THESE DE DOCTORAT

PRESENTEE A

L'UNIVERSITE ABOU-BAKR BELKAID TLEMCEN

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE

DOCTEUR EN SCIENCES MATHEMATIQUES

Par

Wahiba BENYAHIA (Mme GHOMARI)

Sujet

Estimation paramétrique de la densité des retards dans un processus de diffusion

Soutenue: 2012 à Tlemcen

Devant le jury :

- Ghouali Noureddine Président Professeur UABB Tlemcen
- Bosq Denis Examinateur Professeur Université Paris VI
- Laksaci Ali Examinateur Professeur Université Sidi Belabès
- Dib Hacen Examinateur Professeur UABB Tlemcen
- Korso Feciane Malika Examinateur Maître de conférence UABB Tlemcen
- Mourid Tahar Rapporteur Professeur UABB Tlemcen

Remerciements

Au moment de rédiger les dernières lignes de cette thèse -qui seront paradoxalement les premières, il m'a semblé essentiel de revenir sur ces dernières années d'aventure scientifique mais aussi humaine, et d'adresser mes plus vifs remerciements à celles et ceux qui ont contribué, directement ou indirectement, à l'achèvement de ce travail.

Mes premiers mots sont pour professeur Tahar Mourid, qui a accepté de diriger cette thèse. Je crois que ces quelques pages suffiraient difficilement à exprimer toute ma gratitude envers lui, pour le travail qu'il m'a permis d'accomplir et le soutien constant et bienveillant qu'il m'a apporté ... Merci encore !.

Je tiens a remercier ici professeur Ghouali Noureddine de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Je remercie également professeur Denis Bosq pour avoir accepté la pénible tâche de lire ce manuscrit.

Je remercie aussi monsieur Dib Hacen pour les suggestions et les améliorations qu'il m'a proposées, et pour m'avoir honoré de sa présence dans le jury.

Je me dois également de remercier professeur Lakaci Ali et Madame Dali (Korco Feciane) Malika de participer à ce jury et de s'être intéressés à ce travail.

J'ai un dernier mot pour ma famille, chez qui j'ai toujours pu retrouver un havre de tranquillité quand le travail le nécessitait, particulièrement à mon mari Ghomari said, d'une grande disponibilité, son enthousiasme communicatif et exclusivement à mon Oncle Benladghem abdelaziz pour ses conseils judicieux qui m'ont toujours permis d'avancer, surtout dans les moments délicats.

Table des Matières

Introduction

Nous étudions une classe de processus de diffusion à temps continu $X = (X_t, t \geq 0)$ solutions d'équations differentielles stochastiques où la dérive est une fonctionnelle de la trajectoire définie sur un passé de longueur finie. La dérive est définie par une mesure impliquant des retards. Plus précisement, nous considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \left(\int_\delta^1 X_{t-s} d\mu(s)\right) dt + \varepsilon dW(t) & t \in [\delta, T] \\ X_s = x_0, & -1 \leq s \leq \delta \end{cases} \tag{0.1}$$

où μ est une mesure positive de support $[\delta, 1]$ appellée mesure des retards et le coefficient de diffusion, $\varepsilon \in]0, 1]$ est supposé connu et $(W_t\ )$ est un processus de Wiener standard. Si la mesure μ est discrète nous retrouvons les équations differentielles stochastiques avec retards classiques.

Notre travail s'interesse à l'inférence statistique sur la dérive S (drift) définie par

$$S(t, \mu, X) = \int_\delta^1 X_{t-s} d\mu(s)$$

plus particulièrement sur la mesure des retards μ à partir d'une observation de trajectoire $(X(t), t \in\ [\delta, T])$ et dans le cadre des petites diffusions $\varepsilon \to 0$.

Plusieurs problèmes d'estimations statistiques ont été consacrés à cette classe de processus de diffusion avec retards où on considère μ comme une mesure discrete. Nous citons les premiers travaux de Yuri Kutoyants ([10], [12]) où l'auteur développe l'estimation et les tests dans le cas d'un seul retard. Par la suite, ces travaux ont été généralisés au cas de plusieurs retards par les auteurs Y. Kutoyants , T. Mourid et D. Bosq ($cf.$ [14]) . Nous notons aussi que. M. Korso-Feciane a traité le problème de l'estimation et tests dans une dérive non linéaire avec retards de la forme $\sum_{i=1}^{p} S_i(X_{t-\theta_i})$ pour $p = 1$ et $p = 2$ où S_i sont des fonctions données (cf. [15]).

Dans ce travail nous étudions l'estimation paramétrique du drift $S(t,\mu,X)$ dans le cas où la mesure μ admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$f(s)=\frac{d\mu}{ds}(s)=\sum_{i=1}^{L}c_ie_i(s)$$

où $c_1,c_2,...,c_L$ sont les coefficient de f dans un système de fonctions $e_1,e_2,...,e_L$ dans $L^2([\delta,1])$ et L est un entier fixé.

Cette thèse est composée de quatre chapitres que nous résumons brièvement.

Dans Chapitre 1, nous rappellons la théorie générale de Ibragimov-Hasminski [7] sur le comportement asymptotique du rapport de vraisemblance dans le cadre des processus de diffusion. Dans un problème d'estimation paramétrique d'un paramètre $\theta\in\mathbb{R}^L$, deux solutions d'une équation différentielle stochastique induisent deux lois de probabilités $\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_1}$ et $\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_2}$ sur l'espace $C_{[\delta,T]}$ des fonctions continues sur $[\delta,T]$. Le rapport de vraisemblance $Z_{\varepsilon,\theta}(.)$ calculé pour l'observation $X^{\varepsilon}=(X_t,t\in\ [\delta,T])$ est défini par :

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u):=\frac{d\mathbb{P}_{\theta+\Phi_\varepsilon(\theta)u}}{d\mathbb{P}_\theta}\left(X^{\varepsilon}\right),\ \ u\in U_{\varepsilon,\theta}$$

où $\theta\in\Theta$, les valeurs $\theta+\Phi_\varepsilon(\theta)\,u\in\Theta$ correspondent aux autres valeurs possibles du paramètre et Φ_ε est une normalisation adéquate, donc $u\in U_{\varepsilon,\theta}:=\Phi_\varepsilon^{-1}(\Theta-\theta)\subset\mathbb{R}^L$. Le processus $\left(Z_{\varepsilon,\theta}(u),\ u\in\mathbb{R}^L\right)$ est défini par la suite par un prolongement par continuité pour tout $u\in\mathbb{R}^L$.

Par un choix approprié de la matrice Φ_ε, nous avons la convergente faible de la famille des processus de vraisemblance $(Z_{\varepsilon,\theta}(u),u\in\mathbb{R}^L)$ dans l'espace $C_{\mathbb{R}^L}$ pour $\varepsilon\to 0$. L'estimateur du maximum de vraisemlance $\hat{\theta}_\varepsilon$ est défini comme une solution de l'équation

$$\frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\hat{\theta}_\varepsilon}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_0}}=\sup_{\theta\in\bar{\Theta}}\frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_0}}\left(X^{\varepsilon}\right)$$

Nous rappellons la condition de Local Asymptotic Normality de LeCam (condition LAN) vérifiée par la familles des lois $(\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta},\theta\in\Theta)$. Sous cette condition, nous avons l'inégalité de Hajek :

$$\lim_{\delta\to 0}\liminf_{\varepsilon\to 0}\sup_{\|\theta-\theta_0\|<\delta}\mathbb{E}^{\varepsilon}_{\theta}\left[w\left(\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\theta^*_\varepsilon-\theta\right)\right)\right]\geq\mathbb{E}\left[w\left(\xi\right)\right]$$

pour tout estimateur θ^*_ε et $w\in W_{e,\alpha}$: un espace de fonctions de pertes, $\theta_0\in\Theta$. La variable aléatoire ξ est gaussienne centrée réduite dans $\mathbb{R}^L$. Cette inégalité donne une minoration du risque pour tout estimateur du paramètre.

Nous résumons quelques résultats de cette théorie.

Convergence en probabilité

$$\forall\beta > 0, \quad \sup_{\theta_0 \in K} \mathbb{P}_{\theta_0}^{\varepsilon}\left(\left\|\hat{\theta}_\varepsilon - \theta_0\right\| > \beta\right) \le C_1 \exp(\frac{-C_2\beta}{\varepsilon^2}), C_1 > 0, \quad C_2 > 0$$

Loi limite

$$\Phi_\varepsilon^{-1}\left(\theta_0\right)\left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta_0\right) \Rightarrow_{\varepsilon\to 0} \xi$$

Par la suite nous rappellons les résultats obtenus par Y. Kutoyants, D. Bosq et T. Mourid sur l'estimation des retards mutiples dans le cadre des processus de diffusions avec une mesure μ de la forme (cf. [14]) :

$$\mu = \sum_{i=1}^{p} a_i \delta_{b_i}$$

Nous terminons par rappeler les résultats de M. Korso Feciane sur l'estimation d'un retard et deux retards dans le cas d'un drift non linéaire défini par $\sum_{i=1}^{p} S_i(X_{t-\theta_i})$ pour $p = 1$ et $p = 2$. Tous ces résultats ont leurs extentions au cas des estimateurs de Bayes.

Dans Chapitre 2, nous étudions l'estimation paramétrique du drift

$$S(t,\mu,X) = \int_\delta^1 X_{t-s}d\mu(s)$$

où μ admet une densité f.

A partir d'une trajectoire complète $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon,\ t\in[\delta,T])$ vérifiant (0.1), nous nous intéressons à l'estimation de la mesure μ dans le cadre $\varepsilon \to 0$. Nous supposons que la mesure μ dans (0.1) admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de la forme suivante :

$$f(s) = \frac{d\mu}{ds}(s) = \sum_{i=1}^{L} c_i e_i(s)$$

où

- $e_1, e_2, ..., e_L$ est un système de fonctions dans $L^2\left([\delta,1]\right)$.
- $c_1, c_2, ..., c_L$ sont les coefficients de f dans le système $e_1, e_2, ..., e_L$.
- L est un entier fixé.

Pour une mesure μ, nous notons $\mu = \mu\ (\theta)$ où le paramètre $\theta = (c_1, c_2, ..., c_L)$ appartenant à l'espace paramétrique $\Theta =]0, D[^L$ avec $D > 0$ est la suite des coefficients de la densité f.

Deux solutions de l'équation (0.1) correspondantes à deux mesures $\mu_1 = \mu_1(\theta_1)$, $\mu_2 = \mu_2(\theta_2)$ distinctes, induisent deux lois de probabilités $\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_1}$ et $\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_2}$ sur l'espace $C_{[\delta,T]}$. Nous définissons le processus rapport de vraisemblance $Z_{\varepsilon,\theta}(u)$ calculé pour l'observation $X^{\varepsilon} = (X_t, t \in\ [\delta, T])$ est défini par :

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) := \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\Phi_\varepsilon(\theta)u}}{d\mathbb{P}_\theta}\left(X^{\varepsilon}\right), \ \ u \in U_{\varepsilon,\theta}$$

où $\theta \in \Theta$, les valeurs $\theta + \Phi_\varepsilon\left(\theta\right) u \in \Theta$ correspondent aux autres valeurs du paramètre et Φ_ε est une paramétrisation adéquate.

L'estimateur du maximum de vraisemlance $\hat{\theta}_\varepsilon$ du paramètre $\theta = (c_1, c_2, ..., c_L)$ $\in \mathbb{R}^L$ est solution de l'équation

$$\frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\hat{\theta}_\varepsilon}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_0}} = \sup_{\theta\in\bar{\Theta}} \frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_0}}\left(X^{\varepsilon}\right)$$

En utilisant la théorie générale de Ibragimov-Hasminski [7], nous établissons la condition LAN de LeCam (Local Asymptotic Normality) et nous en déduisons la borne de Hajek donnant une minoration du risque de tout estimateur. Nous montrons par la suite les propriétés asymptotiques (convergence et loi limite) des estimateurs du maximum de vraisemblance et de Bayes du paramètre $\theta = (c_1, c_2, ..., c_L)$. L'espace paramétrique $\Theta =]0, D[^L$.

Dans notre travail, nous imposons la condition suivante :

C1. Les fonctions $e_1, e_2, ...,\ e_L$ sont continues, linéairement indépendantes et d'intégrales positives $\left(\int_\delta^1 e_i\left(s\right) ds > 0\right)_{i\in\{1,...,L\}}$.

Notre premier résultat est la condition LAN de LeCam. Plus précisément, la famille des lois $(\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta}, \theta \in \Theta)$ induites par les solutions de (0.1) vérifie :

Théorème. *Sous la condition* **C1***, la famille des lois* $(\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta}, \theta \in \Theta)$ *vérifie la condition LAN de LeCam avec une matrice* Φ_ε *définie par*

$$\Phi_\varepsilon\left(\theta\right) = \varepsilon I^{-\frac{1}{2}}\left(\theta\right)$$

où la matrice

$$I\left(\theta\right) = \int_0^T q_s\left(X^0\right) q_s^t\left(X^0\right) ds$$

le vecteur $q_s\left(X^0\right) = \dfrac{\partial S_s}{\partial \theta}\left(X^0, \theta\right)$ et X^0 *est la solution déterministe correspondant à* (0.1) *pour* $\varepsilon = 0$

Le risque de tout estimateur admet la minoration suivante (Inégalité de Hajek) :
Pour tout estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$, $\theta_0 \in \Theta$ *et* $w \in W_{e,2}$

$$\lim_{\eta\to 0} \liminf_{\varepsilon\to 0} \inf_{\widetilde{\theta}_\varepsilon} \sup_{\|\theta-\theta_0\|<\eta} \mathbb{E}^\varepsilon_\theta \left(w\left(\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\right)\right)\right) \geq \mathbb{E}\left(w\left(\xi\right)\right)$$

où ξ *est un vecteur aléatoire gaussien centré réduit dans* $\mathbb{R}^L$.

Le résultat suivant donne la convergence, la normalité asymptotique et la convergence des moments de tout ordre de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Théorème. *Sous la condition* **C1**, *et sous* $\mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}$, *l'estimateur du maximum de vraisemblance* $\hat{\theta}_\varepsilon$ *vérifie uniformément sur tout compact* K *de* Θ, *les propriétés suivantes:*

1. *Convergence en probabilité*
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \hat{\theta}_\varepsilon = \theta_0$$
Plus précisement, $\forall\beta > 0$,
$$\sup_{\theta_0\in K} \mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}\left(\left\|\hat{\theta}_\varepsilon - \theta_0\right\| > \beta\right) \leq C_1 \exp\left(\frac{-C_2\beta}{\varepsilon^2}\right)$$
oú $C_1 > 0$ *et* $C_2 > 0$.

2. *Loi limite*
$$\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta_0\right) \Rightarrow_{\varepsilon\to 0} \xi$$
où $\xi \hookrightarrow N(0, Id)$ *dans* $\mathbb{R}^L$.

3. *Convergence des moments.*

    Pour tout $p > 0$,
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}^\varepsilon_{\theta_0}\left\|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta_0\right)\right\|^p = \mathbb{E}\left\|\xi\right\|^p$$

4. *L' estimateur* $\hat{\theta}_\varepsilon$ *est asymptotiquement efficace.*

Remarque: Il nous a été signalé que les résultats obtenus sur l'estimation paramétrique de f peuvent être considérés comme un cas particulier des résultats du théorème 2.2 et théorème 2.3 du chap.2 de [7].

Dans Chapitre 3, nous abordons l'estimation paramétrique de la densité de μ par la méthode de la distance minimale de P.W. Millar [19]. Nous nous intéressons d'abord à l'estimation non paramétrique de la fonction f définie par

$$f(t) = \int_{\delta}^{1} X_{t-s}^{0} \ \mu\,(ds)$$

Nous rappellons les résultats de Y. Kutoyants et T. Mourid dans [13] sur un estimateur à noyau $\hat{f}(t)$ de f défini par

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\psi_\varepsilon} \int_0^T K\left(\frac{\tau - t}{\psi_\varepsilon}\right) dX_\tau^\varepsilon$$

où la fenêtre $\psi_\varepsilon \to 0$ avec ε, K un noyau borné, $\int_{-\infty}^{+\infty} K(u)du = 1$ et de support compact $[A, B]$ où $A.B < 0$.

L'ensemble des paramètres est $\Theta =]0, D[^L$ où $D > 0$. Nous définissons un estimateur du paramètre $\theta = (c_1, c_2, ..., c_L) \in \Theta$ par la méthode de la distance minimale en posant :

$$\tilde{\theta}_\varepsilon := \arg \inf_{\theta \in \bar{\Theta}} \int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} \left(\hat{f}_\varepsilon(t) - \sum_{i=1}^{L} c_i \int_{\delta}^{1} X_{t-s}^{0} e_i(s) ds\right)^2 \nu(dt)$$

où ν est une mesure positive finie sur $]0, T[$ et $a_\varepsilon,\ b_\varepsilon$ vérifiant certaines conditions.

Posons

$$S(t, \theta, X) := \sum_{i=1}^{L} c_i \int_{\delta}^{1} X_{t-s} e_i(s) ds$$

Pour $\beta > 0$ et pour K compact de Θ, on définit

$$g_\varepsilon(\beta) := \inf_{\theta_0 \in K} \inf_{\|\theta - \theta_0\| > \beta} \left\| S(t, \theta, X_\theta^0) - S(t, \theta_0, X_{\theta_0}^0) \right\|_2$$

où $\|.\|_2$ désigne la norme dans $L^2\left([a_\varepsilon, b_\varepsilon], \nu\right)$ espace des fonctions définie et de carré intégrable par rapport à la mesure ν sur $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ et $\|.\|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^L$.

On note par $\dot{S}(t, \theta, X_\theta^0)$ le vecteur des dérivées partielles de S par rapport à θ et $I(\theta)$ la matrice

$$I(\theta) = \left\langle \dot{S}(t, \theta, X_\theta^0), \dot{S}^t(t, \theta, X_\theta^0) \right\rangle_{L^2(]0,T[,\nu)}$$

Nous avons le résultat suivant qui donne une loi limite de l'estimateur $\tilde{\theta}_\varepsilon$:

Proposition *Supposons* **C1** *et que ν une mesure discrète sur $]0, T[$. Si pour tout compact $K \subset \Theta$ et $\beta > 0$, $g_\varepsilon(\beta) > 0$, alors*

$$\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \left(\tilde{\theta}_\varepsilon - \theta_0\right) \Rightarrow_{\varepsilon \to 0} \zeta$$

où la v.a

$$\zeta = I^{-1}(\theta_0)\int_0^T \left[\left(\int uK(u)du\right)\left(\int_\delta^1 X^{0\prime}_{t-s}\mu(ds)\right) + Y^0(t)\right]\dot{S}\left(t,\theta_0,X^0_{\theta_0}\right)\nu(dt)$$

La v.a. $Y^0(t)$ *est gaussienne centrée de variance* $\int K^2(u)du$ *et de covariance* $\mathbb{E}(Y^0(t)Y^0(s)) = 0$ *pour* $s \neq t$.

Nous terminons ce chapitre par l'estimation de la dimension L.

Dans Chapitre 4, nous présentons des simulations numériques des estimateurs étudiés en utilisant le logiciel R version 2.14.0.

Articles:

1. Mourid, T. Benyahia,W., Estimation de la densité des retards dans un processus de type diffusion. *Annales de l'ISUP. Vol. 55, Fasc. 2-3, 2011, 43-64.*

2. Mourid, T. Benyahia,W., Estimateur de distance minimale de la densité des retards (En préparation).

Chapitre 1

Définitions et Préliminaires

En statistiques des processus, les processus autoregressifs à temps continu d'ordre k, où k est un entier donné, sont usuellement définis dans la litérature par une équation différentielle stochastique de type :

$$dX^k(t) + (a_1X(t) + a_2X^{(1)}(t) + ... + a_kX^{(k-1)}(t))dt = \sigma dY(t) \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

où les constantes $a_k \neq 0$, les diffentielles $dX^k(t)$, $dY(t)$ sont au sens de Ito, les dérivées $X^{(i)}$ sont en moyenne quadratique et $(Y(t),\ t \in \mathbb{R})$ est un processus stationnaire. Le processus $(X(t),\ t \in \mathbb{R})$ est centré et admet la représentation suivante.

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-u)dY(t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

où g est la fonction de "Green" solution de l'équation différentielle ordinaire:

$$a_0y + ... + a_ky^{(k)} = 0$$

Si le processus $(Y(t),\ t \in \mathbb{R})$ est le processus de Wiener standard, alors$(X(t),\ t \in \mathbb{R})$ est gaussien et sa densité spectrale est donnée par

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \times \frac{1}{|P(i\lambda)|^2} \qquad \text{où} \qquad \sigma > 0. \tag{1.2}$$

$P(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} a_j\lambda^j$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Les processus autorégressifs AR(k) à temps discret possèdent une densité spéctrale de la même forme que (1.2). D'où l'analogie des processus vérifiant (1.1) avec les processus autoregressifs AR(k) à temps discret.

D'autre part, si dans (1.1) le processus Y est gaussien, alors le processus $(X_t,\ t \in \mathbb{R})$ est k fois dérivable en moyenne quadratique et possède une version dont presque sûrement les trajectoire soit k dérivable.

Dans ce travail, nous étudions un modèle de "type diffusion" solution d'une équation différentielle stochastique largement étudié dans [7], [10], [12] et qui présente un autre aspect naturel de l'autorégression à temps continu. Dans le modèle (1.1), l'ordre d'autorégression porte sur l'ordre de dérivation, tandis que dans le modèle que nous allons étudier, l'ordre d'autorégression est un nombre réel strictement positif qui est la longueur du passé de la trajectoire définissant le drift de l'équation. Notons qu'en statistiques des processus à temps continu, il existe plusieurs types d'observations. On peut disposer d'observations complètes de la trajectoire sur un intervalle $[0,T]$ (cf. [7], [12]), ou d'observations à des instants régulièrement espacés entre $[0,T]$ (cf [21]), ou encore d'observations de franchissement d'un niveau donné par le processus (cf. [5]).

Dans cette étude, nous nous interessons aux observations d'un processus vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = (\int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon\ \mu(ds))dt + \varepsilon dW_t & si\ t \in [\delta, T] \\ X_s^\varepsilon = x_0 & si\ \ -1 \le s < \delta \end{cases} \tag{1.3}$$

où

· $(W_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$ est un processus de Wiener.

· μ une mesure positive sur $[\delta, 1]$, $\delta > 0$.

· x_0 est une constante strictement positive

Nous associons à (1.3) l'équation différentielle déterministe suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dX_t^0}{dt} = \displaystyle\int_\delta^1 X_{t-s}^0\ \mu(ds)\ \ ,\ \ t \in [\delta, T] \\ X_s^0 = x_0 \qquad\qquad si\ \ -1 \le s < \delta \end{cases} \tag{1.4}$$

En suppose que l'on dispose d'observation de trajectoire complète $X^\varepsilon = (X_t,\ t \in [\delta, T])$ vérifiant (1.3) et nous nous interessons à l'estimation de la dérive dans le cadre asymptotique où $\varepsilon \to 0$ (cadre des petites variances). Pour cela, on suppose que la mesure μ dans (1.3) admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue admettant le developement suivant:

$$f(s) = \frac{d\mu}{ds}(s) = \sum_{i=1}^{L} c_i e_i(s)$$

où

- $(e_1, e_2, ..., e_L)$ est un système de fonctions dans $L^2([\delta, 1])$
- $c_1, c_2, ..., c_L$ sont les coefficient de f
- L est un entier fixé.

Notre paramètre d'interet est

$$\theta = (c_1, c_2, ..., c_L) \in \Theta =]0, D[^L \quad \text{où} \quad D > 0$$

et notre objectif est l'estimation paramétrique de θ par la méthode du maximum de vraisemblance et de Bayes.

Pour deux valeurs différentes θ_1 et θ_2 du paramètre θ, les solutions correspondantes de (1.3) induisent deux mesures de probabilité $\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_1}$ et $\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_2}$ sur l'espace $C_{[\delta,T]}$ des fonctions réelles définies et contines sur $[\delta, T]$ (muni de la tribu Borellienne). Sous des conditions (voir les condions L_1 et L_2 dans [16], chapitre 4), ces deux lois sont équivalentes. Le théorème de Girsanov (cf. [16]) permet d'expliciter la densité de Radon-Nikodym de deux lois $\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_1}$ et $\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_2}$ qu'on appelle processus de rapport de vraisemblance. L'étude des propriétés asymptotiques des estimateurs étudiés est fondée sur des propriétés de la condition LAN (normalité asymptotique locale) et de convergence faible des processus du rapport de vraisemblance dans l'espace $C_0(\mathbb{R}^L)$ des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}^L$ et tendant vers 0 à l'infini muni de la norme suprêmum. Dans [7], les auteurs montrent pour différentes modèles statistiques la condition LAN et la convergence faible du processus de rapport de vraisemblance dans $C_0(\mathbb{R}^L)$. Pour l'estimation du paramètre θ dans le modèle (1.3), nous suivons cette théorie et nous étudions les propriétés des estimateurs

1.1 Estimateur du maximum de vraisemblance

Pour une observation complète $X^{\varepsilon} = (X_t,\ t \in [\delta, T])$ de (1.3), l'estimateur du maximum de vraisemlance $\hat{\theta}_{\varepsilon}$ est solution de

$$\frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\hat{\theta}_{\varepsilon}}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_0}}(X^{\varepsilon}) = \sup_{\theta \in \bar{\Theta}} \frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_0}}(X^{\varepsilon}) \tag{1.5}$$

où θ_0 est une valeur fixée du paramètre et $\bar{\Theta}$ désigne la ferméture de Θ dans $\mathbb{R}^L$.

Si (1.5) admet plusieurs solutions, $\hat{\theta}_{\varepsilon}$ désigne l'une d'entre elles.

1.2 Estimateurs de Bayes

On considère que le paramètre θ est une variable aléatoire à valeurs $\mathbb{R}^L$ de densité à priori $\pi(\theta)$. L'estimateur de Bays $\tilde{\theta}_\varepsilon$ associé à la fonction de risque $w(\theta - y) = |\theta - y|^q$, $q > 0$, est définie comme solution de l'équation:

$$\mathbb{E}\left(w\left(\tilde{\theta}_\varepsilon - \theta\right)\right) = \inf_{y\in\Theta} \mathbb{E}\left(w\left(y - \theta\right)\right)$$

ou encore par:

$$\int w\left(\theta - \tilde{\theta}_\varepsilon\right) p(\theta/X^\varepsilon) d\theta = \inf_{y\in\Theta} \left(\int w\left(\theta - y\right) p(\theta/X^\varepsilon) d\theta\right)$$

où $p(\theta/X^\varepsilon)$ est la densité à postériori de θ .

Pour le risque quadratique $q = 2$, l'esimateur de Bayes est donné par:

$$\tilde{\theta}_\varepsilon = \mathbb{E}\left(\theta/X^\varepsilon\right)$$

Pour l'étude du risque associé à l'estimation du paramètre θ dans (1.3), on introduit la classe W des fonctions de pertes $w(.)$ à valeurs réelles et vérifiant (cf. [2]) :

1. $w(.)$ est définie positive sur $\mathbb{R}^L$, $w(0) = 0$ et $w(.)$ est continue en 0 et non identiquement nulle.

2. $w(.)$ est symétrique i.e. $w(u) = w(-u)$.

3. Les ensembles $\{u/w(u) < c\}$ sont convexes pour tout $c > 0$.

4. majorant exponentiel : $w(u) \leq \exp(\gamma \|u\|^2)$, pour $\gamma > 0$ quand $\|u\| \to +\infty$.

1.3 Processus de rapport de vraisemblance

Notons par $Z_{\varepsilon,\theta}(.)$ le processus de rapport de vraisemblance calculé pour l'observation X^ε vérifiant (1.3) :

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) := \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\Phi_\varepsilon(\theta)u}}{d\mathbb{P}_\theta}\left(X^\varepsilon\right), \quad u \in \mathbb{R}^L$$

où $\theta \in \Theta$. Les valeurs $\theta + \Phi_\varepsilon(\theta)\, u$ correspondent aux autres valeurs possibles du paramètre pour une normalisation adéquate Φ_ε. Un choix adéquat de la matrice Φ_ε fait que la famille des processus de vraisemblance converge faiblement dans $C_0(\mathbb{R}^L)$. Notons que la matrice $\Phi_\varepsilon(\theta)$ de dimension $L \times L$ est telle que :

$$\theta + \Phi_\varepsilon(\theta)\, u \ \in \Theta.$$

Le processus $\left(Z_{\varepsilon,\theta}(u),\ u \in \mathbb{R}^L\right)$ est défini seulement pour tout u tel que :

$$u \in U_{\varepsilon,\theta} := \Phi_\varepsilon^{-1}(\Theta - \theta) \subset \mathbb{R}^L$$

Dans ([7], p.104-105), sous certains hypothèses, les trajectoires sont presque sûrement dans $C_0(\mathbb{R}^L)$ où le processus est prolongé à l'exterieur de $U_{\varepsilon,\theta}$ de la façon suivante

On considère la sphère :

$$S_r = \{u/\,\|u\| \leq r\,\|\Phi_\varepsilon\|\} \quad \text{dans } \mathbb{R}^L$$

où r est choisi suffisamment petit tel que $S_r \subset U_{\varepsilon,\theta}$. Notons $a_\varepsilon(y)$ la fonction continue égale à 1 sur l'ensemble

$$\{|y| \leq r/\,\|\Phi_\varepsilon\|\}$$

0 à l'extérieur de

$$\{|y| \leq 2r/\,\|\Phi_\varepsilon\|\}$$

et linéaire ailleurs où elle prend des valeurs entre 0 et 1. On pose pour $u \in \mathbb{R}^L$,

$$A_\varepsilon(u) = a_\varepsilon(u) \qquad \text{et} \qquad \tilde{Z}_{\varepsilon,\theta}(u) = A_\varepsilon(u)\ Z_{\varepsilon,\theta}(u)$$

Toutes les inégalités établies pour le processus $Z_{\varepsilon,\theta}(.)$ restent valables pour le processus $\tilde{Z}_{\varepsilon,\theta}(.)$ mais avec d'autres coefficients.

1.4 Condition LAN

Une notion de base qui joue un rôle crucial dans cette étude est la condition de normalité asymptotique locale de LeCam (LAN condition). Une famille de lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon,\ \theta \in \Theta)$ vérifie la condition LAN en un point $\theta_0 \in \Theta$ quand ε tend vers 0.si le rapport de vraisemblance admet, sous une normalisation adéquate $\Phi_\varepsilon(\theta_0)$, la représentation suivante :

$$Z_{\varepsilon,\theta_0}(u) = \exp\left\{\langle u, \Delta_\varepsilon(\theta_0, X^\varepsilon)\rangle - \frac{1}{2}\|u\|^2 + \Psi_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon)\right\}, \qquad u \in \mathbb{R}^L \qquad (1.6)$$

où Δ_ε et Ψ_ε sont des variables aléatoires vérifiant sous $\mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}$:

$$\Delta_\varepsilon\left(\theta_0, X^\varepsilon\right) \Rightarrow N\left(0, Id\right)$$

en loi dans $\mathbb{R}^L$ quand ε tend vers 0 où Id est la matrice identité et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Psi_\varepsilon\left(\theta_0, u, X^\varepsilon\right) = 0$$

en $\mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}$-probabilité.

Les notations $\langle .,. \rangle$ et $\|.\|$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^L$.

Dans le chapitre 2, nous montrons que la famille des lois de probabilité $(\mathbb{P}^\varepsilon_\theta,\ \theta \in \Theta)$ induites par des solutions de l'équation (1.3), vérifie la condition LAN uniformement sur tout compact K de Θ. On en déduit comme dans ([7], p. 162) une borne minimax asymptotique pour le risque associé à la famille $W_{e,\alpha}$ (appelé borne de Hàjek) :

$$\lim_{\delta\to 0} \liminf_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|\theta-\theta_0\|<\delta} \mathbb{E}^\varepsilon_\theta \left[w\left(\Phi_\varepsilon^{-1}\left(\theta_0\right) \left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\right)\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[w\left(\xi\right)\right] \tag{1.7}$$

pour tout $w \in W_{e,\alpha}$, $\theta_0 \in \Theta$ et pour tout estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$. La variable aléatoire ξ est gaussienne centrée réduite dans $\mathbb{R}^L$.

les estimateurs qui réalisent l'égalité dans (1.7) sont dits asymptotiqument efficaces au sens de Hàjek.

La condition LAN implique en particulier la convergence des lois de dimension finie du processus du rapport de vraisemblance. Dans le chapitre 2, nous montrons que les estimateurs de maximum de vraisemblance et de Bayes sont asymtotiquement efficaces au sens de Hàjek. Nous obtenons la convergence des estimateurs, les lois limites et la convergences des moments de tout ordre. Plus precisement, on a :

1. $\forall \beta > 0$,
$$\sup_{\theta_0 \in K} \mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}\left(\left\|\hat{\theta}_\varepsilon - \theta_0\right\| > \beta\right) \leq C_1 \exp\left(\frac{-C_2 \beta}{\varepsilon^2}\right)$$
oú $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$.

2.
$$\Phi_\varepsilon^{-1}\left(\theta_0\right)\left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta_0\right) \Rightarrow_{\varepsilon\to 0} \xi$$
où $\xi \Rightarrow N(0, Id)$ dans $\mathbb{R}^L$.

3. Pour tout $p > 0$,
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}_{\theta_0}^{\varepsilon} \left\| \Phi_{\varepsilon}^{-1}(\theta_0) \left(\hat{\theta}_{\varepsilon} - \theta_0 \right) \right\|^p = \mathbb{E} \left\| \xi \right\|^p$$

4. L' estimateur $\hat{\theta}_{\varepsilon}$ est asymptotiquement efficace.

Pour terminer ce chapitre sur les rappels, nous signalons quelques travaux liés directement au sujet des équations differentielles stochastiques avec retards. Y.Kutoyants, D.Bosq et T.Mourid (cf. [14]) ont étudié les propriétés asymptotiques des estimateurs de maximum de vraisemblance et de Bayes du paramètres

$$\theta = (a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_p)$$

représentant les poids et les retards dans la mesure μ définie par

$$\mu = \sum_{i=1}^{p} a_i \delta_{b_i}$$

où δ_x est la mesure de Dirac au point x et p est un entier donné, avec

$$\theta \in \Theta =]0, A[^p \times \prod_{i=1}^{p}]\alpha_{i-1}, \alpha_i[$$

où $A > 0, (\alpha_i,\ i = 0, ..., p)$ sont des réels strictement positifs vérifiants

$$0 < \alpha_0 < ... < \alpha_p < \infty$$

Dans ce cas, l'équation (1.3) se transforme en

$$dX_t^{\varepsilon} = (\sum_{i=1}^{p} a_i X^{\varepsilon}(t - b_i))dt + \varepsilon dW_t \tag{1.8}$$

Ils notent par $q(t, \theta, X^0)$ le vecteur dérivé de la dérive (drift) par rapport au paramètre θ, et $I(\theta)$ la matrice $(I_{i,j}(\theta), i, j = 1, ..., 2p)$, définie par:

$$I_{i,j}(\theta) = \int_0^T q_i(\theta, t, X^0) q_j(\theta, t, X^0) dt$$

où X^0 désigne la solution déterministe.

Ils montrent que pour tout compact K de Θ, la famille des mesures $(\mathbb{P}_{\theta}^{\varepsilon},\ \theta \in \Theta)$, lois des solutions de (1.8), vérifie la condition LAN (1.6) uniformément en $\theta \in K$. De plus, dans la représentation (1.6), la matrice de normalisation est

$$\Phi_{\varepsilon}(\theta) = \varepsilon I^{-\frac{1}{2}}(\theta)$$

La variable aléatoire

$$\Delta_{\varepsilon}\left(\theta, X^{\varepsilon}\right)=\varepsilon^{-1} I^{-\frac{1}{2}}(\theta) \int_{0}^{T} q(\theta, t, X^{0})\left(d X^{\varepsilon}(t)-\sum_{j=1}^{p} a_{i} X^{\varepsilon}(s-b_{i}) d t\right)$$

est gaussienne centrée réduite $N(0, I_d)$ dans $\mathbb{R}^{2p}$.

Alors, il déduisent la convergence faible du processus de rapport de vraisemblance $\left(Z_{\varepsilon,\theta_0}(u),\ u \in \mathbb{R}^{2p}\right)$. D'où, la convergence en probabilité, une loi limite et la convergence des moments de tout ordre $p > 0$ des estimateurs $\hat{\theta}_{\varepsilon}$ et $\tilde{\theta}_{\varepsilon}$. Les deux estimateurs convergent en loi vers la vraie valeur du paramètre à la vitesse ε^{-1}(cf. [17]).

D'autre part, M^{me} Korco feciane traité le problème d'estimation paramétrique de retards ainsi que certains problèmes de tests d'hypothèses pour des processus de type diffusion non linéaire.

$$d X_{t}=\sum_{i=1}^{p} S_{i}(X_{t-\theta_{i}}) d t+\varepsilon d W_{t}; \qquad 0 \leq t \leq T;$$

où $\theta=(\theta_1, ..., \theta_p) \in \mathbb{R}^p$ (cf. [15]).

D'abord, elle considère l'équation différentielle sthochastique de type diffusion non linaire suivante :

$$d X_{t}=S(X_{t-\theta}) d t+\varepsilon d W_{t}$$

où $S(.)$ est une fonction positive deux fois continûment dérivable de dérivée non nulle sur un intervalle $[a, b]$ et bornée sur $\mathbb{R}$. Elle étudie les propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ dans le cadre des petites diffusions ($\varepsilon \to 0$), elle montre que cet estimateur est consistent, asymptotiquement normal et efficace. Par la suite, elle généralise à l'équation :

$$d X_{t}=\left(S_{1}(X_{t-\theta_{1}})+S_{2}(X_{t-\theta_{2}})\right) d t+\varepsilon d W_{t}, \qquad 0 \leq t \leq T$$

où $S_1(.),\ S_2(.)$ sont deux fonctions deux fois continûment dérivables de dérivés bornés sur $\mathbb{R}$ et avec une hypothèse d'identifiabilité pour ce problème. Elle montre que l'estimateur de maximum de vraisemblance du paramètre $\theta = (\theta_1, \theta_2)^t \in (0, T)^2$ vérifie les mêmes propriétés.

De même, dans le cadre de processus de diffusions stationnaires $X_T = (X_t,\ t \in [0, T])$ et $T \to \infty$, des problèmes d'estimations paramétriques et non paramétriques ont été considérés Par plusieurs auteurs. Nous signalons particulierement les travaux de M. Reiss [21], Kutoyants-Kûchler [8] et Kûchler-Sørensen [9]. Remarquons que dans certains cas de ces problèmes, l'estimation du retard devient singulier avec des vitesses de convergence des estimateurs égales à T et des lois limites des estimateurs non gaussiennes.

Chapitre 2

Estimation de la densité des retards

2.1 Introduction

Nous considérons un processus de type diffusion $X^{\varepsilon} = (X_t^{\varepsilon}, t \in [-1, T])$ pour $\varepsilon \in]0, 1]$, défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, A, P, (\mathcal{F}_t))$ et solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t^{\varepsilon} = (\int_{\delta}^{1} X_{t-s}^{\varepsilon}\ \mu\,(ds))dt + \varepsilon dW_t \quad , \quad t \in [\delta, T] \\ X_s^{\varepsilon} = x_0 \qquad\qquad si \quad -1 \leq s < \delta \end{cases} \tag{2.1}$$

où

· $(W_t,\ t \in \mathbb{R}^+,\ (\mathcal{F}_t))$ est un processus de Wiener adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ et défini sur le même espace $(\Omega, A, P, (\mathcal{F}_t))$

· μ une mesure positive sur $[\delta, 1]\,,\ \delta > 0$

· x_0 est une constante strictement positif.

Nous associons à (2.1) l'équation différentielle déterministe suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dX_t^0}{dt} = \int_{\delta}^{1} X_{t-s}^0\ \mu\,(ds) \quad , \quad t \in [\delta, T] \\ X_s^0 = x_0 \qquad\qquad si \quad -1 \leq s < \delta \end{cases} \tag{2.2}$$

Pour ε petit l'équation (2.1) est considérée comme des petites perturbations de (2.2). Pour une mesure μ à variations finies, l'équation (2.1) admet une solution unique presque sûrement et les lois induites sur l'espace $(C_{[\delta,T]}, \mathcal{F})$ où $C_{[\delta,T]}$ est l'espace des fonctions réelles continue définies sur $[\delta, T]$, $\mathcal{F} = \bigcup_{t \geq \delta} \mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s,\ s \leq t)$, par les processus solutions de (2.1) correspondants à des mesures μ_1 et μ_2 distinctes sont équivalentes ([16] (chap.4), et [12]). Dans ce chapitre, nous étudions le problème de l'estimation de la mesure μ dans le cas où elle admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue admettant le dévelopement suivant :

$$f(s) = \frac{d\mu}{ds}(s) = \sum_{i=1}^{L} c_i e_i(s) \tag{2.3}$$

où

- $\cdot$ $(e_1, e_2, ...e_L)$ est un système de fonctions dans $L^2([\delta, 1])$
- $\cdot$ $c_1, c_2, ..., c_L$ sont les coefficients de f
- $\cdot$ L est un entier fixé.

Notre objectif est l'estimation du paramètre $\theta = (c_1, c_2, ..., c_L)^t \in \Theta =]0, D[^L$ où $D > 0$, des coefficients de f à partir de l'observation d'une trajectoire complète $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ de (2.1) (où u^t désigne le transposé du vecteur u).

Nous construisons les estimateurs du maximum de vraisemblance et de Bayes et nous étudions leurs propriétés asymtotiques quand $\varepsilon \to 0$. Nous utilisons la théorie générale de Ibragimov-Hasminski (cf.[7], [12]) pour montrer que la famille des lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon,\ \theta \in \Theta)$ induites par les processus solutions de (2.1) vérifient la condition LAN (local asymptotic normality) de L. LeCam pour en déduire ensuite la borne de Hàjek. L'étude de la tension du processus de vraisemblance et sa convergence faible dans l'espace $C_0\left(\mathbb{R}^L\right)$ des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini, permet de montrer la convergence des estimateurs du maximum de vraisemblance et de Bayes, la normalité asymptotique et la convergence des moments de tout ordre quand $\varepsilon \to 0$.

Le problème d'estimation des retards dans les processus de type diffusion a été considéré par plusieurs auteurs. Dans le cadre des petites diffusions, ces auteurs montrent que les estimateurs du maximum de vraisemblance et Bayes sont consistants, asympotiquement normaux et efficaces (cf. [8], [9], [11], [14], [21]). Nous citons comme exemple dans le cadre des observations $(X_t, t \in [0, T])$ avec $T \to \infty$, U.Küchler -Y.Kutoyants. [8], qui ont étudié dans le cas d'un processus de type diffusion linéaire l'estimation du retard en donnant une vitesse de convergence en T et des lois limites non gaussiennes (voir aussi [9]). Dans [21], M.Reiss a étudié l'estimation non paramétrique de la densité des retards dans les processus de type difusion stationnaires.

Dans le paragraphe 2, nous rappelons les notations et hypothèses sur le modèle étudié. Dans le paragraphe 3, nous donnons les résultats sur la condition LAN, la convergence, la loi et l'efficacité asymtotique des estimateurs du maximum de vraisemblance et de Bayes. Enfin, les preuves des résultats sont présentées dans le paragraphe 4.

2.2 Notations et Hypothèses

Nous considérons l'équation différentielle stochastique (2.1) dans le cas où la mesure μ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de la forme (2.3). L'équation (2.1) se transforme en

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = \left(\sum_{i=1}^{L} c_i \int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon \, e_i(s)\, ds \right) dt + \varepsilon dW_t \quad \text{si} \quad t \in [\delta, T] \\ X_s = x_0 \qquad\qquad \text{si} \quad -1 \leq s < \delta \end{cases} \tag{2.4}$$

Nous notons par $\theta = (c_1, c_2, ...c_L)^t$ le paramètre à estimer appartenant à l'espace paramétrique $\Theta =]0, D[^L$ où $D > 0$ et $\mathbb{P}_\theta^\varepsilon$ désigne la loi du processus de type diffusion $(X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ solution de (2.4) induite sur l 'espace des trajectoires $\left(C_{[0,T]}, \mathcal{F}\right)$. Pour θ_0 une valeur fixée du paramètre dans Θ et une observation d'une trajectoire complète $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ de (2.4), rappellons que l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) $\hat{\theta}_\varepsilon$ est défini comme une solution de l'équation

$$\frac{d\mathbb{P}_{\hat{\theta}_\varepsilon}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^\varepsilon}(X^\varepsilon) = \sup_{\theta \in \bar{\Theta}} \frac{d\mathbb{P}_\theta^\varepsilon}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^\varepsilon}(X^\varepsilon) \tag{2.5}$$

où $\bar{\Theta}$ désigne la ferméture de Θ.

En notant $\mathbb{P}_{\theta_0}^\varepsilon = \mathbb{P}_0$ la loi du processus de Wiener et en posant :

$$S_t(X^\varepsilon, \theta) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{L} c_i \int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon \, e_i(s)\, ds & si \ t \in [\delta, T] \\ S_t(X^\varepsilon, \theta) := 0 & si \ \ t \in [0, \delta[\end{cases}$$

la vraisemblance est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{P}_\theta^\varepsilon}{d\mathbb{P}_0}(X^\varepsilon) &= \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T S_t(X^\varepsilon, \theta)\, dX_t^\varepsilon - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T (S_t(X^\varepsilon, \theta))^2\, dt \right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_\delta^T S_t(X^\varepsilon, \theta)\, dX_t^\varepsilon - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_\delta^T (S_t(X^\varepsilon, \theta))^2\, dt \right) \end{aligned}$$

Et dans la suite, nous conservons la première forme de la vraisemblance.

L'estimateur EMV $\hat{\theta}_\varepsilon$ vérifie le système suivant :

$$A_\varepsilon \hat{\theta}_\varepsilon = Y_\varepsilon$$

où A_ε la matrice $(L \times L)$ définie par

$$A_\varepsilon = \left[\int_\delta^T V_i^\varepsilon(t) \, V_j^\varepsilon(t) \, dt \right]_{i,j=1,\ldots,L}$$

et

$$Y_\varepsilon = \left(\int_\delta^T V_1^\varepsilon(t) \, dX_t^\varepsilon, \ldots, \int_\delta^T V_L^\varepsilon(t) \, dX_t^\varepsilon \right)^t$$

avec

$$V_i^\varepsilon(t) = \int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon \; e_i(s) \, ds$$

Remarquons que la matrice A_ε est asymptotiquement inversible (p.s.) (cf. Lemme Annexe). Nous rappellons la propriété de la normalité asymptotique locale (LAN condition ou condition de LeCam) qui joue un rôle fondamental dans ce type de problème ([6], [7]). La famille des lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ vérifie la condition LAN en un point $\theta \in \Theta$ si le rapport de vraisemblance

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) = \frac{d\mathbb{P}_{\theta + \Phi_\varepsilon(\theta)u}}{d\mathbb{P}_\theta}(X^\varepsilon), \quad u \in \mathbb{R}^L \tag{2.6}$$

admet la représentation suivante

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) = \exp\left[\langle u, \Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) \rangle - \frac{1}{2} \|u\|^2 + \Psi_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) \right] \tag{2.7}$$

où $\Phi_\varepsilon(\theta)$ une matrice de normalisation $(L \times L)$, et sous $\mathbb{P}_\theta^\varepsilon$, on a

$$\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) \Rightarrow N(0, Id) \;\; \text{dans } \mathbb{R}^L \text{ quand } \varepsilon \to 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Psi_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) = 0 \;\; \text{en probabilité}$$

$\langle ., . \rangle$ et $\|.\|$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme euclédienne dans $\mathbb{R}^L$et Id est la matrice identité $(L \times L)$.

Si la famille de mesures $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ est LAN en tout point $\theta \in \Theta$, on dit qu'elle est LAN sur Θ. La famille des lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ vérifie la condition LAN uniforme si nous avons les relations précédentes pour tout compact $K \subset \Theta$, et pour toutes les suites $(\theta_n) \subset K, (\varepsilon_n) \subset \mathbb{R},\ \varepsilon_n \to 0, (u_n) \subset \mathbb{R}^L,\ u_n \to u$ vérifiant $(\theta_n + \Phi_\varepsilon(\theta_n)u_n) \in \Theta$.

D'autre part, notons par $\mathbf{W}_{e,2}$ l' espace des fonctions de perte w définies sur $\mathbb{R}^L$ continues symétriques non identiquement nulles vérifiant :

· $w(0) = 0$

· pour tout $c > 0$ les ensembles $\{u \ / \ w(u) < c\}$ sont convexes

· $w(u) \leq \exp(\gamma \left\| u \right\|^2)$ pour $\gamma > 0$ quand $\left\| u \right\| \to \infty$

Si la famille $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ satisfait la condition LAN en tout point $\theta \in \Theta$ avec une matrice de normalisation $\Phi_\varepsilon(\theta)$, alors pour tout estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$, et $w \in \mathbf{W}_{e,2}$, nous avons l'inégalité suivante dite aussi borne de Hàjek :

$$\lim_{\delta \to 0} \liminf_{\varepsilon \to 0} \sup_{\|\theta - \theta_0\| < \delta} \mathbb{E}_\theta^\varepsilon \left[w \left(\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta) \right) \right] \geq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{L}{2}}} \int_{\mathbb{R}^L} w(x) \exp \left(-\frac{\|x\|^2}{2} \right) dx \quad (2.8)$$

Les estimateurs qui réalisent l'égalité dans (2.8) sont dits asymptotiquement efficaces [6].

C1. les fonctions $e_1, e_2, ..., e_L$ sont continues, linéairement indépendantes et d'intégrale positif. $\left(\int_\delta^1 e_i(s)\, ds > 0 \right)_{i \in \{0,...,L\}}$

2.3 Résultats

Le théorème suivant donne la condition LAN de LeCam de la famille de lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ solution de (2.4) et la borne de Hàjek.

Théorème 2.1 . *Sous la condition* ***C1,*** *la famille des lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ solution (2.4) vérifie la condition LAN* (2.7) *avec la matrice Φ_ε définie par*

$$\Phi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I^{-\frac{1}{2}}(\theta) \qquad \text{où} \quad I(\theta) = \int_0^T q_s\left(X^0\right) q_s^t\left(X^0\right) ds$$

$$q_s\left(X^0\right) = \frac{\partial S_s}{\partial \theta}\left(X^0, \theta\right) \ \text{et} \ \Delta_\varepsilon\left(\theta, X^0\right) = \int_0^T \left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle dW_t.$$

La fonction risque admet la minoration suivante (Inégalité de Hajek) : pour tout estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$, $\theta_0 \in \Theta$ et $w \in \mathbf{W}_{e,2}$

$$\lim_{\eta \to 0} \liminf_{\varepsilon \to 0} \inf_{\widetilde{\theta}_\varepsilon} \sup_{\|\theta - \theta_0\| < \eta} \mathbb{E}_\theta^\varepsilon \left(w \left(\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0) \left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta \right) \right) \right) \geq \mathbb{E}\left(w(\xi) \right)$$

où ξ est un vecteur aléatoire gaussien centré réduit dans $\mathbb{R}^L$.

L'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ est défini par (2.5). Le théorème suivant donne la convergence, la normalité asymptotique et la convergence des moments de tout ordre de cet estimateur.

Théorème 2.2 . *Sous la condition **C1,** l' estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_\varepsilon$ vérifie sous $\mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}$ et uniformément sur tout compact K de Θ, les propriétés suivantes :*

1. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\hat{\theta}_\varepsilon = \theta_0$ *en probabilité. Plus précisement,* $\forall\beta > 0$,

$$\sup_{\theta_0\in K_0}\mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}\left(\left\|\hat{\theta}_\varepsilon-\theta_0\right\|>\beta\right)\leq C_1\exp(\frac{-C_2\beta}{\varepsilon^2})$$

oú $C_1 > 0$ *et* $C_2 > 0$.

2.
$$\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta_0\right)\Rightarrow_{\varepsilon\to 0}\xi$$

où $\xi \hookrightarrow N(0, Id)$ *dans* $\mathbb{R}^L$.

3. *Pour tout* $p > 0$,
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}^\varepsilon_\theta\left\|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta_0\right)\right\|^p=\mathbb{E}\left\|\xi\right\|^p$$

4. *L' estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$ est asymptotiquement efficace.*

Pour montrer les deux théorèmes, nous suivons [7] et (chap.2 de [10]). Pour cela nous avons besoin d'établir les lemmes suivants qui montrent que la famille des processus de vraisemblance $(Z_{\varepsilon,\theta}(u), u \in \mathbb{R}^L)$ est tendue dans $C_0(\mathbb{R}^L)$ l'espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini. Les preuves de ces lemmes sont reportées au paragraphe 4.

Lemme 2.1 *.Sous la condition **C1,** pour tout compact K de $\bar{\Theta}$, $\forall\ m > L$ et $R > 0$, on a*

$$\sup_{\theta\in K}\sup_{\left\{u_1,u_2\in U_{\theta,\varepsilon}:\ \|u_j\|<R\ ,\ j=1,2\right\}}\left\|u_2-u_1\right\|^{-m}\mathbb{E}_\theta\left|Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2)-Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1)\right|^m\leq C\left(1+R^m\right)$$

où $U_{\theta,\varepsilon} = \Phi_\varepsilon^{-1}(\Theta-\theta)\subset\mathbb{R}^L$ *et* $C > 0$.

Lemme 2.2 . *Sous la condition **C1,** $\forall\varepsilon > 0$, $\forall u \in U_{\theta,\varepsilon}$ et pour tout compact K de Θ, on a*

$$\sup_{\theta\in K}\mathbb{P}^\varepsilon_\theta\left(Z_\varepsilon(u)\geq e^{-\gamma\|u\|^2}\right)\leq Ce^{-\gamma\|u\|^2}$$

où $\gamma > 0$ *et* $C > 0$.

Le théorème 2.1 implique la convergence des lois de dimensions finies du processus de vraisemblance $\left(Z_{\varepsilon,\theta}\left(u\right), u \in \mathbb{R}^L\right)$. Par suite, des Lemmes 2.1 et 2.2 le processus $\left(Z_{\varepsilon,\theta}\left(u\right), u \in \mathbb{R}^L\right)$ converge faiblement dans $C_0\left(\mathbb{R}^L\right)$ vers un processus $(Z_\theta(u), u \in \mathbb{R}^L)$. La preuve des résultats du théorème 2.2 suivent les mêmes étapes que celle du Théorème 1.1 p.174 de [7] ou du Théorème 5.3.3 p.188 de [10]. Les résultats sur les estimateurs de Bayes sont obtenus de façon similaires.

2.4 Preuves

Preuve du Théorème 2.1. Soit $u = (u_1, u_2, ..., u_L)^t \in \mathbb{R}^L$. Pour montrer le théorème, on utilise comme dans [7], le changement de variable $u = I^{\frac{1}{2}}\left(\theta\right) v$ où la matrice $I\left(\theta\right)$ est inversible sous la condition **C1** (cf. Lemme en Annexe). La condition LAN (2.7) se transforme donc

$$\begin{aligned} Z_{\varepsilon,\theta}(u) &= \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\Phi_\varepsilon(\theta)u}}{d\mathbb{P}_\theta}\left(X^\varepsilon\right) = \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\varepsilon v}}{d\mathbb{P}_\theta}\left(X^\varepsilon\right) \\ &= \exp\left[\left\langle v, I^{\frac{1}{2}}\left(\theta\right)\Delta_\varepsilon\left(\theta, X^\varepsilon\right)\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle v, I\left(\theta\right) v\right\rangle + \Psi_\varepsilon\left(\theta, I^{\frac{1}{2}}\left(\theta\right) v, X^\varepsilon\right)\right] \end{aligned}$$

où sous $\mathbb{P}_\theta^\varepsilon$:

$$I^{\frac{1}{2}}\left(\theta\right)\Delta_\varepsilon\left(\theta, X^\varepsilon\right) \Rightarrow N(0, I\left(\theta\right)) \text{ dans } \mathbb{R}^L \text{ quand } \varepsilon \to 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Psi_\varepsilon\left(\theta, I^{\frac{1}{2}}\left(\theta\right) v, X^\varepsilon\right) = 0 \text{ en probabilité}$$

Par suite si l'observation X^ε vérifie (2.4), le théorème de Girsanov ([16]. chap 7) donne

$$\begin{aligned} Z_{\varepsilon,\theta}(u) \quad : &= \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\varepsilon u}}{d\mathbb{P}_\theta}\left(X^\varepsilon\right) \\ &= \exp\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \left(S_t\left(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u\right) - S_t\left(X^\varepsilon, \theta\right)\right) dX_t^\varepsilon - \\ &\quad \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T \left(S_t^2\left(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u\right) - S_t^2\left(X^\varepsilon, \theta\right)\right) dt\Big) \end{aligned}$$

où

$$S_t\left(X^\varepsilon, \theta\right) = \sum_{i=1}^L c_i \int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon \; e_i\left(s\right) ds$$

et

$$S_t\left(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u\right) = \sum_{i=1}^L \left(c_i + \varepsilon u_i\right) \int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon \; e_i\left(s\right) ds$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\ln\ Z_{\varepsilon,\theta} &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^T \left(S_t\left(X^\varepsilon,\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^\varepsilon,\theta\right)\right)\left[dX_t^\varepsilon - S_t\left(X^\varepsilon,\theta\right)dt\right] - \\
&\quad \frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_0^T \left(S_t\left(X^\varepsilon,\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^\varepsilon,\theta\right)\right)^2 dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T \left(S_t\left(X^\varepsilon,\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^\varepsilon,\theta\right)\right)dW_t - \\
&\quad \frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_0^T \left(S_t\left(X^\varepsilon,\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^\varepsilon,\theta\right)\right)^2 dt \\
: &= A_{1,\varepsilon} - A_{2,\varepsilon}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
A_{1,\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T \left(S_t\left(X^\varepsilon,\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^\varepsilon,\theta\right)-\left\langle u,\varepsilon q_t\left(X^0\right)\right\rangle\right)dW_t + \\
&\quad \int\limits_0^T \left\langle u,q_t\left(X^0\right)\right\rangle dW_t.
\end{aligned}$$

avec $q_t\left(X^0\right)=\dfrac{\partial S_t}{\partial\theta}\left(X^0,\theta\right)$ et X^0 la solution du système déterministe (2.2).

Posons

$$\Delta\left(\theta,X^0\right) := \int\limits_0^T \left\langle u,q_t\left(X^0\right)\right\rangle dW_t$$

alors le vecteur $\Delta\left(\theta,X^0\right)$ est gaussien centré de matrice de covariance

$$I\left(\theta\right)=\int\limits_0^T q_s\left(X^0\right)q_s^t\left(X^0\right)ds$$

Ecrivons

$$A_{1,\varepsilon} := \Pi_\varepsilon\left(u\right)+\Delta\left(\theta,X^0\right)$$

où

$$\Pi_\varepsilon\left(u\right)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T \left(S_t\left(X^\varepsilon,\theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^\varepsilon,\theta\right)-\left\langle u,\varepsilon q_t\left(X^0\right)\right\rangle\right)dW_t$$

Montrons que sous $\mathbb{P}_\theta^\varepsilon$ la v.a $\Pi_\varepsilon(u)$ tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

Pour $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, par l'inégalité de Lenglart, nous avons (cf. [16])

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(|\Pi_\varepsilon(u)| > \alpha\right) \leq \frac{\gamma}{\alpha^2} + \mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \left(S_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - S_t(X^\varepsilon,\theta) - \left\langle u, \varepsilon q_t\left(X^0\right)\right\rangle\right)^2 dt > \gamma\right)$$

Pour le second terme ci-dessus, nous allons appliquer l'inégalité de Markov.

D'une part, on a

$$\begin{aligned} S_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - S_t(X^\varepsilon,\theta) - \varepsilon\left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle &= \left[S_t(X^\varepsilon,\theta+\varepsilon u) - S_t\left(X^0, \theta+\varepsilon u\right)\right] \\ &\quad - \left[S_t(X^\varepsilon,\theta) - S_t\left(X^0,\theta\right)\right] \\ &\quad + \left[S_t\left(X^0,\theta+\varepsilon u\right) - S_t\left(X^0,\theta\right)\right] \\ &\quad -\varepsilon\left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle \end{aligned}$$

Comme

$$V_i^\varepsilon(t) = \int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon \, e_i(s)\, ds, \quad V_i^0(t) = \int_\delta^1 X_{t-s}^0 \, e_i(s)\, ds$$

nous en déduisons

$$S_t(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - S_t\left(X^0,\theta+\varepsilon u\right) = \sum_{i=1}^L (c_i + \varepsilon u_i)\left[V_i^\varepsilon(t) - V_i^0(t)\right] \tag{2.10}$$

et

$$S_t(X^\varepsilon,\theta) - S_t\left(X^0,\theta\right) = \sum_{i=1}^L c_i\left[V_i^\varepsilon(t) - V_i^0(t)\right] \tag{2.11}$$

La différence entre les expressions (2.10) et (2.11) est égale à

$$\varepsilon\sum_{i=1}^L u_i\left[V_i^\varepsilon(t) - V_i^0(t)\right]$$

Par le changement de variable $v = t - s$, nous obtenons

$$\begin{aligned} V_i^\varepsilon(t) - V_i^0(t) &= \int_\delta^1 \left(X_{t-s}^\varepsilon - X_{t-s}^0\right) e_i(s)\, ds \\ &= \int_{t-1}^{t-\delta} \left(X_v^\varepsilon - X_v^0\right) e_i(t-v)\, dv \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1, l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, les propriétés du processus de Wiener et la condition **C1,** nous obtenons pour tout $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\theta \left[S_t\left(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^\varepsilon, \theta\right)-\varepsilon\left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle\right]^2 \\
= & \mathbb{E}_\theta\left[\varepsilon \sum_{i=1}^L u_i\left[V_i^\varepsilon(t)-V_i^0(t)\right]+\left(S_t\left(X^0, \theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^0, \theta\right)\right)-\varepsilon\left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle\right]^2 \\
= & \mathbb{E}_\theta\left[\varepsilon \sum_{i=1}^L u_i \int_{t-1}^{t-\delta}\left(X_v^\varepsilon-X_v^0\right) e_i(t-v)\, dv-\varepsilon \varsigma_\varepsilon(t)\right]^2 \\
\leq & \varepsilon_\theta^2 \mathbb{E}_\theta\left[\sup_{0 \leq v \leq T}\left|X_v^\varepsilon-X_v^0\right| \sum_{i=1}^L u_i \int_{t-1}^{t-\delta} e_i(t-v)\, dv-\varsigma_\varepsilon(t)\right]^2 \\
\leq & \varepsilon_\theta^2 \mathbb{E}_\theta\left[K_1 \varepsilon \sup_{0 \leq t \leq T}\left|W_t\right| \sum_{i=1}^L u_i \int_{t-1}^{t-\delta} e_i(t-v)\, dv-\varsigma_\varepsilon(t)\right]^2 \\
\leq & \varepsilon^2\left(\varepsilon^2 K_2+2 \varsigma_\varepsilon^2(t)\right)
\end{aligned}$$

où $\varsigma_\varepsilon(t) \to 0$ est le reste de la formule de Taylor, $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$.

Donc

$$\sup_{t\in[0,T]\mathbb{E}\theta} \mathbb{E}_\theta \left[S_t\left(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^\varepsilon, \theta\right)-\varepsilon\left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle\right]^2 \leq \varepsilon^2 \Gamma_\varepsilon$$

où $\Gamma_\varepsilon \to 0$ car $\varsigma_\varepsilon(t) \to 0$ avec ε et $K_2 > 0$. On en déduit que

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T\left(S_t\left(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^\varepsilon, \theta\right)-\left\langle u, \varepsilon q_t\left(X^0\right)\right\rangle\right)^2 dt>\gamma\right) \leq \frac{1}{\gamma^2} T \Gamma_\varepsilon$$

Par suite, par l'inégalité de Lenglart, on en déduit que $\Pi_\varepsilon(u) \to 0$ en probabilité quand $\varepsilon \to 0$.

Pour $A_{2,\varepsilon}$ définie dans (2.9), on a

$$A_{2,\varepsilon} := \frac{1}{2} K_{\varepsilon,u}\left(X^\varepsilon\right)+\frac{1}{2}\langle u, I(\theta)\, u\rangle$$

où

$$K_{\varepsilon,u}\left(X^\varepsilon\right)=\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T\left(S_t\left(X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u\right)-S_t\left(X^\varepsilon, \theta\right)\right)^2 dt-\langle u, I(\theta)\, u\rangle$$

Montrons que $K_{\varepsilon,u}(X^\varepsilon) \to 0$ en probabilité. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\theta \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \left[\left(S_t\left(X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u\right) - S_t\left(X^\varepsilon, \theta\right)\right)^2 - \varepsilon^2 \left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle^2 \right] dt \right) \\
= \; & \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_\theta \left[\int_0^T \left(\left(S_t\left(X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u\right) - S_t\left(X^\varepsilon, \theta\right)\right) - \varepsilon \left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle\right) - \right. \\
& \left. \left(\left(S_t\left(X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u\right) - S_t\left(X^\varepsilon, \theta\right)\right) + \varepsilon \left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle\right) dt \right] \\
\leq \; & \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left(\left(S_t\left(X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u\right) - S_t\left(X^\varepsilon, \theta\right)\right) - \varepsilon \left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle\right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
& \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left(\left(S_t\left(X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u\right) - S_t\left(X^\varepsilon, \theta\right)\right) + \varepsilon \left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle\right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Le premier facteur ci-dessus a été étudié précédement et tend vers 0 avec ε. Pour le deuxième facteur, nous avons

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left(\left(S_t\left(X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u\right) - S_t\left(X^\varepsilon, \theta\right)\right) + \varepsilon \left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle\right)^2 dt \\
= \; & \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left(\frac{\left(S_t\left(X^\varepsilon, \theta + \varepsilon u\right) - S_t\left(X^\varepsilon, \theta\right)\right)}{\varepsilon} + \left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle \right)^2 dt \\
= \; & \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^L \varepsilon c_i V_i^\varepsilon(t) + \left\langle u, q_t\left(X^0\right)\right\rangle \right)^2 dt \\
\leq \; & \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left(2 \left(\sum_{i=1}^L c_i V_i^\varepsilon(t) \right)^2 + 2 \|u\|^2 \left\| q_t\left(X^0\right)\right\|^2 \right) dt \\
\leq \; & \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left(2 \left(\sum_{i=1}^L c_i \left(V_i^\varepsilon(t) - V_i^0(t) + V_i^0(t)\right) \right)^2 + 2 \|u\|^2 \left\| q_t\left(X^0\right)\right\|^2 \right) dt \\
\leq \; & \mathbb{E}_\theta \int_0^T \left(C_1 \sum_{i=1}^L c_i^2 \left(2 \left(V_i^\varepsilon(t) - V_i^0(t)\right)^2 + 2 \left(V_i^0(t)\right)^2 \right) + 2 \|u\|^2 \left\| q_t\left(X^0\right)\right\|^2 \right) dt \\
\leq \; & C_2 \int_0^T \left[\sum_{i=1}^L c_i^2 \left(\mathbb{E}_\theta \left(V_i^\varepsilon(t) - V_i^0(t)\right)^2 + 2 \left(V_i^0(t)\right)^2 \right) + 2 \|u\|^2 \left\| q_t\left(X^0\right)\right\|^2 \right] dt \\
\leq \; & C_3 \varepsilon^2 + C_4
\end{aligned}
$$

$C_3, C_4 > 0$ et on a utilisé le fait

$$\left(\sum_{i=1}^{L} a_i\right)^2 \leq C \sum_{i=1}^{L} a_i^2, \qquad \mathbb{E}_\theta \left(V_i^\varepsilon(t) - V_i^0(t)\right)^2 \leq C' \varepsilon^2$$

et $V_i^0(t) < \infty$ sur $[0, T]$.

Par conséquent

$$\mathbb{E}_\theta \left| K_{\varepsilon,u}(X^\varepsilon) \right| \leq \Gamma_\varepsilon \times \left(C_3 \varepsilon^2 + C_4\right)$$

et comme $\Gamma_\varepsilon \to 0$ donc $K_{\varepsilon,u}(X^\varepsilon) \to 0$ en probabilitée quand $\varepsilon \to 0$.

Finalement on en déduit que

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) = \exp\left(\left\langle u, \Delta\left(\theta, X^0\right)\right\rangle - \frac{1}{2}\langle u, I(\theta) u\rangle + \Psi_{\varepsilon,\theta}(u)\right)$$

où

$$\forall u \in \mathbb{R}^L, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \Psi_{\varepsilon,\theta}(u) = 0 \text{ en proba.}$$

D'où la condition LAN pour la famille des lois $(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon)_{\theta \in \Theta}$ induite par la solution de (2.4).

La minoration du risque est une conséquence directe de théorème 12.1 p.162 dans [7]. ■

Preuve du lemme 2.1. Soit K un compact de Θ, posons $\theta_i = \theta + \varepsilon u_i \quad (i = 1, 2)$ où $u_i = (u_{ij})_{j=1,\ldots,L}^t$ est un vecteur de $\mathbb{R}^L$ et $\theta = (c_1, c_2, \ldots, c_L)^t$, $\theta_i \in K$.

Posons

$$\begin{aligned}
\Delta X_t^\varepsilon &= S_t(X^\varepsilon, \theta_1) - S_t(X^\varepsilon, \theta_2) \\
&= \sum_{i=1}^{L} (c_i + \varepsilon u_{1i}) V_i^\varepsilon(t) - \sum_{i=1}^{L} (c_i + \varepsilon u_{2i}) V_i^\varepsilon(t) \\
&= \varepsilon \sum_{i=1}^{L} (u_{1i} - u_{2i}) V_i^\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

Le rapport de vraisemblance pour deux valeurs θ_1 et θ_2 du paramètre est

$$\frac{d\mathbb{P}_{\theta_1}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_{\theta_2}^\varepsilon}(X^\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)\, dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2\, dt\right)$$

Soit $m > L$. Posons $V(T) = \left(\frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_1}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_2}}\right)^{\frac{1}{m}}$, de la définition de $Z_{\varepsilon,\theta}(u)$, on a

$$\begin{aligned} V(T) &= \left(\frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_1}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta_2}}\right)^{\frac{1}{m}} \\ &= \left(\frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta+\varepsilon u_1}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta}} \times \frac{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta}}{d\mathbb{P}^{\varepsilon}_{\theta+\varepsilon u_2}}\right)^{\frac{1}{m}} \\ &= \left(\frac{Z_{\varepsilon,\theta}(u_1)}{Z_{\varepsilon,\theta}(u_2)}\right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

Ecrivons $V(t) = \exp(Y(t))$ où le processus $Y(t)$ est tel que $Y(0) = 0$. La formule de Itô pour $V(t) := f(t, Y(t))$ donne

$$\begin{aligned} dV(t) &= \left[f_t'(t,Y(t)) + f_y'(t,Y(t))\left(-\frac{1}{2m\varepsilon^2}(\Delta X_t^{\varepsilon})^2\right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} f_{yy}''(t,Y(t))\left(\frac{1}{m^2\varepsilon^2}(\Delta X_t^{\varepsilon})^2\right)\right] dt + \\ &\quad f_y'(t,Y(t))\left(\frac{1}{m\varepsilon}(\Delta X_t^{\varepsilon})\right) dW_t \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} dV(t) &= \left[\left(-\frac{1}{2m\varepsilon^2}(\Delta X_t^{\varepsilon})^2\right) e^{Y(t)} + \left(\frac{1}{2m^2\varepsilon^2}(\Delta X_t^{\varepsilon})^2\right) e^{Y(t)}\right] dt \\ &\quad + \left(\frac{1}{m\varepsilon}(\Delta X_t^{\varepsilon})\right) e^{Y(t)} dW_t \end{aligned}$$

Comme $V(0) = 1$, on en déduit

$$V(T) = 1 + \frac{1-m}{2m^2\varepsilon^2}\int_0^T (\Delta X_t^{\varepsilon})^2 V(t)dt + \frac{1}{m\varepsilon}\int_0^T (\Delta X_t^{\varepsilon}) V(t) dW_T$$

D'une part, nous avons

$$\mathbb{E}_\theta \left| Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}(u_2) - Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}(u_1)\right|^m = \mathbb{E}_\theta \left| Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}(u_2)\left(1 - \frac{Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}(u_1)}{Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}(u_2)}\right)\right|^m$$

De $(a+b)^m \leq 2^{m-1}(a^m + b^m)$, l'inégalitée de Hölder avec les exposants m et $\frac{m}{m-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1) \right|^m &= \mathbb{E}_\theta \left| \left(\frac{d\mathbb{P}_{\theta_2}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_\theta^\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m}} (1 - V(T)) \right|^m \\
&= \mathbb{E}_\theta \left| (1 - V(T)) \right|^m \left| \frac{d\mathbb{P}_{\theta_2}^\varepsilon}{d\mathbb{P}_\theta^\varepsilon} \right| \\
&= \mathbb{E}_{\theta_2} \left| (1 - V(T)) \right|^m \\
&= \mathbb{E}_{\theta_2} \left| \frac{1-m}{2m^2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 V(t) dt + \frac{1}{m\varepsilon} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon) V(t) dW_T^m \right|^m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^{m-1} (\mathbb{E}_{\theta_2} \left| \left(\frac{1-m}{2m^2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2 V(t) dt \right)^m \right| + \left(\frac{1}{m\varepsilon} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon) V(t) dW_T \right)^m) \\
&\leq 2^{m-1} \left(\frac{1-m}{2m^2\varepsilon^2} \right) \mathbb{E}_{\theta_2} \left(T^{m-1} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} V^m(t) dt \right) + 2^{m-1} \frac{1}{m\varepsilon} \mathbb{E}_{\theta_2} \left(T^{m-1} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^m V^m(t) dt \right) \\
&\leq \frac{C_1}{\varepsilon^{2m}} \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} \left((\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} V^m(t) \right) dt + \frac{C_2}{\varepsilon^m} \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} \left((\Delta X_t^\varepsilon)^m V^m(t) \right) dt
\end{aligned}$$

où $C_1,\ C_2 > 0$. Pour le premier terme de l'inégalité ci-dessus, du fait que le processus $(V^m(t), t \in [0,T])$ est une martingale par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} \left((\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} V^m(t) \right) dt &= \mathbb{E}_{\theta_2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} \mathbb{E}_{\theta_2} \left(V^m(T)/\mathcal{F}_t \right) dt \\
&= \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} \mathbb{E}_{\theta_2} \left((\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} V^m(T)/\mathcal{F}_t \right) dt \\
&= \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} \left((\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} V^m(T) \right) dt \\
&= \mathbb{E}_{\theta_2} \left(V^m(T) \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} dt \right) \\
&= \mathbb{E}_{\theta_1} \left(\int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} dt \right)
\end{aligned}$$

En faisant le même calcul pour le second terme, nous arrivons à :

$$\mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1) \right|^m \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{2m}} \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_1} (\Delta X_t^\varepsilon)^{2m} dt + \frac{C_2}{\varepsilon^m} \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_1} (\Delta X_t^\varepsilon)^m dt$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1}\left(\Delta X_t^{\varepsilon}\right)^{2m} &= \mathbb{E}_{\theta_1}\left(\varepsilon\sum_{i=1}^{L}\left(u_{1i}-u_{2i}\right)V_i^{\varepsilon}\left(t\right)\right)^{2m} \\
&\leq C_{m,k}\mathbb{E}_{\theta_1}\left(\varepsilon^{2m}\sum_{i=1}^{L}\left(u_{1i}-u_{2i}\right)^{2m}\left(V_i^{\varepsilon}\left(t\right)\right)^{2m}\right) \\
&\leq C_{m,k}\sum_{i=1}^{L}\left(\varepsilon^{2m}\left(u_{1i}-u_{2i}\right)^{2m}\mathbb{E}_{\theta_1}\left(V_i^{\varepsilon}\left(t\right)\right)^{2m}\right)
\end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité de Holder avec les exposants $\frac{2m}{2m-1}$ et $2m$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1}\left(V_i^{\varepsilon}\left(t\right)\right)^{2m} &= \mathbb{E}_{\theta_1}\left(\int_{\delta}^{1}X_{t-s}e_i\left(s\right)ds\right)^{2m} \\
&\leq \mathbb{E}_{\theta_1}\left[\left(\int_{\delta}^{1}X_{t-s}^{2m}ds\right)^{\frac{1}{2m}}\left(\int_{\delta}^{1}e_i^{\frac{2m}{2m-1}}\left(s\right)ds\right)^{\frac{2m-1}{2m}}\right]^{2m} \\
&\leq \mathbb{E}_{\theta_1}\left(\int_{\delta}^{1}X_{t-s}^{2m}ds\right)\left(\int_{\delta}^{1}e_i^{\frac{2m}{2m-1}}\left(s\right)ds\right)^{2m-1} \\
&\leq K_1\int_{\delta}^{1}\sup_{\theta\in K}\sup_{0\leq s\leq T}\mathbb{E}_{\theta_1}\left|X_s\right|^{2m}ds := K_2
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1}\left(\Delta X_t^{\varepsilon}\right)^{2m} &\leq K_3\varepsilon^{2m}\sum_{i=1}^{L}\left(u_{1i}-u_{2i}\right)^{2m} \\
&\leq K_3\varepsilon^{2m}\left\|u_1-u_2\right\|^{2m}
\end{aligned}$$

De même, de l'inégalité

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1}\left(\Delta X_t^{\varepsilon}\right)^{m} &\leq K_4\varepsilon^{m}\sum_{i=1}^{L}\left(u_{1i}-u_{2i}\right)^{m} \\
&\leq K_4\varepsilon^{m}\left\|u_1-u_2\right\|^{m}
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1}\left|Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}\left(u_2\right)-Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}\left(u_1\right)\right|^{m} &\leq C_1'\left\|u_1-u_2\right\|^{m}+C_2'\left\|u_1-u_2\right\|^{m} \\
&\leq K_3\left\|u_1-u_2\right\|^{m}\left(1+R^{m}\right)
\end{aligned}$$

Finalement, on aboutit à

$$\sup_{\theta\in\Theta}\sup_{\left\{u_1,u_2\in U_{\varepsilon,\theta}:\left\|u_j\right\|<R,\ j=1,2\right\}}\left\|u_2-u_1\right\|^{-m}\mathbb{E}_{\theta}\left|Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}\left(u_2\right)-Z_{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}\left(u_1\right)\right|^{m}\leq C\left(1+R^{m}\right)$$

où $C>0$. D'où le lemme. ■

Preuve du lemme 2.2. Soit a vérifiant $0 < a < \frac{1}{2}$, $b > 0$ et $u \in \mathbb{R}^L$. Notons $\theta_i = \theta + \varepsilon u_i, i = 1, 2$.

Par l'inégalité de Markov et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon \left(Z_\varepsilon(u) \geq e^{-\gamma \|u\|^2} \right) \leq e^{a\gamma\|u\|^2} \mathbb{E}_\theta \left(Z_\varepsilon(u) \right)^a$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^{a\gamma\|u\|^2} \mathbb{E}_\theta \left[\exp \frac{a}{\varepsilon} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)\, dW_t - \frac{a}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2\, dt \right] \\
&\leq e^{a\gamma\|u\|^2} \mathbb{E}_\theta \left[\exp(\frac{a}{\varepsilon} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)\, dW_t - \frac{b}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2\, dt + \frac{(b-a)}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2\, dt) \right] \\
&\leq e^{a\gamma\|u\|^2} \mathbb{E}_\theta \left[\exp(\frac{a}{\varepsilon} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)\, dW_t - \frac{b}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2\, dt) \times \exp\left(\frac{(b-a)}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2\, dt \right) \right] \\
&\leq e^{a\gamma\|u\|^2} \left[\mathbb{E}_\theta \left(\exp(\frac{2a}{\varepsilon} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)\, dW_t - \frac{b}{\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2\, dt) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \left[\mathbb{E}_\theta \left(\exp\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2\, dt \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

où $\Delta X_t^\varepsilon = S_t(X^\varepsilon, \theta_1) - S_t(X^\varepsilon, \theta_2)$. Par le théorème.6.1 p.216 de [16], on a :

$$\mathbb{E}_\theta \left[\exp(\int_0^T \left(\frac{2a}{\varepsilon} \Delta X_t^\varepsilon \right) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{2a}{\varepsilon} \Delta X_t^\varepsilon \right)^2 dt \right] \leq 1$$

Si on choisit $b = 2a^2$, on aura donc

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon \left(Z_\varepsilon(u) \geq e^{-\gamma\|u\|^2} \right) \leq e^{a\gamma\|u\|^2} \left[\mathbb{E}_\theta \left(\exp\left(\frac{-a(1-2a)}{\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t^\varepsilon)^2\, dt \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Posons $A = \Delta X_t^\varepsilon$ *et* $B = \Delta X_t^0$. En utilisant l'inégalité $-A^2 \leq -B^2 + 2|B||B-A|$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta^\varepsilon \left(Z_\varepsilon(u) \geq e^{-\gamma\|u\|^2} \right) &\leq e_\theta^{a\gamma\|u\|^2} \left[\mathbb{E}_\theta \left(\exp\left(\frac{-a(1-2a)}{\varepsilon^2} \int_0^T \left(\Delta X_t^0\right)^2 dt \right.\right.\right. \qquad (2.12) \\
&\quad \left.\left.\left. + \frac{2a(1-2a)}{\varepsilon^2} \int_0^T \left|\Delta X_t^0\right| \left|\Delta X_t^\varepsilon - \Delta X_t^0\right| dt \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq e_\theta^{a\gamma\|u\|^2} \left[\mathbb{E}_\theta \left(\exp\left(\frac{-a(1-2a)}{\varepsilon^2} \int_0^T \left(\Delta X_t^0\right)^2 dt \right) \right.\right. \\
&\quad \left.\left. \times \exp\left(\frac{2a(1-2a)}{\varepsilon^2} \int_0^T \left|\Delta X_t^0\right| \left|\Delta X_t^\varepsilon - \Delta X_t^0\right| dt \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Pour majorer le membre de droite de (2.12) , on minore ΔX_t^0 et on majore $\left|\Delta X_t^0\right| \left|\Delta X_t^\varepsilon - \Delta X_t^0\right|$.

Minorons maintenant $\Delta X_t^0 = S_t\left(X^0,\theta_1\right) - S_t\left(X^0,\theta_2\right)$. Pour $0 \le t \le T$ et $u = u_1 - u_2 \in U_{\theta,\varepsilon}$, on applique la formule de Taylor à l'ordre 1 pour avoir

$$\Delta X_t^0 = \varepsilon \left\langle u, \dot{S}\left(\tilde{\theta}, X^0\right)\right\rangle$$

Donc

$$\left(\Delta X_t^0\right)^2 = \varepsilon^2 \left\langle u, \dot{S}\left(\tilde{\theta}, X^0\right)\right\rangle^2 = \varepsilon^2 \left\langle u, I\left(\tilde{\theta}\right) u\right\rangle$$

où $\tilde{\theta} \in B\left(\theta, \varepsilon \|u\|\right)$ (boule dans $\mathbb{R}^L$ de centre θ et de rayon $\varepsilon \|u\|$) et $\dot{S}$ est la dérivée de S par rapport à θ. La condition **C1** implique que la matrice $I(\theta)$ est définie positive (voir lemme de l'annexe), il existe donc $\beta > 0$ tel que

$$\left(\Delta X_t^0\right)^2 \ge \varepsilon^2 \beta \|u\|^2$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{-a(1-2a)}{\varepsilon^2}\int_0^T \left(\Delta X_t^0\right)^2 dt\right) &\le \exp\left(\frac{-a(1-2a)}{\varepsilon^2}\varepsilon^2\beta\|u\|^2\right) \\ &\le \exp\left(-L_a\|u\|^2\right) \end{aligned}$$

Majorons maintenant $\left|\Delta X_t^0\right|$ et $\left|\Delta X_t^\varepsilon - \Delta X_t^0\right|$ pour $0 \le t \le T$ et $u \in U_{\theta,\varepsilon}$. Comme les fonctions e_i sont continues sur $[\delta, 1]$ donc bornées par M, on en déduit que

$$\begin{aligned} X_t^0 &= x_0 + \int_0^t \left(\sum_{i=1}^L c_i \int_\delta^1 X_{v-s}^\varepsilon \, e_i(s)\, ds\right) dv \\ &\le x_0 + M\sum_{i=1}^L c_i \int_0^t \left(\int_{t-1}^{\delta-1} X_u^\varepsilon \, du\right) dv \\ &\le x_0 + M_1 \int_0^t X_u^\varepsilon \, du \end{aligned}$$

où $M_1 = TM\displaystyle\sum_{i=1}^L c_i$. Par suite, le lemme de Granwall (cf. [16]) donne

$$X_t^0 \le x_0 e^{M_1 t}$$

La fonction $X_t^0 = x_0$ pour $t < \delta$. Alors pour tout $t \in [\delta, 2\delta]$ et $s \in [\delta, 1]$, $X_{t-s}^0 = x_0$. Par conséquent, de la condition **C1** on en déduit

$$\frac{dX_t^0}{dt} = x_0 \sum_{i=1}^L c_i \int_\delta^1 e_i(s)\, ds > 0$$

Par induction X_t^0 est strictement croissante sur $[\delta, T]$ (cf. preuve du lemme en annexe). Par suite

$$x_0 \leq X_t^0 \leq x_0 e^{M_1 t}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left|\Delta X_t^0\right| &= \left|S_t\left(X^0, \theta+\varepsilon u\right) - S_t\left(X^0, \theta\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{L}\left(c_i+\varepsilon u_i\right)\int_{\delta}^{1} X_{t-s}^0\ e_i(s)\,ds - \sum_{i=1}^{L} c_i \int_{\delta}^{1} X_{t-s}^0\ e_i(s)\,ds\right| \\
&= \left|\varepsilon \sum_{i=1}^{L} u_i \int_{\delta}^{1} X_{t-s}^0\ e_i(s)\,ds\right| \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{L} u_i \int_{t-1}^{\delta-1} \left|X_u^0\ e_i(t-u)\right| du \\
&\leq \varepsilon M \sum_{i=1}^{L} u_i \int_{0}^{T} X_u^0\ du \\
&\leq \varepsilon x_0 M \left\|u\right\| \int_{0}^{T} e^{M_1 u} du := \varepsilon M_2 \left\|u\right\|
\end{aligned} \tag{2.13}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
\left|\Delta X_t^{\varepsilon} - \Delta X_t^0\right| &= \left|\varepsilon \sum_{i=1}^{L} u_i \int_{\delta}^{1} X_{t-s}^{\varepsilon}\ e_i(s)\,ds - \varepsilon \sum_{i=1}^{L} u_i \int_{\delta}^{1} X_{t-s}^0\ e_i(s)\,ds\right| \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{L} u_i \int_{\delta}^{1} \left|X_{t-s}^{\varepsilon} - X_{t-s}^0\right|\ e_i(s)\,ds \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{L} u_i \int_{\delta}^{1} \sup_{\delta \leq u \leq t} \left|X_u^{\varepsilon} - X_u^0\right|\ e_i(t-u)\,du \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{L} u_i \left(C\varepsilon \sup_{\delta \leq u \leq t} \left|W_u\right|\right) M_3 \leq \varepsilon^2 M_4 \sup_{\delta \leq u \leq t} \left|W_u\right| \left\|u\right\|
\end{aligned} \tag{2.14}$$

En utilisant la majoration suivante (cf. p.18 de [12])

$$\mathbb{E}_{\theta}\left(\exp\left(l \sup_{0 \leq t \leq T} \left|Wt\right|\right)\right) \leq 2\left(1+Tl^2\right)\exp\left(\frac{1}{2}Tl^2\right)$$

et les relations (2.13) et (2.14) , on obtient

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\theta\left[\exp\left(\frac{2a\,(1-a)}{\varepsilon^2}\int_0^T \left|\Delta X_t^0\right|\left|\Delta X_t^\varepsilon-\Delta X_t^0\right|dt\right)\right] \\
\leq\ & \mathbb{E}_\theta\left[\exp(2a(1-a)\varepsilon M_2 M_4 T\,\|u\|\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\right] \\
\leq\ & \mathbb{E}_\theta\left[\exp(\varepsilon M_a T\,\|u\|\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\right] \\
\leq\ & 2(1+T\varepsilon^2 M_a^2\,\|u\|^2)\exp(\frac{1}{2}T\varepsilon^2 M_a^2\,\|u\|^2) \\
\leq\ & 2\exp(\frac{3}{2}T\varepsilon^2 M_a^2\,\|u\|^2)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(Z_\varepsilon\left(u\right)\geq e^{-\gamma\|u\|^2}\right) &\leq 2e^{a\gamma\|u\|^2}e^{-L_a\|u\|^2}(2e^{(\frac{3}{2}T\varepsilon^2M_a^2\|u\|^2)}) \\
&\leq 2e^{\|u\|^2\left(a\gamma-L_a+\frac{3}{2}T\varepsilon^2M_a^2\right)}
\end{aligned}$$

Si on choisit a et γ tels que $L_a\geq 2T\varepsilon^2M_a^2$, $0<\gamma\leq\dfrac{1}{4(a+1)}L_a$, nous arrivons à

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(Z_\varepsilon\left(u\right)\geq e^{-\gamma\|u\|^2}\right) &\leq 2e^{\|u\|^2\left(a\gamma-L_a+\frac{3}{2}L_a\right)} \\
&\leq 2e^{\|u\|^2\left(a\gamma-\frac{1}{4}L_a\right)} \\
&\leq 2e^{\|u\|^2(a\gamma-(a+1)\gamma)} \\
&\leq 2e^{-\gamma\|u\|^2}
\end{aligned}$$

D'où le lemme. ■

Preuve du théorème 2.2. Pour la demonstration de ce théorème, nous suivons le théorème 1.1 p.174 de [7]. Soit K un compact de Θ. Dans la suite on note θ pour θ_0. Posons $\hat{u}=\Phi_\varepsilon^{-1}\left(\theta\right)\left(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta\right)$. De la définition de $\hat{\theta}_\varepsilon$ et des équivalences des lois induites par les solutions de (2.1), $\hat{u}$ vérifie :

$$Z_{\varepsilon,\theta}\left(\hat{u}\right)=\sup_{u\in U_{\varepsilon,\theta}}Z_{\varepsilon,\theta}\left(u\right)$$

Les relations du processus $\left(Z_{\varepsilon,\theta}\left(u\right),\ u\in\mathbb{R}^L\right)$ sont dans $C_0\left(\mathbb{R}^L\right)$ (cf. [7]).

Notons par $\mu_{\varepsilon,\theta}$ la loi du processus $Z_{\varepsilon,\theta}\left(.\right)$ induite sur cet espace. On déduit de la condition LAN, la convergence des lois de dimension finies du processus $Z_{\varepsilon,\theta}\left(.\right)$ uniformément par rapport à θ dans K. Des lemmes 2.1 et 2.2, on en déduit que la famille des processus $\left(\mu_{\varepsilon,\theta},\ \theta\in\Theta\right)$ est relativement compact dans $C_0\left(\mathbb{R}^L\right)$ uniformément pour $\theta\in K$ (cf. [7]). Donc

$$\mu_{\varepsilon,\theta}\Rightarrow\mu_\theta \qquad \text{quand } \ \varepsilon\to 0$$

où μ_θ est la loi du processus défini par

$$Z_\theta\left(u\right):=\exp\left[\left\langle u,\xi\right\rangle-\frac{1}{2}\left\|u\right\|^2\right]$$

avec $\mathcal{L}\left(\xi\right)=N\left(0,Id_{\mathbb{R}^L}\right)$. la convergence est uniforme par rapport à $\theta\in K$.

1°) **Convergence en probabilité**.

D'une part, des lemmes 2.1 et 2.2, on déduit comme dans ([7], p.433), pour tout $l>0$

$$\sup_{\theta\in K}\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\sup_{\|u\|\geq l}Z_{\varepsilon,\theta}\left(u\right)>\exp\left(\left(-\tfrac{\gamma}{4}\right)l^2\right)\right)\leq C\exp\left(\left(-\tfrac{\gamma}{8}\right)l^2\right) \tag{2.15}$$

où $\gamma>0$ *et* $C>0$. Il en résulte des formules (2.11) et (2.15) et $Z_{\varepsilon,\theta}\left(0\right)=1$, pour tout $\beta>0$

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta\in K}\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left[\left\|\hat{\theta}_\varepsilon-\theta\right\|>\beta\right] &= \sup_{\theta\in K}\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left[\left\|\Phi_\varepsilon\left(\theta\right)\hat{u}\right\|>\beta\right]\\
&= \sup_{\theta\in K}\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left[\sup_{\|u\|>\beta\|\Phi_\varepsilon(\theta)\|^{-1}}Z_{\varepsilon,\theta}\left(u\right)>\sup_{\|u\|<\beta\|\Phi_\varepsilon(\theta)\|^{-1}}Z_{\varepsilon,\theta}\left(u\right)\geq Z_{\varepsilon,\theta}\left(0\right)\right]\\
&\leq \sup_{\theta\in K}\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left[\sup_{\|u\|>\beta\|\phi_\varepsilon(\theta)\|^{-1}}Z_{\varepsilon,\theta}\left(u\right)\geq 1\right]\\
&\leq C_1\exp\left(\frac{-\gamma}{8}\beta^2\left\|\Phi_\varepsilon\left(\theta\right)\right\|^{-2}\right)\\
&\leq C_1\exp\left(\frac{-\gamma}{8}\beta^2\frac{\left\|I\left(\theta\right)\right\|}{\varepsilon^2}\right)\\
&\leq C_1\exp\left(\frac{-C_2\left(\beta\right)}{\varepsilon^2}\right)
\end{aligned}$$

Le majorant ci-dessus tend vers 0 quand ε tend vers 0, d'où la convergence de l'éstimateur.

2°) **Normalitée asymptotique**

Soit D un pavé borné de $\mathbb{R}^L$ tel que

$$P_\theta^\varepsilon\left(\hat{u}\in\partial D\right)=0$$

où ∂D est la frontière de D. Considérons les fonctionnelles L_D et L_{D^c} définies sur $C_0\left(\mathbb{R}^L\right)$ par :

$$L_D\left(h\right)=\sup_D h(x) \qquad et \qquad L_{D^c}\left(h\right)=\sup_{D^c}h(x)$$

L_D et L_{D^c} sont continues par rapport à la métrique uniforme sur $C_0\left(\mathbb{R}^L\right)$. Comme le processus $Z_\theta\left(.\right)$ atteint son maximum au point $\xi \simeq N\left(0, Id_{\mathbb{R}^L}\right)$, alors

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(L_D\left(Z_\theta\right) - L_{D^c}\left(Z_\theta\right) = 0\right) = \mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\xi \in \partial D\right) = 0$$

Soit A_ε les points de $\mathbb{R}^L$ où le processus $Z_{\varepsilon,\theta}\left(.\right)$ atteint son maximum, puisque $Z_{\varepsilon,\theta} \Rightarrow Z_\theta$ quand $\varepsilon \to 0$, alors

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(A_\varepsilon \subset D\right) & = & \mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(L_D\left(Z_{\varepsilon,\theta}\right) - L_{D^c}\left(Z_{\varepsilon,\theta}\right) > 0\right) \\ & \to & \mathbb{P}_\theta\left(L_D\left(Z_\theta\right) - L_{D^c}\left(Z_\theta\right) > 0\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\xi \in D\right) \end{array}$$

or le diamètre de A_ε tend vers 0 en probabilité avec ε, donc

$$\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left(\hat{u} \in D\right) \to \mathbb{P}_\theta\left(\xi \in D\right)$$

D'où la convergence en loi.

3°) **Convergence des moments**

On a pour tout $p > 0$

$$\begin{array}{rcl} \sup\limits_{\varepsilon\in]0,1[}\sup\limits_{\theta\in K}\mathbb{E}_\theta^\varepsilon\left\|\Phi_\varepsilon^{-1}\left(\theta\right)\left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\right)\right\|^p & \leq & \sup\limits_{\varepsilon\in]0,1[}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\left(l+1\right)^p \\ & & \times\sup\limits_{\theta\in K}\mathbb{P}_\theta^\varepsilon\left[\left\|\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\right\|\left\|\Phi_\varepsilon^{-1}\left(\theta\right)\right\| > l\right] \\ & \leq & \left[1 + C\sum\limits_{l=0}^{\infty}\left(l+1\right)^p\right]\exp\left(\dfrac{-\gamma}{8}\left\|l\right\|^2\right) \\ & < & \infty \end{array}$$

Donc la famille des variables aléatoires $\left(\left\|\hat{u}\right\|^p, \varepsilon \in \left]0,1\right]\right)$ est uniformément intégrables où $\hat{u} = \Phi_\varepsilon^{-1}\left(\theta\right)\left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\right)$. Le résultat se déduit de la normalité asymptotique obtenue précedementet de [1] p.32.

4°) **Efficacité asymptotique**

Les estimateurs qui réalisent l'inégalité dans le théorème ci-dessus (borne de Hàjek) pour tout $\theta_0 \in \Theta$, sont dites asymptotiquement efficaces. Pour l'étude du risque quadratique, on considère les fonctions w de la forme $w(x) = \left\|x\right\|^d$, $d > 0$ et $x \in \mathbb{R}^L$. Comme la famille des lois $\left(\mathbb{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta\right)$ est LAN en tout point de Θ, pour montrer l'efficacité des estimateurs il suffit de prouver qu'il existe λ dans $\left]0,1\right]$ tel que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\left\|\theta-\theta_0\right\| < \left\|\Phi_\varepsilon^{-1}\left(\theta_0\right)\right\|^\lambda}\mathbb{E}_\theta^\varepsilon\left[\left\|\Phi_\varepsilon^{-1}\left(\theta_0\right)\left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\right)\right\|^d\right] = \mathbb{E}\left[\left\|\xi\right\|^d\right] \tag{2.16}$$

(cf. [10] p.77). Pour tout $\theta_0 \in \Theta$, on a l'identité suivante :

$$\sup_{\|\theta-\theta_0\|<\left\|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\right\|^\lambda} \mathbb{E}_\theta^\varepsilon \left[\left\|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\left(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta\right)\right\|^d\right]$$

$$= \sup_{\|\theta-\theta_0\|<\left\|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\right\|^\lambda} \mathbb{E}_\theta^\varepsilon \left[\left\|\left(\frac{\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)}{\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta)} - Id + Id\right)\left(\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta)\left(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta\right)\right)\right\|^d\right]$$

où Id est la matrice identité de $\mathbb{R}^L$. Donc pour montrer (2.16), il suffit de vérifier les deux affirmations suivantes:

a)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|\theta-\theta_0\|<\left\|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\right\|^\lambda} \left\|\Phi_\varepsilon(\theta)\,\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0) - Id\right\| = 0$$

or ceci découle du fait que $\Phi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I^{-\frac{1}{2}}(\theta)$ et que $I(\theta)$ est uniformément continu sur le compact K.

b)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|\theta-\theta_0\|<\left\|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)\right\|^\lambda} \mathbb{E}_\theta^\varepsilon \left[\left\|\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta)\left(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta\right)\right\|^d\right] = \mathbb{E}\left[\|\xi\|^d\right]$$

qui n'est autre que la convergence des moments établie en 3°). D'où le théorème. ■

2.5 Estimateurs Bayesiens

On considère le paramètre θ dans (2.4) comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^L$ de densité à priori $\pi(\theta)$ définie sur Θ. On note $\check{\theta}_\varepsilon$ l'estimateur de Bayes relative à la fonction de perte $w(\theta-y) = \|\theta-y\|^q$; $q>1$. L'estimateur $\tilde{\theta}_\varepsilon$ est solution de l'équation

$$\int_\Theta w\left(\theta-\check{\theta}_\varepsilon\right)p\left(\theta/X^\varepsilon\right)d\theta = \inf_{y\in\Theta}\int_\Theta w(\theta-y)\,p\left(\theta/X^\varepsilon\right)d\theta$$

où $p(\theta/X^\varepsilon)$ est la densité à posteriori de θ étant donnée l'observation X^ε (densité obtenue par la règle de Bayes). Dans le cas des fonctions de perte quadratique ($q=2$), $\check{\theta}_\varepsilon$ est donné par :

$$\check{\theta}_\varepsilon(X^\varepsilon) = \mathbb{E}\left(\theta/X^\varepsilon\right) = \int_\Theta y\; p\left(y/X^\varepsilon\right)dy$$

Les propriétés asymptotiques de $\check{\theta}_\varepsilon$ se démontrent de la même manière que celles de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_\varepsilon$, en utilisant les propriétés du processus $Z_{\varepsilon,\theta}$ (théorème 2.1, lemme 2.1 et lemme 2.2), on obtient :

Théorème 2.3 *Si la densité* $\pi(\theta)$ *est continue, bornée et strictement positive, alors* $\check{\theta}_\varepsilon$ *possède les propriétés de l'estimateur* $\hat{\theta}_\varepsilon$ *mentionnées dans le théorème 2.2 pour les fonctions de perte quadratique.*

Preuve Similaire à celle du théorème 2.2 en appliquant le théorème 2.1 dans [7] p.179.
■

Annexe

Lemme 2.3 *Avec les notations du paragraphes 2 et sous la condition* ***C1,*** *la matrice* $I(\theta)$ *définie par*

$$I(\theta) = \int_0^T q_t\left(X^0\right) q_t^t\left(X^0\right) dt$$

est définie positive pour tout $\theta \in \Theta$ *où le vecteur*

$$q_t\left(X^0\right) := \frac{\partial S_t}{\partial \theta}\left(X^0, \theta\right) = \left(\frac{\partial S_t}{\partial c_1}, \frac{\partial S_t}{\partial c_2}, ..., \frac{\partial S_t}{\partial c_L}\right)^t$$

Preuve Le déterminant de $I(\theta)$ etant un déterminant de Gram, il suffit de montrer que les fonctions $q_i = q_i\left(t, \theta, X^0\right),\ i = 1, .., L$ sont linéairement indépendantes dans $L^2([\delta, 1])$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_L$ des réels tels que

$$\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + ... + \lambda_L q_L = 0$$

Rappellons que $S_t\left(X^0, \theta\right) := \sum\limits_{i=1}^{L} c_i \int\limits_{\delta}^{1} X_{t-s}^0\ e_i(s)\, ds$ et $\mu_k := \int\limits_{\delta}^{1} e_k(s)\, ds$.

De la relation

$$X_t^0 = x_0 + \int_{\delta}^{t} \left(\sum_{k=1}^{L} c_k \int_{\delta}^{1} X_{v-s}^0\ e_k(s)\, ds\right) dv,\ \ t \geq \delta$$

nous obtenons pour $\delta \leq t \leq 2\delta$:

$$\begin{aligned} X_t^0 &= x_0 + x_0(t-\delta)\left(\sum_{k=1}^{L} c_k \int_{\delta}^{1} e_k(s)\, ds\right) \\ &= x_0 + x_0(t-\delta)\left(\sum_{k=1}^{L} c_k \mu_k\right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

D'où en dérivant par rapport au paramètre

$$\begin{aligned} q_i \ :&= \frac{\partial S_t}{\partial c_i}\left(X^0, \theta\right) \\ &= x_0 \mu_i. \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons l'équivalence suivante (car $x_0 > 0$)

$$\sum_{i=1}^{L} \lambda_i q_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{L} \lambda_i \mu_i = 0$$

De même pour $2\delta \leq t \leq 3\delta$, on a

$$\begin{aligned} dX_t^0 &= \left[\sum_{k=1}^{L} c_k \left(\int_{\delta}^{2\delta} X_{t-s}^0 \ e_k(s)\,ds + \int_{2\delta}^{1} X_{t-s}^0 \ e_k(s)\,ds\right)\right] dt \\ &= \left[\sum_{k=1}^{L} c_k \left(\int_{\delta}^{2\delta} X_{t-s}^0 \ e_k(s)\,ds + x_0 \int_{2\delta}^{1} e_k(s)\,ds\right)\right] dt \end{aligned}$$

Par un changement de variable nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{2\delta} X_{t-s}^0 \ e_k(s)\,ds &= \int_{t-2\delta}^{t-\delta} X_v^0 \ e_k(t-v)\,dv \\ &= \int_{t-2\delta}^{\delta} X_v^0 \ e_k(t-v)\,dv + \int_{\delta}^{t-\delta} X_v^0 \ e_k(t-v)\,dv \\ &= x_0 \int_{t-2\delta}^{\delta} e_k(t-v)\,dv + \int_{\delta}^{t-\delta} X_v^0 \ e_k(t-v)\,dv \end{aligned}$$

Par la relation (2.17), on a

$$X_v^0 = x_0 + \left(x_0 \sum_{j=1}^{L} c_j \mu_j\right)(v-\delta)$$

Par suite

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{t-\delta} X_v^0 \ e_k(t-v)\,dv &= x_0 \int_{\delta}^{t-\delta} e_k(t-v)\,dv + \left(x_0 \sum_{j=1}^{L} c_j \mu_j\right) \int_{\delta}^{t-\delta} (v-\delta)\, e_k(t-v)\,dv \\ &= x_0 \int_{\delta}^{t-\delta} e_k(s)\,ds + x_0 \left(\sum_{j=1}^{L} c_j \mu_j\right) \int_{\delta}^{t-\delta} (t-\delta-s)\, e_k(s)\,ds \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{2\delta} X_{t-s}^0 \ e_k(s)\,ds &= x_0 \int_{t-\delta}^{2\delta} e_k(s)\,ds + x_0 \int_{\delta}^{t-\delta} e_k(s)\,ds + x_0 \left(\sum_{j=1}^{L} c_j \mu_j\right) \int_{\delta}^{t-\delta} (t-\delta-s)\, e_k(s)\,ds \\ &= x_0 \int_{\delta}^{2\delta} e_k(s)\,ds + x_0 \left(\sum_{j=1}^{L} c_j \mu_j\right) \int_{\delta}^{t-\delta} (t-\delta-s)\, e_k(s)\,ds \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} dX_t^0 &= \left[\sum_{k=1}^{L} c_k \left(x_0 \int_{\delta}^{2\delta} e_k(s)\, ds + x_0 \left(\sum_{j=1}^{L} c_j \mu_j\right) \int_{\delta}^{t-\delta} (t-\delta-s)\, e_k(s)\, ds + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. x_0 \int_{2\delta}^{1} e_k(s)\, ds \right) dt \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^{L} c_k \left(x_0 \int_{\delta}^{1} e_k(s)\, ds + x_0 \left(\sum_{j=1}^{L} c_j \mu_j\right) \int_{\delta}^{t-\delta} (t-\delta-s)\, e_k(s)\, ds \right)\right] dt \\ &= \left[\sum_{k=1}^{L} c_k \left(x_0 \mu_k + x_0 \left(\sum_{j=1}^{L} c_j \mu_j\right) \int_{\delta}^{t-\delta} (t-\delta-s)\, e_k(s)\, ds \right)\right] dt \end{aligned}$$

Le calcul de la dérivée q_i donne

$$q_i = x_0 \mu_i + x_0 \left(\sum_{j=1}^{L} c_j \mu_j\right) \int_{\delta}^{t-\delta} (t-\delta-s)\, e_i(s)\, ds + x_0 \mu_i \left(\sum_{k=1}^{L} c_k \int_{\delta}^{t-\delta} (t-\delta-s)\, e_k(s)\, ds\right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{L} \lambda_i q_i &= x_0 \left[\sum_{i=1}^{L} \lambda_i \mu_i + \left(\sum_{j=1}^{L} c_j \mu_j\right) \sum_{i=1}^{L} \lambda_i \int_{\delta}^{t-\delta} (t-\delta-s)\, e_i(s)\, ds + \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{k=1}^{L} c_k \int_{\delta}^{t-\delta} (t-\delta-s)\, e_k(s)\, ds\right) \sum_{i=1}^{L} \lambda_i \mu_i \right] \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\sum_{i=1}^{L} \lambda_i q_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{L} \lambda_i \mu_i = 0$, $x_0 > 0$ et $\sum_{j=1}^{L} c_j \mu_j \neq 0$, nous arrivons à

$$\sum_{i=1}^{L} \lambda_i \int_{\delta}^{t-\delta} (t-\delta-s)\, e_i(s)\, ds = 0$$

En posons $G_i(t) := \int_{\delta}^{t-\delta} e_i(s)\, ds$ et $L_i(t) := \int_{\delta}^{t-\delta} s e_i(s)\, ds$ l'expression précédente devient

$$\sum_{i=1}^{L} \lambda_i \left[(t-\delta)\, G_i(t) - L_i(t)\right] = 0$$

En la dérivant par rapport à t, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{L} \lambda_i \left[(t-\delta)\, G_i'(t) + G_i(t) - L_i'(t)\right] = 0$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{L}\lambda_i\left[(t-\delta)\,e_i\,(t-\delta)+\int_{\delta}^{t-\delta}e_i\,(s)\,ds-(t-\delta)\,e_i\,(t-\delta)\right]=0$$

Par suite

$$\sum_{i1=}^{L}\lambda_i\int_{\delta}^{t-\delta}e_i\,(s)\,ds=0$$

En dérivant une deuxième fois l'expression précédente, on obtient $\sum_{i=1}^{L}\lambda_i e_i\,(t-\delta)=0$ pour $2\delta\leq t\leq 3\delta$. En continuant le même calcul pour les intervalles $i\delta\leq t\leq (i+1)\delta$, pour $i=3,4..$, on aboutit à la fin que $\sum_{i=1}^{L}\lambda_i e_i(t)=0$ pour tout $t\in[\delta,1]$. Comme les fonctions $e_1, e_2, ...e_L$ sont linéairement indépendantes nous déduisons que $\lambda_i=0$ pour $i=1,..,L$. D'où le lemme. $\blacksquare$

Chapitre 3

Estimation de la densité par la distance minimale

3.1 Introduction

On considère un processus de type diffusion $X^{\varepsilon} = (X_t, t \in [\delta, T])$ pour $\varepsilon \in]0, 1]$, solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = (\int\limits_{\delta}^{1} X_{t-s}\ \mu(ds))dt + \varepsilon dW_t \quad , \quad t \in [\delta, T] \\ X_s = x_0 \qquad\qquad si \quad -1 \leq s < \delta \end{cases} \tag{3.1}$$

où

- $(W_t,\ t \geq 0)$ est un processus de Wiener
- μ est une mesure positive de support $[\delta, 1]$ et $\delta\ > 0$
- x_0 est une constante strictement positive

On associe à (3.1) l'équation intégro-différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{dX_t^0}{dt} = \int\limits_{\delta}^{1} X_{t-s}^0\ \mu(ds) \quad , \quad t \in [\delta, T] \\ X_s^0 = x_0 \quad si \qquad -1 \leq s < \delta \end{cases} \tag{3.2}$$

Nous nous intéréssons tout d'abord à l'estimation de la fonction f définie par

$$f(t) = \int_{\delta}^{1} X_{t-s}^{0} \; \mu\,(ds) \tag{3.3}$$

Nous rappellons les résultats de Y.Kutoyants et T.Mourid [13] sur un estimateur de type noyau pour f. L'estimateur de la distance minimale introduit dans cette partie est défini par une distance L^2 entre cet estimateur non-paramétrique et f. Les résultats de convergence obtenus sont uniforme par rapport à μ décrivant une classe $\Theta_1\,(L)$ définie par,

pour $L > 0$:

$$\Theta_1\,(L) = \{\mu \;\; / \;\; \exists \delta > 0 \;\; ; \; Supp\,(\mu) = [\delta, 1] \;\text{ et }\; \|\mu\|_{var} \leq L\}$$

où $Supp\,(\mu)$ et $\|\mu\|_{var}$ désignent respectivement le support et la variation totale de la mesure μ.

3.2 Estimateur non paramétrique

3.2.1 Notations et Hypothèses

On observe une trajectoire du processus $(X_t^{\varepsilon}, t \in [\delta, T])$ solution de (3.1) et nous considérons l'estimateur à noyau de f est défini par (cf.[13])

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\psi_{\varepsilon}} \int_0^T K\left(\frac{\tau - t}{\psi_{\varepsilon}}\right) dX_{\tau}^{\varepsilon} \tag{3.4}$$

où ψ_{ε} tend vers 0 avec ε. Le noyau K est borné, $\int_{-\infty}^{+\infty} K(u)du = 1$ et $K(u) = 0$ pour $u \notin [A, B]$ où $AB < 0$.

Nous rappelons les inégalités suivantes (voir par exemple [10])

$$\begin{cases} \sup\limits_{\mu \in \Theta_1(L)} \sup\limits_{0 \leq t \leq T} \left|X_t^{\varepsilon} - X_t^0\right| \leq \varepsilon e^{K_1 T} \sup\limits_{0 \leq t \leq T} |W_t| \\ \sup\limits_{\mu \in \Theta_1(L)} \sup\limits_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}_{\theta}^{\varepsilon} \left|X_t^{\varepsilon} - X_t^0\right| \leq T\varepsilon^2 e^{K_2 T^2} \end{cases} \tag{3.5}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes strictement postives.

3.2.2 Convergence en moyenne quadratique

Proposition 3.1 *(cf.[13]). Soit $[a, b] \subset]0, T[$. Si $\psi_{\varepsilon} \to 0$, $\varepsilon^2 \psi_{\varepsilon}^{-1} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, alors:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\mu \in \Theta_1(L)} \sup_{a \leq t \leq b} \mathbb{E}_{\theta}^{\varepsilon} \left[\hat{f}(t) - f(t)\right]^2 = 0$$

Preuve De la définition de l'estimateur (3.4), de l'équation (3.1) et de l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, pour $t \in [a,b]$ on a:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta^\varepsilon\left[\hat{f}(t)-f(t)\right]^2 &= \mathbb{E}_\theta^\varepsilon\left[\frac{1}{\psi_\varepsilon}\int_0^T K\left(\frac{\tau-t}{\psi_\varepsilon}\right)dX_\tau^\varepsilon - \int_\delta^1 X_{t-s}^0\,\mu(ds)\right]^2 \\
&= \mathbb{E}_\theta^\varepsilon\left(\begin{array}{l}
\left[\frac{1}{\psi_\varepsilon}\int_0^T K\left(\frac{\tau-t}{\psi_\varepsilon}\right)\left(\int_\delta^1 X_{\tau-s}^\varepsilon\,\mu(ds) - \int_\delta^1 X_{\tau-s}^0\,\mu(ds)\right)d\tau\right] \\
+\left[\frac{1}{\psi_\varepsilon}\int_0^T K\left(\frac{\tau-t}{\psi_\varepsilon}\right)\left(\int_\delta^1 X_{\tau-s}^0\,\mu(ds)\right)d\tau - \int_\delta^1 X_{t-s}^0\,\mu(ds)\right] \\
+\frac{\varepsilon}{\psi_\varepsilon}\int_0^T K\left(\frac{\tau-t}{\psi_\varepsilon}\right)dW_\tau
\end{array}\right)^2 \\
&\leq 3\mathbb{E}_\theta^\varepsilon\left[\frac{1}{\psi_\varepsilon}\int_0^T K\left(\frac{\tau-t}{\psi_\varepsilon}\right)\left(\int_\delta^1 X_{\tau-s}^\varepsilon\,\mu(ds) - \int_\delta^1 X_{\tau-s}^0\,\mu(ds)\right)d\tau\right]^2 \\
&\quad +3\mathbb{E}_\theta^\varepsilon\left[\frac{1}{\psi_\varepsilon}\int_0^T K\left(\frac{\tau-t}{\psi_\varepsilon}\right)\left(\int_\delta^1 X_{\tau-s}^0\,\mu(ds)\right)d\tau - \int_\delta^1 X_{t-s}^0\,\mu(ds)\right]^2 \\
&\quad +3\frac{\varepsilon^2}{\psi_\varepsilon^2}\int_0^T K\left(\frac{\tau-t}{\psi_\varepsilon}\right)^2 d\tau
\end{aligned}
$$

On posons $u=\dfrac{\tau-t}{\psi_\varepsilon}$; $\varepsilon' = \sup\left\{\varepsilon>0;\ 0<\psi_\varepsilon<-\frac{a}{A}\right\}$; $\varepsilon" = \sup\left\{\varepsilon>0;\ 0<\psi_\varepsilon<\frac{T-b}{B}\right\}$, nous avons pour $\varepsilon<\varepsilon_1 := \min(\varepsilon', \varepsilon")$

$$
\begin{aligned}
3\frac{\varepsilon^2}{\psi_\varepsilon^2}\int_0^T K\left(\frac{\tau-t}{\psi_\varepsilon}\right)^2 d\tau &= 3\frac{\varepsilon^2}{\psi_\varepsilon}\int_A^B K^2(u)du \\
&= C_1\varepsilon^2\psi_\varepsilon^{-1}
\end{aligned}
$$

Du fait que X^0 est de classe C^1 et K a support compact, nous appliquons le théorème des accroissements finis, nous avons

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\psi_\varepsilon} \int_0^T K\left(\frac{\tau - t}{\psi_\varepsilon}\right) \left(\int\limits_\delta^1 \left(X^0_{\tau-s} \;- X^0_{t-s}\right) \mu\left(ds\right) \right) d\tau \right| \\
= & \left| \int_A^B K\left(u\right) \left(\int\limits_\delta^1 \left(X^0_{t+u\psi_\varepsilon - s} \;- X^0_{t-s}\right) \mu\left(ds\right) \right) du \right| \\
= & \left| \int_A^B K\left(u\right) \left(\int\limits_\delta^1 u\psi_\varepsilon X^{0'}_{t+\gamma u\psi_\varepsilon - s} \;\mu\left(ds\right) \right) du \right| \\
\leq & \;\psi_\varepsilon \left(\int_A^B \left|uK(u)\right| du \right) \sup_{\mu \in \Theta_1(L)} \|\mu\| \sup_{0 \leq t \leq T} \left| X^{0'}_t \right| \\
\leq & \;\psi_\varepsilon \left(\int_A^B u^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_A^B K^2(u) du \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{\mu \in \Theta_1(L)} \|\mu\| \sup_{0 \leq t \leq T} \left| X^{0'}_t \right| \\
\leq & \;C_2 \psi_\varepsilon
\end{aligned}$$

où désigne $X^{0'}_t$ la dérivée de X^0_t par rapport à t, $\gamma \in \left]0, 1\right[$ et C_2 est une constante positive.

Enfin, pour $\varepsilon < \varepsilon_1$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités (3.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^\varepsilon_\theta \left[\frac{1}{\psi_\varepsilon} \int_0^T K\left(\frac{\tau - t}{\psi_\varepsilon}\right) \left(\int\limits_\delta^1 X^\varepsilon_{\tau-s} \;\mu\left(ds\right) - \int\limits_\delta^1 X^0_{\tau-s} \;\mu\left(ds\right) \right) d\tau \right]^2 \\
= & \;\mathbb{E}^\varepsilon_\theta \left[\int_A^B K\left(u\right) \left(\int_\delta^1 \left(X^\varepsilon_{t+u\psi_\varepsilon - s} \;- X^0_{t+u\psi_\varepsilon - s}\right)^2 \mu\left(ds\right) \right) du \right]^2 \\
\leq & \;(B - A) \int_A^B K^2\left(u\right) \mathbb{E}^\varepsilon_\theta \left(\|\mu\|^2 \int_\delta^1 \left(X^\varepsilon_{t+u\psi_\varepsilon - s} \;- X^0_{t+u\psi_\varepsilon - s}\right)^2 \mu\left(ds\right) \right) du \\
\leq & \;(B - A) \sup_{\mu \in \Theta_1(L)} \|\mu\|^2 \left(\int_A^B K^2\left(u\right) du \right) \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}^\varepsilon_\theta \left(X^\varepsilon_t - X^0_t\right)^2 \\
\leq & \;C_3 \varepsilon^2
\end{aligned}$$

où C_3 est une constante strictement positive. Alors

$$\mathbb{E}^\varepsilon_\theta \left[\hat{f}(t) - f(t)\right]^2 \leq C_1 \varepsilon^2 \psi_\varepsilon^{-1} + C_2 \psi_\varepsilon^2 + C_3 \varepsilon^2$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\mu \in \Theta_1(L)} \sup_{a \leq t \leq b} \mathbb{E}^\varepsilon_\theta \left[\hat{f}(t) - f(t)\right]^2 = 0$$

■

La proposition suivante permet de sàffranchir d'un intervalle fixé $\left[a, b\right]$.

Proposition 3.2 *(cf.[13]). Soit* $[a_\varepsilon, b_\varepsilon] \subset \left]0, T\right[$ *tel que* $a_\varepsilon \to 0$ *et* $b_\varepsilon \to T$*. Si* $a_\varepsilon \psi_\varepsilon^{-1} \to +\infty$*,* $(T - b_\varepsilon)\, \psi_\varepsilon^{-1} \to +\infty$*,* $\psi_\varepsilon \to 0$ *et* $\varepsilon \psi_\varepsilon^{-1} \to 0$ *quand* $\varepsilon \to 0$*, alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\mu \in \Theta_1(L)} \sup_{a_\varepsilon \leq t \leq b_\varepsilon} \mathbb{E}_\theta^\varepsilon \left[\hat{f}(t) - f(t) \right]^2 = 0$$

Preuve On définit $\varepsilon' = \sup \left\{ \varepsilon > 0;\ \psi_\varepsilon < -\frac{a_\varepsilon}{A} \right\}$; $\varepsilon" = \sup \left\{ \varepsilon > 0;\ \psi_\varepsilon < \frac{T - b_\varepsilon}{B} \right\}$, pour $\varepsilon < \varepsilon_1 := \min\left(\varepsilon', \varepsilon"\right)$, on obtient les mêmes majorations précédentes et on prend le suprêmum sur l'intervalle $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$. ■

Corollaire 3.1 *(cf.[13]). Pour tout* $t \in \left]0, T\right[$*,* $\hat{f}(t)$ *converge en moyennne quadratique vers* $f(t)$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Preuve Directe de la proposition 3.2. ■

3.2.3 Vitesse de convergence

Proposition 3.3 *(cf.[13]). Sous les hypothèses de la proposition 3.2, on a*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \sup_{\mu \in \Theta_1(L)} \sup_{a_\varepsilon \leq t \leq b_\varepsilon} \mathbb{E}_\theta^\varepsilon \left[\varepsilon^{-\frac{4}{3}} \left| \hat{f}(t) - f(t) \right|^2 \right] < \infty$$

Preuve De la démonstration de la proposition 3.1 et pour $\varepsilon < \varepsilon_1$, nous avons

$$\begin{aligned} \sup_{a_\varepsilon \leq t \leq b_\varepsilon} \mathbb{E}_\theta^\varepsilon \left| \hat{f}(t) - f(t) \right|^2 &\leq C_1 \varepsilon^2 \psi_\varepsilon^{-1} + C_2 \psi_\varepsilon^2 + C_3 \varepsilon^2 \\ &\leq \psi_\varepsilon^2 \left(C_1 \varepsilon^2 \psi_\varepsilon^{-3} + C_2 + C_3 \varepsilon^2 \psi_\varepsilon^{-2} \right) \end{aligned}$$

Si on choisit ψ_ε tel que $\varepsilon^2 \psi_\varepsilon^{-3} = 1$ i.e. $\psi_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{2}{3}}$, alors

$$\sup_{a_\varepsilon \leq t \leq b_\varepsilon} \mathbb{E}_\theta^\varepsilon \left[\varepsilon^{\frac{-4}{3}} \left| \hat{f}(t) - f(t) \right|^2 \right] < C_1 + C_2 + C_3 \varepsilon^{\frac{2}{3}}$$

d'où le résultat. ■

3.2.4 Convergence en loi

Proposition 3.4 *(cf.[13]). Pour* $\varepsilon > 0$ *et* a_ε*,* b_ε *vérifiant les conditions de la proposition 3.2, on pose pour* $t \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ *:*

$$Y^\varepsilon(t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u K(u) du \right) \left(\int_0^\delta X^{0'}(t - s)\, \mu(ds) \right) + \xi^\varepsilon(t)$$

où

$$\xi^{\varepsilon}(t)=\frac{1}{\psi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\int_0^T K\left(\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}\right)dW_{\tau},\qquad \psi_{\varepsilon}=\varepsilon^{\frac{2}{3}}$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\mu\in\Theta_1(L)}\sup_{a_{\varepsilon}\leq t\leq b_{\varepsilon}}\mathbb{E}_{\theta}^{\varepsilon}\left[\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\left(\hat{f}(t)-f(t)\right)-Y^{\varepsilon}(t)\right]=0\qquad p.s.$$

De plus pour $t\in[a_{\varepsilon},b_{\varepsilon}]$, *la v.a* $\xi^{\varepsilon}(t)$*est gaussienne centrée de covariance* $\int K^2(u)du$ *et si* $t\neq s$, *on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}_{\theta}^{\varepsilon}\left[\xi^{\varepsilon}(t)\xi^{\varepsilon}(s)\right]=0$$

Preuve De la définition de $\hat{f}$ et de l'équation (3.1), on a pour $t\in[a_{\varepsilon},b_{\varepsilon}]$

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{\psi_{\varepsilon}}\int_0^T K\left(\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}\right)\left(\int_{\delta}^1 X_{\tau-s}^{\varepsilon}\,\mu(ds)\right)d\tau+\frac{\varepsilon}{\psi_{\varepsilon}}\int_0^T K\left(\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}\right)dW_{\tau}$$

En posant $u=\dfrac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}$, l'expression précédente devient

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= \int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}}K(u)\left(\int_{\delta}^1\left(X_{t+u\psi_{\varepsilon}-s}^{\varepsilon}-X_{t+u\psi_{\varepsilon}-s}^{0}\right)\mu(ds)\right)du+\\ &\quad+\int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}}K(u)\left(\int_{\delta}^1\left(X_{t+u\psi_{\varepsilon}-s}^{0}\right)\mu(ds)\right)du\\ &\quad+\frac{\varepsilon}{\psi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}}K(u)\,d\tilde{W}_u\end{aligned}$$

où $\left(\tilde{W}_u=\psi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\left(W_{t+u\psi_{\varepsilon}}-W_t\right),\ A\leq u\leq B\right)$ est un processus de Wiener bilatéral pour $\varepsilon<\varepsilon_1$. De la définition de f, on en déduit que pour $\varepsilon<\varepsilon_1$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(t)-f(t) &= \int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}}K(u)\left(\int_{\delta}^1\left(X_{t+u\psi_{\varepsilon}-s}^{0}-X_{t-s}^{0}\right)\mu(ds)\right)du \\ &\quad+\int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}}K(u)\left(\int_{\delta}^1\left(X_{t+u\psi_{\varepsilon}-s}^{\varepsilon}-X_{t+u\psi_{\varepsilon}-s}^{0}\right)\mu(ds)\right)du\\ &\quad+\frac{\varepsilon}{\psi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}}K(u)\,d\tilde{W}_u\end{aligned}\tag{3.6}$$

En appliquant le théorème des accroissements finis pour le premier terme dans (3.6), nous obtenons

$$\int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}}K(u)\left(\int_{\delta}^1\left(X_{t+u\psi_{\varepsilon}-s}^{0}-X_{t-s}^{0}\right)\mu(ds)\right)du=\psi_{\varepsilon}\int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}}uK(u)\left(\int_{\delta}^1\left(X_{t+u\gamma\psi_{\varepsilon}-s}^{0\prime}\right)\mu(ds)\right)du\tag{3.7}$$

où $\gamma \in \left]0,1\right[$. Posons

$$V^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{\frac{-2}{3}} \left(\hat{f}(t) - f(t)\right)$$

Pour $\psi_{\varepsilon} = \varepsilon^{\frac{2}{3}}$; on déduit de (3.6) et (3.7) et de la définition de Y^{ε} que

$$\begin{aligned} V^{\varepsilon}(t) - Y^{\varepsilon}(t) &= \int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}} uK(u) \left(\int_{\delta}^{1} \left(X^{\ 0'}_{\ t+u\gamma\psi_{\varepsilon}-s} \right) \mu(ds) \right) du \\ &+ \varepsilon^{\frac{1}{3}} \int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}} K(u) \left(\int_{\delta}^{1} \left(\frac{X^{\ \varepsilon}_{\ t+u\psi_{\varepsilon}-s} - X^{\ 0}_{\ t-s+u\psi_{\varepsilon}}}{\varepsilon} \right) \mu(ds) \right) du \\ &- \left(\int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}} uK(u) du \right) \left(\int_{\delta}^{1} \left(X^{\ 0'}_{\ t-s} \right) \mu(ds) \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left|V^{\varepsilon}(t) - Y^{\varepsilon}(t)\right| &\leq \int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}} \left|uK(u)\right| \left(\int_{\delta}^{1} \left| X^{\ 0'}_{\ t+u\gamma\psi_{\varepsilon}-s} - X^{\ 0'}_{\ t-s} \right| \left|\mu\right|(ds) \right) du \\ &+ \varepsilon^{\frac{1}{3}} \int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}} K(u) \left(\int_{\delta}^{1} \left| \frac{X^{\ \varepsilon}_{\ t+u\psi_{\varepsilon}-s} - X^{\ 0}_{\ t-s+u\psi_{\varepsilon}}}{\varepsilon} \right| \left|\mu\right|(ds) \right) du \end{aligned} \tag{3.8}$$

D'autre part, de l'équation (3.2), on a

$$\left| X^{\ 0'}_{\ t+u\gamma\psi_{\varepsilon}-s} - X^{\ 0'}_{\ t-s} \right| \leq C_1 \left|u\right| \psi_{\varepsilon}$$

où C_1 est une constante strictement positive. En utilisant les inégalités (3.5), (3.7) et (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} \left|V^{\varepsilon}(t) - Y^{\varepsilon}(t)\right| &\leq C_1 \varepsilon^{\frac{2}{3}} \left(\int_{\frac{-t}{\psi_{\varepsilon}}}^{\frac{\tau-t}{\psi_{\varepsilon}}} \left|u\right|^2 \left|K(u)\right| du \right) \sup_{\mu \in \Theta_1(L)} \|\mu\| \\ &+ C_2 \varepsilon^{\frac{1}{3}} \sup_{\mu \in \Theta_1(L)} \|\mu\| \sup_{0 \leq u \leq T} \left|W(u)\right| \end{aligned}$$

où $C_2 > 0$. Commme la variable aléatoire $\sup\limits_{0 \leq u \leq T} \left|W(u)\right|$ est p.s. finie a le noyau K est à support compact, on en déduit le résultat. ■

Comme conséquence de la proposition 3.4, on a le résultat suivant :

Corollaire 3.2 *(cf.[13]). Si le noyau K vérifie $\int uK(u)du = 0$, alors pour tout $\mu \in \Theta_1(L)$ et $t \in \left]0,T\right[$, on a*

$$\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \left(\hat{f}(t) - f(t)\right) \Longrightarrow_{\varepsilon \to 0} Y$$

où la variable aléatoire Y est gaussiènne centré de variance $\int K^2(u)du$.

3.2.5 Convergence des lois de dimensions finies

Des notations de la proposition 3.4, des définitions de f et $\hat{f}$ et pour tout $t \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, on pose

$$V^\varepsilon(t) = \varepsilon^{\frac{-2}{3}} \left(\hat{f}(t) - f(t)\right)$$

Corollaire 3.3 *(cf.[13]). Soit $l \in \mathbb{N}^*$. ¨Pour tout $t_1, t_2, ...t_l \in]0, T[$, on a*

$$(V^\varepsilon(t_1), V^\varepsilon(t_2), ..., V^\varepsilon(t_l)) \Longrightarrow N_l$$

quand $\varepsilon \to 0$ où N_l est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^l$ de moyenne le vecteur $(m(t_1), m(t_2), ..., m(t_l))$ définie par

$$m(t_i) = \left(\int uK(u)du\right)\left(\int_\delta^1 \left(X\ {}^{0'}_{t_i-s}\right)\mu(ds)\right)$$

$i = 1, ..., l$ et de matrice de covariance

$$\sum = \sigma^2 I_l$$

où $\sigma^2 = \int K^2(u)du$ et I_l est la matrice identité dans $\mathbb{R}^l$.

Preuve Nous utilisons le critère de Gramer-Wold. Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l \in \mathbb{R}$. On a

$$\max_{t_i}\left|\sum_{j=1}^{l} \lambda_j V^\varepsilon(t_j) - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j Y^\varepsilon(t_j)\right| \leq \sum_{j=1}^{l} |\lambda_j| \max_{t_i} |V^\varepsilon(t_j) - Y^\varepsilon(t_j)|$$

où le maximum est pris pour tous les choix de l points de $]0, T[$.

D'après la proposition 3.4, le majorant ci-dessus tend vers 0 p.s. et pour $\varepsilon < \varepsilon_1$ les variables aléatoires Y^ε sont gaussiennes de moyenne $m(t_i)$ de l'enoncé et de variance σ^2. De plus si $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$\mathbb{E}^\varepsilon_\theta\left((Y^\varepsilon(t_i) - m(t_i))(Y^\varepsilon(t_j) - m(t_j))\right) = \delta_{ij}\sigma^2$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker. ■

3.3 Estimation de la densité par la distance minimale

3.3.1 Notations et hypothèses

Dans cet partie, nous étudions l'estimateur de la mesure μ dans le modèle (3.1) par une méthode de type "distance minimale". On supose que $\mu \in \Theta_1(L)$ et que

$$f = \frac{d\mu}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{L} c_i e_i$$

où $(e_i)_{i=1,\dots,L}$ est un système de fonctions indépendantes vérifiants la condition **C1** (voir p. 21 du chapitre 2) et $c_i > 0$. On se propose d'estimer le paramètre $\theta = (c_1, c_2, ..., c_L) \in \Theta =]0, D[^L$où $D > 0$.

L'estimateur de la distance minimale EMD de θ est défini par :

$$\tilde{\theta}_\varepsilon := \arg \inf_{\theta \in \bar{\Theta}} \int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} \left(\hat{f}_\varepsilon(t) - \sum_{i=1}^{L} c_i \int_\delta^1 X^0_{t-s} e_i(s) ds \right)^2 \nu(dt) \tag{3.9}$$

où l'estimateur $\hat{f}_\varepsilon(t)$ est donné par (3.4) avec $\psi_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{2}{3}},\ \nu$ est une mesure positive finie sur $]0, T[$ et $a_\varepsilon,\ b_\varepsilon$ vérifient les conditions de Proposition 3.2. Nous suivons l'étude faite dans [13] pour étudier l'éstimateur (3.9) . Si (3.9) admet plusieurs solutions, on choisit pour $\tilde{\theta}_\varepsilon$ l'une d'elles.

Posons

$$S(t, \theta, X) = \sum_{i=1}^{L} c_i \int_\delta^1 X_{t-s} e_i(s) ds$$

Pour tout $\beta > 0$ et pour tout compact K de Θ, on définit

$$g_\varepsilon(\beta) := \inf_{\theta_0 \in K} \inf_{\|\theta - \theta_0\| > \beta} \left\| S(t, \theta, X^0_\theta) - S(t, \theta_0, X^0_{\theta_0}) \right\|_2 \tag{3.10}$$

où $\|.\|_2$ désigne la norme dans $L^2\left([a_\varepsilon, b_\varepsilon], \nu\right)$: espace des fonctions définie et de carré intégrable par rapport à la mesure ν sur $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ et $\|.\|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^L$.

On note par $\dot{S}(t, \theta, X^0_\theta)$ le vecteur des dérivés partiels de S par rapport à θ et $I(\theta)$ la matrice

$$I(\theta) = \left\langle \dot{S}(t, \theta, X^0_\theta), \dot{S}^t(t, \theta, X^0_\theta) \right\rangle_{L^2(]0,T[,\nu)}$$

3.3.2 Convergence de l'estimateur

Proposition 3.5 *Si pour tout $\beta > 0$ et pour tout compact K de Θ, $g_\varepsilon(\beta) > 0$, alors il existe $\varepsilon_2 > 0$, tel que*

$$\forall \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_2 \Rightarrow \sup_{\theta_0 \in K} \mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0} \left(\left\| \tilde{\theta}_\varepsilon - \theta_0 \right\| > \beta \right) \leq 3 \exp\left(-C \frac{g_\varepsilon(\beta)^2}{\varepsilon^{\frac{4}{3}}} \right)$$

où $C > 0$.

Preuve De la définition de $\tilde{\theta}_\varepsilon$ et pour $\theta_0 \in \Theta,\ \beta > 0$ on a

$$\left\| \tilde{\theta}_\varepsilon - \theta_0 \right\| > \beta \Rightarrow \inf_{\|\theta - \theta_0\| \leq \beta} \left\| \hat{f}_\varepsilon - S(., \theta, X^0_\theta) \right\|_2 > \inf_{\|\theta - \theta_0\| > \beta} \left\| \hat{f}_\varepsilon - S(., \theta, X^0_\theta) \right\|_2 \tag{3.11}$$

D'autre part :

$$\left\|\hat{f}_\varepsilon - S(.,\theta,X^0_\theta)\right\|_2 \leq \left\|\hat{f}_\varepsilon - S(.,\theta,X^0_{\theta_0})\right\|_2 + \left\|S(.,\theta,X^0_{\theta_0}) - S(.,\theta,X^0_\theta)\right\|_2$$

D'où

$$\inf_{\|\theta-\theta_0\|\leq\beta} \left\|\hat{f}_\varepsilon - S(.,\theta,X^0_\theta)\right\|_2 \leq \left\|\hat{f}_\varepsilon - S(.,\theta_0,X^0_{\theta_0})\right\|_2 \tag{3.12}$$

On obtient de (3.11) et (3.12)

$$\mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}\left(\left\|\tilde{\theta}_\varepsilon - \theta_0\right\| > \beta\right) \leq \mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}\left(\inf_{\|\theta-\theta_0\|>\beta}\left\|\hat{f}_\varepsilon - S(.,\theta,X^0_\theta)\right\|_2 \leq \left\|\hat{f}_\varepsilon - S(.,\theta_0,X^0_{\theta_0})\right\|_2\right) \tag{3.13}$$

Or

$$\left\|\hat{f}_\varepsilon - S(.,\theta,X^0_\theta)\right\|_2 \geq \left\|S(.,\theta,X^0_\theta) - S(.,\theta_0,X^0_{\theta_0})\right\|_2 - \left\|\hat{f}_\varepsilon - S(.,\theta_0,X^0_{\theta_0})\right\|_2$$

Donc

$$\begin{aligned}\inf_{\|\theta-\theta_0\|>\beta}\left\|\hat{f}_\varepsilon - S(.,\theta,X^0_\theta)\right\|_2 &\geq \inf_{\|\theta-\theta_0\|>\beta}\left\|S(.,\theta,X^0_\theta) - S(.,\theta_0,X^0_{\theta_0})\right\|_2 - \\ &\quad \left\|\hat{f}_\varepsilon - S(.,\theta_0,X^0_{\theta_0})\right\|_2 \\ &\geq g_\varepsilon(\beta) - \left\|\hat{f}_\varepsilon - S(.,\theta_0,X^0_{\theta_0})\right\|_2\end{aligned}$$

Par suite (3.13) donnne

$$\mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}\left(\left\|\tilde{\theta}_\varepsilon - \theta_0\right\| > \beta\right) \leq \mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}\left(2\left\|\hat{f}_\varepsilon - S(.,\theta_0,X^0_{\theta_0})\right\|_2 \geq g_\varepsilon(\beta)\right)$$

D'après (3.6)et (3.7) et pour $f(t) = S(t,\theta_0,X^0_{\theta_0})$, $\mu = \sum_{i=1}^{L} c_i \int_\delta^1 e_i(s)ds$, on a pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$:

$$\begin{aligned}\left\|\hat{f}_\varepsilon(t) - S(t,\theta_0,X^0_{\theta_0})\right\|_2 &= \psi_\varepsilon \int_A^B uK(u)\left(\int_\delta^1 X^{0'}_{t-s+\gamma u\psi_\varepsilon}\mu(ds)\right)du \\ &\quad + \int_A^B K(u)\left(\int_\delta^1 \left(X^\varepsilon_{t-s+\gamma u\psi_\varepsilon} - X^0_{t-s+\gamma u\psi_\varepsilon}\right)\mu(ds)\right)du \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\psi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\zeta^\varepsilon(t)\end{aligned} \tag{3.14}$$

où $\gamma \in \left]0,1\right[$. Pour le premier terme de (3.14), les hypothèses sur $K,\ \mu$ et $X^0 \in C^0$ implique que la fonction

$$h^\varepsilon(t) = \int_A^B uK(u)\left(\int_\delta^1 X^{0'}_{t-s+\gamma u\psi_\varepsilon}\mu(ds)\right)du$$

est bornée par une constante C_1 sur $[0,T]$.

Le deuxième terme est majoré presque sûrement grâce aux inégalités (3.5) par $C_2\varepsilon \sup_{0\leq t\leq T} |W_t|$ où $C_2 > 0$.

En utilisant les propriétés de l'intégrale stochastique, on peut écrire que pour $\varepsilon < \varepsilon_1,\ \psi_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{2}{3}}$ et $t \in]0, T[$:

$$\zeta^\varepsilon(t) = \frac{1}{\psi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \int_0^T K(\frac{\tau - t}{\psi_\varepsilon}) dW(\tau) = W_1\left(\sigma^2\right)$$

où W_1 est un processus de Wiener et $\sigma^2 = \int K^2(u)du$.

Par conséquent si $\varepsilon < \varepsilon_2 := \min\left(\varepsilon_1, \frac{g_\varepsilon(\beta)^{\frac{3}{2}}}{6C_1}, \frac{C_3\sigma^3}{C_2 T^{\frac{1}{2}}}\right)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}\left(\left\|\tilde{\theta}_\varepsilon - \theta_0\right\| > \beta\right) &\leq \mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}\left(2\left\|\hat{f}_\varepsilon - S(., \theta_0, X^0_{\theta_0})\right\|_2 \geq g_\varepsilon(\beta)\right) \\
&\leq \mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}\left(C_1\psi_\varepsilon + C_2\varepsilon^{\frac{1}{3}} \sup_{0\leq t\leq T} |W_t| + C_3\left|W_1\left(\sigma^2\right)\right| \geq \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{2}{3}} g_\varepsilon(\beta)\right) \\
&\leq \mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |W_t| \geq \frac{g_\varepsilon(\beta)}{6C_2\varepsilon}\right) + \mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}\left(\left|W_1\left(\sigma^2\right)\right| \geq \frac{g_\varepsilon(\beta)}{6C_3\varepsilon^{\frac{2}{3}}}\right) \\
&\leq 2\exp\left(\frac{-1}{72C_2^2 T}\frac{g_\varepsilon(\beta)^2}{\varepsilon^2}\right) + \exp\left(\frac{-1}{72C_3^2\sigma^2}\frac{g_\varepsilon(\beta)^2}{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}\right) \\
&\leq 3\exp\left(-C\frac{g_\varepsilon(\beta)^2}{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}\right)
\end{aligned}$$

où $C = \frac{1}{72}\min(\frac{1}{TC_2^2}, \frac{1}{\sigma^2 C_3^2})$, d'où la proposition. ■

3.3.3 Loi limite

Nous rappellons la méthode de P.W.Millar pour la construction des estimateurs de la distance minimale (cf. [19]). Pour θ un ouvert de $\mathbb{R}^L$, soit $\xi_n(\theta, \omega)$ une v.a. à valeurs dans un espace de Hilbert $(H; \|.\|_H)$ (la v.a. ξ_n est définie à partir d'une suite de variables aléatoires i.i.d.). Les estimateurs du minimum de distance $\tilde{\theta}_n$ vérifient :

$$\left\|\xi_n\left(\tilde{\theta}_n, .\right)\right\|_H = \inf_{\theta\in\Theta} \|\xi_n(\theta, .)\|_H$$

Pour θ_0 fixé dans Θ, on introduit les hypothèses suivantes :

H1. Identifiabilité

$\forall\varepsilon > 0,\ \forall c > 0,\ \exists\delta > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\left(\inf_{\|\theta-\theta_0\|>c} \|\xi_n(\theta_n, .) - \xi_n(\theta_0, .)\|_H > \delta\right) > 1 - \varepsilon$$

H2. Bornitude

La v.a.$\sqrt{n}\xi_n(\theta_0,.)$ est bornée en probabilité.

(Dans les applications cette hypothèse est remplacée par une condition plus forte **H'2**. La v.a. ξ_n converge en loi dans H vers une v.a.Z.)

H3. Différentiabilité

$\exists \eta(\theta_0) = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)\,;\ \eta_i \in H$, tel que :

$$\xi_n(\theta,.) = \xi_n(\theta_0,.) + \langle \eta, \theta - \theta_0 \rangle + \|\theta - \theta_0\| \, \xi(\|\theta - \theta_0\|,.)$$

où pour tout ω, $\xi_n(.,\omega)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, tel que $\forall \alpha > 0,\ \forall c > 0,\ \exists \delta > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{\|\theta\| > \delta} \|\xi(\|\theta\|,\omega)\|_H < c\right) > 1 - \alpha$$

et les η_i sont linéairement indépendants dans H ($\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^L$).

On note B_η le sous-espace de H engendré par $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_L)$ et Π le projecteur orthogonal sur B_η. Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^L$ dans B_η, définie par

$$T(x) = \sum_{i=1}^{L} x_i \eta_i$$

Les vecteurs η_i étant linéairement indépendants, l'application T est continue, bijective et T^{-1} est linéaire et continue. (cf. [19]).

Théorème M ([14])

Sous les hypothèses **H1, H2, H3**, *on a, quand* n *tend vers l'infini:*

1. $$\mathbb{P}\left(\tilde{\theta}_n \textit{ existe et unique }\right) \to 1$$

2. $$\xi_n\left(\tilde{\theta}_n\right) = (I - \Pi)\,\xi_n(\theta_0) + \circ_p\left(\sqrt{n}\right)$$

3. $$\tilde{\theta}_n - \theta_0 = T^{-1} \circ \Pi \circ \xi_n(\theta_0) + \circ_p\left(1/\sqrt{n}\right)$$

4. *Si de plus, on suppose que* **H'2** *est vérifiée, alors*

$$\sqrt{n}\left(\xi_n\left(\tilde{\theta}_n\right)-\xi_n\left(\theta_0\right)\right)\Rightarrow-\Pi\circ Z$$

et

$$\sqrt{n}\left(\tilde{\theta}_n-\theta_0\right)\Rightarrow-T^{-1}\circ\Pi\circ Z$$

dans $\mathbb{R}^L$. ($\circ$ *désigne la composition des applications*)

Sous les conditions **H1, H2, H3** l'estimateur de la distance minimale $\tilde{\theta}_n$ est convergeant et admet une loi limite.

On note θ_0 la vraie valeur du paramètre $\theta=(c_1,c_2,...,c_L)$. On obtient la loi limite suivante :

Proposition 3.6 *Supposons que la mesure* ν *est une mesure discrète sur* $]0,T[$. *Si pour tout compact* $K\subset\Theta$ *et* $\beta>0,\ g_\varepsilon(\beta)>0,$ *alors:*

$$\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\left(\tilde{\theta}_\varepsilon-\theta_0\right)\Rightarrow\zeta$$

où

$$\zeta=I^{-1}\left(\theta_0\right)\int_0^T\left[\left(\int uK(u)du\right)\left(\int_\delta^1X^{0\prime}_{t-s}\mu\left(ds\right)\right)+Y^0(t)\right]\dot{S}\left(t,\theta_0,X^0_{\theta_0}\right)\nu\left(dt\right)$$

La v.a. $Y^0(t)$ *est gaussienne centrée de variance*

$$\int K^2(u)du\ \ et\ E(Y^0(t)Y^0(s))=0\ si\ s\neq t$$

Preuve Nous vérifions les hypothèses **H1, H2, H3**.

Dans notre cas étudié, l'espace de hilbert H est l'espace $L^2\left(]0,T[\,,\ \nu\right)$ et la variable aléatoire hilbertienne ξ_ε est

$$\xi_\varepsilon\left(.\right)=\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\left(\hat{f}_\varepsilon\left(.\right)-\sum_{i=1}^Lc_i\int_\delta^1X^0_{.-s}e_i(s)ds\right)$$

L'hypothèse d'identifiabilité **H1** d'écoule de la condition sur la fonction $g_\varepsilon(\beta)$.

L'hypothèse **H2** est une conséquence du corollaire 3.2.

L'hypothèse **H3** découle de la dérivabilité de $S\left(t,\theta,X^0_\theta\right)$ par rapport au paramètre θ.

Du théorème **M**, on a :

$$\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\left(\tilde{\theta}_\varepsilon-\theta_0\right)=I^{-1}\left(\theta_0\right)\left\langle\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\left(\hat{f}_\varepsilon-S\left(.,\theta_0,X^0_{\theta_0}\right)\right),\dot{S}\right\rangle_{L^2(]0,T[,\ \nu)}+\circ_L(1)$$

Soit $\nu=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\delta_{t_i}$ où $\alpha_i\in\mathbb{R},\ t_i\in\,]0,T[$ et m est un entier positif. On obtient donc

$$\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\left(\tilde{\theta}_\varepsilon-\theta_0\right)=I^{-1}\left(\theta_0\right)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\left(\hat{f}_\varepsilon\left(t_i\right)-S\left(t_i,\theta_0,X^0_{\theta_0}\right)\right)\dot{S}\left(t_i,\theta_0,X^0_{\theta_0}\right)+\circ_L(1) \quad (3.15)$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\left(\hat{f}_\varepsilon\left(t_i\right)-S\left(t_i,\theta_0,X^0_{\theta_0}\right)\right)\dot{S}\left(t_i,\theta_0,X^0_{\theta_0}\right) &= \left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\left(\hat{f}_\varepsilon\left(t_i\right)-S\left(t_i,\theta_0,X^0_{\theta_0}\right)\right)-Y^\varepsilon(t_i)\right)\dot{S}\left(t_i,\theta_0,X^0_{\theta_0}\right)\\ &\quad +Y^\varepsilon(t_i)\dot{S}\left(t_i,\theta_0,X^0_{\theta_0}\right)\end{aligned}$$

De la proposition 3.4, on a :

$$\left|\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\left(\hat{f}_\varepsilon\left(t_i\right)-S\left(t_i,\theta_0,X^0_{\theta_0}\right)\right)-Y^\varepsilon(t_i)\right|\rightarrow 0 \qquad p.s \quad (3.16)$$

quand $\varepsilon\rightarrow 0$, et pour tout $\varepsilon<\varepsilon_1$, les v.a. $Y^\varepsilon(t_i)$ sont gaussiennes $N\left(m\left(t_i\right),\sigma^2\right)$ où $m\left(t_i\right)$ est donnée dans le corollaire 3.2.

Comme $\max\limits_{t_i}\left|S\left(t_i,\theta_0,X^0_{\theta_0}\right)\right|<\infty$, il en résulte de (3.15) et (3.16) que :

$$\varepsilon^{\frac{-2}{3}}\left(\tilde{\theta}_\varepsilon-\theta_0\right)\Rightarrow I^{-1}\left(\theta_0\right)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left[\left(\int uK(u)du\right)\left(\int_\delta^1 X^{0\prime}_{t-s}\mu\left(ds\right)\right)+Y^0(t_i)\right]\dot{S}\left(t_i,\theta_0,X^0_{\theta_0}\right)$$

où $Y^0(t_i)$ est une gaussienne centrée de variance $\sigma^2=\int K^2(u)du$. D'où la proposition. ■

Remarque 3.1 *Comme dans [13], nous notons que la condition que la mesure ν soit une mesure discrète sur $]0,T[$ est indispensable. En effet, si ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, la loi limite dans la proposition précédente est dégénérée. En particulier, si $\int uK(u)du=0$, on a en calculant $\mathbb{E}\left(\varepsilon^{\frac{-2}{3}}\left(\tilde{\theta}_\varepsilon-\theta_0\right)\right)^2$:*

$$\varepsilon^{\frac{-2}{3}}\left(\tilde{\theta}_\varepsilon-\theta_0\right)\rightarrow 0$$

en probabilité quand ε tend vers 0. Et nous nous pouvons pas appliquer le résultat de Millar.

Nous remarquons aussi que la démonstration reste la même si on suppose que $\nu=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\delta_{t_i}$ où $\sum\alpha_i<\infty$.

3.4 Estimation du nombre de coefficients de la densité des retards

3.4.1 Introduction

Nous reprenons le modèle précédent :

$$\begin{cases} dX_t = \left(\sum_{i=1}^{l} c_i \int_{\delta}^{1} X_{t-s}\ e_i(s)\, ds \right) dt + \varepsilon dW_t & \text{si} \quad t \in [\delta, T] \\ X_s = x_0 > 0 & \text{si} \quad -1 \leq s < \delta \end{cases} \tag{3.17}$$

Les coefficients c_i sont des réels strictement positifs connus et le paramètre d'interet est l appartenant à l'espace paramétrique $\Theta = \{1, 2, 3, ..., L\}$, où $L \in \mathbb{N}^*$ est un entier connu.

Notre but est l'estimation de du nombre de coefficients l dans des processus de diffusion par les méthodes : maximum de vraisemblance, Bayes et distance minimale.

3.4.2 Estimation par Maximum de vraisemblance

Notons par $\mathbb{P}_l^\varepsilon$ la loi de probabilité induite par la solution de (3.17) sur l'espace $\left(C_{[0,T]}, C\right)$ des fonctions continues sur $[0, T]$. On défini un estimateur $\hat{l}_\varepsilon$ comme solution de l'équation suivante :

$$\frac{d\mathbb{P}^\varepsilon_{\hat{l}_\varepsilon}}{d\mathbb{P}^\varepsilon_{l_0}}\left(X^\varepsilon\right) = \max_{l \in \Theta} \frac{d\mathbb{P}^\varepsilon_l}{d\mathbb{P}^\varepsilon_{l_0}}\left(X^\varepsilon\right)$$

où l_0 est une valeur arbitraire du paramètre.

Convergence

Proposition 3.7 *Sous la condition **C1,** Il existe des constantes $C_1 > 0,\ C_2 > 0$ tel que :*

$$\max_{l_0 \in \Theta} \mathbb{P}^\varepsilon_{l_0}\left(\hat{l}_\varepsilon \neq l_0\right) \leq C_1 \exp\left(\frac{-C_2}{\varepsilon^2}\right)$$

Preuve Soit $\varepsilon \in [0, 1[$. Le processus de vraisemblance est défini pour l'observation X^ε par:

$$Z_{\varepsilon, l_0}(u) = \frac{d\mathbb{P}_{l_0+u}}{d\mathbb{P}_{l_0}}\left(X^\varepsilon\right) \tag{3.18}$$

où $u \in \{1-l_0, 1-l_0+1, ..., L-l_0\} - \{0\}$. Comme X^ε vérifie (3.17), le rapport de vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} Z_{\varepsilon,l_0}(u) &= \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i \int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon \; e_i\left(s\right) ds\right) dW_t \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T \left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i \int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon \; e_i\left(s\right) ds\right)^2 dt\right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Dans la dernière sommation, on suppose que $u \geq 1$, sinon on inverse les bornes.

Posons $\hat{u} = \hat{l}_\varepsilon - l_0$ et d un réel appartenant à $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. De la définition (3.18) et de l'inégalité de Markov, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{l_0}^\varepsilon\left(\hat{l}_\varepsilon \neq l_0\right) &= \mathbb{P}_{l_0}^\varepsilon\left(\left|\hat{l}_\varepsilon - l_0\right| \geq 1\right) \\ &= \mathbb{P}_{l_0}^\varepsilon\left(\left|\hat{u}\right| \geq 1\right) \\ &\leq \mathbb{P}_{l_0}^\varepsilon\left(\sup_{|u|\geq 1} Z_{\varepsilon,l_0}(u) \geq Z_{\varepsilon,l_0}(0) = 1\right) \\ &\leq \sum_{|u|\geq 1} \mathbb{P}_{l_0}^\varepsilon\left(Z_{\varepsilon,l_0}(u) \geq 1\right) \\ &\leq \sum_{|u|\geq 1} \mathbb{E}_{l_0}^\varepsilon\left(Z_{\varepsilon,l_0}(u)^d\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

D'autre part, de (3.18)et (3.19) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a pour tout $C > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\varepsilon}_{l_0}\left(Z_{\varepsilon,l_0}(u)^d\right) &= \mathbb{E}^{\varepsilon}_{l_0}\left(\exp\left(\frac{d}{\varepsilon}\int_0^T\left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i\int_\delta^1 X^{\varepsilon}_{t-s}\ e_i\left(s\right)ds\right)dW_t\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{d}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i\int_\delta^1 X^{\varepsilon}_{t-s}\ e_i\left(s\right)ds\right)^2 dt\right)\right)\\
&= \mathbb{E}^{\varepsilon}_{l_0}\left(\exp\left(\frac{d}{\varepsilon}\int_0^T\left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i\int_\delta^1 X^{\varepsilon}_{t-s}\ e_i\left(s\right)ds\right)dW_t\right.\right.\\
&-\frac{c}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i\int_\delta^1 X^{\varepsilon}_{t-s}\ e_i\left(s\right)ds\right)^2 dt\\
&\left.\left.+\frac{c-d}{2\varepsilon^2}\int_0^T\left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i\int_\delta^1 X^{\varepsilon}_{t-s}\ e_i\left(s\right)ds\right)^2 dt\right)\right)\\
&\leq \mathbb{E}^{\varepsilon}_{l_0}\left[\exp\left(\frac{2d}{\varepsilon}\int_0^T\left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i\int_\delta^1 X^{\varepsilon}_{t-s}\ e_i\left(s\right)ds\right)dW_t\right.\right. \qquad (3.21)\\
&\left.\left.-\frac{c}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i\int_\delta^1 X^{\varepsilon}_{t-s}\ e_i\left(s\right)ds\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}\times\\
&\mathbb{E}^{\varepsilon}_{l_0}\left[\exp\left(\frac{c-d}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i\int_\delta^1 X^{\varepsilon}_{t-s}\ e_i\left(s\right)ds\right)^2 dt\right)\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Pour $c = 2d^2$, le théorème 6.1 p.216, de [16] donne

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\varepsilon}_{l_0}\left[\exp\left(\frac{2d}{\varepsilon}\int_0^T\left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i\int_\delta^1 X^{\varepsilon}_{t-s}\ e_i\left(s\right)ds\right)dW_t-\right.\right.\\
&\left.\left.\frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{2d}{\varepsilon}\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i\int_\delta^1 X^{\varepsilon}_{t-s}\ e_i\left(s\right)ds\right)^2 dt\right)\right]\\
\leq\ \ & 1
\end{aligned}$$

Par conséquent, (3.21) se transforme en

$$\mathbb{E}^{\varepsilon}_{l_0}\left(Z_{\varepsilon,l_0}(u)^d\right) \leq \mathbb{E}^{\varepsilon}_{l_0}\left[\exp\left(\frac{-d(1-2d)}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i\int_\delta^1 X^{\varepsilon}_{t-s}\ e_i\left(s\right)ds\right)^2 dt\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3.22)$$

Posons

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i \int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon \; e_i\left(s\right) ds \\ B &= \sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i \int_\delta^1 X_{t-s}^0 \; e_i\left(s\right) ds \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $A^2 \leq -B^2 + 2\left|B\right|\left|B-A\right|$, il en résulte de (3.22)

$$\begin{aligned} \left[\mathbb{E}_{l_0}^\varepsilon\left(Z_{\varepsilon,l_0}(u)^d\right)\right]^2 &\leq \mathbb{E}_{l_0}^\varepsilon\left[\exp\left(\frac{-d(1-2d)}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i X_{t-s}^0 \; e_i\left(s\right) ds\right)^2 dt\right.\right. \quad (3.23) \\ &\quad + 2\frac{d(1-2d)}{\varepsilon^2}\int_0^T\left|\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i \int_\delta^1 X_{t-s}^0 \; e_i\left(s\right) ds\right| \times \\ &\quad \left.\left|\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i \int_\delta^1 \left(X_{t-s}^0 - X_{t-s}^\varepsilon\right) e_i\left(s\right) ds\right| dt\right] \\ &\leq \exp\left(\frac{-d(1-2d)}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i X_{t-s}^0 \; e_i\left(s\right) ds\right)^2 dt\right) \times \\ &\quad \mathbb{E}_{l_0}^\varepsilon\left[\exp\left(2\frac{d(1-2d)}{\varepsilon^2}\int_0^T\left|\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i \int_\delta^1 X_{t-s}^0 \; e_i\left(s\right) ds\right| \times\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left|\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i \int_\delta^1 \left(X_{t-s}^0 - X_{t-s}^\varepsilon\right) e_i\left(s\right) ds\right| dt\right)\right] \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,T]$, $X_t^0 \geq x_0$ (cf. [18]), on en déduit que

$$\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i X_{t-s}^0 \; e_i\left(s\right) ds \geq x_0 C \sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i \geq x_0 C\left|u\right| \min\left(c_i\right) > 0$$

Par suite

$$\exp\left(\frac{-d(1-2d)}{\varepsilon^2}\int_0^T\left(\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i X_{t-s}^0 \; e_i\left(s\right) ds\right)^2 dt\right) \leq \exp\left(\frac{-d(1-2d)}{\varepsilon^2} T K_1 u^2\right) \quad (3.24)$$

où K_1 est une constante strictement positive.

Par ailleurs, pour tout $t \in [0,T]$,

$$X_t^0 \leq x_0 e^{MT}$$

où

$$M = T \sup_i \left|e_i(s)\right| \left(\sum_{i=1}^{l_0} c_i\right)$$

(cf. p.34 du chapitre 2).

Donc,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i \int_\delta^1 X_{t-s}^0 \; e_i\left(s\right) ds\right| &\leq \sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} \left|c_i \int_\delta^1 X_{t-s}^0 \; e_i\left(s\right) ds\right| \\ &\leq x_0 M' \sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} \left|c_i\right| e^{MT} \\ &\leq K_2 \left|u\right| \qquad (3.25)\end{aligned}$$

Des inégalités (3.5), on a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i \int_\delta^1 \left(X_{t-s}^0 - X_{t-s}^\varepsilon\right) e_i\left(s\right) ds\right| &\leq C \sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i \sup_{t\in[0,T]} \left|X_t^0 - X_t^\varepsilon\right| \\ &\leq C\varepsilon \sum_{i=l_0+1}^{l_0+u} c_i \sup_{t\in[0,T]} \left|W_t\right| \\ &\leq K_3 \varepsilon \sup_{t\in[0,T]} \left|W_t\right| \qquad (3.26)\end{aligned}$$

où K_3 est une constante strictement positive.

En utilisant la majoration suivante (cf. [12], p. 18)

$$\mathbb{E}_{l_0}^\varepsilon\left(\exp\left(k \sup_{0\leq t\leq T} \left|Wt\right|\right)\right) \leq 2\left(1+Tk^2\right)\exp\left(\frac{1}{2}Tk^2\right) \quad \text{pour tout } k>0$$

les inégalités (3.24), (3.25) et (3.26), il en résulte de (3.23) et de l'inégalité $1+u \leq e^u$ pour $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left[\mathbb{E}_{l_0}^\varepsilon\left(Z_{\varepsilon,l_0}(u)^d\right)\right]^2 &\leq \mathbb{E}_{l_0}^\varepsilon\left[\exp\left(\frac{-d(1-2d)}{\varepsilon^2}TK_1u^2\right)\times\exp\left(\frac{d(1-2d)}{\varepsilon^2}K_4u\varepsilon\sup_{t\in[0,T]}\left|W_t\right|\right)\right] \\ &\leq 2\exp\left(\frac{-d(1-2d)}{\varepsilon^2}TK_1u^2\right)\left(1+T\left(\frac{d(1-2d)}{\varepsilon^2}uK_4\varepsilon\right)^2\right)\times \\ &\quad\ \exp\left(\frac{1}{2}T\left(\frac{d(1-2d)}{\varepsilon^2}uK_4\varepsilon\right)^2\right) \\ &\leq 2\exp\left(\frac{-d(1-2d)}{\varepsilon^2}TK_1u^2\left(1-K_5d^2(1-2d)^2\right)\right)\end{aligned}$$

où $K_4,\ K_5$ sont des constantes strictement positives.

Si on pose $D_d = K_1 d(1-2d)\left(1-K_4d^2(1-2d)^2\right)$, alors il existe $d \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ tel que $D_d > 0$. (du fait que la fonction D_d est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $D_0 = 0$ et la dérivée au point 0 est strictement positive).

Finalement, on en déduit par (3.21):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{\varepsilon}_{l_0}\left(\hat{l}_\varepsilon \neq l_0\right) &\leq \sum_{u\in\{1-l_0,\dots,L-l_0\}-\{0\}} 2\exp(\frac{-u^2}{\varepsilon^2}D_d)\\ &\leq C_1\exp(\frac{-C_2}{\varepsilon^2})\end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont strictement positifs, d'où le résultat. ■

3.4.3 Estimateur de Bayes

On considère le paramètre l dans (3.17) comme une variable aléatoire réelle de densité à priori $\pi(\theta)$ définie sur $\{1,2,...,L\}$. On note $\check{l}_\varepsilon$ l'estimateur de Bayes relative à la fonction de perte

$$w(l-y) = |l-y|^d, \qquad d>0$$

L'estimateur $\check{l}_\varepsilon$ est solution de l'équation

$$\sum_{l=1}^{L} w(l-\check{l}_\varepsilon)p(l\ /\ X^\varepsilon) = \min_{y\in\{1,2,\dots,L\}}\sum_{l=1}^{L} w(l-y)p(l\ /\ X^\varepsilon)$$

où $p(l\ /\ X^\varepsilon)$ est la densité à postériori de l étant donné l'observation X^ε (densité obtenue par la règle de Bayes).

Dans le cas des fonctions de perte quadratique ($d=2$), $\check{l}_\varepsilon$ est donné par

$$\check{l}_\varepsilon\left(X^\varepsilon\right) = \mathbb{E}\left(l\ /\ X^\varepsilon\right) = \sum_{i=1}^{L} i\times p(i\ /\ X^\varepsilon)$$

Les propriétés asymptotique de $\check{l}_\varepsilon$ sont obtenues de la même manière que celles de l'e.m.v $\hat{l}_\varepsilon$. Nous énonçons :

Proposition 3.8 *Si l_0 est la vrai valeur du paramètre et $\pi(\theta)$ est bornée et positive, alors sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}_{l_0}$:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\check{l}_\varepsilon = l_0$$

3.4.4 Estimateur de la distance minimale

L'observation X^ε vérifie (3.17) et on se propose d'estimer l'ordre l avec les notations précédentes par

$$\tilde{l}_\varepsilon = \arg\min_{l\in\{1,2,\dots,L\}}\int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon}\left(\hat{f}_\varepsilon(t) - \sum_{i=1}^{l} c_i\int_\delta^1 X^0_{t-s}e_i(s)ds\right)^2\nu(dt)$$

où $\hat{f}_\varepsilon$ est l'estimateur non paramétrique définie par (3.4) de la fonction

$$S\left(t,l,X^0\right)=\sum_{i=1}^{l}c_i\int_\delta^1 X^0_{t-s}e_i(s)ds$$

avec X^0 est la solution déterministe associée à (3.17) pour $\varepsilon=0$ et ν est une mesure bornée sur $]0,T[$.

Pour tout $u\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$h_\varepsilon\left(u\right)=\min_{l_0\in\{1,2,\ldots,L\}}\min_{|l-l_0|\geq u}\left(\int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon}\left(S\left(t,l,X^0_l\right)-S\left(t,l_0,X^0_{l_0}\right)\right)^2\nu(dt)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 3.9 *Si pour tout* $u\in\mathbb{N}^*$, $h_\varepsilon\left(u\right)>0$, *alors il existe* $C>0$ *tel que*

$$\max_{l_0\in\{1,2,\ldots,L\}}\mathbb{P}^\varepsilon_{l_0}\left(\tilde{l}_\varepsilon\neq l_0\right)\leq 3\exp\left(-C\frac{h_\varepsilon\left(u\right)}{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}\right)$$

Preuve Identique à celle de la proposition 3.5 où l'on remplace g_ε par h_ε et $S\left(t,\theta,X^0\right)$ par $S\left(t,l,X^0\right)$. ■

Chapitre 4

Simulations

4.1 Introduction

Pour illustrer le comportement des estimateurs du maximum de vraisemblance étudiés dans Chapitre 2, nous simulons des trajectoires de processus de diffusion.par la méthode d'Euler-Maruyama (cf. [2], [3], [4]). Nous utilisons le logiciel R pour l'analyse statistique des estimateurs. Nous simulons des trajectoires du mouvement brownien à l'aide de la bibliothèque "far" développée par J.Damons et S.Guillas (Modelization for Functional AutoRegressive processes Package: far Version: 0.6-0 (2005-01-10) License: LGPL-2.1 version 2.14.0 (31-10-2011) du logiciel R). Plus précisement, elle utilise la décomposition de Karhunen Loève du mouvement brownien sur l'intervalle $[\delta, T]$:

$$W_u = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2T} Y_j^* \frac{\sin\left[(j-1/2)\frac{\pi u}{T}\right]}{\pi (j-1/2)}, \qquad u \in [\delta.T]$$

où Y_j^* sont des variables aléatoires i.i.d $N(0,1)$ et où les sommes infinies sont approximées par des sommes finies (cf. [20]). Par la suite, à l'aide de la la méthode d'Euler-Maruyama nous simulons des trajectoires de processus de diffusions définies par les EDS ci dessous. Les graphes sont obtenus par le Logiciel R qui possède des possibilités pour explorer les données et illustrer les comportements des estimateurs.

4.2 1er Cas. Estimation d'un paramètre

Nous simulons les trajectoires de processus de diffusion vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = \left(c_1 \int\limits_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon \, e_1(s) \, ds \right) dt + \varepsilon dW_t & \text{si} \quad t \in [\delta, T] \\ X_s = x_0 & \text{si} \quad -1 \leq s < \delta \end{cases}$$

on choisit $c_1 = 1,\ \delta = 0.1,\ x_0 = 2,\ T = 2$ et $e_1(s) = cos((pi/2) * s)$.

La figure suivante présente une trajectoire observée de $(X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ pour $\varepsilon = 0.9$

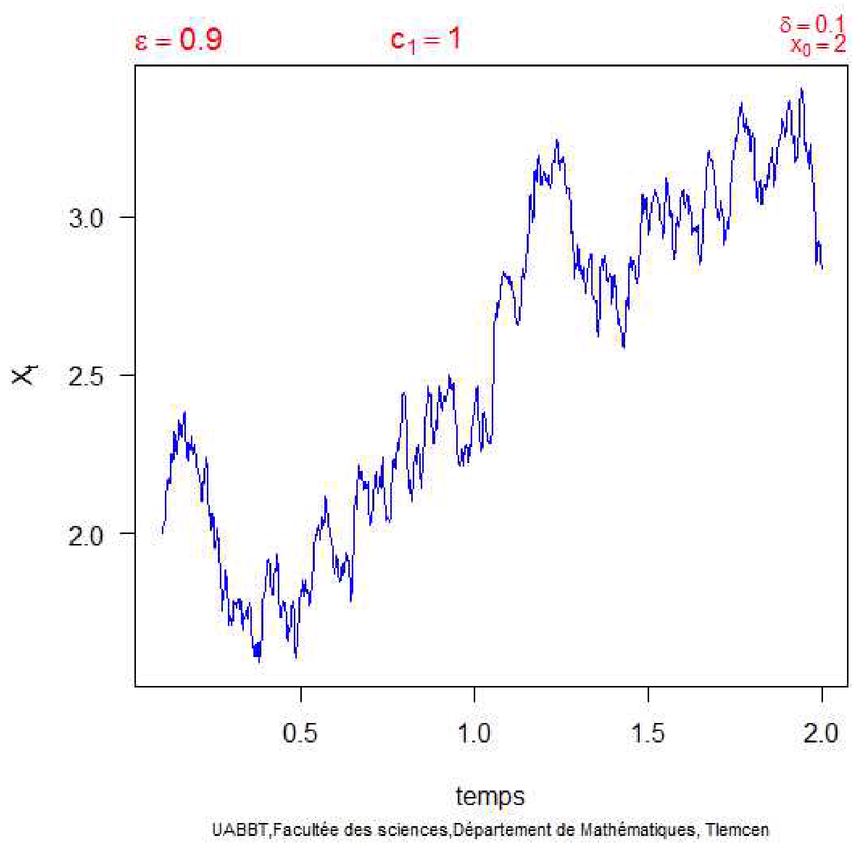

figure 1

La figure suivante présente une trajectoire observée de $(X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ pour $\varepsilon = 0.1$

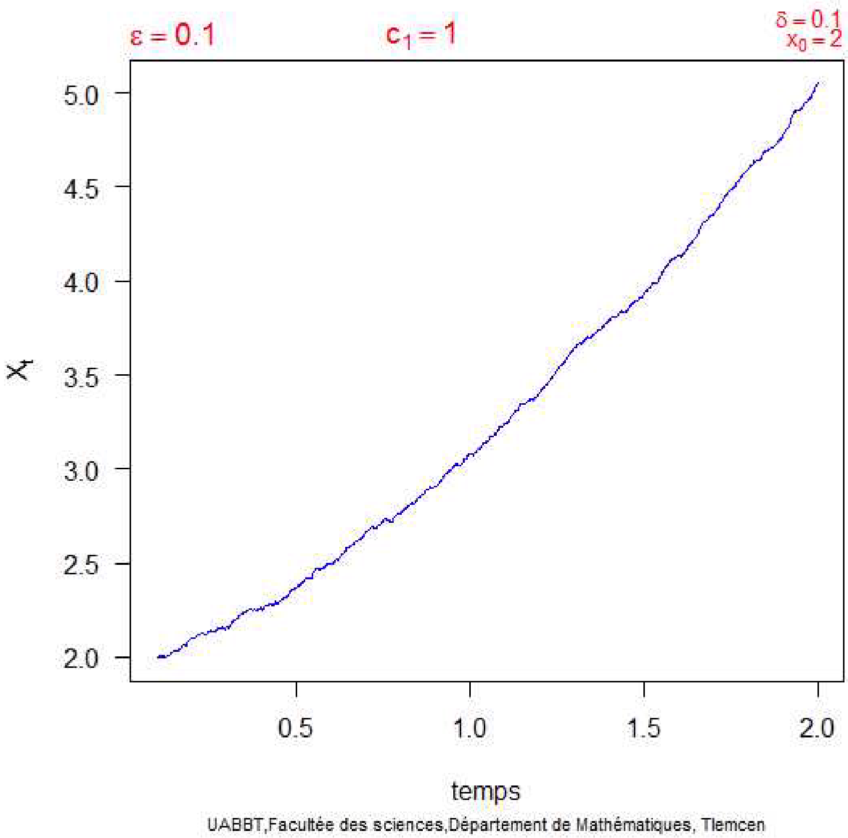

figure 2

4.2.1 Comportement de l'estimateur EMV

La figure 3 présente le comportement de l' estimateur EMV $\hat{c}_1$ du coefficient $c_1 = 1$ quand ε tend vers 0

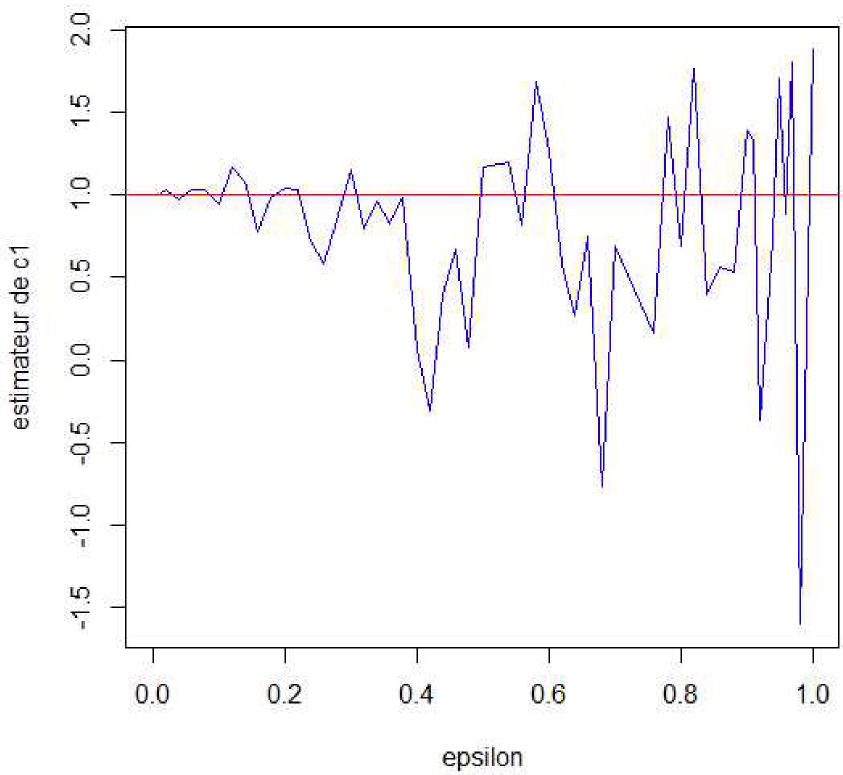

figure 3

4.3 2ème Cas. Estimation de deux paramètres

Nous simulons les trajectoires de processus de diffusion vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{cases} dX_t^{\varepsilon} = \left(c_1 \int\limits_{\delta}^{1} X_{t-s}^{\varepsilon}\, e_1(s)\, ds + c_2 \int\limits_{\delta}^{1} X_{t-s}^{\varepsilon}\, e_2(s)\, ds \right) dt + \varepsilon dW_t & \text{si} \quad t \in [\delta, T] \\ X_s = x_0 \qquad \text{si} \quad -1 \leq s < \delta \end{cases}$$

on choisit $c_1 = 1,\ c_2 = 3,\ \ \delta = 0.1,\ x_0 = 1,\ T = 2,\ e_1(s) = x$ et $e_2(s) = x^2$

La figure suivante présente une trajectoire observée de $(X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ pour $\varepsilon = 0.9$

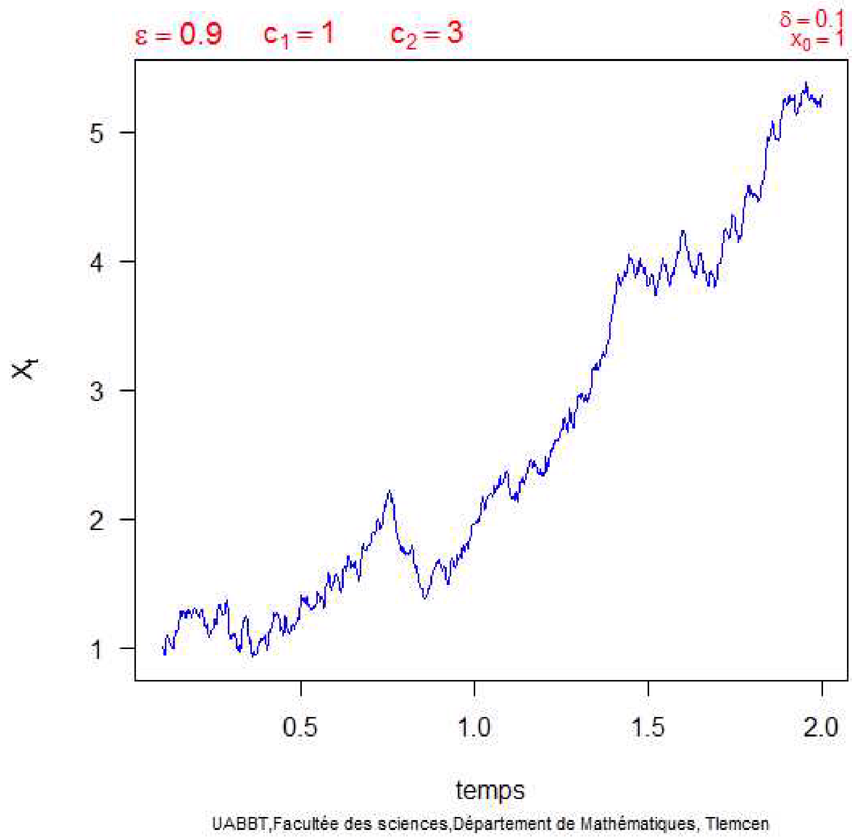

figure 4

La figure suivante présente une trajectoire observée de $(X_t^\varepsilon, t \in [\delta, T])$ pour $\varepsilon = 0.1$

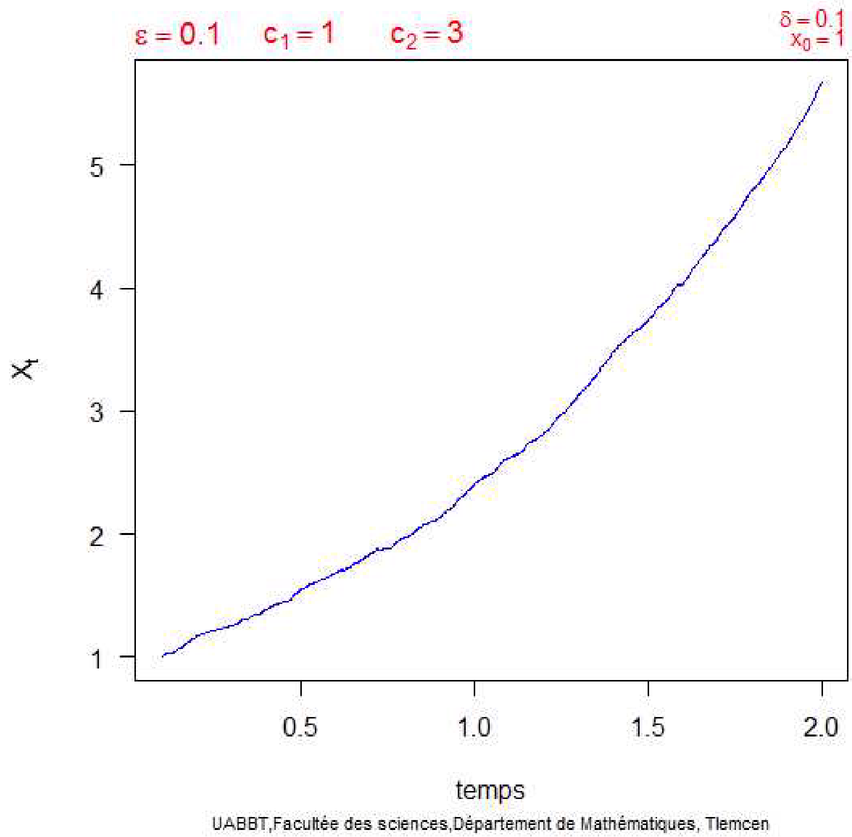

figure 5

4.3.1 Comportement des estimateurs EMV des deux paramètres

La figure 6 présente le comportement de l'estimateur $\hat{c}_1$ de $c_1 = 1$ quand ε tend vers 0

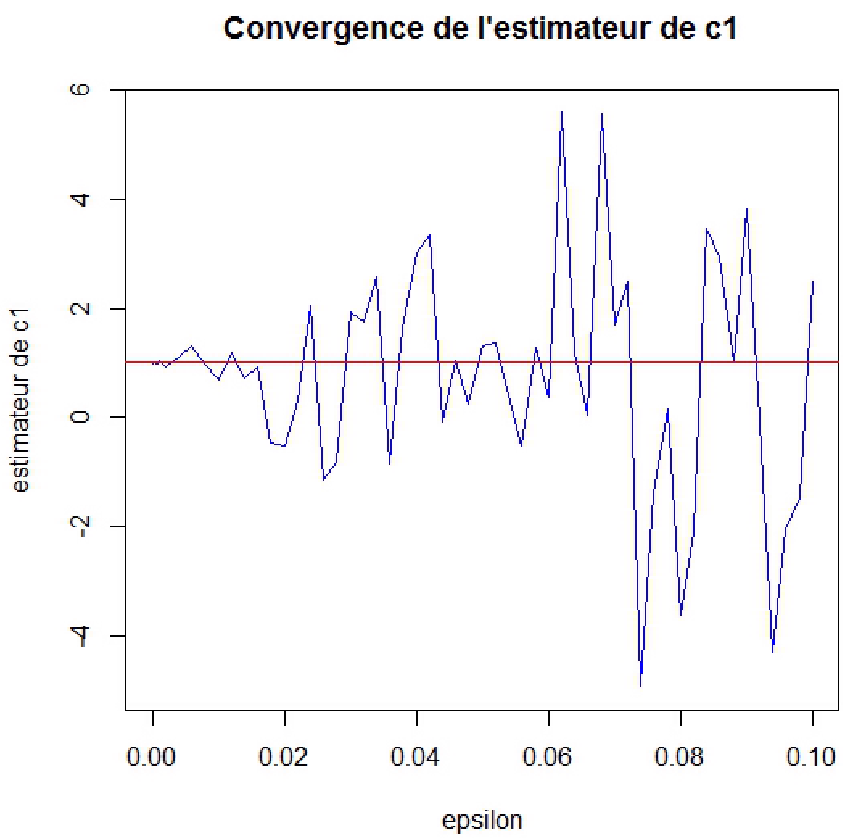

figure 6

La figure 7 présente le comportement de l'estimateur $\hat{c}_2$ de $c_2 = 3$ quand ε tend vers 0

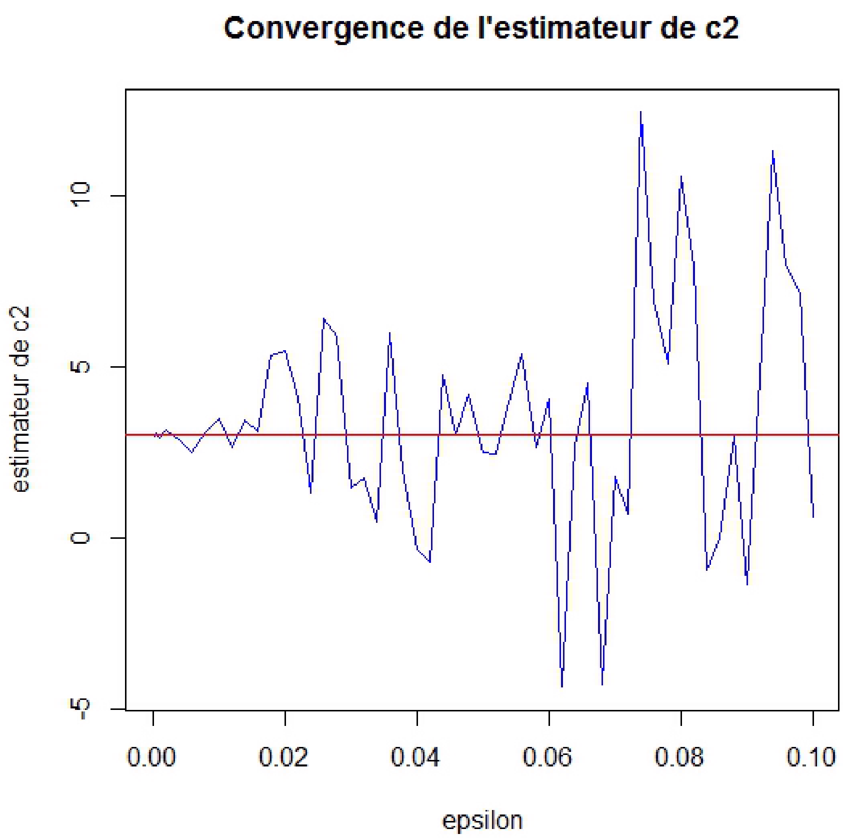

figure 7

4.4 3ème Cas. Estimation de trois paramètres

Nous simulons les trajectoires de processus de diffusion vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{cases} dX_t^{\varepsilon} = \left(c_1 \int\limits_{\delta}^{1} X_{t-s}^{\varepsilon}\, e_1(s)\, ds + c_2 \int\limits_{\delta}^{1} X_{t-s}^{\varepsilon}\, e_2(s)\, ds + c_3 \int\limits_{\delta}^{1} X_{t-s}^{\varepsilon}\, e_3(s)\, ds \right) dt + \varepsilon dW_t & \text{si} \quad t \in [\delta, T] \\ X_s = x_0 & \text{si} \quad -1 \leq s < \delta \end{cases}$$

on choisit $c_1 = 0.5$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $\delta = 0.1$, $x_0 = 1$, $T = 2$, $e_1(s) = x$, $e_2(s) = x^2$ et $e_3(s) = x^3$.

La figure suivante présente une trajectoire observée de $(X_t^{\varepsilon}, t \in [\delta, T])$ pour $\varepsilon = 0.9$

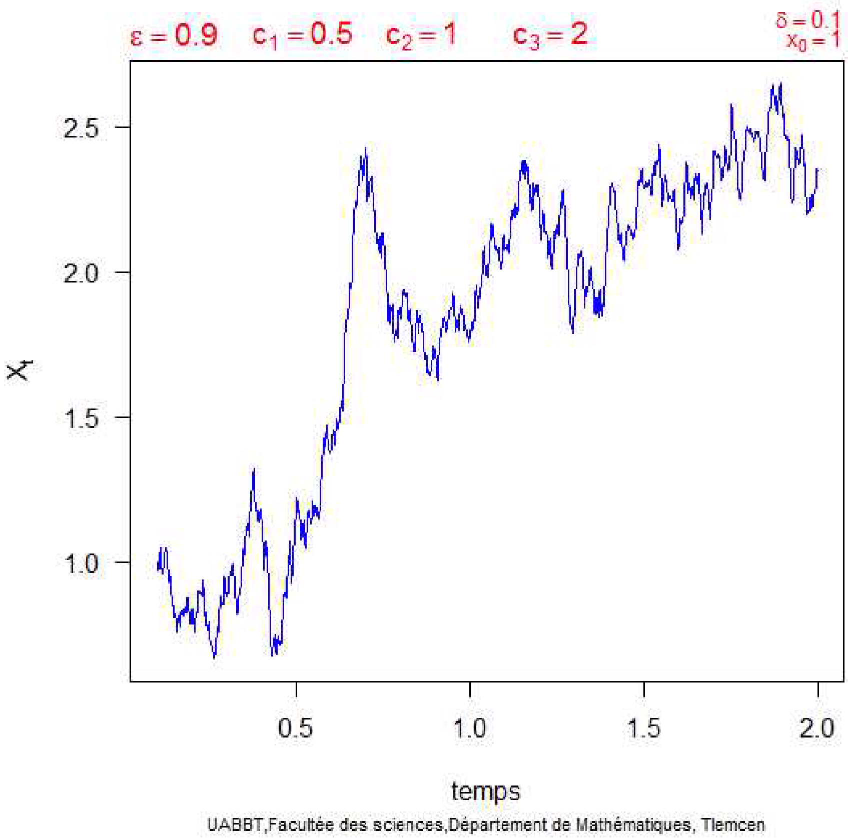

figure 8

La figure suivante présente une trajectoire observée de $(X_t^{\varepsilon}, t \in [\delta, T])$ pour $\varepsilon = 0.1$

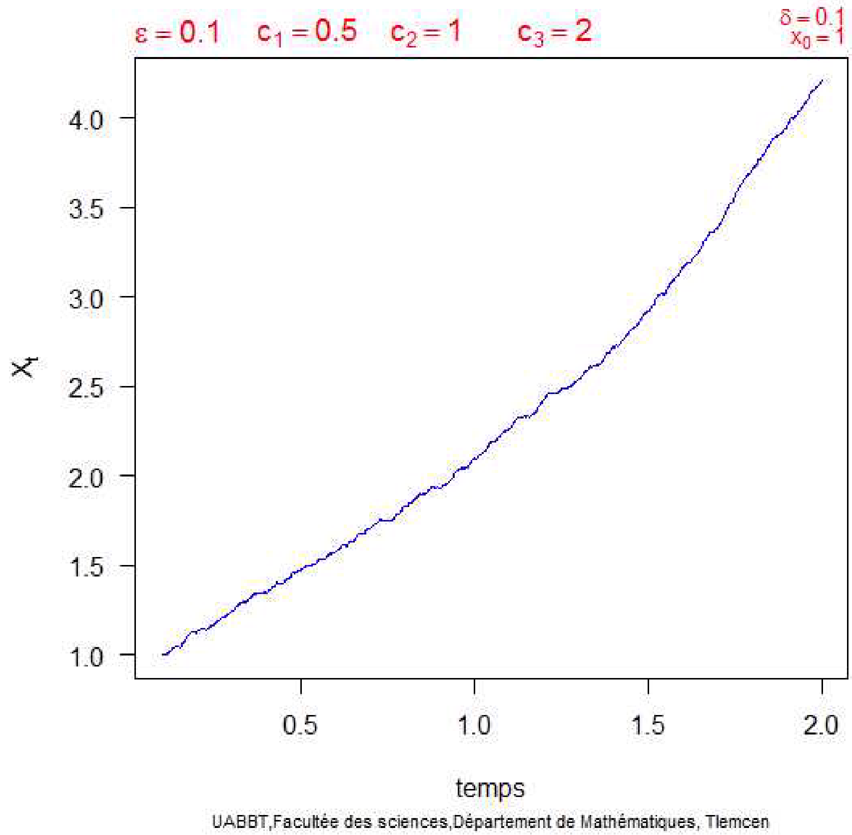

figure 9

4.4.1 Comportement des estimateurs EMV des trois paramètres

La figure 10 présente le comportement de l'estimateur $\hat{c}_1$ de $c_1 = 0.5$ quand ε tend vers 0

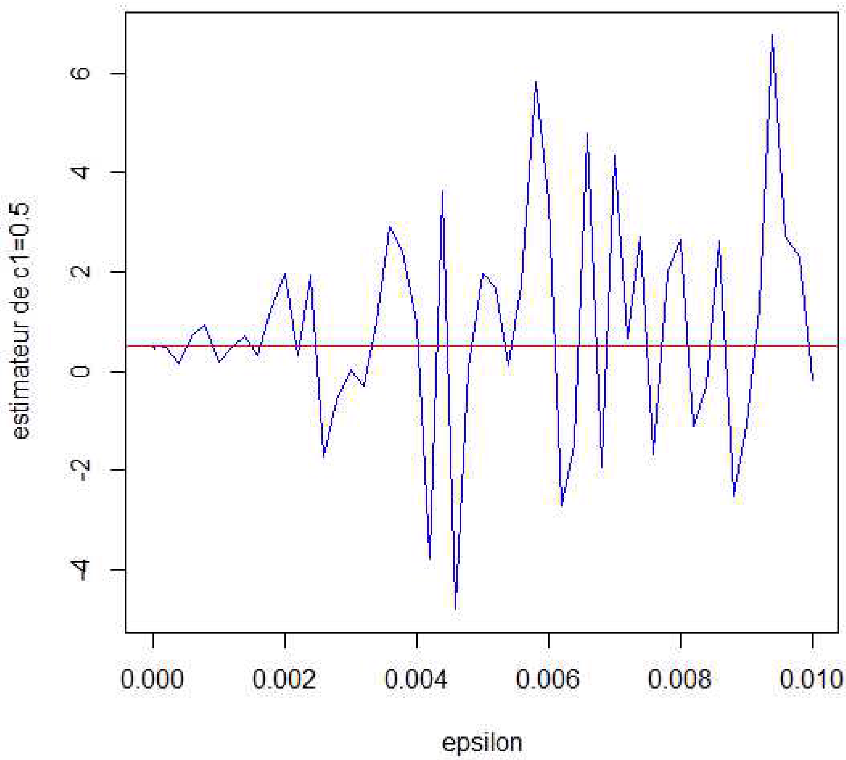

figure 10

La figure 11 présente le comportement de l'estimateur $\hat{c}_2$ de $c_2 = 1$ quand ε tend vers 0

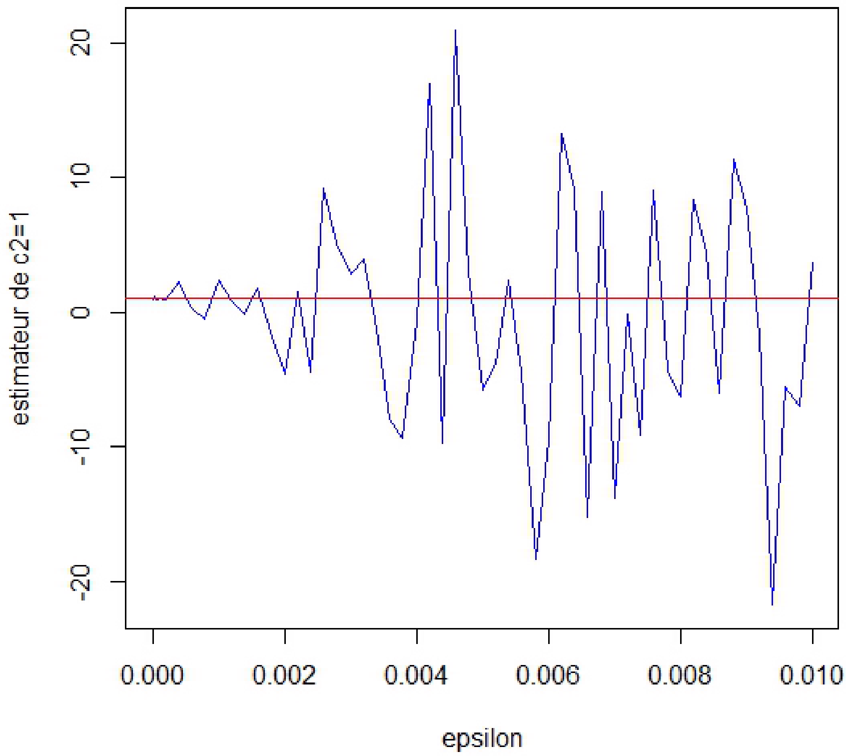

figure 11

La figure 12 présente le comportement de l'estimateur $\hat{c}_3$ de $c_3 = 2$ quand ε tend vers 0

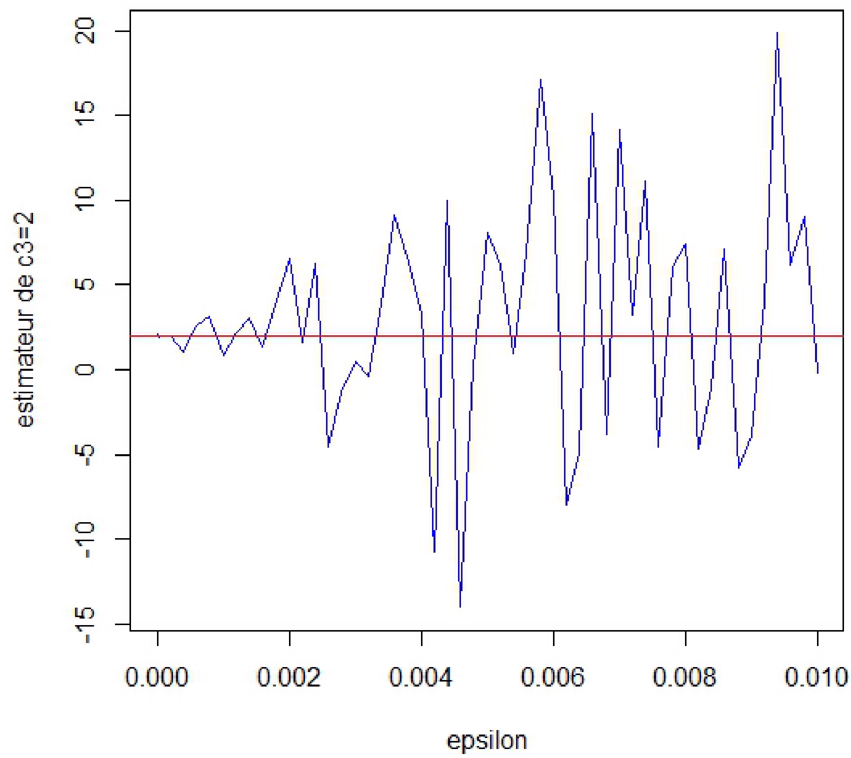

figure 12

4.5 Conclusion

Nous remarquons que dans tous les cas de simulation, un bon comportement des estimateurs quand ε tend vers 0. Dans les simulations précédentes nous avons pris un nombre fini de coefficients (ou paramètres) dans le drift ($L = 1, L = 2, L = 3$), cependant nous pouvons augmenter le nombre de paramètres à estimer mais les formules permettant l'obtention des estimateurs sont plus compliquées à implémenter numériquement.

Conclusion

Dans cette thèse nous avons étudié l'estimation paramétrique d'un drift dans un processus de type diffusion avec une mesure des retards par la théorie générale de Ibragimov-Hasminski [7] et Y. Kutoyants [10]. Nous avons supposé que la mesure des retards admet une densité avec un developpement fini sur un systeme de fonctions données.

Nous avons étudié les estimateurs du maximum de vraisemblance et de Bayes des coefficients de la densité des retards. Nous avons aussi étudié l'estimation de ces coefficients par la distance minimale.

Nous avons aussi présenté des simulations numériques pour illuster le comportement de ces estimateurs.

Nous avons supposé que la densité admet un developpement fini dans un systeme de fonctions ce qui appelle à continuer cette étude dans le cas de developpement infini.

Bibliographie

[1] Billingsley P : *Convergence of probability Measures,* Wiley, New York, 1968.

[2] Boukhetala K-Guidoum A : Sim.Diff Proc: Simulation of Diffusion processes, *2011. R package version 2.0.*

[3] Carletti M : Numerical solution of stochastic differential problems in the biosciences. *Journal of Computational and Applied Mathematics 185, 2006, 422-440.*

[4] Chenggui Y-Xuerong M : Convergence of the Euler–Maruyama method for stochastic differential equations with Markovian switching. *Mathematics and Computers in Simulation 64, 2004, 223–235.*

[5] Genon-Catalot V : Thèse d'état, Centre d'Orsay, 1987.

[6] Hàjek J : Local asymptotic minimax and admissibility in estimation. *In 6-th Proc Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., 1972, 1, 175-194.*

[7] Ibragimov I.A-Hasminski R.Z : *Statistical Estimation: Asymptotic theory.* Springer, New York, 1981.

[8] Küchler U-Kutoyants Yu : Delay estimation for some stationary diffusion-type processes", *Scandinavian Journal of Statistics,* 2000, 27, 3, 405-414.

[9] Küchler U-Sørensen M : A simple estimator for discrete-time samples from affine stochastic delay differential equations. *Stat Infer Stoch Process, 2010 13:125–132*

[10] Kutoyants Yu. : *Parameter Estimation For Stochastic Processus.* Berlin, Heldermann, 1984.

[11] Kutoyants Yu : An example of estimating a parameter of a nondifferentiable drift coefficient", *Theory Probab. Appl., 1988, 33, 1, 175-179.*

[12] Kutoyants Yu : *Identification of Dynamical Systems with small noise*. Kluwer, Dordrecht, 1994.

[13] Kutoyants Yu-Mourid T : Estimation par la distance minimale pour un processus de type de diffusion avec retards.*Annales de ISUP. Vol. 38, Fasc. 2, 1994, 3-18.*

[14] Kutoyants Yu-Mourid T et Bosq D : Estimation paramétrique d'un processus de diffusion avec retards. *Ann. Inst. H. Poincarré Probab.Statist. 28, n° 1, 1992, 95-106.*

[15] Korso Feciane M : Estimation des retards dans une diffusion non linéaire. *Annales de l'ISUP, Vol. 54, Fasc. 3, 2010, 41-65.*

[16] Lipster R.S-Shiryaev A.N : *Statistics of Random Processus*, *vol. 1*, Springer, New York, 2000.

[17] Mourid T : Thèse de Doctorat d'Etat en Sciences, 1995, Université Paris 6.

[18] Mourid T-BenyahiaW : Estimation de la densité des retards dans un processus de type diffusion. *Annales de l'ISUP. Vol. 55, Fasc. 2-3, 2011, 43-64.*

[19] Millar P.W : A general approch to the optimality of minimum distance estimation, Trans. Amer. Math. Soc., 286, 1, 1984, p. 377-418.

[20] Pumo B : Prediction of continuous time processes by C(0.1) - valued autoreghressive process. *Statist. Inf. Stoch. Proc. I, 1998, 139-153.*

[21] Reiss M : Minimax rates for nonparametric drift estimation in affine stochastic delay equations, *Statistical Inference for Stochastic Processes 5(2), 2002, 131-152.*