont différents. Par conséquent, nous distinguons deux cas:

Si $N = 3$, on obtient

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} g_2(t) &= \frac{1}{16} \left(\frac{\alpha + \beta}{\left(\alpha^{\frac{\alpha}{2}} \beta^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \left(\frac{\int_{\Omega} \left(p(x) |\nabla V_{\varepsilon,x_0}|^2 + \mu_2 V_{\varepsilon,x_0}^2\right) dx}{\left(\int_{\Omega} p(x) Q(x) |V_{\varepsilon,x_0}|^4 \, ds_x\right)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 . \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{\alpha + \beta}{\left(\alpha^{\alpha} \beta^{\beta}\right)^{\frac{1}{4}}} \right)^2 \frac{p(x_0)}{Q(x_0)} \left(\frac{A_1 - H(x_0) A_2 \varepsilon |\log \varepsilon| + o(\varepsilon |\log \varepsilon|) - \mu_1 O(\varepsilon)}{\left(A_5 - H(x_0) A_6 \varepsilon + o(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}}} \right)^2, \end{aligned}$$

en utilisant le Théorème des accroissements finis, on aura

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} g_2(t) &= \frac{1}{16} \frac{p(x_0)}{Q(x_0)} \left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{4}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{4}} \right)^2 S_1^2 - A_2 H(x_0) \varepsilon |\log \varepsilon| + o(\varepsilon |\log \varepsilon|) \\ &< \frac{1}{16} \frac{p(x_0)}{Q(x_0)} \left(S_{(\alpha,\beta)}\right)^2, \end{aligned}$$

Si $N \geq 4$, nous avons

$$\begin{aligned}
\max_{t\geq 0} g_2(t) &= \frac{2_*^{1-N}}{N-2}\left(\frac{\alpha+\beta}{\left(\alpha^\alpha\beta^\beta\right)^{\frac{1}{2_*}}}\right)^{N-1}\left(\frac{\int_\Omega \left(p(x)\left|\nabla V_{\varepsilon,x_0}\right|^2-\mu_1 V_{\varepsilon,x_0}^2\right)dx}{\left(\int_\Omega p(x)\,Q(x)\left|V_{\varepsilon,x_0}\right|^{2_*}ds_x\right)^{\frac{2}{2_*}}}\right)^{N-1}\\
&= \frac{2_*^{1-N}}{N-2}\left(\frac{\alpha+\beta}{\left(\alpha^\alpha\beta^\beta\right)^{\frac{1}{2_*}}}\right)^{N-1}\frac{p(x_0)}{\left(Q(x_0)\right)^{N-2}}\left(\frac{A_1-H(x_0)\,A_3\varepsilon+o(\varepsilon)-\mu_1 O\left(\varepsilon^2\left|\log\varepsilon\right|\right)}{\left(A_5-H(x_0)\,A_6\varepsilon+o(\varepsilon)\right)^{\frac{2}{2_*}}}\right)^{N-1}\\
&= \frac{2_*^{1-N}}{N-2}\frac{p(x_0)}{\left(Q(x_0)\right)^{N-2}}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{2_*}}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{2_*}}\right)^{N-1}S_1^{N-1}-A_N H(x_0)\,\varepsilon+o(\varepsilon)\\
&< \frac{1}{N-2}\frac{p(x_0)}{\left(Q(x_0)\right)^{N-2}}\left(\frac{1}{2_*}S_{(\alpha,\beta)}\right)^{N-1},
\end{aligned}$$

où A_N sont des constantes positives qui dépendent de N. ■

Preuve: [Preuve du Thèoréme 3.1] Du Lemme 3.1, $(u_n,\, v_n)$ admet une sous suite convergente, notée par $(u_n,\, v_n)_n$, telle que

$$(u_n,\, v_n) \to (u,\, v) \text{ fortement dans } H.$$

Par conséquent, $(u,\, v)$ est un point critique pour J_η satisfait $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$. Posons $u^+ = \max\{u,\, 0\}$. Remplaçons les termes

$$\frac{\eta}{2^*}\int_\Omega \left(|u|^{2^*}+|v|^{2^*}\right)dx \text{ et } \int_{\partial\Omega} p(x)\,Q(x)\,|u|^\alpha\,|v|^\beta\,ds_x$$

dans (3.1) par

$$\frac{\eta}{2^*}\int_\Omega \left(\left(u^+\right)^{2^*}+\left(v^+\right)^{2^*}\right)dx \text{ et } \int_{\partial\Omega} p(x)\,Q(x)\left(u^+\right)^\alpha\left(v^+\right)^\beta ds_x,$$

respectivement. Répétons le processus ci dessus, on peut obtenir une solution non négative $(u,\, v)$ de $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ et par le principe du maximum fort , il résulte que $u > 0$, $v > 0$ dans Ω. ■

3.4 Existence de solutions pour $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ avec $0 < \mu_1 \leq \mu_2$

Nous permettons maintenant aux paramètres μ_1 et μ_2 dans le système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ d'interférer avec le spectre de $-\operatorname{div}(p(x)\nabla .)$. On note par $(\lambda_{k,p})$ la suite des valeurs propres pour le problème de Neumann:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u) = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \ . \end{cases}$$

On sait que $0 = \lambda_{1,p} < \lambda_{2,p} \leq ...$ et les fonctions propres associées à $\lambda_{1,p}$ sont des fonctions constantes.

Dans cette section, nous considérons les cas où les valeurs propres μ_1 et μ_2 satisfont

$$\lambda_{k,p} < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \lambda_{k+1,p},$$

et

$$\lambda_{k,p} \leq a - |b| \leq \mu_1 \leq a + |b| < \lambda_{k+1,p} \leq \lambda_{k',p} \leq c - |b| \leq \mu_2 \leq c + |b| < \lambda_{k'+1,p},$$

respectivement pour $k,\ k' \geq 1$. Pour appliquer le principe du min-max basé sur le Théorème topologique de linking [5], nous définissons les sous espaces H_k^- et H_k^+ par

$$H_k^- = span\{e_i,\ \ i = 1, ...,\ k\} \text{ et } H_k^+ = \left(H_k^-\right)^\perp,$$

où e_1,..., e_k sont des fonctions propres correspondantes au valeurs propres $\lambda_{1,p}$,..., $\lambda_{k,p}$.

Les Lemmes suivants sont standards.

Lemme 3.4 *Si (z_n) est une suite de $(P\text{-}S)_c$ pour J_η, alors (z_n) est bornée dans H.*

Preuve: Soit $z_n = (u_n, v_n)$ une suite de $(\text{P-S})_c$ pour J_η i.e.

$$J_\eta(u_n, v_n) \to c, \text{ et } J'_\eta(u_n, v_n) \to 0 \text{ dans } H'.$$

Procédons par contradiction, supposons que $\|z_n\| \to \infty$. On pose

$$\hat{z}_n = (\hat{u}_n, \hat{v}_n) = \left(\frac{u_n}{\|z_n\|}, \frac{v_n}{\|z_n\|}\right).$$

Puisque $\|\hat{z}_n\| = 1$ pour tout n, on conclut que

$$\hat{z}_n \rightharpoonup \hat{z} = (\hat{u}, \hat{v}) \text{ dans } H, \ \left[L^{2^*}(\Omega)\right]^2 \text{ et dans } \left[L^{2_*}(\partial\Omega)\right]^2,$$

$$\hat{u}_n \to \hat{u}, \, \hat{v}_n \to \hat{v} \text{ fortement dans } L^s(\partial\Omega), \text{ pour } 1 \leq s < 2_*,$$

$$\hat{u}_n \to \hat{u}, \, \hat{v}_n \to \hat{v} \text{ fortement dans } L^t(\Omega), \text{ pour } 1 \leq s < 2^*,$$

et

$$\hat{u}_n \to \hat{u}, \, \hat{v}_n \to \hat{v} \text{ p.p. dans } \bar{\Omega}.$$

Pour tout $(\varphi, \psi) \in H$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega p(x)\left(\nabla\hat{u}_n\nabla\varphi + \nabla\hat{v}_n\nabla\psi\right)dx - \int_\Omega \left(A\hat{z}_n, \ (\varphi, \psi)\right)dx + \\
&- \|z_n\|^{2^*-2}\,\eta\int_\Omega \left(|\hat{u}_n|^{2^*-2}\hat{u}_n\varphi + |\hat{v}_n|^{2^*-2}\hat{v}_n\psi\right)dx + \\
&- \|z_n\|^{2_*-2}\,\alpha\int_{\partial\Omega} p(x)\,Q(x)\,|\hat{u}_n|^{\alpha-2}|\hat{v}_n|^{\beta}\hat{u}_n\varphi ds_x + \\
&- \|z_n\|^{2_*-2}\,\beta\int_{\partial\Omega} p(x)\,Q(x)\,|\hat{u}_n|^{\alpha}|\hat{v}_n|^{\beta-2}\hat{v}_n\psi ds_x = o_n(1).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Comme $2 < 2_* < 2^*$, On déduit de (3.30) que

$$\int_\Omega \left(|\hat{u}|^{2^*-2}\hat{u}\varphi + |\hat{v}|^{2^*-2}\hat{v}\psi\right)dx = \lim_{n\to\infty}\eta\int_\Omega \left(|\hat{u}_n|^{2^*-2}\hat{u}_n\varphi + |\hat{v}_n|^{2^*-2}\hat{v}_n\psi\right)dx = 0.$$

Ainsi $\hat{u} = \hat{v} = 0$ p.p. dans Ω.

D'autre part, on a

$$c + o_n(1) \geq J_\eta(u_n, v_n) - \frac{1}{2_*}\left\langle J'_\eta(u_n, v_n),\ (u_n, v_n)\right\rangle.$$

Alors

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\left(\int_\Omega p(x)\left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right)dx - \int_\Omega (AU_n, U_n)\,dx\right) \\ &\geq \frac{1}{2(N-1)}\left(\int_\Omega p(x)\left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right)dx - \mu_1\int_\Omega \left(u_n^2 + v_n^2\right)dx\right). \end{aligned}$$

Cela donne

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega p(x)\left(|\nabla \hat{u}_n|^2 + |\nabla \hat{v}_n|^2\right)dx = 0.$$

Alors $\lim\limits_{n\to\infty}\|\hat{z}_n\| = 0$, qui contredit le fait que $\|\hat{z}_n\| = 1$ pour tout n. ∎

Lemme 3.5 *Si (u_n, v_n) est une suite de $(P\text{-}S)_c$ pour J_η avec $c < c^*$, alors (u_n, v_n) est relativement compacte dans H.*

La preuve de ce Lemme est une application directe du principe de Concentration-Compacité et elle est omise.

Nous appliquons maintenant le Thèoréme de Linking [5] pour notre cas, nous avons ce qui suit:

Théorème 3.6 *Soit H un espace de Banach avec $H = H_k^- \oplus H_k^+$ où $\dim H_k^- < \infty$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda_{k,p} < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \lambda_{k+1,p}$ et $J_\eta \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfait:*
(i) Il existe $\rho, \sigma > 0$ tel que $J_\eta(u, v) \geq \sigma$ pour tout $(u, v) \in \left(\partial B_\rho \cap H_k^+\right)^2$.
(ii) Il existe $R > \rho$ tel que si

$$Q_\varepsilon = \left(\left(\bar{B}_R \cap H_k^-\right) \oplus [0, R].\{w_\varepsilon\}\right) \times \left(\left(\bar{B}_R \cap H_k^-\right) \oplus [0, R].\{w_\varepsilon\}\right),$$

alors

$$J_{\eta}\big|_{\partial Q_{\varepsilon}} \leq 0.$$

Si on définit

$$c_{\varepsilon} := \inf_{h\in\Gamma_{\varepsilon}} \max_{(u,\, v)\in Q_{\varepsilon}} J_{\eta}\left(h\left(u,\, v\right)\right),\ pour\ \varepsilon > 0\ petit$$

où

$$\Gamma_{\varepsilon} := \left\{h \in C\left(Q_{\varepsilon},\, H\right) :\ h = Id\ sur\ \partial Q_{\varepsilon}\right\},$$

alors il existe une suite $(u_n,\, v_n) \subset \left(H_k^-\right)^2$ *de* $(P\text{-}S)_c$.

Preuve: Pour tout $(u,\, v) \in \left(H_k^+\right)^2$, on a

$$\int_{\Omega} p\left(x\right)\left(\left|\nabla u\right|^2 + \left|\nabla v\right|^2\right) dx \geq \lambda_{k+1,p} \int_{\Omega} \left(u^2 + v^2\right) dx, \tag{3.31}$$

et

$$\int_{\Omega} p\left(x\right)\left(\left|\nabla u\right|^2 + \left|\nabla v\right|^2\right) dx \geq C_1 \left\|(u,\, v)\right\|^2 \geq C_2 \int_{\Omega} p\left(x\right)\left(\left|\nabla u\right|^2 + \left|\nabla v\right|^2\right) dx. \tag{3.32}$$

De (3.6), (3.31), (3.32) et par les injections de Sobolev, nous écrivons

$$J_{\eta}\left(u,\, v\right) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1,\, p}}\right) c_1 \left\|(u,\, v)\right\|^2 - c_2 \left\|(u,\, v)\right\|^{2^*} - c_3 \left\|(u,\, v)\right\|^{2_*},$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes positives. Par conséquent, il existe $\sigma > 0$ et $R > 0$ tel que

$$J_{\eta}\left(u,\, v\right) \geq \sigma, \text{ pour } (u,\, v) \in \left(\partial B_{\rho} \cap H_k^+\right)^2.$$

D'autre part, nous avons

$$\int_{\Omega} p\left(x\right)\left(\left|\nabla u\right|^2 + \left|\nabla v\right|^2\right) dx \leq \lambda_{k,p} \int_{\Omega} \left(u^2 + v^2\right) dx, \tag{3.33}$$

alors par (3.32) et (3.33), nous obtenons

$$J_\eta(u,\, v) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda_{k,\, p}}\right) c_1 \|(u,\, v)\|^2 - \frac{\eta}{2^*} \|(u,\, v)\|_{2^*}^{2^*} - \int_{\partial\Omega} p(x)\, Q(x)\, |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta+1} ds_x.$$

Nous pouvons utiliser l'équivalence des normes dans l'espace H_k^- de dimension finie pour obtenir

$$J_\eta(u,\, v) \to -\infty \text{ quand } \|(u,\, v)\| \to +\infty,\ (u,\, v) \in \left(H_k^-\right)^2.$$

Ainsi, la condition (ii) est satisfaite pour $R > 0$ suffisamment grand. ■

Lemme 3.6 *Supposons qu'il existe $k,\, k' \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\lambda_{k,p} \leq a - |b| \leq \mu_1 \leq a + |b| < \lambda_{k+1,p} \leq \lambda_{k',p} \leq c - |b| \leq \mu_2 \leq c + |b| < \lambda_{k'+1,p},$$

alors

(i) Il existe $\rho,\, \sigma > 0$ tel que $J_\eta(u,\, v) \geq \sigma$ pour tout $(u,\, v) \in \left(\partial B_\rho \cap H_k^+\right) \times \left(\partial B_\rho \cap H_{k'}^+\right)$.

(ii) Il existe $R > \rho$ tel que $J_{\eta}\big|_{\partial Q_\varepsilon} \leq 0$, où

$$Q_\varepsilon = \left(\left(\bar{B}_R \cap H_k^-\right) \oplus [0,\, R] . \{w_\varepsilon\}\right) \times \left(\left(\bar{B}_R \cap H_{k'}^-\right) \oplus [0,\, R] . \{w_\varepsilon\}\right).$$

Preuve: Pour tout $(u,\, v) \in H_k^+ \times H_{k'}^+$, nous avons

$$\int_\Omega p(x)\, |\nabla u|^2 dx \geq \lambda_{k+1,p} \int_\Omega u^2 dx \quad \text{et} \quad \int_\Omega p(x)\, |\nabla v|^2 dx \geq \lambda_{k'+1,p} \int_\Omega v^2 dx. \tag{3.34}$$

A partir de ces relations, nous obtenons

$$\begin{aligned} J_\eta(u,\, v) \ \geq\ & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a + |b|}{\lambda_{k+1,p}}\right) \int_\Omega p(x)\, |\nabla u|^2 dx - \frac{\eta}{2^*} \int_\Omega |u|^{2^*} dx + \\ & + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c + |b|}{\lambda_{k'+1,p}}\right) \int_\Omega p(x)\, |\nabla v|^2 dx - \frac{\eta}{2^*} \int_\Omega |v|^{2^*} dx + \\ & - \|pQ\|_\infty \int_{\partial\Omega} |u|^\alpha\, |v|^\beta ds_x. \end{aligned}$$

En utilisant les injections de Sobolev et le fait que

$$\int_{\Omega} p(x) |\nabla w|^2 \, dx \geq c_1 \|w\|^2 \geq c_2 \int_{\Omega} p(x) |\nabla w|^2, \text{ pour tout } w \in H_k^+ \text{ ou } H_{k'}^+$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} J_\eta(u, v) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a+|b|}{\lambda_{k+1,p}}\right) \|u\|^2 - c_1 \|u\|^{2^*} - c_2 \|u\|^{2_*} + \\ &+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c+|b|}{\lambda_{k'+1,p}}\right) \|v\|^2 - c_3 \|v\|^{2^*} - c_4 \|v\|^{2_*}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons choisir $\|(u, v)\| = \rho$ suffisamment petite et $\delta > 0$ tels que

$$J_{\eta}\big|_{\left(\partial B_\rho \cap H_k^+\right) \times \left(\partial B_\rho \cap H_{k'}^+\right)} \geq \delta.$$

Pour $(u, v) \in H_k^- \times H_{k'}^-$, nous avons

$$\begin{aligned} J_\eta(u, v) &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a-|b|}{\lambda_{k,p}}\right) \int_{\Omega} p(x) |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c-|b|}{\lambda_{k',p}}\right) \int_{\Omega} p(x) |\nabla v|^2 \, dx \\ &\leq c_5 \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a-|b|}{\lambda_{k,p}}\right) \|u\|^2 + c_6 \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c-|b|}{\lambda_{k',p}}\right) \|v\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \max\left(c_5\left(1 - \frac{a-|b|}{\lambda_{k,p}}\right), c_6\left(1 - \frac{c-|b|}{\lambda_{k',p}}\right)\right) \|(u, v)\|^2. \end{aligned}$$

En conséquence, $J_\eta(u, v) \to -\infty$ quand $\|(u, v)\| \to +\infty$. ∎

Lemme 3.7 *Sous les hypothèses du Théorème* 3.2 *aet supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite*

(a) Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\lambda_{k,p} < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \lambda_{k+1,p}.$$

(b) Il existe $k, k' \in \mathbb{N}^*$, $k \neq k'$, *tel que*

$$\lambda_{k,p} \leq a - |b| \leq \mu_1 \leq a + |b| < \lambda_{k+1,p} \leq \lambda_{k',p} \leq c - |b| \leq \mu_2 \leq c + |b| < \lambda_{k'+1,p},$$

nous avons

$$c_{\varepsilon} := \inf_{h\in\Gamma_{\varepsilon}} \max_{(u,v)\in Q_{\varepsilon}} J_{\eta}\left(h\left(u,\, v\right)\right) < c^{*},$$

où Q_{ε} *et* Γ_{ε} *sont définis comme dans le Théorème* 3.6 *et Lemme* 3.6, *respectivement.*

Preuve: **Premier cas**: Nous commençons par vérifier que $c_{\varepsilon} < D$.

Tant que $\eta \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} J_{\eta}\left(u,\, v\right) &\leq \frac{1}{2}\int_{\Omega} p\left(x\right)\left(\left|\nabla u\right|^{2} + \left|\nabla v\right|^{2}\right) dx - \frac{\mu_{1}}{2}\int_{\Omega}\left(u^{2}+v^{2}\right) dx + \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} p\left(x\right) Q\left(x\right) \left|u\right|^{\alpha} \left|v\right|^{\beta} ds_{x}. \end{aligned}$$

Comme l'ensemble $\{(u,\, v) \in Q_{\varepsilon};\, J_{\eta}\left(u,\, v\right) \geq 0\}$ est compact, il existe $\left(w_{\varepsilon}^{1},\, w_{\varepsilon}^{2}\right) \in \left(H_{k}^{-}\right)^{2}$ et $t \geq 0$ tels que

$$J_{\eta}\left(u_{\varepsilon},\, v_{\varepsilon}\right) = \max_{(u,v)\in Q_{\varepsilon}} J_{\eta}\left(u,\, v\right),\ \text{pour } u_{\varepsilon} = w_{\varepsilon}^{1} + t\sqrt{\alpha}V_{\varepsilon,x_{0}} \text{ et } v_{\varepsilon} = w_{\varepsilon}^{2} + t\sqrt{\beta}V_{\varepsilon,x_{0}}$$

en utilisant (ii) dans le Théorème 3.6 et le fait que supp $(w_{\varepsilon}^{1}) \cap$ supp $(V_{\varepsilon,x_{0}}) = \emptyset$ et supp $(w_{\varepsilon}^{2}) \cap$ supp $(V_{\varepsilon,x_{0}}) = \emptyset$, nous obtenons

$$\begin{aligned} c &\leq \max J_{\eta}\left(u,\, v\right) = J_{\eta}\left(w_{\varepsilon}^{1},\, w_{\varepsilon}^{2}\right) + J_{\eta}\left(t\sqrt{\alpha}V_{\varepsilon,x_{0}},\, t\sqrt{\beta}V_{\varepsilon,x_{0}}\right) \\ &\leq \max_{t\geq 0} J_{\eta}\left(t\sqrt{\alpha}V_{\varepsilon,x_{0}},\, t\sqrt{\beta}V_{\varepsilon,x_{0}}\right). \end{aligned}$$

Comme dans la preuve du premier cas dans le Lemme 3.3, on obtient le résultat souhaité.

Deuxième cas: $c_{\varepsilon} < C$.

Nous avons

$$J_{\eta}\left(tu_{\varepsilon,x_{0}},\, tu_{\varepsilon,x_{0}}\right) \leq t^{2}\int_{\Omega}\left(p\left(x\right)\left|\nabla u_{\varepsilon,x_{0}}\right|^{2} - \mu_{1}u_{\varepsilon,x_{0}}^{2}\right) dx - \frac{\eta t^{2^{*}}}{N}\int_{\Omega}\left|u_{\varepsilon,x_{0}}\right|^{2^{*}} dx.$$

Pour le reste de cette preuve, nous procédons comme dans la preuve du Lemme 3.3. ■

Preuve: [Proof of Theorem 3.2] De la combinaison des Lemmes 3.4−3.7 et le Théorème 3.6, nous concluons la preuve du Théorème 3.2. ■

3.5 Preuves des Théorèmes 3.3 et 3.4

Proposition 3.1 *Supposons qu'il existe $k,\ k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = \lambda_{k,p}$ et $c = \lambda_{k',p}$ avec $k \leq k'$ et $|b| < \min(\lambda_{k+1,p} - \lambda_{k,p},\ \lambda_{k'+1,p} - \lambda_{k',p})$. Alors*
(i) Ils existe $\rho,\ \sigma > 0$ tel que $J_\eta(u,\ v) \geq \sigma$ pour tout $(u,\ v) \in \left(\partial B_\rho \cap H_k^+\right) \times \left(\partial B_\rho \cap H_{k'}^+\right)$.
(ii) Il existe $R > \rho$ tel que $J_{\eta}\big|_{\partial Q_\varepsilon} \leq 0$, où

$$Q_\varepsilon = \left(\left(\bar{B}_R \cap H_k^-\right) \oplus [0,R] \,.\, \{w_\varepsilon\}\right) \times \left(\left(\bar{B}_R \cap H_{k'}^-\right) \oplus [0,R] \,.\, \{w_\varepsilon\}\right).$$

Preuve: Pour tout $(u,\ v) \in H_k^+ \times H_{k'}^+$, nous avons

$$J_\eta(u,\ v) \geq \frac{1}{2} \min\left(\left(1 - \frac{\lambda_{k,p} + b}{\lambda_{k+1,p}}\right),\ \left(1 - \frac{\lambda_{k',p} + b}{\lambda_{k'+1,p}}\right)\right) \|(u,\ v)\|^2 - C_1 \|(u,\ v)\|^{2^*} - C_2 \|(u,\ v)\|^{2_*},$$

et par conséquent, nous pouvons procéder comme dans la preuve du Lemme 3.6 pour conclure que J_η satisfait la condition (i) du résultat abstrait précédent.Nous avons aussi

$$J_\eta(u,\ v) \leq -\frac{b}{2} \max\left(\frac{c_1}{\lambda_{k,p}},\ \frac{c_2}{\lambda_{k',p}}\right) \|(u,\ v)\|^2.$$

En conséquence

$$J_\eta(u,\ v) \to -\infty \text{ quand } \|(u,\ v)\| \to +\infty.$$

Ainsi, la condition (ii) est satisfaite pour $\rho > 0$ suffisamment grand. ■

Proposition 3.1 *Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu_2 = \lambda_{k,p}$. Alors*
(i) Il existe $\rho,\ \sigma > 0$ tel que $J_\eta(u,\ v) \geq \sigma$ pour tout $(u,\ v) \in \left(\partial B_\rho \cap H_k^+\right)^2$.
(ii) Il existe $R > \rho$ tel que $J_{\eta}\big|_{\partial Q_\varepsilon} \leq 0$, où

$$Q_\varepsilon = \left(\left(\bar{B}_R \cap H_k^-\right) \oplus [0,R] \,.\, \{w_\varepsilon\}\right) \times \left(\left(\bar{B}_R \cap H_k^-\right) \oplus [0,R] \,.\, \{w_\varepsilon\}\right).$$

Preuve: La preuve est la même que dans la Proposition 3.1. ■

Lemme 3.8 *Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite:*
(1) *Il existe* $k,\ k' \in \mathbb{N}^*,\ k \leq k'$ *tel que* $a = \lambda_{k,p},\ c = \lambda_{k',p}$.
(2) *Il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\mu_2 = \lambda_{k,p}$. *Alors, nous avons*

$$c_\varepsilon < c^*.$$

Preuve: La preuve est similaire à celle du Lemme 3.7. ■

Preuve: [Proof of Theorem 3] D'après les Propositions 3.1, 3.2 et le Lemme 3.8, nous concluons la preuve du Théorème 3.3. ■

Pour démontrer le Théorème 3.4, nous allons utiliser le théorème abstrait de point critique suivant qui est une variante du Théorème d'Ambrosetti et Rabinowitz (voir [6, Theorem 2.4]).

Théorème 3.7 *Soit* H *un espace d'Hilbert réel de norme* $\|.\|$. *Supposons que* $J \in C^1(H,\ \mathbb{R})$ *est une fonctionnelle définie sur* H *qui satisfait les conditions suivantes:*
(J_1) $J(u,\ v) = J(-u,\ -v),\ J(0,\ 0) = 0$;
(J_2) *Il existe une constante* $\beta > 0$ *tel que* $(P\text{-}S)_c$ *est vérifiée pour tout* $c \in (0,\ \beta)$;
(J_3) *Il existe deux sous espaces fermés* $V,\ W \subset H$ *et des constantes positives* $\rho,\ \delta,\ \beta'$ *avec* $\delta < \beta' < \beta$ *tel que:*

(i) $J(u,\ v) \leq \beta'$, *pour tout* $(u,\ v) \in W^2$;
(ii) $J(u,\ v) \geq \delta$, *pour tout* $(u,\ v) \in V,\ \|(u,\ v)\| = \rho$;
(iii) $codimV < \infty$ *and* $dimW \geq codimV$.

Alors il existe au moins $dimW - codimV$ *paire de points critiques pour* J *avec la valeur critique appartenant à l'intervalle* $[\delta,\ \beta']$.

On note par M^+ et M^- les sous espaces suivants:

$$M^+ = \overline{\underset{\lambda_{k,p} \geq \lambda_+}{\oplus} M(\lambda_{k,p})},\ M^- = \underset{\lambda_{k,p} \leq \lambda_+}{\oplus} M(\lambda_{k,p}),$$

où la fermeture est prise sur $H^1(\Omega)$ et $M(\lambda_{k,p})$ est l'espace propre correspond au valeur propre $\lambda_{k,p}$.

Lemme 3.9 *Nous avons*

$$\beta_{\mu_1} = \sup_{(u,v)\in(M^-)^2} J_\eta(u,\, v) \leq \frac{2}{N}(\lambda_+ - \mu_1)^{\frac{N}{2}} |\Omega|\, \eta^{\frac{2-N}{2}}.$$

Preuve: Pour $a,\, b \geq 0$, nous avons

$$a^\alpha + b^\alpha \leq \begin{cases} 2^{1-\alpha}(a+b)^\alpha & \text{pour } 0 < \alpha \leq 1, \\ (a+b)^\alpha & \text{pour } \alpha \geq 1 \end{cases}, \tag{3.35}$$

et

$$\int_\Omega u^2 dx \leq |\Omega|^{2/N} \left(\int_\Omega |u|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}. \tag{3.36}$$

Utilisant la définition des sous espaces M^+ et M^-, nous avons les inégalités variationnelles suivantes:

$$\int_\Omega p(x)\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx \leq \lambda_+ \int_\Omega \left(u^2+v^2\right) dx, \text{ pour } (u,v) \in \left(M^-\right)^2, \tag{3.37}$$

et

$$\int_\Omega p(x)\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx \geq \lambda_+ \int_\Omega \left(u^2+v^2\right) dx, \text{ pour } (u,v) \in \left(M^+\right)^2. \tag{3.38}$$

Tenant compte de (3.6), (3.37), (3.36) et (3.35), nous avons pour $(u,v) \in (M^-)^2$.

$$\begin{aligned} J_\eta(u,\, v) &\leq \frac{1}{2}(\lambda_+ - \mu_1)\int_\Omega \left(u^2+v^2\right) dx - \frac{\eta}{2^*}\int_\Omega \left(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}\right) dx \\ &\leq \frac{1}{2}(\lambda_+ - \mu_1)(2|\Omega|)^{2/N}\left(\int_\Omega \left(|u|^{2^*}+|v|^{2^*}\right) dx\right)^{2/2^*} - \frac{\eta}{2^*}\int_\Omega \left(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}\right) dx. \end{aligned}$$

Posons $s = \left(\int_\Omega \left(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}\right) dx\right)^{1/2^*}$ et

$$t(s) = \frac{1}{2}(\lambda_+ - \mu_1)(2|\Omega|)^{2/N} s^2 - \frac{\eta}{2^*} s^{2^*},\ s \geq 0.$$

Alors, nous avons

$$\sup_{s\geq 0} t(s) = \frac{2}{N}(\lambda_+ - \mu_1)^{N/2} |\Omega| \eta^{\frac{2-N}{2}}.$$

■

Lemme 3.10 *Soit* $\mu_2 > 0$. *Alors il existe des constantes* ρ_{μ_2} *et* $\delta_{\mu_2} \in \left(0,\ \beta_{\mu_1}\right)$ *tel que* $J_\eta(u,\ v) \geq \delta_{\mu_2}$ *pour* $(u,\ v) \in (M^+)^2$, $\|(u,\ v)\| = \rho_{\mu_2}$.

Preuve: Soit $(u,\ v) \in (M^+)^2$. De (1.6), (5.1), (5.4), les injections de Sobolev et le fait que

$$\int_\Omega p(x)\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx \geq C_1 \|(u,\ v)\|^2 \geq C_2 \int_\Omega p(x)\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx,$$

on obtient

$$\begin{aligned} J_\eta(u,\ v) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_+}\right) c_1 \|(u,\ v)\|^2 - c_2 \|(u,\ v)\|^{2^*} - c_3 \|(u,\ v)\|^{2_*} \\ &\geq \delta_{\mu_2}, \end{aligned}$$

pour $\rho_{\mu_2} = \|(u,\ v)\|$ petite, puisque $\lambda_+ > \mu_2$.

Tant que $M^+ \cap M^- = M(\lambda_+)$, nous avons pour tout $(u,\ v) \in \left(M(\lambda_+) \cap \partial B_{\rho_{\mu_2}}\right)^2$ satisfaisant $\delta_{\mu_2} < J_\eta(u,\ v) \leq \sup_{(u,v)\in(M^-)^2} J_\eta(u,\ v) \leq \beta_{\mu_1}$. ■

Preuve: [Preuve of Théorème 3.4] Il suffit de voir que la fonctionnelle J_η satisfait les hypothèses du Thèoréme 3.7. En effet, choisissons les sous espaces

$$W = \left(M^-\right)^2 \qquad \text{et} \qquad V = \left(M^+\right)^2.$$

Du Lemme 3.9, J_η vérifie toutes les conditions $J_3\,(i)$ avec $\beta' = \beta_{\mu_1}$ et en prenant $\delta = \delta_{\mu_2}$ dans le Lemme 3.10 nous atteignons que J_η satisfait $J_3\,(ii)$. Choisissons $\beta = c^*$, notre fonctionnelle J_η vérifie J_2. Maintenant, de (3.10) nous pouvons supposer que $\beta' = \beta_{\mu_1} < c^*$, et puisque

$$\mathrm{dim}W - \mathrm{codim}V = 2\mathrm{dim}M^- - 2\mathrm{codim}M^+ = 2m,$$

la preuve du Téorème 3.4 est contrôlé. $\blacksquare$

Chapitre 4

Système elliptique avec condition de Robin contenant l'exposant critique de Sobolev

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'existence d'une solution positive pour le système elliptique suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + \frac{\alpha}{2^*} |u|^{\alpha-2} u |v|^{\beta} & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v = bu + cv + \frac{\beta}{2^*} |u|^{\alpha} |v|^{\beta-2} v & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta_1(x) u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \eta_2(x) v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u, v > 0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, est un domaine borné de classe C^1 sur la frontière $\partial\Omega$; a b et c sont des paramètres réels, α, $\beta > 1$ tel que $\alpha + \beta = 2^*$. Ici $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev pour l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ qui est continue mais pas compacte. $\eta_1(x)$,

$\eta_2(x)$ sont des fonctions non négatives telles que $\eta_1,\, \eta_2 \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Dans le cas scalaire, l'existence d'une solution positive du problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x,\, u) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta(x)\, u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u > 0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

a été considéré par Wang [31], où $\eta(x)$ une fonction non négative, $f(x,\, u)$ est une pérturbation d'ordre inférieur à u^{2^*-1} à l'infini, et $f(x,\, 0) = 0$.

Notre but est de généraliser partiellement le résultat de [31] à un système faiblement couplé.

Définition 4.1 *Une fonction positive* $(u,\, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, *est dite solution faible du problème* (4.1) *si*

$$\begin{aligned} & \int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + \nabla v \nabla \psi)\, dx - \int_\Omega (au\varphi + bv\varphi + bu\psi + cv\psi)\, dx + \\ & -\frac{1}{2^*} \int_\Omega \left(\alpha\, |u|^{\alpha-2} u\, |v|^\beta \varphi + \beta\, |u|^\alpha |v|^{\beta-2} v\psi \right) dx + \\ & + \int_{\partial\Omega} (\eta_1(x)\, u\varphi + \eta_2(x)\, v\psi)\, ds_x \\ = \; & 0, \qquad \forall (\varphi,\, \psi) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \end{aligned}$$

où $H^1(\Omega)$ *est l'espace de Hilbert muni la norme* $\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

La fonctionnelle d'energie correspondante au système (4.1) est définie par

$$\begin{aligned} I(u,\, v) \; = \; & \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - (AU,\, U) \right) dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(\eta_1(x)\, u^2 + \eta_2(x)\, v^2 \right) ds_x, \end{aligned}$$

où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),\; U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

On sait que les solutions non triviales du Système (4.1) sont équivalentes aux points critiques de I dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

On pose

$$S(\alpha, \beta) = \inf_{u,\, v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx}{\left(\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta \, dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}$$

et

$$\Sigma_{\alpha,\, \beta} = \inf_{u,\, v \in D^{1,2}\left(\mathbb{R}_+^N\right) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}_+^N} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx}{\left(\int_{\mathbb{R}_+^N} |u|^\alpha |v|^\beta \, dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}.$$

On sait que (voir [4])

$$S(\alpha, \beta) = \left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right) S,$$

où S est la bonne constante de Sobolev définie par

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}},$$

qui est atteinte si est seulement si $\Omega = \mathbb{R}^N$ et la fonction test est choisie pour être

$$U(x) = \left(\frac{N(N-2)}{N(N-2) + |x|^2}\right)^{\frac{N-2}{2}}.$$

On pose

$$U_{\varepsilon,y}(x) = \varepsilon^{-(N-2)/2} U\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right),$$

pour $y \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon > 0$.

Dans ce qui suit, posons $K_{\alpha,\, \beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{2^*}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{2^*}}$, alors $S(\alpha, \beta) = K_{\alpha,\, \beta} S$.

Similaire à la preuve du Théorème 5 dans [4], nous obtenons facilement

$$\begin{aligned}\Sigma_{\alpha,\,\beta} &= K_{\alpha,\,\beta} \inf_{u\in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N_+\right)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u|^2\, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |u|^{2^*}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}}} \\ &= K_{\alpha,\,\beta}\frac{S}{2^{\frac{2}{N}}} = \frac{S\left(\alpha,\,\beta\right)}{2^{\frac{2}{N}}}.\end{aligned}$$

Nous pouvons voir que pour tout $\lambda \leq 0$, $\eta\left(x\right) \geq 0$ et $\eta\left(x\right) \not\equiv 0$,

$$\|u\| := \left(\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right) dx + \int_{\partial\Omega} \eta\left(x\right) u^2 ds_x\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme dans $H^1\left(\Omega\right)$, qui est équivalente à la norme usuelle $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

On note par $\|\eta_1\|_\infty$ et $\|\eta_2\|_\infty$ la norme dans $L^\infty\left(\partial\Omega\right)$. $E := H^1\left(\Omega\right) \times H^1\left(\Omega\right)$ l'espace muni de la norme

$$\|(u,\,v)\| = \left(\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Soit $M = \{A \in M_{2\times 2}$ matrice symétrique telle que $a + c < 0$ et $b^2 < ac\}$. Si $A \in M$ alors il existe deux valeurs propres μ_1, μ_2 telles que $\mu_1 \leq \mu_2 < 0$. Nous avons

$$\mu_1\left(u^2 + v^2\right) \leq \left(AU,\,U\right) \leq \mu_2\left(u^2 + v^2\right), \text{ pour tout } \left(u,\,v\right) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.3}$$

Nous supposons que

$(\mathcal{A})$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N \cap \left\{x = (x_1,..., x_N) \in \mathbb{R}^N/\ x_N > 0\right\}$ est un domaine borné de classe C^1 sue le bord, $H\left(0\right) > 0$, $0 \in \partial\Omega$, où $H\left(0\right)$ est la courbure moyenne à l'origine.

Dans ce chapitre, nous prouvons le résultat suivant:

Théorème 4.1 *Supposons que* $A \in M$ *et* $(\mathcal{A})$ *est vérifiée. Alors si* $\|\eta_1\|_\infty$ *et* $\|\eta_2\|_\infty$ *sont assez petites, le problème* (4.1) *admet au moins une solution positive* $(u,\,v) \in E$ *qui satisfait* $I\left(u,\,v\right) < \frac{1}{2N}\left(S_{\alpha,\beta}\right)^{N/2}$.

4.2 Résultats Préliminaires

Lemme 4.1 *Soit $u_n \rightharpoonup u$ et $v_n \rightharpoonup v$ dans $H^1(\Omega)$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n-u|^\alpha |v_n-v|^\beta dx + \int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx. \tag{4.4}$$

Preuve: Par les injections de Sobolev, nous pouvons supposer que $u_n \to u$ et $v_n \to v$ dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \le p < 2^*$. Nous écrivons

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dx - \int_\Omega |u_n-u|^\alpha |v_n-v|^\beta dx \\
= &\int_\Omega \left(|u_n|^\alpha \left(|v_n|^\beta - |v_n-v|^\beta\right) + |v_n-v|^\beta \left(|u_n|^\alpha - |u_n-u|^\alpha\right)\right) dx \\
= &-\int_\Omega |u_n|^\alpha \int_0^1 \frac{d}{dt}|v_n-tv|^\beta dtdx - \int_\Omega |v_n-v|^\beta \int_0^1 \frac{d}{dt}|u_n-tu|^\alpha dtdx \\
= &\ \beta \int_\Omega \int_0^1 |u_n|^\alpha |v_n-tv|^{\beta-2}(v_n-tv)\, vdtdx \\
&+\alpha \int_\Omega \int_0^1 |v_n-v|^\beta |u_n-tu|^{\alpha-2}(u_n-tu)\, udtdx.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\beta \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \int_0^1 |u_n|^\alpha |v_n-tv|^{\beta-2}(v_n-tv)\, vdtdx = \int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \int_0^1 |v_n-v|^\beta |u_n-tu|^{\alpha-2}(u_n-tu)\, udtdx = 0,$$

le résultat se déduit facilement ■

Proposition 4.1 *Soit $u_n \rightharpoonup u$ et $v_n \rightharpoonup v$ dans $H^1(\Omega)$. Supposons que*
(i) $|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 \rightharpoonup \mu$ faiblement au sens des mesures.

(ii) $|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta} \rightharpoonup \nu$ *faiblement au sens des mesures.*

Alors il existe un ensemble au plus dénombrable J*, une suite* $(x_j) \subset \partial\Omega$ *et* (μ_j), $(\nu_j) \subset (0, \infty)$ *tels que*

$$\nu = |u|^{\alpha}|v|^{\beta} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \mu \geq |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}$$

et

(iii) $\left(\frac{S(\alpha,\, \beta)}{2^{2/N}}\right) \nu_j^{2/2^*} \leq \mu_j$ *si* $x_j \in \partial\Omega$.

Preuve: Il s'agit d'une modification du principe de Concentration-Compacité de P.-L. Lions [25]. Nous esquissons seulement la preuve. Tout d'abord, nous démontrons le résultat en supposant que $u = v = 0$ sur $\partial\Omega$. Pour obtenir (iii) nous avons besoin de la modification suivante du résultat dû à X. J. Wang [31]:

Soit $\tilde{B} = B(0,\, 1) \cap \{x_N > h(x')\}$, où $B(0,\, 1)$ est la boule unité dans $\mathbb{R}^N$, $h(x')$ est une fonction de classe C^1 définie sur $\left\{x' \in \mathbb{R}^{N-1};\ |x'| < 1\right\}$ avec h, Dh tendant vers 0. Alors pour tout $u, v \in H^1(B(0,\, 1))$ avec *supp* u, *supp* $v \subset B$, nous avons:

(A) si $h \equiv 0$, alors (voir [4])

$$\int_{\tilde{B}} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx \geq 2^{-2/N} S(\alpha,\, \beta) \left(\int_{\tilde{B}} |u|^{\alpha}|v|^{\beta}\, dx\right)^{2/2^*},$$

(B) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ ne dépendant que de ε de telle sorte que si $|\nabla h| \leq \delta$, alors

$$\int_{\tilde{B}} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx \geq \left(\frac{S(\alpha,\, \beta)}{2^{2/N}} - \varepsilon\right) \left(\int_{\tilde{B}} |u|^{\alpha}|v|^{\beta}\, dx\right)^{2/2^*}.$$

En utilisant ce résultat, on déduit (iii). Le cas général $u \not\equiv 0$ et $v \not\equiv 0$ peut être réduit au cas ci dessus par la substitution $u_n^1 = u_n - u$, $v_n^1 = v_n - v$ et le Lemme 4.1 (voir [32]). ∎

4.3 Résultat d'existence

Lemme 4.2 *Soit I une fonctionnelle de classe C^1 sur un espace de Banach E. Nous avons*

(i) Il existe des constantes α, $\rho > 0$ telles que

$$I(u,\, v) \geq \alpha \text{ pour tout } (u,\, v) \in E \text{ avec } \|(u,\, v)\| = \rho.$$

(ii) Il existe $(u_0,\, v_0) \in E$ tel que

$$\|(u_0,\, v_0)\| > \rho \text{ et } I(u_0,\, v_0) \leq 0.$$

Preuve: (i) Par l'inégalité de Sobolev, (4.3) et du fait que $\|.\|$ est équivalente à $\|.\|_{H^1(\Omega)}$, nous avons

$$\begin{aligned}
I(u,\, v) &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - \mu_1\left(u^2+v^2\right)\right)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^\alpha\, |v|^\beta\, dx + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\eta_1(x)\, u^2 + \eta_2(x)\, v^2\right) ds_x \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - \mu_1\left(u^2+v^2\right)\right)dx + \int_{\partial\Omega}\left(\eta_1(x)\, u^2 + \eta_2 v^2\right) ds_x\right) + \\
&\quad - \frac{c}{2^*}\,\|(u,\, v)\|^{2^*} \\
&\geq c_1\,\|(u,\, v)\|^2 - c_2\,\|(u,\, v)\|^{2^*}.
\end{aligned}$$

Alors, il existe α, $\rho > 0$ tel que $I(u,\, v) \geq \alpha$ avec $\|(u,\, v)\| = \rho$, pour tout $(u, v) \in E$.

(ii) Nous avons

$$\begin{aligned}
I(tu,\, tv) &\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - \mu_2\left(u^2+v^2\right)\right)dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |u|^\alpha\, |v|^\beta\, dx + \\
&\quad + \frac{t^2}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\eta_1(x)\, u^2 + \eta_2 v^2\right) ds_x
\end{aligned}$$

Nous déduisons que $\lim_{t\to\infty} I(tu,\, tv) \to -\infty$. Par conséquent, on peut choisir $t_0 > 0$, tel

que $\|(t_0 u,\, t_0 v)\| > \rho$ et $I\,(t_0 u,\, t_0 v) < 0$. Soit $(u_0,\, v_0) = (t_0 u,\, t_0 v)$, alors (ii) est verifiée.
$\blacksquare$

Posons $c = \inf\limits_{h\in\Gamma} \sup\limits_{t\in[0,\,1]} I\,(h\,(t))$, où

$$\Gamma = \left\{h \in C\,([0,\,1]\,,\, E) \,/\, h\,(0) = 0,\, I\,(h\,(1)) < 0\right\},$$

Nous avons le Lemme suivant:

Lemme 4.3 *Pour tout* $0 < c < \frac{1}{2N}\,(S\,(\alpha,\,\beta))^{N/2}$, *il existe au moins une solution non triviale* $(u,\, v) \in E$ *du problème* (4.1) *qui satisfait* $I\,(u,\, v) \le c$.

Preuve: Par le Lemme du Col sans les conditions de (P-S), il existe une suite $(u_n,\, v_n)$ telle que, quand $n \to \infty$, $I\,(u_n,\, v_n) \to c$, $I'\,(u_n,\, v_n) \to 0$ dans E'. C'est à dire

$$\begin{aligned} I\,(u_n,\, v_n) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - (AU,\, U)\right) dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^\alpha\,|v|^\beta\, dx + \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \left(\eta_1\,(x)\,u^2 + \eta_2\,(x)\,v^2\right) ds_x \\ &= c + o_n\,(1)\,, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \langle I'\,(u_n,\, v_n)\,,\ (u_n,\, v_n)\rangle &= \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - (AU,\, U)\right) dx - \int_\Omega |u|^\alpha\,|v|^\beta\, dx + \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \left(\eta_1\,(x)\,u^2 + \eta_2\,(x)\,v^2\right) ds_x \\ &= o_n\,(1) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Par (4.5) et (4.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}
c+o_n(1) &= I(u_n, v_n) - \frac{1}{2^*}\langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 - (AU_n, U_n)\right) dx + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\int_{\partial\Omega} \left(\eta_1(x) u_n^2 + \eta_2(x) v_n^2\right) ds_x \\
&\geq \frac{1}{N}\|(u_n, v_n)\|^2,
\end{aligned}$$

Donc (u_n, v_n) est bornée dans E.

Par le Théorème de Vitali, quitte à extraire une sous suite, quand $n \to \infty$, on aura

$$\begin{aligned}
(u_n, v_n) &\rightharpoonup (u, v) \text{ dans } E, \\
(u_n, v_n) &\rightharpoonup (u, v) \text{ dans } L^{2^*}(\Omega), \\
(u_n, v_n) &\to (u, v) \text{ dans } \left[L^2(\partial\Omega)\right]^2, \\
(u_n, v_n) &\to (u, v) \text{ p.p. dans } \bar{\Omega}.
\end{aligned}$$

Par (4.6), il résulte que u satisfait

$$\lim_{n\to\infty} \langle I'(u, v), (\varphi, \psi)\rangle = 0, \ \forall (\varphi, \psi) \in E. \tag{4.7}$$

Donc (u, v) est un point critique pour I.

Maintenant, on montre que $u \not\equiv 0$.

Posons $\tilde{u}_n = u_n - u$ et $\tilde{v}_n = v_n - v$. Du Lemme de Brezis-Lieb, on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_n\|_2^2 &= \|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla \tilde{u}_n\|_2^2 + o(1), \\
\|\nabla v_n\|_2^2 &= \|\nabla v\|_2^2 + \|\nabla \tilde{v}_n\|_2^2 + o(1),
\end{aligned}$$

et
$$\int_{\Omega} |u_n|^{\alpha} |v_n|^{\beta} dx = \int_{\Omega} |u|^{\alpha} |v|^{\beta} dx + \int_{\Omega} |\tilde{u}_n|^{\alpha} |\tilde{v}_n|^{\beta} dx + o(1).$$

Le fait que $I(u_n, v_n) \to c$, on peut déduire que

$$I(u, v) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla \tilde{u}_n|^2 + |\nabla \tilde{v}_n|^2 \right) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |\tilde{u}_n|^{\alpha} |\tilde{v}_n|^{\beta} dx = c + o(1). \tag{4.8}$$

Puisque $\langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle \to 0$ quand $n \to \infty$, le Lemme de Brezis-Lieb nous donne

$$\begin{aligned} o(1) \;=\; & \int_{\Omega} \left(|\nabla \tilde{u}_n|^2 + |\nabla \tilde{v}_n|^2 \right) dx + \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right) dx - \int_{\Omega} (AU, U) \, dx + \\ & - \int_{\Omega} \left(|u|^{\alpha} |v|^{\beta} + |\tilde{u}_n|^{\alpha} |\tilde{v}_n|^{\beta} \right) dx + \int_{\partial\Omega} \left(\eta_1(x) u^2 + \eta_2(x) v^2 \right) ds_x. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Soit $(\varphi, \psi) = (u, v)$ dans (4.7), on aura

$$0 = \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - (AU, U) \right) dx - \int_{\Omega} |u|^{\alpha} |v|^{\beta} dx + \int_{\partial\Omega} \left(\eta_1(x) u^2 + \eta_2(x) v^2 \right) ds_x. \tag{4.10}$$

Il résulte de (4.9) et (4.10) que

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla \tilde{u}_n|^2 + |\nabla \tilde{v}_n|^2 \right) dx - \int_{\Omega} |\tilde{u}_n|^{\alpha} |\tilde{v}_n|^{\beta} dx = o(1).$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} \left(|\nabla \tilde{u}_n|^2 + |\nabla \tilde{v}_n|^2 \right) dx = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} |\tilde{u}_n|^{\alpha} |\tilde{v}_n|^{\beta} dx = k, \tag{4.11}$$

où $k \geq 0$ est une constante positive.

D'après la proposition 4.1, nous avons

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla \tilde{u}_n|^2 + |\nabla \tilde{v}_n|^2 \right) dx \geq \left(\frac{S(\alpha,\beta)}{2^{2/N}} - \varepsilon \right) \left(\int_{\Omega} |\tilde{u}_n|^{\alpha} |\tilde{v}_n|^{\beta} dx \right)^{2/2^*}.$$

Alors

$$k \geq \left(\frac{S(\alpha,\beta)}{2^{2/N}} - \varepsilon \right) k^{2/2^*}, \text{ quand } n \to \infty. \tag{4.12}$$

Nous supposons que $(u, v) \equiv 0$. Quand $k = 0$, De (4.8), $c = I(0, 0) = 0$ qui contredit que $c > 0$. Si $k > 0$, de (4.12), on obtient

$$k \geq \frac{1}{2} (S(\alpha,\beta))^{N/2},$$

puisque ε est arbitraire. De (4.7), on obtient

$$c = \frac{k}{N} \geq \frac{1}{2N} (S(\alpha,\beta))^{N/2}.$$

qui contredit le fait que $c < \frac{1}{2N} (S(\alpha,\beta))^{N/2}$. Donc, $(u, v) \not\equiv 0$ et (u, v) est une solution non trivale du problème (4.1).

Par (4.8) et (4.11), nous avons

$$I(u, v) = c - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) k,$$

qui implique que $I(u, v) \leq c$. La preuve du Lemme 4.3 est compléte. ■

Grâce à l'hypothèse $(\mathcal{A})$, la frontière $\partial\Omega$ peut être représentée près de l'origine par (rotation des directions $x_1,..., x_{N-1}$ si nécessaire)

$$x_N = h(x') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i x_i^2 + o\left(|x'|^2\right), \quad \forall x' = (x_1,..., x_{N-1}) \in D(0, \delta),$$

pour un certain $\delta > 0$, où $\lambda_1,..., \lambda_{N-1}$ sont les principales courbures du $\partial\Omega$ à l'origine et $D(0, \delta) = B_\delta(0) \cap \{x_N = 0\}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, posons

$$u_\varepsilon = \varepsilon^{(N-2)/4} \left(\varepsilon + |x|^2\right)^{-(N-2)/2}, \tag{4.13}$$

alors le Lemme suivant est vérifié.

Lemme 4.4 *Sous l'hypothèse $(\mathcal{A})$, pour $N \geq 4$, les estimations suivantes sont vérifiées:*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx &= \int_{\mathbb{R}_+^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx - I(\varepsilon) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right). &(4.14)\\
\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{2^*} \, dx &= \int_{\mathbb{R}_+^N} |u_\varepsilon|^{2^*} \, dx - II(\varepsilon) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right), &(4.15)\\
\int_{\partial\Omega} \eta(x) \, u_\varepsilon^2 ds_x &\leq C \|\eta\|_\infty \varepsilon^{1/2} + O\left(\varepsilon^{1/2}\right). &(4.16)
\end{aligned}$$

et

$$\int_{\Omega} u_\varepsilon^2 dx = \begin{cases} O\left(\varepsilon^{1/2}\right) & si\ N = 3 \\ O\left(|\varepsilon \log \varepsilon|\right), & si\ N = 4 \\ O(\varepsilon) & si\ N \geq 5 \end{cases} \tag{4.17}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1/2} I(\varepsilon) &= (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^2 g(y')}{\left(1+|y'|^2\right)^N} dy' &(4.18)\\
&= I.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1/2} II(\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{g(y')}{\left(1+|y'|^2\right)^N} dy' &(4.19)\\
&= II,
\end{aligned}$$

où $g(y') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i y_i^2$, $y' = (y_1, \ldots, y_{N-1}) \in D(0, \delta)$.

Pour $N = 3$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx - c\varepsilon^{1/2} |\log \varepsilon| + o\left(\varepsilon^{1/2}\right) && (4.20)\\ \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{2^*} \, dx &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N_+} |u_\varepsilon|^{2^*} \, dx - O\left(\varepsilon^{1/2}\right), && (4.21)\\ \int_{\partial\Omega} \eta(x) \, u_\varepsilon^2 ds_x &\leq C \|\eta\|_\infty \varepsilon^{1/2} + O\left(\varepsilon^{1/2}\right). && (4.22)\end{aligned}$$

4.4 Preuve du résultat principal

Avant de démontrer notre résultat, nous allons donner un Lemme important:

Lemme 4.5 *Sous l'hypothèse $(\mathcal{A})$ et pour $\|\eta_1\|_\infty$, $\|\eta_2\|_\infty$ assez petites, il existe une fonction non négative $(u,\, v) \in E$, $(u,\, v) \not\equiv (0,\, 0)$ qui satisfait*

$$\sup_{t \geq 0} I(tu,\, tv) < \frac{1}{2N} \left(S(\alpha,\beta)\right)^{N/2}. \tag{4.23}$$

Preuve: Nous considérons la fonction suivante avec $u = \sqrt{\alpha} u_\varepsilon$, $v = \sqrt{\beta} u_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} g(t) \;:&= I\left(t\sqrt{\alpha}u_\varepsilon,\, t\sqrt{\beta}u_\varepsilon\right)\\ &\leq \frac{t^2}{2}(\alpha+\beta) \int_{\Omega} \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 - \mu_1 u_\varepsilon^2\right) dx + \frac{t^2}{2} \int_{\partial\Omega} \left(\alpha\eta_1(x) + \beta\eta_2(x)\right) u_\varepsilon^2 ds_x + \\ &\quad - \frac{t^{2^*}}{2^*} \alpha^{\frac{\alpha}{2}} \beta^{\frac{\beta}{2}} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{2^*} \, dx. \end{aligned}$$

Notons que $\lim_{t \to +\infty} g(t) = -\infty$, $g(0) = 0$, $g(t) > 0$, donc $\sup_{t \geq 0} g(t)$ est atteinte pour un certain $t_\varepsilon > 0$ et t_ε est uniformement borné pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Par conséquent, il résulte de (4.16) que

$$\begin{aligned}
g\left(t_{\varepsilon}\right) &= \sup_{t\geq 0}\left(\frac{t^{2}}{2}\left(\alpha+\beta\right)\int_{\Omega}\left(\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{2}-\mu_{1}u_{\varepsilon}^{2}\right)dx+\frac{t^{2}}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\alpha\eta_{1}\left(x\right)+\beta\eta_{2}\left(x\right)\right)u_{\varepsilon}^{2}ds_{x}+\right.\\
&\qquad\left.-\frac{t^{2^{*}}}{2^{*}}\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}}\int_{\Omega}\left|u_{\varepsilon}\right|^{2^{*}}dx\right).\\
&\leq \sup_{t\geq 0}\left(\frac{t^{2}}{2}\left(\alpha+\beta\right)\int_{\Omega}\left(\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{2}-\mu_{1}u_{\varepsilon}^{2}\right)dx-\frac{t^{2^{*}}}{2^{*}}\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}}\int_{\Omega}\left|u_{\varepsilon}\right|^{2^{*}}dx\right)+\\
&\qquad+\left(c_{1}\alpha\left\|\eta_{1}\right\|_{\infty}+c_{2}\beta\left\|\eta_{2}\right\|_{\infty}\right)\varepsilon^{1/2}+O\left(\varepsilon^{1/2}\right).\\
&= \frac{1}{N}K_{\alpha,\,\beta}\left(\frac{\int_{\Omega}\left(\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{2}-\mu_{1}u_{\varepsilon}^{2}\right)dx}{\left(\int_{\Omega}\left|u_{\varepsilon}\right|^{2^{*}}dx\right)^{2/2^{*}}}\right)^{\frac{N}{2}}+\left(c_{1}\alpha\left\|\eta_{1}\right\|_{\infty}+c_{2}\beta\left\|\eta_{2}\right\|_{\infty}\right)\varepsilon^{1/2}+O\left(\varepsilon^{1/2}\right).
\end{aligned}$$

Du Lemme 4.3, on obtient

1er cas: Si $N\geq 4$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{2}dx &= \int_{\mathbb{R}_{+}^{N}}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{2}dx-I\left(\varepsilon\right)+o\left(\varepsilon^{1/2}\right)\\
&= M_{1}\left(1-M_{1}^{-1}I\left(\varepsilon\right)+\left(\varepsilon^{1/2}\right)\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega}\left|u_{\varepsilon}\right|^{2^{*}}dx\right)^{-\frac{N-2}{N}} &= \left(\int_{\mathbb{R}_{+}^{N}}\left|u_{\varepsilon}\right|^{2^{*}}dx-II\left(\varepsilon\right)+o\left(\varepsilon^{1/2}\right)\right)^{-\frac{N-2}{N}}\\
&= M_{2}^{-\frac{N-2}{N}}\left(1+\frac{N-2}{N}M_{2}^{-1}II\left(\epsilon\right)+o\left(\varepsilon^{1/2}\right)\right),
\end{aligned}$$

où

$$M_{1}=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{N}}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{2}dx\qquad\text{et}\qquad M_{2}=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{N}}\left|u_{\varepsilon}\right|^{2^{*}}dx. \tag{4.24}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
&\frac{\int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 - \mu_1 u_\varepsilon^2\right) dx}{\left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}} \\
= \;& \frac{M_1}{M_2^{\frac{N-2}{N}}} \left(1 - M_1^{-1} I(\varepsilon) + \frac{N-2}{N} M_2^{-1} II(\epsilon) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Par (4.24), on obtient

$$\frac{M_1}{M_2^{\frac{N-2}{N}}} = 2^{-\frac{2}{N}} S.$$

On montre maintenant que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1/2} \left(\frac{N-2}{N} M_2^{-1} II(\epsilon) - M_1^{-1} I(\varepsilon)\right) < 0, \tag{4.25}$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit, ce qui implique (4.23). En effet, si (4.25) est vérifiée alors il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha' > 0$ tel que

$$\sup_{t \geq 0} I\left(t\sqrt{\alpha} u_\varepsilon,\, t\sqrt{\beta} u_\varepsilon\right) \leq \frac{1}{2N} \left(S(\alpha, \beta)\right)^{\frac{N}{2}} - \alpha' \varepsilon^{1/2} + \left(c_1 \alpha \|\eta_1\|_\infty + c_2 \beta \|\eta_2\|_\infty\right) \varepsilon^{1/2},$$

pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Soit $\left(c_1 \alpha \|\eta_1\|_\infty + c_2 \beta \|\eta_2\|_\infty\right) = \frac{\alpha'}{4}$, alors

$$\sup_{t \geq 0} I\left(t\sqrt{\alpha} u_\varepsilon,\, t\sqrt{\beta} u_\varepsilon\right) \leq \frac{1}{2N} \left(S(\alpha, \beta)\right)^{\frac{N}{2}} - \frac{3}{4} \alpha' \varepsilon^{1/2} < \frac{1}{2N} \left(S(\alpha, \beta)\right)^{\frac{N}{2}}.$$

Maintenant, nous prouvons que (4.25) est vérifiée. Par (4.18), (4.19) et (4.25) elle est équivalente à

$$\frac{N-2}{N} M_2^{-1} II < M_1^{-1} I.$$

Donc

$$\frac{N-2}{N} \frac{M_1}{M_2} < \frac{I}{II}. \tag{4.26}$$

De (4.18) et (4.19), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{I}{II} &= \left((N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^2 g(y')}{\left(1+|y'|^2\right)^N} dy'\right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{g(y')}{\left(1+|y'|^2\right)^N} dy'\right)^{-1} \\
&= \left((N-2)^2 \int_0^\infty \frac{r^{N+2}}{(1+r^2)^N} dr\right) \times \left(\int_0^\infty \frac{r^N}{(1+r^2)^N} dr\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Pour tout $2 \leq \theta < 2N-1$, intégrons par partie, nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{r^{\theta-2}}{(1+r^2)^{N-1}} dr = \frac{2(N-1)}{\theta-1} \int_0^\infty \frac{r^\theta}{(1+r^2)^N} dr.$$

Observons que

$$\int_0^\infty \frac{r^\theta}{(1+r^2)^N} dr = \int_0^\infty \frac{r^{\theta-2}}{(1+r^2)^{N-1}} dr - \int_0^\infty \frac{r^{\theta-2}}{(1+r^2)^N} dr,$$

on obtient

$$\int_0^\infty \frac{r^\theta}{(1+r^2)^N} dr = \frac{\theta-1}{2N-\theta-1} \int_0^\infty \frac{r^{\theta-2}}{(1+r^2)^N} dr.$$

Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(\varepsilon)}{II(\varepsilon)} = (N-2)^2 \frac{N+1}{N-3}.$$

D'autre part, de (4.14) et (4.15), nous avons

$$\frac{N-2}{N}\frac{M_1}{M_2} = \frac{(N-2)^3}{N} \int_0^\infty \frac{r^{N+1}}{(1+r^2)^N} dr \Bigg/ \int_0^\infty \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^N} dr = (N-2)^2.$$

Donc (4.26) est vérifié.

2ème cas: Si $N = 3$:

Utilisons (4.17), (4.20) – (4.22) et (2.24), nous obtenons facilement

$$
\begin{aligned}
g(t_\varepsilon) &\leq \frac{1}{N} K_{\alpha,\,\beta} \left(\frac{\int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 - \mu_1 u_\varepsilon^2 \right) dx}{\left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}} \right)^{\frac{N}{2}} + \left(c_1 \alpha \|\eta_1\|_\infty + c_2 \beta \|\eta_2\|_\infty \right) \varepsilon^{1/2} + O\left(\varepsilon^{1/2} \right). \\
&\leq \frac{1}{2N} \left(S(\alpha,\, \beta) \right)^{N/2} - c_3 \varepsilon^{1/2} |\log \varepsilon| - \mu_1 O\left(\varepsilon^{1/2} \right),
\end{aligned}
$$

où c_3 est une constante positive.

Par suite le Lemme 4.5 est vérifié. ■

Preuve: [Preuve du Théorème 4.1] Combinons les Lemmes 4.2 et 4.3, on aura

$$
c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(h(t)) \leq \sup_{t \in [0,1]} I(t t_0 v) \leq \sup_{t \geq 0} I(tv) < \frac{1}{2N} \left(S_{\alpha,\beta} \right)^{N/2},
$$

où v est comme dans le Lemme 4.3.

Suite du Lemme 4.2, $(u,\, v)$ est un point critique de I et le système (4.1) a une solution non négative dans E. Par le principe du maximum fort, $(u,\, v) > 0$ dans Ω. La preuve du Théorème 4.1 est accomplie. ■

Perspectives

1. Dans le Chapitre 1, nous avons étudié l'existence de solution qui dépend du comportement asymptotique des poids p et q au voisinage du même minimum. Le cas où p et q ont deux minimums différents serait à envisager.

2. Il serait intéressant d'étudier le comportement des solutions de moindre énergie du système $\left(\mathcal{S}^{(p,Q)}_{A,(\alpha,\beta)}\right)$, dans le Chapitre 3, quand μ_1, $\mu_2 \to \infty$.

Bibliographie

[1] R. A. Adams. Sobolev spaces, Academic Press, Pure and Applied Mathematics, New York-London, vol. 65, 1975.

[2] Adimurthi and G. Mancini. The Neumann problem for elliptic equation with critical nonlinearity, a tribute in honor of G. Prodi, Sc. Norm. Super. Pisa 9-25 (1991).

[3] Adimurthi and S. L. Yadava. Positive solution for Neumann problem with critical nonlinearity on boundary, Comm. Partial Differential equations 16, 1733–1760 (1991).

[4] C. O. Alves, D. C. de Morais Filho, M. A. S. Souto. On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents, Nonlinear Anal. 42, 771-787 (2000).

[5] A. Ambrosetti, P. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Anal. 14, 349-381 (1973).

[6] P. Bartolo, V. Benci, D. Fortunato. Abstract critical point theorem and conditions to some nonlinear problems with strong resonance at infinity, Nonlinear Anal. TMA 7, 981-1012 (1983).

[7] L. Boccardo, D. G. De Figueiredo. Some remarks on a system of quasilinear elliptic equations, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 9, 309-323 (2002).

[8] M. Bouchekif, Y. Hamzaoui. On elliptic system involving critical Sobolev exponent and weights, Mediterr. J. Math. DOI 10.1007/s00009-013-0305-x.

[9] M. Bouchekif, Y. Hamzaoui. On the Neumann problem for an elliptic system with weights and multiple critical nonlinearities. Submitted, (2013).

[10] H. Brezis. Analyse fonctionnelle théorie et application, Masson, 1983.

[11] H. Brezis, E. Lieb. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc. 88, 486–490 (1983).

[12] H. Brezis, L. Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure Appl. Math. 36 (4), 437–477 (1983).

[13] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg. First order interpolation inequalities with weights, Compos. Math. 53, 259-275 (1984).

[14] P. Caldiroli, R. Musina. On a variational degenerate elliptic problem, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 7, 187-199 (2000).

[15] G. Cerami, D. Fortunato, M. Struwe. Bifurcation and multiplicity results for nonlinear elliptic problems involving critical Soboblev exponents, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 1 (5), 341-350 (1984).

[16] J. Chabrowski and J. Yang. Sharp Sobolev inequality involving a critical nonlinearity on a boundary, Topol. Method. Nonlinear Anal., 25 (1), 135-153 (2005).

[17] M. Comte and M. C. Knaap. Solutions of elliptic equations involving critical Sobolev exponents with Neumann boundary conditions, Manuscr. Math. 69, 43–70 (1990).

[18] I. Ekeland. On the variational principle, J. Math. Anal. Appl., 47, 324-353 (1974).

[19] J. F. Escobar. Sharp constant in a Sobolev trace inequality, Indiana Univ. Math. J. 37, 687-698 (1988).

[20] D.G. de Figueiredo. Semilinear Elliptic systems, Nonlinear Funct. Anal. Appl., held at ICTP of Trieste (April 21- May 9, 1997).

[21] N. Ghoussoub, D. Preiss. A general mountain pass principle for locating and classifying critical points, Ann. Inst. Henri Poincaré 177, 321-330 (2001).

[22] R. Hadiji, H. Yazidi. Problem with critical Sobolev exponent and with weight, Chin. Ann. Math. Ser. B 28, 327-352 (2007).

[23] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Mathématiques & Applications, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[24] C. S. Lin, W. M. Ni and I. Takagi. Large amplitude stationary solutions to chemotaxis system, J. Diff. Equations 72, 1-27 (1988).

[25] P. L. Lions. The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case (I), Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1), 145-201 (1985).

[26] P. L. Lions. The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case (II), Rev. Mat. Iberoamericana 1 (2), 45-121 (1985).

[27] H. Meinhardt. Models of Biological Pattern Formation, Academic Press, London, 1982.

[28] M. Struwe. Variational methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, 2nd edn., Springer 1998.

[29] G. Talenti. Best constants in Sobolev inequality, Ann. Math. Pura Appl. (4) 110, 353-372 (1976).

[30] F. de Thélin, J. Vélin. Existence and nonexistence of nontrivial solutions for some nonlinear elliptic systems, Rev. Mat. Complut. Madrid 6, 153-193 (1993).

[31] X.J. Wang. Neumann problem of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, J. Diff. Equations 93, 283–310 (1991).

[32] M. Willem. Minimax Theorem, Birkhauser Verlag, Basel, 1996.

[33] H. Yamabe. On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. Osaka Math. J., 12, 21-37 (1960).

[34] C. N. Yang and R. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, Phys. Rev. 96, 191-195 (1954).

[35] H. Yazidi. On some nonlinear Neumann problem with weight and critical Sobolev trace maps, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 137, 647-670 (2007).

الملخص (عربية)

الغرض من هذا العمل هو دراسة نظام نصف خطي ذو معادلتان تفاضليتان جزئيتان مرتبطتين ضعيفتين ذات متغيرين تحتوي على الأسس الحرجة و دوال الوزن على شروط ديريتشليت ثم نيومان. الصعوبة الكبيرة في البحث على الحلول هو استعادة الاكتناز. بعد عرض موجز من التعاريف و النتائج اللازمة في هذا العمل, نبرهن في الفصل 2 على وجود و عدم وجود الحلول التي تعتمد على سلوك الأوزان قرب أدنى قيمها. الفصول 3 و 4 تهدف الى تقديم نتائج وجود و تعدد الحلول لأنظمة مرتبطة ضعيفة عندما تفي الحدود بالشرط الهندسي عند نقطة و الانحناء المتوسط في تلك النقطة يكون موجبا.

الكلمات المفتاحية: الأسس الحرجة لسوبوليف, شرط بالس- سمال, مبدأ التركيز- الاكتناز, مشكلة نيومان, نظام هلالي الشكل نصف خطي.

RÉSUMÉ (Français)

L’objectif de ce travail est l’étude d’un système de deux équations aux dérivées partielles semi linéaires à deux variables faiblement couplées contenant des exposants critiques et des fonctions poids sous des conditions de Dirichlet puis de Neumann. La difficulté majeure dans la recherche des solutions consiste à récupérer la compacité. Après un bref exposé de définitions et résultats nécessaires dans ce travail, nous prouvons au chapitre 2 l’existence et la non existence des solutions qui dépendent du comportement des poids au voisinage de leur minima. Les chapitres 3 et 4, ont pour but de présenter des résultats d’existence et multiplicité de solutions pour des systèmes faiblement couplés lorsque la frontière satisfait la condition géométrique en un point et la courbure moyenne en ce point est positive.

Mots-clés : Exposant critique de Sobolev, Condition de Palais-Smale, Principe de Concentration-Compacité, Problème de Neumann, Système elliptique semilinéaire.

ABSTRACT (English)

The objective of this work is the study of various systems of semilinear partial differential equations of Dirichlet or Neumann type, involving weights and critical Sobolev exponents. The major difficulty in the search for solutions is to retrieve compactness. After a brief review of definitions and results needed for further work, we prove in Chapter 2 the existence and nonexistence of solutions that depend on the behavior of the weights near their minima. Chapters 3 and 4 are intended to present the results of existence and multiplicity of solutions for weakly coupled systems where the boundary satisfies the geometric condition at a point and the mean curvature at that point is positive.

Key words: Critical Sobolev exponents, Palais-Smale condition, Concentration-Compactness principle, Neumann problem, Semilinear elliptic systems.