République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Thèse de doctorat

Spécialité : Analyse Numérique des EDP

présentée par

Attar Ahmed

Soutenue le : 30-05-2013

Problèmes elliptiques et paraboliques non-linéaires avec dépendance du gradient et potentiel de Hardy singulier

Soutenue devant le jury composé de :

M. M. Bouchekif.	Professeur, Université de Tlemcen	Président
M. I. Peral.	Professeur, Université autonome de Madrid	Examinateur
M. S.M. Bouguima.	Professeur, Université de Tlemcen	Examinateur
M. M. Benchohra.	Professeur, Université de Sidi Bel Abbes	Examinateur
M. M.T. Touaoula.	Professeur, Université de Tlemcen	Examinateur
M. B. Abdellaoui.	Maître de Conférences, Université de Tlemcen	Directeur de thèse

Année Universitaire : 2012-2013

Département de Mathématiques
Faculté des sciences
BP 119 Tlemcen

ahm.attar@yahoo.fr

A ma chère mère en témoignage de ma profonde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tous les sacrifices qu'elle me contente, toute la confiance qu'elle m'accordent et tout l'amour dont elle m'entoure.

A mon cher père qui est le plus bon père dans ce monde, grâce à son encouragement, sa confiance et son soutien moral et matériel et pour son amour infini en exprimant mes gratitudes, mon profond amour et ma passion.

A mes chers frères Tarik, Abderrezak et à ma soeur Djalila.

"If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants"

Sir Isaac Newtoon.

Remerciements

Je remercie en priorité **ALLAH LE TOUT PUISSANT** de m'avoir donné le courage, et la force de volonté d'achever ce travail.

Je tiens à adresser en premier lieu mes plus chaleureux remerciements à mon directeur de thèse M. Abdellaoui. B. Il m'a fait l'honneur d'accepter de diriger ma thèse ; il m'a transmis la passion de la recherche mathématique et n'a eu de cesse de m'encourager, et de me soutenir, je souligne aussi que j'ai eu l'opportunité de travailler sous sa direction durant tout mon cursus universitaire licence, Master et finalement en Doctorat vraiment j'etais très chanceux, pour cela je tiens à souligner son engagement total durant toute ma formation, je lui réitére mes remerciements pour ses conseils avisés et ses indications toujours fructueuses, sa capacité et son énorme maitrise qui m'ont facilité d'aborder les problèmes de cette thèse. Je remercie en lui le frère au soutien et à la compréhension sans limites.

Je tiens aussi à remercier M. le Professeur M. Bouchekif, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je prie M. le Professeur Peral. I, de trouver ici l'expression de toute ma gratitude, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury qui examinera cette thèse.

J'adresse à M. le Professeur Bouguima. S. M, l'expression de mes sincères remerciements et de mon entière gratitude, pour faire partie du jury.

Je remercie chaleureusement, M. le Professeur M. Benchohra, d'avoir accepter de participer au jury qui examinera ce manuscrit.

Je renouvelle mes remerciements à M. le Professeur Touaoula. M. T, pour faire partie du jury.

Mes remerciements chaleureux à M. Miri. S. H, qui m'a beaucoup aidé à la réalisation de cette thèse, je salut sa gentillesse, son humilité et sa patience à prodiguer des conseils pertinents.

Je remercie également : M. Touaoula. M. T, M. Moussaoui. A et M. Miri. S. H, qui m'ont facilité d'intégrer leur groupe de recherche et aussi pour leur soutien et encouragements tout au long de ces années.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Notations

Notation	Définition
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Elément de $\mathbb{R}^N$
$r = \|x\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2)}$	Module de x
$Du = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradient de u
Δu	Laplacien de u
$\Delta_p u = \mathrm{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$	p-Laplacien de u
p'	Exposent conjugué de p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$p^* = \frac{Np}{(N-p)}$	Exposent critique de Sobolev
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
supp (u)	Support de la fonction u
$meas(A) = \|A\|$	Mesure de Lebesgue de $A \subset \mathbb{R}^N$
$\\| \cdot \\|_s$	Norme dans l'espace $L^s(\Omega)$
$\\| \cdot \\|_X$	Norme dans l'espace X
B_R	Boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon R centrée à l'origine
$B_R(x_0)$	Boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon R centrée en $x_0 \in \mathbb{R}^N$

Notation	Définition
X'	Espace dual de X
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire dans $I\!R^N$ / crochet de dualité X, X'
$\setminus$	Différence d'ensemble
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Ω' sous ensemble ouvert de Ω avec $\overline{\Omega'} \subset \Omega$
δ_{x_0}	Mesure de Dirac centrée en x_0
$p.p$	Presque partout
$s.c.i.$	Semicontinue inférieurement
$s.c.s.$	Semicontinue superieurement
V^+	Partie positive de la fonction V, $V^+ = \max(V, 0)$
V^-	Partie negative de la fonction V, $V^- = \max(-V, 0)$
$\mathcal{C}(\Omega)$ ou$\mathcal{C}^0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω à support compact
$\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega)$	Espace des fonctions Hölderiennes sur Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Espace des fonctions de classe k dans Ω
$\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)$	Espace des fonctions Hölderiennes de classe k sur Ω
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivable Ω
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{D}^+(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ positives
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace dual de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, c'est à dire espace des distributions
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!R \mid u$ mesurable, $\int_\Omega \lvert u\rvert^p < \infty\}$, $1 \le p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!R \mid u$ mesurable $\exists C$ tal que $\lvert u(x)\rvert \le C$ en p.p. $x \in \Omega$ $\}$
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev, à dérivée jusqu'à l'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace nulle
$W^{-k,p'}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$
$H^k(\Omega)$	$W^{k,2}(\Omega)$
$H_0^k(\Omega)$	$W_0^{k,2}(\Omega)$
$\mathcal{M}(\Omega)$	Espace des mesures de Radon dans Ω

Introduction

Il est maintenant avéré, et même de notoriété publique que les équations aux dérivées partielles non linéaires interviennent dans toutes les branches de la science et de la technologie.

L'analyse mathématique, la résolution des problèmes liés au champs pratique a conduit à développer des outils mathématiques d'analyse non-linéaire comme les méthodes variationnelles, les arguments de compacités, les théorèmes de type points fixes....

Dans cette thèse on s'intéresse à l'étude d'une classe de problèmes non linéaires qui ont un facteur commun : "la présence d'un phénomène singulier" dans un certain sens, qui limite l'usage des méthodes classiques et l'application des résultats connus. Les problèmes singuliers que l'on va considérer peuvent être classés comme suit :

1. Problèmes avec poids singulier : Le poids considéré est en général un poids de type Hardy Sobolev $|x|^{-p}$(dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, avec $0 \in \bar{\Omega}$), notons que dans le cas $p = 2$, ce poids est lié au principe d'incertitude de Heisenberg, voir Fefferman [46]. Il est clair que la présence d'un poids singulier dans une équation elliptique ou parabolique "comme terme de réaction" exige d'imposer une régularité supplémentaire sur les données pour assurer l'existence d'une solution positive, ainsi qu'une perte de régularité pour cette solution, par exemple dans le cas de poids de Hardy-Sobolev la solution positive n'est pas bornée dans un voisinage de l'origine.
2. Problèmes avec terme singulier : Pour cette classe on considère les problèmes avec perturbation singulière de la forme $u^{-\gamma}, \gamma > 0$. Notre but est de prouver que sous la présence d'un terme singulier, vu la présence de

ce dernier on ne peut pas espérer mieux qu'un résultat d'existence "local", cependant on espère obtenir celui ci pour la plus vaste classe de données.

3. Problèmes avec poids et terme singulier : pour cette classe on va étudier l'intéraction entre les deux "termes", on va montrer que dans certains cas, le terme singulier "régularise" l'équation de telle sorte qu'on obtient l'existence d'une solution positive pour une classe très large de données sous la présence de terme singulier. C'est le cas du problème étudié dans le premier chapitre.

Même si cela n'est pas notre but premier, chacun des problèmes traités ici peut avoir une interprétation pratique et plusieurs applications en science ou en technologie.

Le caractère singulier rend les problèmes abordés difficiles mais intéressant ; car beaucoup de problèmes pratiques sont modélisés par la présence d'un terme singulier. C'est l'une des motivations qui nous a amené à faire cette étude.

La thèse est divisée en deux parties principales :

Partie (I). Problèmes elliptiques semi-linéaires et quasi linéaires.

Partie (II). Problèmes Paraboliques.

0.1 Description de la Thèse :

Première Partie : Problèmes Elliptiques

0.1.1 Description du chapitre 1

Dans le premier chapitre on présente les outils d'analyse non linéaires qui seront utilisés pour traiter nos problèmes. Pour les équations elliptiques on définit la notion de la solution au sens d'entropie ainsi que la solution renormalisée. Notons que c'est le cadre naturel pour aborder les solutions avec second membre dans L^1 ou bien mesure de Radon. Les différents principes de Maximum et de comparaison dont on fera l'usage dans ce mémoire sont présentés, comme le principe de Maximum de Brezis-Cabré, le résultat de comparaison de Brezis-Kamin et le résultat de comparaison de Alaa-Pierre qui sera utilisé pour les problèmes avec dépendance en gradient. Pour les problèmes paraboliques, la notion de solutions entropiques est aussi présentée ainsi que le résultat de comparaison d'Abdellaoui-Peral-Primo pour les équations avec gradients. Enfin dans la dernière partie du Chapitre 1 on présente quelques inégalités importantes comme les inégalités de Hardy-Sobolev et l'inégalité de Picone.

0.1.2 Description du chapitre 2

Le chapitre 2 a pour objectif d'étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + \dfrac{h(x)}{u^\gamma} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

Le cas $\lambda = 0$ et $p = 2$ a été étudié par Boccado-Orsina dans [32], plus précisément les auteurs considèrent le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{h(x)}{u^\gamma} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

Sous l'hypothèse que $h \in L^1(\Omega)$, ils ont prouvé l'existence d'une solution distributionnelle. La régularité de la solution est obtenue en fonction de la valeur γ. Notre but est de généraliser les résultats de Boccardo-Orsina au $p-$laplacien et sous la présence de terme singulier $|x|^{-p}$. Il est clair que si $\lambda > \Lambda_{N,p} = \left(\frac{N-p}{p}\right)^p$, alors la seule solution distributionnelle est 0.

En général, la présence d'un terme de réaction $\lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}$ exige une régularité supplémentaire sur h pour obtenir l'existence d'une solution. C'est par exemple le cas quand $p = 2$ et $\gamma = 0$, alors l'existence d'une solution positive est assurée sous la condition que h est un poids admissible dans le sens que $\displaystyle\int_\Omega h|x|^{-\alpha_{1,2}} dx < \infty$, où $\alpha_{1,2}$ est définie par $\alpha_{1,2} = \frac{N-2}{2} - \sqrt{\Lambda_{N,2} - \lambda}$.

Notre but est de prouver que "sous la présence de terme singulier $u^{-\gamma}$", l'existence d'une solution positive pour une classe très vaste de données h et même dans certains cas $h \in L^1(\Omega)$.

On obtient plus précisément les principaux résultats suivants :

Théorème 0.1. Supposons que $\lambda < \Lambda_{N,p}$ alors pour tout $h \in L^1(\Omega)$, le problème (1) admet une solution distributionnelle positive. Plus en détail nous avons :

1. Si $\gamma = 1$, alors il existe une unique solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Si $\gamma > 1$, alors $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ est l'unique solution avec $(T_k(u))^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De plus si $\Big[\gamma(\dfrac{p}{p+\gamma-1})^p - \dfrac{\lambda}{\Lambda_{N,p}}\Big] > 0$, alors $u^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
3. $\gamma < 1$, soit $s \geq \gamma$ est fixé tel que $s(\dfrac{p}{p+s-1})^p - \dfrac{\lambda}{\Lambda_{N,p}} > 0$. Si $h \in L^a(\Omega)$ et $a \geq \dfrac{N(s+p-1)}{N(s+p-1)-(N-p)(s-\gamma)}$, alors le problème (1) a une solution distributionnelle u tel que $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u^{\frac{s+p-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Le problème d'unicité de la solution est aussi étudié suivant les valeurs de λ, γ et la régularité de h.

Pour le cas où h est une mesure de Radon positive concentrée sur un ensemble de Borel E avec $\mathrm{Cap}_{1,p}(\mathrm{E}) = 0$, alors $\forall\gamma$, la seule solution est la solution triviale. L'extension des résultats d'existence pour $I\!R^N$ est obtenu dans la dernière partie du chapitre 2.

0.1.3 Description du chapitre 3

Dans le chapitre 3, on étudie une classe d'équations elliptiques avec dépendance en gradient, plus précisément on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^q + \dfrac{f(x)}{g(u)} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $1 < q \leq 2$, $g : I\!R_+ \to I\!R_+$ est une fonction continue croissante, et f une fonction mesurable positive, vérifiant certaines hypothèses qui seront spécifiées ultérieurement. Notre but est d'étudier l'intéraction entre le gradient $|\nabla u|^q$ et $g(u)$ de telle sorte à obtenir l'existence d'une solution positive distributionnelle pour la classe la plus vaste de f, en particulier pour $f \in L^1(\Omega)$.

Le modèle que l'on va considérer est $g(s) = s^\alpha$, alors pour $\alpha = 0$, l'existence d'une solution positive est assurée sous l'hypothèse que f ait un poids admissible, dans le sens qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_\Omega f(x)|\varphi|^{q'} dx \leq C \int_\Omega |\nabla\varphi|^{q'} \, dx \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega). \tag{4}$$

Il est clair que la condition précédente est vérifiée si $f \in L^s(\Omega)$ pour $s > \frac{N}{q}$.

Le cas où f est une fonction régulière, les auteurs dans [70] et [69], ont prouvé l'existence d'une solution "régulière". L'idée est de construire une bonne sur solution et d'utiliser des arguments de monotonie.

Pour l'existence d'une solution positive, on peut résumer les résultats obtenus dans les points suivants :

1. Pour le cas $q = 2$ on démontre l'existence d'une solution distributionnelle sous la condition que $g(s) \geq Ce^s$ quand $s \to \infty$. Cette condition est en quelque sorte optimale et reflète la régularité exponentielle qu'on peut démontrer dans ce cas pour les problèmes avec dépendance "naturelle" en gradient. L'idée de la preuve est modulo un changement de variable, on peut transformer notre problème en un problème semi linéaire avec un terme singulier.

2. Pour le cas $1 < q < 2$ et $g(s) = s^\alpha$, on ne peut plus procéder comme le cas $q = 2$, "il n'existe pas de changement de variable qui transforme notre problème en un autre problème sans gradient". Donc dans ce cas, on utilise des arguments d'approximation ; on commence par traiter le cas régulier. Si f est "régulière" alors pour tout $\alpha > 0$, on démontre l'existence d'une solution dans l'espace $W_0^{1,2}(\Omega)$. Par contre lorsque $f \in L^1(\Omega)$, on a besoin d'imposer des conditions supplémentaires sur α qui nous permettent de passer à la limite.

Dans le cas où $q = 2$, on peut traiter la question de multiplicité des solutions positive. Ce problème est fortement lié aux problèmes elliptiques avec donnée mesure. Par exemple si μ est une mesure de Radon positive et singulière par rapport à la capacité elliptique et si v est l'unique solution renormalisée du problème

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda f(x)\,(1+v) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\lambda < \lambda_1$ avec $\lambda_1 = Inf\{\frac{\int |\nabla\varphi|^2 dx}{\int f\varphi dx}; \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\}$. Si on pose $u = \log(v+1)$, on trouve que u est une solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^2 + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

On utilise les arguments de [5], et sous des hypothèses de régularité sur f on démontre que le problème (3) admet une infinité de solutions positives. La preuve consiste à trouver une relation entre le problème (3) est une classe de problèmes semi linéaires avec donnée mesure. Enfin des extensions sont données pour le cas où $q < 2$.

Deuxième Partie : Problèmes Paraboliques

0.1.4 Description du chapitre 4

Le chapitre 4 est consacré à l'étude des problèmes paraboliques suivants

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u > 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x) > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{6}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $p \geq 1$ et $0 \in \partial\Omega$.

Notons que la position de 0 par rapport à Ω est très importante pour l'existence et la non existence de solution positive.

Dans le cas où $0 \in \Omega$ et $p = 1$, l'existence d'une solution positive est assurée sous l'hypothèse $\lambda \leq \Lambda_{N,2} = \left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$, voir par exemple [20] et [4] pour une preuve simple.

Si $p > 1$ et $0 \in \Omega$, alors un résultat de non existence de solution distributionnelle locale est prouvé par Brezis-Cabré.

Dans le cas où $0 \in \partial\Omega$, alors le phénomène change complètement. Dans un article récent de Davila-Peral les auteurs montrent que si $1 < p < 2^* - 1$ et Ω est un haltère "Dumbell domain", alors le problème elliptique admet une solution positive variationnelle. Il est clair que pour $p = 1$, l'existence pour le cas elliptique est vérifiée si $\mu(\Omega) \leq \mu(\mathbb{R}^N_+) = \dfrac{N^2}{4}$ est atteinte, où

$$\mu(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2}{\int_\Omega \frac{\varphi^2}{|x|^2}} : \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega),\ \varphi \neq 0 \right\}. \tag{7}$$

Pour $p = 1$ et $\lambda > \mu(\Omega)$, la seule solution du problème elliptique est 0.

Pour le cas parabolique et indépendamment de la géométrie du domaine la situation change complètement par rapport aux résultats de [20] et [34]. Plus précisément on obtient les résultats suivants :

1. Si $p = 1$, on démontre l'existence d'une unique solution faible dans un espace de Sobolev pour tout $\lambda > 0$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$, on analyse aussi le comportement asymptotique de cette solution pour $t \to \infty$.
2. Si $p > 1$, on démontre l'existence d'une solution positive locale sous des hypothèses convenables sur u_0.

A la fin du chapitre on considère un problème parabolique avec un terme convexe-concave. On démontre l'existence d'une solution positive et on analyse le comportement asymptotique de cette solution en fonction de la condition initiale u_0.

0.1.5 Description du chapitre 5

Dans ce chapitre on considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u^\beta |\nabla u|^2 = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} + f & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u(x,0) = u_0(x) > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{8}$$

où $p > 1$, $N \geq 3$, $\Omega \subset I\!R^N$ et $f \in L^1(\Omega_T)$ est un domaine borné avec $0 \in \Omega$ et $\beta > p - 2$.

Si on considère le problème précédent sans le terme de gradient, alors on sait, par le résultat de Brezis-Cabre, que (8) n'admet pas de solution positive locale. L'objectif de ce chapitre est de prouver que le terme de gradient, comme un terme absorbant a un effet régularisant et que le problème admet une solution pour $1 < p < p_1$ où p_1 peut être vu comme le nouveau exposent critique pour (8), pour toute $\lambda > 0$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$.

On commence par étudier le cas stationnaire, on prouve que pour $p < 3$ et pour toute $g \in L^1(\Omega)$, il existe une solution positive w vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta w + w|\nabla w|^2 = \lambda \dfrac{w^p}{|x|^2} + g & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il est clair que sous les'hypothèses $u_0 \leq w$ et $f(x,t) \leq g(x)$ dans Ω_T, on peut prouver l'existence d'une solution positive pour le problème (8) par les méthodes de monotonie.

Pour prouver l'existence d'une solution pour $u_0 \in L^1(\Omega)$ et $f \in L^1(\Omega_T)$ on doit procéder différemment.

L'idée principale est de passer par des problèmes approximés, dont on démontre "facilement" l'existence de solution positive par des méthodes de troncature. En appliquant le principe de comparaison "pour le cas parabolique" on obtient l'existence d'une suite monotone dont les termes sont les solutions des problèmes approximés.

Le passage à la limite se fait en obtenant des estimations apriori. Notons que dans ce cas, en comparaison avec le cas elliptique, on a une difficulté majeure, qui consiste en la présence d'une dérivée temporelle. Pour pallier à cette difficulté on définit une nouvelle régularisation par apport au temps, on passe à la limite dans la suite, on démontre que la limite vérifie le problème final au sens des distributions. Enfin par les résultats de régularisation des problèmes paraboliques avec donnée dans L^1 on récupère la régularité de la limite finale. Des extensions sont données à la fin de ce chapitre.

0.1.6 Description du chapitre 6

Dans le dernier chapitre on donne d'éventuelles extensions, ainsi que des perspectives et des problèmes ouverts liés aux problèmes étudiés.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous présentons quelques outils d'analyse non-linéaire qui seront utilisés au cours de cette thèse. Notons qu'on va étudier deux types de problèmes "elliptiques et paraboliques", nous allons donc subdiviser ce chapitre en quartes sections :
Dans la première section nous faisons appel à des résultats de base, comme les notions des espaces de Sobolev et quelques résultats de compacité d'usage important.
La deuxième section est consacrée aux outils nécessaires pour étudier les problèmes elliptiques, comme le principe de Maximum, de comparaison, et la notion de la solution au sens d'entropie et la solution renormalisée.
Dans la troisième section nous présentons les notions et les arguments nécessaires pour étudier les problèmes paraboliques associés.
Enfin dans la dernière section on présente quelques inégalités pratique liées à nos problèmes.

1.1 Quelques outils dans les espaces de Sobolev

Définition 1.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega);\ \text{tels que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } i = 1...N\}.$$

Il est clair que $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)},$$

ou bien la norme équivalente :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \quad (\text{si} \;\; 1 \le p < +\infty)$$

Si $p = +\infty$, la norme de l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} |\nabla u| \, .$$

Si $p = 2$, alors $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{W^{1,2}(\Omega)} := (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

Définition 1.2. Soit $1 \le p < \infty$, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_0^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif si $1 < p < \infty$.

Lorsque $\Omega = I\!R^N$, on sait que $C_0^1(I\!R^N)$ est dense dans $W^{1,p}(I\!R^N)$, et par conséquent

$$W_0^{1,p}(I\!R^N) = W^{1,p}(I\!R^N).$$

Si Ω est borné alors en utilisant l'inégalité de Poincaré, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme équivalente :

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \Big(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

De la même façon on définit les espaces de Sobolev paraboliques comme suit :

Définition 1.3. Soit $p \ge 1$, on note $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ l'espace de Sobolev parabolique définie par rapport à la norme suivante :

$$||u||_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} = \Big(\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

On présente maitenant un résultat très important dans l'étude des EDP elliptiques c'est le théorème de **Rellich-Kondrachov** qui montre l'injection entre les espaces de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ et certains espaces de Lebesgue, ce résultat de compacité est un outil fort dans l'étude des EDP qui nous permet de passer d'un espace de Sobolev à un espace de Lebesgue.

Théorème 1.1 (**Rellich-Kondrachov**)**.** Soit Ω un domaine borné de $I\!\!R^N$ tel que Ω est de classe C^1,

- Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ avec $p^* = \frac{pN}{N-p}$.
- Si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.
- Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

Si on remplace l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par $W_0^{1,p}(\Omega)$ alors les injections précédentes sont vérifiées indépendament de la régularité du domaine Ω.

Au cours de cette thèse, on va utiliser aussi l'espace de Sobolev $\mathcal{D}^{1,p}(I\!\!R^N)$ défini comme la complétude de $\mathcal{C}_0^\infty(I\!\!R^N)$ par rapport à la norme suivante :

$$||\phi||_{\mathcal{D}^{1,p}(I\!\!R^N)} = \Big(\int_{I\!\!R^N} |\nabla \phi|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

On renvoie le lecteur aux monographiques [12] et [57] pour plus de détails sur la notion des espaces de Sobolev et leurs propriétés.
La notion de troncature est une notion très importante dans l'étude des EDP avec donnée dans L^1 ou bien mesure. Cette notion est basée sur l'usage des fonctions $T_k(s)$ et $G_k(s)$, $k > 0$, définies par :

$$T_k(s) = \begin{cases} s\,, & \text{si}|s| \leq k\,; \\ k\frac{s}{|s|}\,, & \text{si } |s| > k\,; \end{cases}$$

$$T_k(u) = \begin{cases} u, & |u| \leq k, \\ k\dfrac{u}{|u|}, & |u| > k. \end{cases}$$

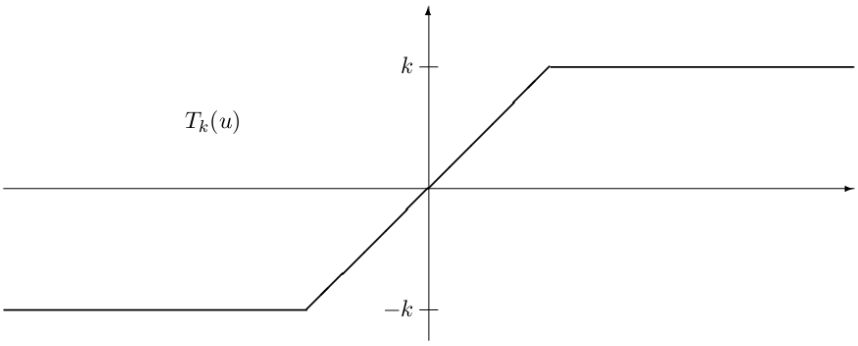

FIGURE 1.1 – La troncature

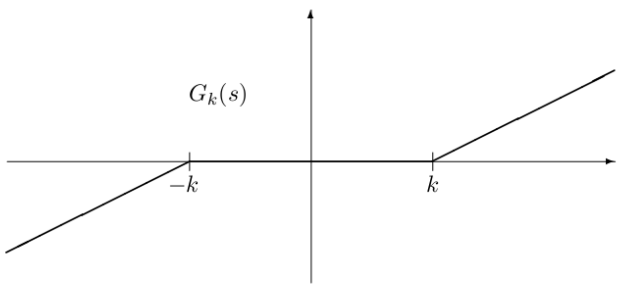

FIGURE 1.2 – La fonction $G_k(s)$

La fonction définie précédement est la suivante :

$$G_k(s) = s - T_k(s)$$

Une autre fonction sera très utile par la suite est la suivante :$\varphi_{k-1} = T_1(G_{k-1}(u))$

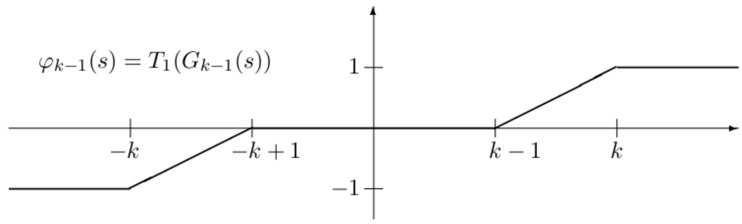

FIGURE 1.3 – La fonction $T_1(G_k(s))$

Comme conséquence, on peut définir les espaces intermédiaires suivants :

Définition 1.4. Soit Ω un sous ensemble de $I\!R^N$, on définit

1. $\tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $k > 0$, $T_k(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$.
2. Pour $p \in]1, \infty[$, $\tau^{1,p}_{loc}(\Omega)$ est le sous ensemble de $\tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$ composé des fonctions u telles que $|\nabla(T_k(u))| \in L^p_{loc}(\Omega)$ pour tout $k > 0$.
3. De même, $\tau^{1,p}(\Omega)$ est le sous ensemble de $\tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$ composé des fonctions u, telles que, de plus $|\nabla T_k(u)| \in L^p(\Omega)$ pour tout $k > 0$.
4. Enfin, $\tau^{1,p}_0(\Omega)$ est le sous ensemble de $\tau^{1,p}(\Omega)$, composé des fonctions qui peuvent être approchées par des fonctions de classe C^1 à support compact dans Ω dans le sens suivant : une fonction $u \in \tau^{1,p}(\Omega)$ appartient à $\tau^{1,p}_0(\Omega)$, si pour tout $k > 0$, il existe une suite $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_0(\Omega)$ tels que

$$\phi_n \to T_k(u) \qquad \text{dans} \quad L^1_{loc}(\Omega),$$

$$\nabla\phi_n \to \nabla T_k(u) \qquad \text{dans} \quad L^p(\Omega).$$

Il est clair que pour tout $p \in [1, \infty[$, on a

1. $W^{1,p}_{loc}(\Omega) \subset \tau^{1,p}_{loc}(\Omega) \qquad \text{et} \qquad W^{1,p}_0(\Omega) \subset \tau^{1,p}_0(\Omega)$.
2. $\tau^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega) = W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$.
3. $\nabla T_k(u) = \nabla u\, \chi_{\{|u|<k\}}$, où χ_A désigne la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^N$.

Notons que si $u \in \tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$, alors ∇u n'est pas défini même au sens des distributions, pourtant on a le lemme suivant qui donne un sens à ∇u, voir [22].

Lemme 1.1. Soit $u \in \tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$, il existe une unique fonction $v : \Omega \to \mathbb{R}^N$ mesurable unique telle que

$$\nabla T_k(u) = v\, \chi_{\{|u|<k\}} \qquad p.p. \tag{1.1}$$

En outre, $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ si et seulement si $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, et alors $v \equiv \nabla u$ dans le sens faible habituel.

Pour étudier les EDP elliptiques ou paraboliques avec données non régulières on va procéder généralement par approximation et après on passe à la limite en utilisant des résultats de compacité appropriés. L'un des résultats les plus importants et qui sera utilisé fréquemment est celui de la régularité de Baras-Pierre dont la preuve se trouve dans [21].

Lemme 1.2. Supposons que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que $\Delta u \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors pour tout $p \in [0, \frac{N}{N-1})$, et pour Ω_1 et Ω_1 tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \Omega$, il existe une constante positive $C \equiv C(p, \Omega_1, \Omega_2, N)$ telle que

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega_1)} \leq C \int_{\Omega_2} (|u| + |\Delta u|) dx. \tag{1.2}$$

De plus, si $u \in L^1(\Omega)$ et $\Delta u \in L^1(\Omega)$, alors l'estimation ci dessus à lieu globalement dans le domaine Ω.

Rappelons que dans notre travail, le lemme de Vitali a une importance capitale. Avant de l'énoncer on a besoin de quelques définitions.

Définition 1.5. (Equi-Intégrabilité dans L^p) Soit X un ensemble mesurable de $I\!R^N$ et $1 \leq p < \infty$. On dit que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$ est equi-intégrable **ssi :** pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $E \subset X$ avec $|E| < \delta$, on a pour tout

$$\int_E |f_n(x)|^p dx \leq \varepsilon \text{ pour tout } n.$$

On présente ici le Lemme suivant qui sera très utile pour montrer les résultats d'existence.

Théorème 1.2. (Théorème de Vitali) Soit X un ensemble de mesure finie pour la mesure de Lebesgue de $I\!R^N$. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(X)$ qui verifie les deux conditions suivantes :

1. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-partout vers f dans X.
2. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est equi-intégrable.

Alors, $\{f_n\}_n$ converge fortement vers f dans $L^1(X)$.

1.2 Notions de base sur les problèmes elliptiques

Comme nous allons considérer des problèmes avec des structures non variationnelles ou bien avec des données non régulières, on se doit de spécifier le sens de notre solution.

Définition 1.6. On dit que u est une solution distributionnelle de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = F(u) \text{ dans } \Omega, \\ \quad u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Si $|\nabla u|^{p-1} \in L^1_{loc}(\Omega)$, $F(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$ et pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla\phi\rangle\, dx = \int_\Omega F(u)\phi\, dx. \tag{1.4}$$

Dans le cas où $F(u) \in L^1(\Omega)$, on peut utiliser la notion des solutions entropiques défini comme suit :

Définition 1.7. Soit $F \in L^1(\Omega)$ et u une fonction mesurable sur Ω. On dit que u est une solution entropique de (1.3) si $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ et pour tout $k > 0$ et pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla(T_k(u-v))\rangle\, dx = \int_\Omega F\, T_k(u-v)\, dx. \tag{1.5}$$

Rappelons que $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$. On utilise le résultat de [22], (on énonce le Théorème suivant).

Théorème 1.3. Soit $F \in L^1(\Omega)$, alors le problème (1.4) admet une unique solution entropique u telle que $|u|^{p-1} \in L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-p}$ et $|\nabla u|^{p-1} \in L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-1}$. Si $p > 2 - \frac{1}{N}$, alors $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < \frac{(p-1)N}{N-1}$.

Pour traiter le cas d'une mesure de Radon générale, on ne peut pas utiliser le concept de la solution entropique car le terme $\int_\Omega T_k(u-v)\,d\mu$ n'est pas en général défini. Dans ce cas, nous avons besoin de la notion de la solution renormalisée. Nous commençons par quelques préliminaires de la théorie de la capacité elliptique.

Définition 1.8. Si $U \subset \Omega$ est un ensemble ouvert, nous définissons

$$Cap_{1,p}(U) = \inf\left\{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} : u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ u \geq \chi_U \text{ presque partout dans } \Omega\right\}$$

(nous allons utiliser la convention que $\inf \emptyset = +\infty$), alors pour tout sous ensemble Borélien $B \subset \Omega$, on pose

$$Cap_{1,p}(B) = \inf\left\{\mathrm{cap_{1,p}(U),\ U \text{ un sous ensemble ouvert de } \Omega,\ B \subset U}\right\}.$$

Soit maintenant μ une mesure de Radon sur Ω. Nous dirons que μ est concentrée sur un sous ensemble Borélien E de Ω, si pour tout ensemble Borélien B, on a $\mu(B) = \mu(B \cap E)$. Notons que $Cap_{1,p}$ est une mesure exterieure, donc on peut utiliser la décomposition de Radon-Nikodym. Plus précisément on a la définition suivante.

Définition 1.9. Une mesure μ_0 est dite absolument continue par rapport à la $Cap_{1,p}$, si $\mu(B) = 0$ pour chaque $B \subset \Omega$ tel que $Cap_{1,p}(B) = 0$.

Définition 1.10. Soit μ est une mesure de Radon positive dans Ω. On dit que μ est singulière par rapport à la capacité $Cap_{1,p}$ si elle est concentrée sur un sous-ensemble $E \subset \Omega$, tel que $\mathrm{Cap_{1,p}(E)} = 0$. On note l'ensemble des mesures positives singulières par $\mathcal{M}_s$.

Comme conséquence de la décomposition de Radon-Nikodym, on a la proposition suivante :

Proposition 1.1. Toute mesure de Radon μ à variation bornée dans Ω se décompose d'une manière unique $\mu = \mu_0 + \mu_s$, μ_0 étant absolument continue par rapport à la $Cap_{1,p}$ et μ_s singulière par rapport à la $Cap_{1,p}$. En outre $\mu_0 \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$ où $W^{-1,p'}(\Omega)$ est le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Voir [30] pour la preuve. On est en mesure maintenent de donner la définition de la solution renormalisée.

Définition 1.11. Soit μ, une mesure de Radon à variation bornée. Une fonction mesurable u est dite solution renormalisée du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \;\text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

si $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall k, ;$ et pour toute fonction continue φ dans Ω on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n\leq u\leq 2n\}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx = \int_\Omega \varphi d\mu_s^+,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\{-2n\leq u\leq -n\}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx = \int_\Omega \varphi d\mu_s^-,$$

et pour toute fonction $h \in W^{1,\infty}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ et pour toute fonction $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$, telles que $\varphi h(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega h(u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi dx + \int_\Omega h'(u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\varphi dx = \int_\Omega \varphi h(u) d\mu_0.$$

$\mu \in M(\bar{\Omega})$ peut être décomposée en $\mu = \mu_0 + \mu_s^+ - \mu_s^-$ où μ_0 est une mesure qui ne chargent pas les ensembles de $p-$capacités nulles $\mu_0 \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$ et μ_s^+ et μ_s^- les parties positives et négatives de $\mu - \mu_0$.

D'après [41], on a le résultat d'existence suivant.

Théorème 1.4. Soit μ une mesure de Radon à variation bornée, alors le problème (1.6) admet une solution renormalisée u telle que $|u|^{p-1} \in L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-2}$ et $|\nabla u|^{p-1} \in L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-1}$. Si de plus $p > 2 - \frac{1}{N}$, alors $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < \frac{(p-1)N}{N-1}$.

Remarque 1.1. Dans le cas où $\mu \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$, alors la notion de solution entropique est confondue avec la notion de solution renormalisée, dans ce cas on a l'existence et l'unicité de la solution. Dans le cas géneral, l'unicité de la solution renormalisée reste un problème ouvert. On renvoie le lecteur à [64] pour plus de détails dans cette direction.

1.2.1 Les principes du maximums et de comparaisons

L'une des méthodes les plus utilisées dans la résolution des EDP de type elliptique et parabolique est la méthode de sous-sur solution. Cette méthode trouve son origine dans les théorèmes de point fixe et les algorithmes d'itération. En général, dans la théorie des EDP, cette méthode est fortement liée au principe du maximum et aux résultats de comparaison. Une généralisation importante du principe de Maximum a été obtenue par Brezis-Cabré dans le lemme suivant dont la preuve se trouve dans [34].

Lemme 1.3. Supposons que $h \geq 0$ appartient à $L^\infty(\Omega)$. Soit v la solution de

$$\begin{cases} -\Delta v = h & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.7}$$

Alors,

$$\frac{v(x)}{\delta(x)} \geq c \int_\Omega h\delta \qquad \forall x \in \Omega,$$

où $c > 0$ est une constante qui depend seulement de Ω et $\delta = dist(x, \partial\Omega)$.

Il existe une version générale pour les opérateurs quasi-linéaires introduite par Abdellaoui-Peral dans [7].

Lemme 1.4. Soit u l'unique solution positive de problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.8}$$

où $f \geq 0$ appartient à $L^\infty(\Omega)$. Alors pour toute boule $B_r \subset \Omega$ telle que $\bar{B}_{4r} \subset \Omega$, alors il existe une constante positive $c \equiv c(r, N, p)$ Alors,

$$\frac{u^{p-1}(x)}{\delta^{p-1}(x)} \geq c \int_{B_{2r}} f(y)dy \qquad \forall x \in \Omega,$$

où $\delta = dist(x, \partial\Omega)$.

Le principe de compaison suivant sera souvent utilisé par la suite.

Théorème 1.5. Principe de comparaison Soit f une fonction positive, continue telle que $\frac{f(x,s)}{s^{p-1}}$ est décroissante pour $s > 0$ où $1 < p$. Si $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sont telles que

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq f(x, u), & u > 0 \text{ in } \Omega, \\ -\Delta_p v \leq f(x, v), & v > 0 \text{ in } \Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

Alors $u \geq v$ dans Ω.

Pour la démonstration on (cite [7]). Comme on s'intérèsse aussi aux problèmes avec dépendance en gradient, on aura besoin d'une généralisation du principe du maximum classique qui a été obtenu par Alaa-Pierre dans [13].

Lemme 1.5. Soit $\vec{a} \in L^{N+\varepsilon}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$, w la solution de

$$w \in W_0^{1,1}(\Omega), \quad \Delta w \in L^1(\Omega),$$

$$\alpha w - \Delta w \leq \vec{a}\nabla w \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Alors $w \leq 0$.

Pour généraliser le Lemme 1.5, on utilisera souvent l'inégalité de Kato, en particulier pour obtenir des estimations a priori.

Lemme 1.6. Inégalité de Kato
Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\Delta u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors on a :

$$\Delta|u| \geq sgn(u)\Delta u \quad \text{au sens de} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

Voir [37] pour la preuve.

1.3 Cas parabolique

Comme dans le cas elliptique, on va présenter dans ce chapitre quelques définitions utiles qui seront utilisées pour étudier les problèmes paraboliques associés. On renvoie le lecteur aux références [23], [24], [25], [28], [41] et [44] pour plus de détails. On commence par la définition suivante qui est la version parabolique de la définition de la solution entropique dans le cas elliptique.

Définition 1.12. Soit $1 \leq p < \infty$, on dit que $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega \times (0,T))$ si $T_k(u) \in L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega))$ pour tout $k > 0$.

Définition 1.13. Soient f, u_0 sont des fonctions mésurables telles que $f \in L^1(\Omega_T)$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$ où $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$. Une fonction $u \in C((0,T); L^1(\Omega))$ est une solution entropique du problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = f \text{ dans } \Omega_T \equiv \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

Si $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega \times (0,T))$ et

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Theta_k(u-v)(T) + \int_0^T \langle v_t, T_k(u-v)\rangle + \int_{\Omega_T} \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla(T_k(u-v))\rangle \\ &= \int_\Omega \Theta_k(u_0 - v(0)) + \int_{\Omega_T} f T_k(u-v), \end{aligned} \tag{1.11}$$

Pour tout $k > 0$ et pour tout $v \in L^p((0,T), W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T) \cap C((0,T); L^1(\Omega))$ avec $v_t \in L^2((0,T); W^{-1,p'}(\Omega))$, où

$$\Theta_k(s) = \int_0^s T_k(t)dt.$$

Notons que

$$\int_\Omega u_t T_k(u)dx = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \Theta(u)dx\right) \text{ où } \int_\Omega \Theta_k(u(t))dx - \int_\Omega \Theta_k(u(0))dx = \int_0^t \int_\Omega u_t T_k(u)dxdt.$$

Le résultat suivant a été prouvé dans [64].

Théorème 1.6. Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^N$ et soient f, u_0 des fonctions mesurables telles que $f \in L^1(\Omega_T)$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$, alors le problème (1.10) admet une et une seule solution entropique

Dans le cas où f est une mesure, on peut définir la solution renormalisée, voir par exemple [63], pour la construction de cette solution et la relation avec la capacité parabolique. Pour étudier les problèmes paraboliques avec dépendance en gradient, on va souvent utiliser le principe de comparaison suivant :

Théorème 1.7. Soit $u,\, v \in \mathcal{C}((0,T); L^1(\Omega)) \cap L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega))$, pour un $p > 1$, avec $|u_t - \Delta u| \in L^1(\Omega_T)$ et $|v_t - \Delta v| \in L^1(\Omega_T)$. Soit une fonction de Caratheodory $H(x,t,s)$ telle que, $H(x,t,\cdot) \in \mathcal{C}^1(I\!R^N)$ pour chaque $(x,t) \in \Omega_T$ avec $\sup_{s \in I\!R^N} |\nabla_s H(x,t,s)| = h(x,t) \in L^{2r}([0,T]; L^{2p}(\Omega))$, pour $p,\, r > 1$ et $\dfrac{N}{2p} + \dfrac{1}{r} < 1$. Supposons que u et v vérifient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_t - \Delta u & \geq & H(x,t,\nabla u) + f \text{ in } \Omega, \\ u(x,0) & = & u_0(x) \text{ in } \Omega, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} v_t - \Delta v & \leq & H(x,t,\nabla v) + f \text{ in } \Omega, \\ v(x,0) & = & v_0(x) \text{ in } \Omega, \end{array} \right. \tag{1.12}$$

où $f \in L^1(\Omega_T)$, $u_0, v_0 \in L^1(\Omega)$ et $v_0(x) \leq u_0(x)$ in Ω. Alors $v \leq u$ in Ω_T.

1.4 Quelques inégalités pratiques

Dans cette dernière section, on va présenter quelques inégalités pratiques qui seront utilisées dans cette thèse et qui sont liées à la nature des problèmes en considération, comme l'inégalité de Hardy-Sobolev dans différents domaines et avec différents poids.

Lemme 1.7. (**Inégalité de Hardy-Sobolev**) Soit Ω un domaine borné de $I\!R^N$, alors on a

1. Si $0 \in \Omega$, alors

$$\Lambda_{N,p} \int_\Omega \frac{|\phi|^p}{|x|^p} dx \leq \int_\Omega |\nabla \phi|^p dx, \text{ pour toute } \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{1.13}$$

avec

$$\Lambda_{N,p} = \left(\frac{N-p}{p} \right)^p. \tag{1.14}$$

La constante $\Lambda_{N,p}$ est optimale, indépendante de Ω, et elle n'est jamais atteinte, voir [47] pour la preuve.

2. Si $0 \in \partial\Omega$, alors

$$\mu(\Omega) = \inf\Big\{\frac{\int_\Omega |\nabla\phi|^2}{\int_\Omega \frac{|\phi|^2}{|x|^2}} : \phi \in W_0^{1,2}(\Omega),\ \phi \neq 0\Big\}. \tag{1.15}$$

avec $\mu(\Omega) \leq \mu(\mathbb{R}^N_+) = \frac{N^2}{4}$, alors la constante $\mu(\Omega)$ est atteinte (pour plus de détail voir [45]).

Puisque la constante n'est pas atteinte "cas où $0 \in \Omega$" nous avons présenté une version améliorée de l'inégalité de Hardy-Sobolev (pour plus de détail voir [4]).

Théorème 1.8. Soit $1 < p < N$ alors pour tout $1 < q < p$, il existe une constante positive $C \equiv C(N,p,q,\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^p dx - \Lambda_{N,p}\int_\Omega \frac{|\varphi|^p}{|x|^p}dx \geq C\Big(\int_\Omega |\nabla\varphi|^q dx\Big)^{\frac{p}{q}},\ \text{pour tout } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

Dans le cas où le poids $|x|^p$ est substitué par $(\delta^p(x) \equiv \text{dist}(x,\partial\Omega))^p$, alors on a une nouvelle version de l'inegalité de Hardy-Sobolev, plus précisément on a le théorème suivant : (l'inégalité de Hardy-Sobolev avec poids suivante sera utilisée pour avoir quelques estimations a priori locales, on se réfère à [53] pour la preuve).

Théorème 1.9. (*L'inégalité de Hardy-Sobolev pondérée*) Soit Ω un domaine régulier de $I\!R^N$ et soit $\delta^\sigma(x) \equiv (\text{dist}(x,\partial\Omega))^\sigma$ où $\sigma \leq 1$, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

1. Si $\sigma < 1$, il existe une constante positive C dépendant seulement de N, Ω et σ telle que pour toute $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$C\int_\Omega \phi^2\delta^{\sigma-2}(x)dx \leq \int_\Omega |\nabla\phi|^2\delta^\sigma(x)dx \tag{1.16}$$

2. Si $\sigma = 1$, alors pour tout $R > 0$ tel que $\Omega \subset\subset B_R(0)$, il existe une constante positive C dépendant seulement de N, R et Ω tel que pour toute $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,

on a

$$C\int_\Omega \frac{\phi^2}{\delta(x)(\log(\frac{R}{\delta(x)}))^2}dx \leq \int_\Omega |\nabla\phi|^2\delta(x)dx \tag{1.17}$$

Notons que dans le cas où $\sigma = 0$, le comportement de l'inégalité de Hardy avec le poids $\delta^2(x)$ est différent par rapport au comportement de l'inégalité de Hardy avec le poids $|x|^2$ au sens que l'inégalité de Hardy avec le poids $\delta^2(x)$ est fortement liée à la géométrie du domaine Ω et la constante optimale est atteignable dans quelques cas particulier. (Voir [36] pour plus de détails). Comme conséquence des inégalités précédentes on a *L'inégalité de Poincaré pondérée*, voir [16] pour des résultats plus généraux.

Théorème 1.10. (*L'inégalité de Poincaré pondérée) Soit Ω est un ouvert borné regulier connexe et considérons l'espace de Sobolev pondéré $W_0^{1,2}(\Omega, w)$ défini comme la complétion de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme suivante :*

$$||\phi||_1 \equiv ||\phi||_{L^2(\Omega,w)} + ||\nabla\phi||_{L^2(\Omega,w)},$$

où $w(x) = \delta^a(x) \equiv (dist(x, \partial\Omega))^a$ avec $a \geq 1$. Alors il existe une constante positive C dépendant seulement de Ω, q et N telle que

$$||u||_{L^2(\Omega,w)} \leq C||\nabla u||_{L^2(\Omega,w)}, \text{ pour toute } u \in W_0^{1,2}(\Omega, w). \tag{1.18}$$

Comme le p-laplacien est un opérateur non linéaire, alors pour prouver des estimations apriori on va utiliser la version générale suivante de l'identité de Picone, ainsi que quelques inégalités algébriques fortement liées à la nature non linéaire de p-laplacien.

Théorème 1.11. (l'inégalité de Picone) Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $-\Delta_p v \geq 0$ est une mesure de Radon bornée $v > 0$, alors pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geq \int_\Omega (\frac{|u|^p}{v^{p-1}})(-\Delta_p v)dx.$$

Lemme 1.8. (**Inégalités algébriques**) Soient ξ_1, $\xi_2 \in I\!R^N$, on a

1) Si $p \leq 2$,

$$|\xi_1 + \xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle\xi_1, \xi_2\rangle \leq C(p)|\xi_2|^p, \tag{1.19}$$

$$|\xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2 - \xi_1\rangle \geq C(p)\frac{|\xi_2 - \xi_1|^2}{(|\xi_2| + |\xi_1|)^{2-p}}. \tag{1.20}$$

2) Si $p > 2$,

$$|\xi_1 + \xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2\rangle \leq \frac{p(p-1)}{2}(|\xi_1| + |\xi_2|)^{p-2}|\xi_2|^2, \tag{1.21}$$

$$|\xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2 - \xi_1\rangle \geq \frac{C(p)}{2^p - 1}|\xi_2 - \xi_1|^p. \tag{1.22}$$

Enfin, pour trouver le comportement asymptotique des solutions des EDP paraboliques, on utilise souvent l'inégalité de Gronwall.

Lemme 1.9. l'inégalité de Gronwall Soit $\eta(.)$ est une fonction nonnégative, et absolument continue sur $[0, T]$, qui satisfait p.p à l'inégalité différentielle

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t), \tag{1.23}$$

où $\phi(t), \psi(t)$, sont des fonctions sommables sur [0,T], alors

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}\Big[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\Big] \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.24}$$

Première partie

Problèmes Elliptiques

Chapitre 2

Problème elliptique avec un terme singulier et poids de Hardy

Ce chapitre est le développement de l'article [2].

2.1 Introduction.

Dans ce chapitre on va étudier le problème elliptique quasi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + \dfrac{h(x)}{u^\gamma} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ qui contient l'origine, $1 < p < N$ et $\gamma > 0$, h est une fonction mesurable non négative vérifiant quelques hypothèses convenables qu'on spécifiera dans chaque cas.

Les problèmes avec terme singulier sont largement traités dans la littérature, on citera par exemple [54], [14], [39],...

Le cas où $p = 2$ et $\lambda = 0$ a été étudié dans [32]. Les auteurs ont prouvé que pour toute fonction $h \in L^1(\Omega)$, il existe au moins une solution distributionnelle, la régularité de la solution est obtenue en fonction de la régularité de h et des valeurs de γ.

Pour le cas où $\lambda > 0$, la situation diffère, si par exemple $\gamma = 0$ et $p = 2$, alors l'existence d'une solution positive est assurée sous une condition additionelle sur l'intégrabilité de h dans un voisinage de l'origine, on renvoie à [8] pour compléter la discussion dans ce cas.

Notons que par un simple changement de variable $v = u^{1-k}$ où $k = \frac{\gamma}{\gamma+p-1}$, on peut transformer le problème (2.1) au problème suivant

$$-\Delta_p v + k(p-1)\frac{|Dv|^p}{v} = \frac{\lambda}{(1-k)^{p-1}}\frac{v^{p-1}}{|x|^p} + \frac{1}{(1-k)^{p-1}}h. \tag{2.2}$$

On renvoit à [27] et [17] pour un résultat plus complet dans cette direction, dans le cas où $\lambda = 0$ et $p = 2$. Le but principal de ce chapitre est d'analyser l'interaction entre le poids de Hardy provenant du terme $\lambda\frac{u^{p-1}}{|x|^p}$ et le terme singulier $u^{-\gamma}$ afin d'obtenir une solution pour la plus grande classe possible de données h, on analyse aussi la régularité des solutions obtenues. Notre objectif est de généraliser les résultats obtenus dans [32], pour le cas $\lambda = 0$ et $p = 2$, ainsi que les résultats de l'article [8] pour $p \neq 2$ et $\lambda > 0$.

Ce chapitre est organisé comme suit : La section 2.2 est dédiée à présenter divers arguments préliminaires, y compris les résultats de compacité qui seront utilisés dans ce chapitre.

Dans la section 2.3 nous obtenons des résultats principaux de l'existence. Notons que les solutions obtenues sont au sens d'entropie défini dans le chapitre précédent. Si $\gamma \geq 1$, alors pour tout $\lambda \leq \Lambda_{N,p}$, nous montrons l'existence d'une solution positive pour tout h dans $L^1(\Omega)$. Si $0 < \gamma < 1$, alors une condition sur λ est nécessaire pour l'obtention d'une solution pour une donnée h dans $L^1(\Omega)$. Dans ce cas nous prouvons également que sous une condition d'integrabilité supplémentaire sur h, on obtient l'existence d'une solution dans un espace de Sobolev convenable choisi pour tout $\lambda \leq \Lambda_{N,p}$. La régularité ainsi que des résultats partiels de l'unicité sont aussi obtenus dans la sous-section 2.4. Le cas d'une mesure de radon bornée est étudié dans la sous section 2.5. Nous prouverons que si $h \equiv \mu$, une mesure singulière par rapport à la $p-$capacité associé à $W_0^{1,p}(\Omega)$,

alors le problème (2.1) n'admet pas de solution positive dans un sens convenable que nous préciserons ultérieurement. La preuve est basée sur l'utilisation des arguments d'approximation et sur l'inégalité de Picone. Dans la dernière section, nous présenterons d'autres extensions et quelques remarques en relation avec les problèmes étudiés.
Notons que u est une solution entropique du problème (2.1) si

$$\lambda\frac{u^{p-1}}{|x|^p}+\frac{h}{u^\gamma}\in L^1(\Omega),$$

on posera alors $F(u)\equiv\lambda\frac{u^{p-1}}{|x|^p}+\frac{h}{u^\gamma}$ dans la définition 1.7. Il est clair que si u est une solution entropique du problème (2.1), alors u est une solution distributionnelle de ce problème. Nous réferons à [22] pour plus de détails sur les propriétés des solutions entropiques.

2.2 Préliminaires et résultats d'existence

Théorème 2.1. Supposons que $1<p$ et $F\in L^1(\Omega)$. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset L^\infty(\Omega)$ telle que $f_n\to F$ fortement dans $L^1(\Omega)$. Considérons $u_n\in W_0^{1,p}(\Omega)$, l'unique solution du problème

$$\begin{cases}-\Delta_p u_n=f_n \text{ dans } \Omega,\\ u_n=0 \text{ sur } \partial\Omega,\end{cases}$$

alors il existe $u\in\mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ telle que u est l'unique solution entropique de (1.3), avec $T_k(u_n)\to T_k(u)$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $|\nabla u_n|^{p-1}\to|\nabla u|^{p-1}$ fortement dans $L^s(\Omega)$ pour tout $s<\frac{N}{N-1}$.

Le résultat de compacité suivant sera utilisé systématiquement dans ce chapitre pour obtenir la convergence forte dans des espaces de Sobolev convenables.

Lemme 2.1. Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions non-négatives telle que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$, $u_n\rightharpoonup u$ faiblement dans $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ et $u_n\le u$ (u_n est croissante en n) pour tout $n\in I\!N$. Supposons que $-\Delta_p u_n\ge 0$, alors $u_n\to u$ fortement dans $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\phi \geq 0$ dans Ω. Puisque $-\Delta_p u_n \geq 0$ et $u_n \leq u$, $\int_\Omega -\Delta_p u_n(u_n - u)\phi\, dx \leq 0$. Il résulte que

$$\int_\Omega (-\Delta_p u_n + \Delta_p u)(u_n - u)\phi\, dx + \int_\Omega -\Delta_p u(u_n - u)\phi\, dx \leq 0.$$

Donc,

$$\begin{gathered}\int_\Omega \Big(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)(\nabla u_n - \nabla u)\phi\, dx + \\ \int_\Omega (u_n - u)\Big(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)\nabla\phi\, dx \\ + \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)\phi\, dx + \int_\Omega (u_n - u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\, dx \leq 0.\end{gathered}$$

Puisque $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega (u_n - u)\Big(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)\nabla\phi\, dx \to 0,$$

et

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)\phi\, dx + \int_\Omega (u_n - u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\, dx \to 0,$$

quand $n \to \infty$. Ce qui implique que

$$\int_\Omega \Big(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)(\nabla u_n - \nabla u)\phi\, dx \leq o(1).$$

Si $p > 2$, on sait que

$$\Big(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)(\nabla u_n - \nabla u)\phi \geq C|\nabla u_n - \nabla u|^p\phi,$$

et alors le résultat en découle.

On considère le cas $p < 2$, dans ce cas d'après (1.20) on a

$$\Big(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)(\nabla u_n - \nabla u)\phi \geq C\frac{|\nabla u_n - \nabla u|^2}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{2-p}}\phi.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder nous arrivons à

$$\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p \phi \, dx \le \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^2 \phi}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{2-p}} dx \Big)^{\frac{p}{2}} \Big(\int_\Omega (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^p \phi \, dx \Big)^{\frac{2-p}{2}}$$
$$\le o(1).$$

Et par suite la preuve est complète. □

En général, on ne peut pas démontrer que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors sous des conditions de controle moins fortes, on peut avoir une compacité "faible". Plus précisement, on a l'extension suivante du lemme précédent.

Lemme 2.2. Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ une suite des fonctions non négative telles que $-\Delta_p u_n \ge 0$. Supposons que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $W_{loc}^{1,q}(\Omega)$ pour un certain q vérifiant $\max\{p-1,1\} < q \le p$ avec $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_{loc}^{1,q}(\Omega)$ et $u_n \le u$ pour tout $n \in I\!N$. Si $q < p$, on suppose encore que la suite $\{T_k(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ pour k fixé. Alors $\nabla T_k(u_n) \to \nabla T_k(u)$ fortement dans $(L_{loc}^p(\Omega))^N$.

Démonstration. le cas $p = 2$ est étudié dans [8] et [61]. On prouve ici le cas général avec une méthode différente et simple. Par un choix convenable de fonctions test, et d'après les hypothèses imposées dans le lemme 2.2, on obtient facilement que

$$||\nabla T_k(u)||_{L^p(K)} \le ||\nabla T_k(u_n)||_{L^p(K)} \text{ pour tout domaine borné } K \subset\subset \Omega.$$

Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ une fonction non négative, puisque $u_n \le u$, alors

$$\int_\Omega -\Delta_p u_n (T_k(u_n)\phi) \, dx \le \int_\Omega -\Delta_p u_n (T_k(u)\phi) \, dx$$
$$\le \int_\Omega \phi |\nabla T_k(u_n)|^{p-2} \nabla T_k(u_n) \nabla T_k(u) \, dx + \int_\Omega T_k(u) |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi \, dx$$
$$\le \frac{1}{p} \int_\Omega \phi |\nabla T_k(u_n)|^p dx + \frac{1}{p} \int_\Omega \phi |\nabla T_k(u)|^p \, dx + \int_\Omega T_k(u) |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi \, dx.$$

Notons que

$$\int_\Omega -\Delta_p u_n (T_k(u_n)\phi) \, dx = \int_\Omega \phi |\nabla T_k(u_n)|^p \, dx + \int_\Omega T_k(u_n) |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi \, dx.$$

Alors, par les calculs précédents il résulte

$$\frac{p-1}{p}\int_\Omega \phi|\nabla T_k(u_n)|^p\,dx \leq$$
$$\frac{p-1}{p}\int_\Omega \phi|\nabla T_k(u)|^p\,dx + \int_\Omega (T_k(u)-T_k(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi\,dx.$$

Donc, on conclut que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega \phi\Big(|\nabla T_k(u_n)|^p - |\nabla T_k(u)|^p\Big)dx \leq 0 \text{ pour toute fonction test positive } \phi.$$

On pose $w_n = \phi T_k(u_n)$ et $w = \phi T_k(u)$ où $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et $\phi \geq 0$, alors $w_n \rightharpoonup w$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Du fait que $w_n \to w$ fortement dans $L^a(\Omega)$ pour tout $a > 0$. Donc par les calculs précédents on obtient facilement que

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty}(||\nabla w_n||_{L^p(\Omega)} - ||\nabla w||_{L^p(\Omega)}) \leq 0.$$

Comme ϕ est arbitrairement choisie, alors on conclut que $\nabla T_k(u_n) \to \nabla T_k(u)$ fortement dans $(L^p_{loc}(\Omega))^N$ et le résultat en découle. □

Observons qu'en utilisant le Théorème de comparaison 1.5, on obtient facilement l'existence d'une unique solution positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + \dfrac{h}{(u+\alpha)^\gamma} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $h \in L^p(\Omega)$ et $\alpha > 0$. Il est clair que $u_\alpha \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De plus, si $0 < \alpha < \beta$, alors $u_\beta \leq u_\alpha$. Puisque, $\lambda > 0$, alors il n'est pas difficile de montrer que $u(x) \to \infty$ quand $|x| \to 0$. Pour avoir plus d'information sur le comportement de la solution au voisinage de l'origine on utilise les résultats obtenus dans [6]. On se réfère aussi à [61], pour une étude complète sur ce sujet, notamment, sous la présence d'un terme de réaction. Soit l'équation suivante :

$$-\Delta_p w = \lambda \frac{w^{p-1}}{|x|^p}. \tag{2.4}$$

On cherche une solution radiale de (2.4), alors on pose $w(x) = C\,|x|^{-\alpha}$, il résulte que

$$\frac{-1}{r^{N-1}}\left(|w'|^{p-2}\,w'r^{N-1}\right)' = \lambda w^{p-1}r^{-p}.$$

Donc on obtient l'équation algébrique suivante :

$$D(\alpha) \equiv (p-1)\,\alpha^{p} - (N-p)\,\alpha^{p-1} + \lambda = 0 \tag{2.5}$$

Sous les hypothèses $\lambda < \Lambda_{N,p} \equiv \left(\frac{N-p}{p}\right)^{p}$, l'équation (2.5) possède exactement deux solutions $\alpha_{1,p} < \frac{N-p}{p} < \alpha_{2,p}$. On remarquera que si $\lambda = 0$, alors $\alpha_{1,p} = 0$ et $\alpha_{2,p} = \frac{N-p}{p-1}$, tandis que si $\lambda = \Lambda_{N,p}$, $\alpha_{1,p} = \alpha_{2,p}$.
Si $0 < \lambda < \Lambda_{N,p}$, alors $D'(\alpha) = 0$ si et seulement si $\alpha = \frac{N-p}{p}$, et c'est l'unique minimum de D. Si $p = 2$, alors $\alpha_{1,2} = \frac{N-2}{2} - \sqrt{\Lambda_{N,2} - \lambda}$ et $\alpha_{2,2} = \frac{N-2}{2} + \sqrt{\Lambda_{N,2} - \lambda}$.
Nous commençons par prouver le résultat suivant qui nous donne une information sur le comportement local d'une sur-solution quelconque dans un voisinage de l'origine.

Lemme 2.3. Soit $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, une sur-solution nonnegative du problème (2.4), alors si $u \not\equiv 0$, il existe une constante positive C et une petite boule $B_r(0) \subset\subset \Omega$ tel que

$$u \geq C|x|^{-\alpha_{1,p}} \text{dans} \quad B_r(0), \tag{2.6}$$

où $\alpha_{1,p}$ est définit précédemment .

Démonstration. La preuve contient une simple modification des arguments utilisés dans [6]. Nous incluons ici une brève description de la preuve. Notons que, puisque $u \gneq 0$, alors par le principe de maximum fort nous obtenons que $u \geq \eta > 0$ dans une petite boule $B_r(0) \subset\subset \Omega$. Fixons une boule $B_r(0)$ et considérons le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p w_n = \lambda \dfrac{w_{n-1}^{p-1}}{|x|^p} & \text{dans } B_r\,(0)\,, \\ w_n = \eta & \text{sur } \partial B_r\,(0) \end{cases} \tag{2.7}$$

avec $w_0 \equiv 0$. Par un procédé d'itération et par le principe de comparaison nous obtenons que $u \geq w_n$. En revanche, il n'est pas difficile de montrer que w_n converge vers w, où w résout

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \lambda \dfrac{w^{p-1}}{|x|^p} & \text{dans } B_r(0), \\ w = \eta & \text{sur } \partial B_r(0). \end{cases} \tag{2.8}$$

Observons qu'on peut choisir $C > 0$ telle que $w_1(x) = C|x|^{-\alpha_{1,p}}$, et aussi une solution de (2.8).
Il clair que $w \leq w_1$, pour montrer que $w = w_1$ nous suivons scrupuleusement les arguments utilisés dans [7]. Du fait que

$$\frac{-\Delta_p w_1}{w_1^{p-1}} - \frac{-\Delta_p w}{w^{p-1}} = 0,$$

alors, en utilisant $(w_1 - w)_+$ comme fonction test dans l'équation précédente et suivons les arguments de [7] nous obtenons que $(w_1 - w)_+ = 0$. Ce qui implique $w = w_1$ et alors

$$u \geq C\,|x|^{-\alpha_{1,p}} \text{ dans } B_r(0). \tag{2.9}$$

□

2.3 Résultats d'existence pour donnée dans $L^1(\Omega)$.

Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + \dfrac{h(x)}{u^\gamma} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.10}$$

où h est une fonction nonnegative, $\gamma > 0$ et $\lambda < \Lambda_{N,p}$. Le résultat d'existence principal dans cette section est le théorème suivant.

Théorème 2.2. Supposons que $\gamma \geq 1$ et $\lambda < \Lambda_{N,p}$ alors pour tout $h \in L^1(\Omega)$, le problème (2.10) admet une solution distributionelle positive. Plus précisement

1. Si $\gamma = 1$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

2. Si $\gamma > 1$, alors $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ avec $(T_k(u))^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De plus si $\Big[\gamma(\dfrac{p}{p+\gamma-1})^p - \dfrac{\lambda}{\Lambda_{N,p}}\Big] > 0$, alors $u^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $h_n = T_n(h)$ et considérons u_n l'unique solution positive du problème approximé

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \lambda \dfrac{u_n^{p-1}}{|x|^p} + \dfrac{h_n(x)}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

Puisque $T_n(h)$ est une fonction croissante en n, alors en utilisant le résultat de comparaison du Théorème 1.5 nous concluons que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante en n. Pour obtenir le résultat d'existence principal, on va prouver des estimations apriori sur $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et après on passe à la limite dans un espace convenable. On sépare la preuve en deux cas.

Premier cas : $\gamma = 1$.

Prenons u_n comme une fonction test dans (2.11), on trouve

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p\,dx - \lambda \int_\Omega \frac{u_n^p}{|x|^p}\,dx \leq \int_\Omega \frac{h_n u_n}{u_n + \frac{1}{n}}\,dx \leq \int_\Omega h\,dx = C, \tag{2.12}$$

par l'inégalité de Hardy-Sobolev, il résulte que

$$(1 - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p}}) \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \leq C.$$

Donc $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et alors il existe u telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u_n \uparrow u$ fortement dans $L^a(\Omega)$ pour tout $a \leq p^*$. Puisque $-\Delta_p u_n \geq 0$, en utilisant la monotonie de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et par le Lemme de compacité 2.1 nous obtenons facilement que $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Donc nous concluons que u résout le problème (2.10).

Deuxième cas : $\gamma > 1$

Puisque $\gamma > 1$, alors en utilisant $G_k(u_n)$ comme fonction test dans (2.11) nous arrivons à

$$\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^p \, dx - \lambda \int_\Omega \frac{u_n^{p-1} G_k(u_n)}{|x|^p} \, dx \leq \int_\Omega \frac{h_n G_k(u_n)}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} \, dx. \tag{2.13}$$

Puisque $G_k(u_n) = 0$ si $u_n \leq k$, alors

$$\int_\Omega \frac{h_n G_k(u_n)}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} \, dx \leq \frac{1}{k^{\gamma-1}} \int_\Omega h \, dx.$$

Notons que pour tout $a, b \geq 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{cases} (a+b)^\sigma \leq a^\sigma + b^\sigma & \text{if} \quad \sigma \leq 1 \\ (a+b)^\sigma \leq (1+\epsilon)^{\sigma-1} a^\sigma + (1+\frac{1}{\epsilon})^{\sigma-1} b^\sigma & \text{if} \quad \sigma > 1. \end{cases}$$

Puisque $u_n^{p-1} G_k(u_n) = (G_k(u_n) + k)^{p-1} G_k(u_n)$, alors en utilisant les inégalités algébriques précédentes, on obtient que

$$u_n^{p-1} G_k(u_n) \leq (1+\varepsilon)^{p-2} (G_k(u_n))^p + (1+\frac{1}{\varepsilon})^{p-2} k^{p-1} G_k(u_n) \quad \text{si } p \geq 2,$$

et

$$u_n^{p-1} G_k(u_n) \leq (G_k(u_n))^p + k^{p-1} G_k(u_n) \text{ si } p < 2.$$

D'où, grâce à (2.13), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^p \, dx - \lambda (1+\varepsilon)^{p-2} \int_\Omega \frac{(G_k(u_n))^p}{|x|^p} \, dx \leq \\ &\lambda (1+\frac{1}{\varepsilon})^{p-2} k^{p-1} \int_\Omega \frac{(G_k(u_n))}{|x|^p} \, dx + \frac{1}{k^{\gamma-1}} \int_\Omega h \, dx \end{aligned} \tag{2.14}$$

si $p \geq 2$, et

$$\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^p \, dx - \lambda \int_\Omega \frac{(G_k(u_n))^p}{|x|^p} \, dx \leq \lambda k^{p-1} \int_\Omega \frac{(G_k(u_n))}{|x|^p} \, dx + \frac{1}{k^{\gamma-1}} \int_\Omega h \, dx \tag{2.15}$$

si $1 < p < 2$. Puisque $\lambda < \Lambda_{N,p}$, choisissons ε suffisament petit (dans le cas $p \geq 2$) et par l'inégalité de Hardy-Sobolev nous concluons

$$C(\varepsilon, \lambda, \Lambda_{N,p}) \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^p \, dx \leq \lambda k^{p-1} \int_\Omega \frac{(G_k(u_n))}{|x|^p} \, dx + C(k, h). \tag{2.16}$$

Par les inégalités de Hölder, Young et Hardy-Sobolev il s'ensuit que

$$\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^p\,dx \le C(\varepsilon, k, \lambda, \Lambda_{N,p}, h). \tag{2.17}$$

Utilisons $(T_k(u_n))^\gamma$ comme fonction test dans (2.11), en tenant compte de l'estimation (2.17), il résulte que

$$\int_\Omega (T_k(u_n))^{\gamma-1}|\nabla T_k(u_n)|^p\,dx \le C(k, \lambda, h). \tag{2.18}$$

Notons que $-\Delta_p u_1 \ge \dfrac{h_1}{(u_1+1)^\gamma}$, alors par le principe de maximum fort, il en découle que pour tout ensemble compact $K \subset\subset \Omega$, $u_1 \ge c(K) > 0$ dans K. Par conséquent en utilisant le fait que $u_n \ge u_1$ pour tout n, on obtient que $u_n \ge c(K) > 0$ dans K. En combinant cette dernière affirmation et l'estimation (2.18), on obtient que $\{T_k(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$.

Alors par (2.17) nous concluons que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Donc il existe $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ et $u_n \uparrow u$ fortement dans $L^a_{loc}(\Omega)$ pour tout $a \le p^*$. Comme dans le premier cas, en utilisant le fait que $-\Delta_p u_n \ge 0$ et la monotonie de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, on peut prouver que $u_n \to u$ fortement $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ et alors $(T_k(u_n))^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \to (T_k(u))^{\frac{\gamma+p-1}{p}}$ fortement dans $W^{1,p}_0(\Omega)$. D'où le résultat d'existence dans ce cas.
Si $\gamma(\frac{p}{p+\gamma-1})^p - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p}} > 0$, alors on peut prendre u_n^γ comme fonction test dans (2.11), on obtient alors

$$[\gamma(\frac{p}{p+\gamma-1})^p - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p}}]\int_\Omega |\nabla u_n^{\frac{p+\gamma-1}{p}}|^p\,dx \le C.$$

Donc d'après les mêmes arguments utilisés dans les cas précédents, on obtient l'existence d'une solution positive u telle que $u^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \in W^{1,p}_0(\Omega)$. □

Remarque 2.1. Dans le cas extrémal $\lambda = \Lambda_{N,p}$, nous pouvons prouver l'existence d'une solution dans les deux cas suivants :

1. Si $\gamma = 1$, alors en combinant l'estimation (2.12) et l'inégalité de Hardy-

Sobolev améliorée Théorème 1.8, établie dans [4], on obtient que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q dx \leq C \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et pour tout } q < p.$$

Alors $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < p$ et donc $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,q}(\Omega)$. Il est clair que u résout (2.10), au moins dans le sens distributionnel.
Montrons que $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,q}(\Omega)$. Soit $g_n \equiv \lambda \dfrac{u_n^{p-1}}{|x|^p} + \dfrac{h_n}{u_n + \frac{1}{n}}$, par le fait que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < p$ et par la monotonie de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on trouve facilement que $g_n \to g \equiv \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + \dfrac{h}{u}$ fortement dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Par conséquent, une simple variation du résultat de compacité obtenu dans [22], nous permet de prouver que $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω. La convergence forte de $\{|\nabla u_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^q(\Omega)$, pour tout $q < p$ est obtenu en utilisant un simple argument d'interpolation dans les espaces de Lebesgue. Donc l'affirmation en découle.

2. Si $\gamma > 1$ et $1 < p < 2$, alors en utilisant l'estimation (2.15), l'inégalité de Hardy-Sobolev améliorée, de (Théorème 1.8) ([4] pour plus de détail), et pour q proche de p, on obtient la bornitude de la suite $\{G_k(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < p$. De la même manière, comme dans la preuve du "deuxième cas" du Théorème2.2, il résulte que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_{loc}^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < p$. Donc $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_{loc}^{1,q}(\Omega)$. Suivons la même discussion comme dans le cas 1 et en utilisant le résultat de compacité du Lemme 2.2, on peut prouver que $u_n \to u$ fortement dans $W_{loc}^{1,q}(\Omega)$ et que u résout (2.10).

Dans le cas $\gamma < 1$, nous avons le résultat d'existence suivant.

Théorème 2.3. Supposons que $\gamma < 1$ et $\lambda < \Lambda_{N,p}$. Soit $s \geq \gamma$ fixé tel que $s(\dfrac{p}{p+s-1})^p - \dfrac{\lambda}{\Lambda_{N,p}} > 0$. Si $h \in L^a(\Omega)$ et $a \geq \dfrac{N(s+p-1)}{N(s+p-1)-(N-p)(s-\gamma)}$, alors le problème (2.10) admet une solution distributionelle u telle que $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u^{\frac{s+p-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. En utilisant $(G_k(u_n))^s$ comme fonction test dans (2.11), il découle que

$$s\int_\Omega (G_k(u_n))^{s-1}|\nabla G_k(u_n)|^p\,dx = \lambda\int_\Omega \frac{(G_k(u_n))^s u_n^{p-1}}{|x|^p}\,dx + \int_\Omega \frac{h_n(G_k(u_n))^s}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma}\,dx. \tag{2.19}$$

Il est clair que

$$s\int_\Omega (G_k(u_n))^{s-1}|\nabla G_k(u_n)|^p\,dx = s(\frac{p}{p+s-1})^p\int_\Omega |\nabla (G_k(u_n))^{\frac{s+p-1}{p}}|^p\,dx.$$

Alors en utilisant les hypothèses sur s et suivant les calculs de la preuve du « deuxième cas » dans le Théorème 2.2, on obtient que

$$\Big(s(\frac{p}{p+s-1})^p - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p}}\Big)\int_\Omega |\nabla (G_k(u_n))^{\frac{s+p-1}{p}}|^p\,dx \le C(k) + \int_\Omega \frac{h_n(G_k(u_n))^s}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma}\,dx. \tag{2.20}$$

Analysons la dernière intégrale dans l'estimation précédente. Puisque $s \ge \gamma$, alors par les inégalités de Hölder et Sobolev, il résulte que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{h_n(G_k(u_n))^s}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma}\,dx &\le \int_\Omega h_n(G_k(u_n))^{s-\gamma}\,dx \\ \le \Big(\int_\Omega (G_k(u_n))^{\frac{(s+p-1)p^*}{p}}\,dx\Big)^{\frac{p(s-\gamma)}{(s+p-1)p^*}} &\Big(\int_\Omega h^{\frac{N(s+p-1)}{N(s+p-1)-(N-p)(s-\gamma)}}\,dx\Big)^{1-\frac{(N-p)(s-\gamma)}{N(s+p-1)}} \\ &\le C\Big(\int_\Omega |\nabla (G_k(u_n))^{\frac{s+p-1}{p}}|^p\,dx\Big)^{\frac{(s-\gamma)}{(s+p-1)}}.\end{aligned}$$

Ainsi, en mettant ensemble, la dernière estimation et (2.20) nous trouvons

$$\Big(\int_\Omega |\nabla (G_k(u_n))^{\frac{s+p-1}{p}}|^p\,dx\Big) \le C(k,h,s).$$

Puisque $\gamma < 1$, en tenant compte l'estimation ci-dessus, on peut prouver facilement que la suite $\{T_k(u_n)^{\frac{s+p-1}{p}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Donc nous concluons que la suite $\{u_n^{\frac{s+p-1}{p}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$; d'où l'existence d'une fonction mesurable u telle que $u_n^{\frac{s+p-1}{p}} \rightharpoonup u^{\frac{s+p-1}{p}}$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Il n'est pas difficile de montrer que u est une solution de (2.10) dans le sens des distributions. Suivant l'argument de compacité utilisé dans la preuve du Théorème 2.2, on peut prouver que $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$u_n^{\frac{s+p-1}{p}} \to u^{\frac{s+p-1}{p}}$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Remarque 2.2. Si $\gamma(\dfrac{p}{p+\gamma-1})^p - \dfrac{\lambda}{\Lambda_{N,p}} > 0$, en choisissant $s = \gamma$ dans les calculs ci-dessus il en résulte que le problème (2.10) a une solution u pour tout $h \in L^1(\Omega)$. De plus, $u^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dans le cas $p = 2$, on peut améliorer le résultat du Théorème 2.3 dans le sens suivant.

Théorème 2.4. Supposons que $\lambda < \Lambda_{N,2}$ et soit $h \in L^1(\Omega)$ une fonction non négative telle que $h|x|^{-(1-\gamma)\alpha_{1,2}} \in L^1(\Omega)$ où $\alpha_{1,2} = \frac{N-2}{2} - \sqrt{(\frac{N-2}{2})^2 - \lambda}$, alors le problème (2.10)(et $p = 2$) admet au moins une solution distributionnelle.

Démonstration. Soit u_n l'unique solution positive du problème approximé (2.11) (pour $p = 2$), en posant $v_n = |x|^{\alpha_{1,2}} u_n$, il s'ensuit que v_n résout le problème suivant :

$$- \operatorname{div}(|x|^{-\alpha_{1,2}} \nabla v_n) = |x|^{-(1-\gamma)\alpha_{1,2}} \frac{h_n}{(v_n + \frac{1}{n})^\gamma}. \tag{2.21}$$

Il est clair que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de n. En utilisant v_n^γ comme une fonction test dans (2.21), on obtient que

$$\gamma(\frac{2}{\gamma+1})^2 \int_\Omega |x|^{-\alpha_{1,2}} |\nabla v_n^{\frac{\gamma+1}{2}}|^2 \, dx = \int_\Omega \frac{h_n}{|x|^{(1-\gamma)\alpha_{1,2}}} \, dx \le \int_\Omega \frac{h}{|x|^{(1-\gamma)\alpha_{1,2}}} \, dx = C.$$

Par conséquent, nous concluons que la suite $\{v_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace de Sobolev avec poids $W_0^{1,2}(|x|^{-\alpha_{1,2}}, \Omega)$. Donc $v_n^{\frac{\gamma+1}{2}} \rightharpoonup v_0^{\frac{\gamma+1}{2}}$ faiblement dans $W_0^{1,2}(|x|^{-\alpha_{1,2}}, \Omega)$. Puisque $\gamma < 1$, alors par un calcul direct, il résulte que

$$-\operatorname{div}(|x|^{-\alpha_{1,2}} \nabla v_n^{\frac{\gamma+1}{2}}) \ge 0.$$

Donc par la monotonie de $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et le résultat de compacité du Lemme (2.2), on peut prouver que $v_n^{\frac{\gamma+1}{2}} \to v_0^{\frac{\gamma+1}{2}}$ fortement dans $W_0^{1,2}(|x|^{-\alpha_{1,2}}, \Omega)$. En passant à la limite dans (2.21), il en résulte que v_0 résout

$$-\operatorname{div}(|x|^{-\alpha_{1,2}} \nabla v_0) = |x|^{-(1-\gamma)\alpha_{1,2}} \frac{h}{v_0^\gamma}$$

au moins dans le sens des distributions. Définissons maintenant $u_0 = |x|^{-\alpha_{1,2}} v_0$, alors $u_0^{\frac{\gamma+1}{2}} \in W_0^{1,2}(|x|^{\gamma\alpha_{1,2}}, \Omega)$, $\lambda \dfrac{u}{|x|^2} \in L^1(\Omega)$ et u_0 résout

$$-\Delta u = \lambda \frac{u}{|x|^2} + \frac{h(x)}{u^\gamma}$$

au moins dans le sens des distributions. □

2.4 Résultats de régularité et d'unicité

Dans cette section on considère le problème de régularité de la solution obtenue dans la section précédente en fonction de la régularité de h et la valeur de γ. Pour $s \geq 0$ et $\lambda < \Lambda_{N,p}$, nous avons défini $K(s) = s\Big(\dfrac{p}{p+s-1}\Big)^p - \dfrac{\lambda}{\Lambda_{N,p}}$. Une étude rapide montre que K atteint son maximum pour $s = 1$ et $K(1) = 1 - \dfrac{\lambda}{\Lambda_{N,p}} > 0$.

Théorème 2.5. Supposons que $\gamma \geq 1$ et $h \in L^m(\Omega)$ pour $m \geq 1$. Soit u_0 la solution du problème (2.10) obtenu dans le Théorème 2.2. Alors

1. Si $m \geq \dfrac{N}{p}$, alors $u_0^{\frac{p+s-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $s \geq \gamma$ tel que $K(s) > 0$.
2. Si $m < \dfrac{N}{p}$, alors $u_0^{\frac{p+s-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ où $s = \frac{(p-1)N + m'\gamma(N-p)}{m'(N-p)-N}$, $m' = \frac{m}{m-1}$, si $K(s) > 0$.

Démonstration. Notons que grâce au résultat obtenu dans le Lemme 2.3, il est facile de voir que $u_0 \notin L^\infty(\Omega)$. Supposons que $m \geq \frac{N}{p}$ et soit u_n l'unique solution du problème approximé (2.11). En prenant u_n^s comme fonction test dans (2.11), et par les inégalités de Hölder et Hardy-Sobolev il résulte que

$$\Big(s(\frac{p}{p+s-1})^p - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p}}\Big)\int_\Omega |\nabla u_n^{\frac{s+p-1}{p}}|^p\, dx \leq \Big(\int_\Omega h_n^m\, dx\Big)^{\frac{1}{m}} \Big(\int_\Omega u_n^{(s-\gamma)m'}\, dx\Big)^{\frac{1}{m'}}.$$

Puisque $m \geq \frac{N}{p}$, alors $(s-\gamma)m' < (s+p-1)\frac{N}{N-p}$ pour tout $s > 0$. Donc, en choisissant s telle que $s \geq \gamma$ et $K(s) > 0$, et par l'inégalité de Sobolev, nous concluons que

$$\Big(s(\frac{p}{p+s-1})^p - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p}}\Big)\int_\Omega |\nabla u_n^{\frac{s+p-1}{p}}|^p\,dx \leq C||h||_{L^m}\Big(\int_\Omega |\nabla u_n^{\frac{s+p-1}{p}}|^p\,dx\Big)^{\frac{s-\gamma}{s+p-1}}.$$

Par conséquent on obtient que $\{u_n^{\frac{s+p-1}{p}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, d'où l'existence d'une solution distributionelle u_0 avec $u_0^{\frac{s+p-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors le résultat s'ensuit dans ce cas. Supposons maintenant que $1 < m < \frac{N}{p}$ et soit $s = \frac{(p-1)N+m'\gamma(N-p)}{m'(N-p)-N}$, donc $s \geq \gamma$ et $(s-\gamma)m' = (s+p-1)\frac{N}{N-p}$. Par conséquent, prenons u_n^s comme fonction test dans (2.11), en utilisant les inégalités de Hölder, Hardy et Sobolev et le fait que $K(s) > 0$, il résulte que

$$\Big(s(\frac{p}{p+s-1})^p - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p}}\Big)\int_\Omega |\nabla u_n^{\frac{s+p-1}{p}}|^p\,dx \leq C||h||_{L^m}\Big(\int_\Omega |\nabla u_n^{\frac{s+p-1}{p}}|^p dx\Big)^{\frac{s-\gamma}{s+p-1}}.$$

Alors $\{u_n^{\frac{s+p-1}{p}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et donc $u_0^{\frac{s+p-1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, qui est la régularité souhaitée. □

Remarque 2.3. Dans le cas où $m \geq \frac{N}{p}$, en utilisant l'inégalité de Soblev et par un argument d'itération il découle que $u_0 \in L^{\frac{(s+p-1)N}{N-p}}(\Omega)$. Donc, pour tout $a > 0$, il existe $\lambda_a > 0$ telle que si $\lambda < \lambda_a$, alors $u_0 \in L^a(\Omega)$.

On va analyser maintenant la question d'unicité. Plus précisement nous prouvons le théorème suivant.

Théorème 2.6.

1. Si $\gamma = 1$, alors pour tout $h \in L^1(\Omega)$, le problème (2.10) admet une unique solution positive $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Si $\gamma > 1$, alors pour tout $h \in L^1(\Omega)$ et $\operatorname{Supp} h \subset\subset \Omega$, le problème (2.10) admet une unique solution positive $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
3. Si $\gamma < 1$, alors pour tout $h \in L^m(\Omega)$ et $m = \frac{pN}{Np+\gamma(N-p)-N+p} = (\frac{p^*}{1-\gamma})'$ le problème (2.10) admet une unique solution positive $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. Nous donnons la preuve dans le cas $\gamma = 1$, les autres cas sont obtenus par un raisonnement similaire. Supposons que $\gamma = 1$, par le résultat du

Théorème 2.2, le problème (2.10) admet une solution minimale $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ une autre solution de (2.10), alors $u_1 \geq u_0$. En utilisant l'inégalité de Picone dans le Théorème 1.11 appliquée à u_0 et u_1, il s'en suit que

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^p \, dx \geq \int_\Omega (\frac{u_1^p}{u_0^{p-1}})(-\Delta_p u_0) \, dx = \lambda \int_\Omega \frac{u_1^p}{|x|^p} \, dx + \int_\Omega \frac{h u_1^p}{u_0^p} \, dx.$$

Donc

$$\int_\Omega h u_1^p (\frac{1}{u_1^p} - \frac{1}{u_0^p}) \, dx \geq 0.$$

Puisque $u_0 \leq u_1$, alors nous concluons que $\int_\Omega h u_1^p (\frac{1}{u_1^p} - \frac{1}{u_0^p}) \, dx = 0$ et par conséquence

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^p \, dx = \int_\Omega (\frac{u_1^p}{u_0^{p-1}})(-\Delta_p u_0) \, dx.$$

D'après les résultats de [15] et [7] on obtient que $u_0 = c u_1$ pour $c > 0$. En prenant en considération que u_0, u_1 sont deux solutions du problème (2.10), il résulte que $c = 1$ et donc $u_1 = u_0$. □

2.5 Cas d'une donnée mesure

Le résultat principal dans cette section est le théorème suivant.

Théorème 2.7. Soit μ une mesure de Radon positive concentrée sur un ensemble de Borel E tel que $Cap_{1,p}(E) = 0$. Soit $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des fonctions bornées positive telles que $h_n \rightharpoonup \mu$ dans la topologie des mesures. Soit u_n l'unique solution positive du problème approximé

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \lambda \dfrac{u_n^{p-1}}{|x|^p} + \dfrac{h_n(x)}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.22}$$

alors

1. Si $\gamma = 1$, alors $u_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Si $\gamma > 1$, alors $u_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$.

3. Si $\gamma < 1$ et $\gamma(\frac{p}{p+\gamma-1})^p - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p}} > 0$, alors $u_n^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \rightharpoonup 0$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. Puisque μ_s est une mesure singulière par rapport à la capacité $\mathrm{Cap_{1,p}}$, voir la definition 1.10, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble ouvert $U_\varepsilon \subset\subset \Omega$ tel que $E \subset U_\varepsilon$ et $\mathrm{Cap_{1,p}(U_\varepsilon)} < \varepsilon$. Par la définition de la capacité, (voir définition 1.8), on obtient l'existence d'une fonction $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\phi_\varepsilon \geq 0$, $\phi_\varepsilon \equiv 1$ dans U_ε et

$$\int_\Omega |\nabla \phi_\varepsilon|^p dx < \varepsilon.$$

En utilisant l'inégalité de Picone, voir Théorème 1.11, nous obtenons que

$$\int_\Omega \frac{-\Delta_p(u_n + \frac{1}{n})}{(u_n + \frac{1}{n})^{p-1}} |\phi_\varepsilon|^p dx \leq \int_\Omega |\nabla \phi_\varepsilon|^p dx \leq \varepsilon.$$

Donc,

$$\int_{U_\varepsilon} \frac{h_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma+p-1}}\, dx \leq \varepsilon.$$

Maintenant, par l'inégalité de Hölder, on trouve que

$$\begin{aligned}
\int_{U_\varepsilon} \frac{h_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma}}\, dx &\leq \Big(\int_{U_\varepsilon} \frac{h_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma+p-1}}\, dx\Big)^{\frac{\gamma}{p+\gamma-1}} \Big(\int_{U_\varepsilon} h_n\, dx\Big)^{\frac{p-1}{p+\gamma-1}} \\
&\leq C\Big(\int_{U_\varepsilon} \frac{h_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma+p-1}}\, dx\Big)^{\frac{\gamma}{p+\gamma-1}} \leq C\varepsilon^{\frac{\gamma}{p+\gamma-1}}.
\end{aligned}$$

Nous affirmons que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{h_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma}} \phi\, dx = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{h_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma}} |\phi|\, dx &\leq ||\phi||_\infty \int_{U_\varepsilon} \frac{h_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma}}\, dx + \int_{\Omega\setminus U_\varepsilon} \frac{h_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma}} |\phi|\, dx \\
&\leq \parallel \phi \parallel_\infty \varepsilon + \int_{\Omega\setminus U_\varepsilon} \frac{h_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma}} |\phi|\, dx.
\end{aligned}$$

Puisque $\mu(\Omega \setminus U_\varepsilon) = 0$, on peut choisir une suite $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de telle sorte que

$\mathrm{Supp}\,(h_n) \subset U_\varepsilon$ si $n \geq n_0$. Alors

$$\int_{\Omega\setminus U_\varepsilon} \frac{h_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} |\phi|\, dx = 0 \text{ si } n \geq n_0.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{h_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} \phi\, dx = 0 \tag{2.23}$$

et l'affirmation en est déduite. En utilisant le même calcul et par l'inégalité de Hölder, il n'est pas difficile de voir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{h_n}{(u_n + \frac{1}{n})^a} \phi\, dx = 0 \text{ pour tout } a > 0 \text{ et pour tout } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega). \tag{2.24}$$

Rappelons que $\gamma \geq 1$. Si $\gamma = 1$, en suivant les arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 2.2, on obtient que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si $\gamma > 1$, nous pouvons prouver que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ et $\{(T_k(u_n))^{\frac{\gamma+p-1}{p}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, alors en utilisant le fait que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega -\Delta_p u_n \phi\, dx = \int_\Omega -\Delta_p u \phi\, dx$$

et par le résultat de l'affirmation précédente, nous concluons que

$$-\Delta_p u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.25}$$

Si $\gamma = 1$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, puisque $\lambda \leq \Lambda_{N,p}$, alors $u \equiv 0$.
En supposant que $\gamma > 1$, en suivant les arguments de la preuve du Théorème 2.2, on obtient facilement que $G_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Par un argument d'approximation, nous pouvons prendre $G_k(u)$ comme fonction test dans (2.25), donc

$$\int_\Omega |\nabla G_k(u)|^p\, dx = \lambda \int_\Omega \frac{(G_k(u))^p}{|x|^p}\, dx.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Hardy-Sobolev, nous concluons que $G_k(u) = 0$ pour tout $k > 0$ et alors $u \equiv 0$.
On considère maintenant le cas $0 < \gamma < 1$ et $\gamma(\frac{p}{p+\gamma-1})^p - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p}} > 0$. D'après le

résultat du Théorème 2.3 et la Remarque 2.2 nous savons que la suite $\{u_n^{\frac{\gamma+p-1}{p}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors, il existe une sous-suite encore notée $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $u_n^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \rightharpoonup u^{\frac{\gamma+p-1}{p}}$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Il est clair que u résout (2.25), alors, en utilisant un argument d'approximation, on peut prendre u^γ comme fonction test dans (2.25) pour obtenir que

$$\gamma \int_\Omega u^{\gamma-1}|\nabla u|^p\,dx = \lambda \int_\Omega \frac{u^{\gamma+p-1}}{|x|^p}\,dx.$$

Puisque $\gamma(\frac{p}{p+\gamma-1})^p - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p}} > 0$, alors $u \equiv 0$ et le résultat en découle. □

Nous traitons maintenant le cas où $\mu = \mu_s + f$ avec $f \in L^1(\Omega)$ et $\mu_s \in \mathcal{M}_s$. Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions bornées non négatives telles que $g_n \rightharpoonup \mu$ dans la topologie de mesures et $f_n \to f$ fortement dans $L^1(\Omega)$. Nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.8. Soit u_n l'unique solution positive du problème approximé (2.22), avec donnée $h_n = g_n + f_n$, alors il existe une solution distributionelle u_0 du problème

$$-\Delta_p u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} + \frac{f}{u^\gamma} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.26}$$

De plus,

1. Si $\gamma = 1$, alors $u_n \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Si $\gamma > 1$, alors $u_n \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$.
3. Si $0 < \gamma < 1$ et $\gamma(\frac{p}{p+\gamma-1})^p - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p}} > 0$, alors $u_n^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \rightharpoonup u_0^{\frac{\gamma+p-1}{p}}$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. Par les mêmes arguments que ceux de la preuve du Théorème (2.7), nous obtenons que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{g_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma}\phi\,dx = 0 \text{ pour toute } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Soit w_n l'unique solution positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p w_n = \lambda \dfrac{w_n^{p-1}}{|x|^p} + \dfrac{f_n(x)}{(w_n + \frac{1}{n})^\gamma} & \text{dans } \Omega, \\ w_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Comme $u_n \geq w_n \geq w_1$ pour tout $n \geq 1$, alors pour tout ensemble compact K de Ω, on a $u_n \geq C(K) > 0$ pour tout n.

Si $\gamma \geq 1$, alors par le résultat de régularité obtenu dans le Théorème 2.7, il résulte que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$(resp. dans $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$) si $\gamma = 1$(resp. si $\gamma > 1$). Donc on obtient l'existence de $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$(resp. dans $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$) telle que $u_n \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (resp. $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$). Il est clair que u résout (2.26).

Si $\gamma < 1$ et $\gamma(\dfrac{p}{p+\gamma-1})^p - \dfrac{\lambda}{\Lambda_{N,p}} > 0$, par le résultat de régularité du Théorème 2.8, on peut prouver que $u_n^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \rightharpoonup u_0^{\frac{\gamma+p-1}{p}}$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et que u_0 résout le problème (2.26). □

2.6 Remarques et Extensions.

Dans le cas d'un domaine non borné, le poids $|x|^{-p}$ est dégeneré a l'infini, alors pour assurer l'éxistence on a besoin d'ajouter des conditions sur h ou γ. Dans cette section on considère le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$. Nous avons le résultat d'existence suivant.

Théorème 2.9. Considérons le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + \dfrac{h(x)}{u^\gamma} & \text{dans } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.27}$$

Alors

1. Si $\gamma = 1$, alors pour tout $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$, le problème (2.27) admet une solution $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

2. Si $\gamma > 1$, alors pour tout $h \in L^1(I\!R^N)$, le problème (2.27) admet une solution u telle que $G_k(u) \in \mathcal{D}^{1,p}(I\!R^N)$ et $(T_k(u))^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \in \mathcal{D}^{1,p}(I\!R^N)$, pour tout $k > 0$. De plus si $\gamma(\dfrac{p}{p+\gamma-1})^p - \dfrac{\lambda}{\Lambda_{N,p}} > 0$, alors $u^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \in \mathcal{D}^{1,p}(I\!R^N)$.
3. Si $\gamma < 1$ et $\gamma(\frac{p}{p+\gamma-1})^p - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p}} > 0$, alors pour tout $h \in L^1(I\!R^N)$, le problème (2.27) admet une solution u telle que $u^{\frac{\gamma+p-1}{p}} \in \mathcal{D}^{1,p}(I\!R^N)$.
4. Si $\gamma < 1$ et $h \in L^m(I\!R^N)$ avec $m = (\frac{p^*}{1-\gamma})'$, alors le problème (2.27) admet une solution u telle que $u \in \mathcal{D}^{1,p}(I\!R^N)$.

Démonstration. Soit u_n l'unique solution du problème approximé suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \lambda \dfrac{u_n^{p-1}}{|x|^p + \frac{1}{n}} + \dfrac{h_n(x)}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} & \text{dans } B_n(0), \\ u_n > 0 & \text{dans } B_n(0), \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial B_n(0). \end{cases} \tag{2.28}$$

Il est clair que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante en n. Commençons par le cas $\gamma = 1$. En prenant u_n comme fonction test dans (2.28), on trouve que

$$\int_{B_n(0)} |\nabla u_n|^p \, dx - \lambda \int_{B_n(0)} \frac{u_n^p}{|x|^p} \, dx \le \int_{B_n(0)} \frac{h_n u_n}{u_n + \frac{1}{n}} \, dx \le \int\limits_{I\!R^N} h \, dx.$$

Alors, en utilisant l'inégalité de Hardy-Sobolev et en posant $u_n = 0$ dans $I\!R^N \diagdown B_n(0)$, nous arrivons à

$$\Big(1 - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p}}\Big) \int\limits_{I\!R^N} |\nabla u_n|^p dx \le C.$$

Donc $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{D}^{1,p}(I\!R^N)$ et alors $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $\mathcal{D}^{1,p}(I\!R^N)$ où u résout (2.27). En utilisant la monotonie de la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en n et par une simple variation du résultat de compacité du Lemme 2.1, on peut prouver que $u_n \rightharpoonup u$ fortement dans $\mathcal{D}^{1,p}(I\!R^N)$.

Dans le cas où $\gamma > 1$, nous prenons $G_k(u_n)$ comme fonction test dans (2.28) et en reprenant le même calcul que dans la preuve du Théorème (2.2), on obtient le résultat d'existence.

Le cas $0 < \gamma < 1$ se déduit en utilisant les arguments de la preuve du Théorème 2.3. $\square$

Chapitre 3

Problème elliptique non-linéaire singulier avec terme en gradient

Le résultat principal de ce chapitre est une généralisation des résultats obtenus dans [3].

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de discuter l'existence d'une solution positive pour un problème elliptique semi-linéaire avec une dépendance en gradient et un terme singulier. On rencontre ce type de problème dans l'étude des fluides non-newtonien, des phénomènes de couche limite pour un fluide visqueux, catalyseur hétérogène chimique, ainsi que dans la théorie de la conduction de la chaleur dans les matériels électriques

Il s'agit de traiter le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^q + \dfrac{f(x)}{g(u)} & \text{dans } \Omega, \\ \qquad u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\Omega \subset I\!R^N$ est un domaine borné et $g : I\!R_+ \to I\!R_+$ est une fonction continue croissante avec des conditions à préciser ultérieurement, $1 < q \leq 2$ et $f \in L^1(\Omega)$

une fonction non négative. Notre but est de trouver des conditions optimales sur g de telle sorte que le problème admet une solution distributionnelle pour $f \in L^1(\Omega)$. Dans le cas où $q = 2$, on démontre aussi, que sous certaines conditions convenables sur f, il existe une infinité de solutions positives.

Le cas sans gradient est déja traité dans [32] où $g(s) = s^\alpha$, les auteurs ont prouvé l'existence, la non-existence et la régularité des solutions en fonction de la régularité de f et de la valeur de α.
Dans le cas où $g(s) = 1$, alors notre problème est réduit au problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^2 + f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

Le changement de variable $v = e^u - 1$, transforme le problème (3.2) au problème

$$\begin{cases} -\Delta v = f(1 + v) & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Soit λ_1 est la première valeur propre du laplacien, avec condition au bord de Dirichlet. Si on a $0 < \lambda_1 < f(x)$ pour $x \in \Omega$, alors on obtient que

$$-\Delta v = f\,(1 + v) \geq \lambda_1 v + f.$$

Ce qui est une contradiction avec la définition de la première valeur propre λ_1. Donc si $\lambda_1 < f$, le problème (3.2) n'a pas de solution positive.

Considérons maintenant le cas le plus général

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^q + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

Avec $1 < q \leq 2$, $\lambda > 0$ et $f \geq 0$. Si on suppose que (3.3) admet une solution, alors en utilisant $|\varphi|^{q'}$ comme fonction test dans (3.3) avec $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, et $q' = \frac{q}{q-1}$; on obtient

$$q' \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \varphi^{q'-1} dx = \int_\Omega |\nabla u|^q \varphi^{q'} dx + \lambda \int_\Omega f \varphi^{q'} dx$$

L'inégalité de Young implique que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \varphi^{q'-1} dx \leq C_1 \int_\Omega |\nabla u|^q \varphi^{q'} dx + C_2 \int_\Omega |\nabla \varphi|^{q'} dx,$$

alors f doit être telle que

$$\lambda \int_\Omega f|\varphi|^{q'} dx \leq C_2 \int_\Omega |\nabla \varphi|^{q'} dx. \tag{3.4}$$

On a la définition suivante.

Définition 3.1. Soit $f \in L^1(\Omega)$, f est dite poids admissible si

$$C(f) = \inf_{\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \varphi \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla \varphi|^{q'} dx}{\int_\Omega f(x)|\varphi|^{q'} dx}, \quad q' = \frac{q}{q-1}.$$

Par conséquent, l'existence d'une solution distributionnelle positive est assurée sous la condition que f un poids admissible et que $\lambda < \lambda_f$. Notons que cette condition est verifiée si $f \in L^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{q'}$.

Le but de ce travail est de prouver que, sous des conditions naturelles sur g, le terme $\dfrac{1}{g(u)}$ "a un effet" régularisant dans le sens où le problème admet une solution distributionnelle pour toute fonction f dans $L^1(\Omega)$.

Les problèmes avec terme en gradient sont largement étudiés dans la littérature, on peut citer par exemple [5], [31], [27]... Le problème avec terme singulier "sans le terme en gradient" est connu dans la littérature sous le vocable equations de Lane-Emden-Fowler, en particulier pour le cas $g(s) = s^\alpha$, on peut citer les travaux [48], [49] et [50] où les auteurs se sont limités au cas où f est régulière. Sous cette condition, ils ont prouvé l'existence d'une solution "régulière" par la méthode de sous-sur solutions.

Pour le même type de singularité, et sous la présence du terme de gradient et pour $\alpha > 0$, les auteurs dans [70] et [69], ont prouvé l'existence d'une solution "régulière" toujours sous des conditions de régularité sur f.

Ce chapitre est organisé comme suit : La première section est consacrée à présenter comme préliminaire le principe de comparaison qui sera utilisé par la suite. Dans la deuxième section on traitera le cas particulier $q = 2$, on démontre l'existence d'une solution distributionnelle sous des conditions convenables sur g. Notons que dans ce cas, si la solution existe, alors elle a une régularité exponentielle, donc pour controler le terme f, on a besoin que g ait un comportement exponentielle à l'infini. Dans la même section, on prouve que notre condition est optimale dans le sens que si elle n'est pas verifiée, alors on peut trouver $f \in L^1(\Omega)$ de telle sorte que le problème n'admet pas de solution. Comme conséquence, si $g(s) = s^\alpha$, alors il existe $f_\alpha \in L^1(\Omega)$ telle que le problème (3.1) n'admet pas de solution. La démonstration est basée sur un changement de variable qui transfome notre problème en un autre problème semilinéaire sans le terme du gradient et plus simple à traiter.

Le cas $q < 2$ est totalement différent et il sera traité dans la troisième section. Pour simplifier l'exposé des résultats on considère le cas $g(s) = s^\alpha$. Notons que pour ce cas, il n'y a pas de changement de variable "raisonnable" pour réduire la difficulté engendrée par le terme en gradient. On procède par approximation, on considère dans la première partie le cas des données régulières, dans ce cas on n'a pas besoin d'imposer de condition sur α. Pour passer à la limite, dans le cas où $f \in L^1(\Omega)$, une condition naturelle est imposée sur α. Pour des raisons techniques, nous séparons la preuve en deux cas $1 < q \leq 1 + \frac{2}{N}$ et $1 + \frac{2}{N} < q < 2$. La dernière partie de la section est dédiée au passage à la limite et à prouver le résultat d'existence principal pour tout $f \in L^1(\Omega)$. La dernière section sera consacrée à traiter le problème de multiplicité des solutions positives pour $q = 2$, sous certaines conditions d'intégrabilité sur f. Une extension au cas $q \neq 2$ est donnée comme remarque à la fin de la section.

3.2 Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons utiliser un résultat de comparaison apparu dans le Lemme 1.5 et qui est une conséquence du résultat de comparaison de [13].

Lemme 3.1. Soit g une fonction bornée non négative et $a, \alpha > 0$. Supposons que

$$H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+ \text{ verifie } H(\xi) \leq A, \quad |H(\xi_1) - H(\xi_2)| \leq C|\xi_1 - \xi_2|, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N.$$

Considérons w_1, w_2 deux fonctions positive telles que $w_1, w_2 \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, vérifient

$$\begin{cases} -\Delta w_1 \leq H(\nabla w_1) + \dfrac{g}{(w_1 + a)^\alpha} \text{ dans } \Omega, \\ \qquad\qquad w_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta w_2 \geq H(\nabla w_2) + \dfrac{g}{(w_2 + a)^\alpha}, \text{ dans } \Omega, \\ \qquad\qquad w_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

alors $w_2 \geq w_1$ dans Ω.

Démonstration. Considérons $w = w_1 - w_2$, donc $w \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, il suffit alors de prouver que $w^+ = 0$. Par (3.5) et (3.6) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} -\Delta w &\leq H(\nabla w_1) - H(\nabla w_2) + g\Big(\frac{1}{(w_1 + a)^\alpha} - \frac{1}{(w_2 + a)^\alpha}\Big) \\ &\leq C|\nabla w| + g\Big(\frac{1}{(w_1 + a)^\alpha} - \frac{1}{(w_2 + a)^\alpha}\Big) \end{aligned}$$

Puisque $\left(\frac{1}{(w_1 + a)^\alpha} - \frac{1}{(w_2 + a)^\alpha}\right) \leq 0$ sur l'ensemble $\{w \geq 0\}$, alors en utilisant l'inégalité de Kato Lemme 1.6, on trouve que

$$-\Delta w_+ \leq |\nabla w_+|, \qquad w_+ = max\{w, 0\} \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Par conséquent, en utilisant le principe du maximum introduit dans le Lemme 1.5, on arrive à montrer $w_+ \equiv 0$ et alors on obtient notre résultat. $\square$

Comme conséquence, on obtient que le problème

$$\begin{cases} -\Delta w = H(\nabla w_2) + \dfrac{g}{(w_2 + a)^\alpha}, \text{ dans } \Omega, \\ \qquad\qquad w = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une unique solution positive $w \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

On désignera par C toute constante qui peut varier de ligne à ligne. Parfois, lorsque cela est nécessaire, on explicitera la dépendance de la constante C par rapport a certains paramètres. Puisque on ne considère que les données non négatives, donc les solutions obtenues sont positives par le principe du maximum.

3.3 Le cas $q = 2$: résultats d'existence

Dans cette section, on considère le cas $q = 2$, plus précisement on a le résultat d'existence suivant.

Théorème 3.1. Soit $g : I\!R_+ \to I\!R_+$ une fonction continue et croissante telle que

$$\frac{e^s - 1}{g(s)} \leq C \text{ pour } s \geq 0, \tag{3.7}$$

alors pour toute fonction $f \in L^1(\Omega)$, telle que $f \gneqq 0$, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^2 + \dfrac{f}{g(u)} & \text{dans } \Omega, \\ \qquad u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.8}$$

a une solution distributionnelle minimale u telle que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et $f\frac{e^u-1}{g(u)} \in L^1(\Omega)$.

Démonstration. On procède par approximation. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ une suite de fonctions non négatives telles que $||f_n||_{L^1(\Omega)} \leq C$ et $f_n \uparrow f$ fortement dans $L^1(\Omega)$. Soit $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u_n = |\nabla u_n|^2 + \dfrac{f_n}{g(u_n) + \frac{1}{n}} & \text{dans } \Omega, \\ \qquad u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \qquad u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

Pour prouver l'existence de u_n, on considère le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \dfrac{f_n(v_n+1)}{g(\log(v_n+1)) + \frac{1}{n}} & \text{dans } \Omega, \\ v_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

Soit $D_n(s) = \dfrac{(s+1)}{g(\log(s+1)) + \frac{1}{n}}$, il est clair que $\dfrac{D_n(s)}{s}$ est strictement décroissante pour $s > 0$ et $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{D_n(s)}{s} = 0$. Soit la fonctionnelle suivante

$$J_n(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f_n \widetilde{D_n}(v) dx,$$

où $\widetilde{D_n}(s) = \int_0^s D_n(\sigma)d\sigma$. En utilisant les propriétés de D_n on peut prouver facilement que J_n est bornée inférieurement. Notons que les points critiques de J_n sont des solutions de (3.10). Par un argument de minimisation classique et par le résultat de comparaison du Théorème 1.5. On obtient l'existence d'un point critique v_n de J_n. Il est clair que $v_n \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $v_n \leq v_{n+1}$. Par le principe de comparaison dans du Lemme 3.1, on déduit alors que $v_n \geq v_{n+1}$. On pose $u_n = \log(v_n + 1)$, alors u_n est une solution de (3.9). Nous affirmons que, pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$, il existe une constante positive $C(K)$ telle que $u_n \geq C(K)$ dans K pour tout $n \geq 1$. Pour prouver cette affirmation, on considère w, l'unique solution positive du problème.

$$\begin{cases} -\Delta w = \dfrac{f_1}{g(w)+1} & \text{dans } \Omega, \\ w > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Puisque $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, alors nous concluons que

$$-\Delta u_n \geq \frac{f_1}{g(u_n)+1}.$$

Comme $\dfrac{1}{s(g(s)+1)}$ est une fonction décroissante pour $s > 0$, alors par le principe de comparaison du Théorème 1.5, il s'ensuit que $u_n \geq w$ dans Ω. Par le principe du maximum fort, il en résulte que $w \geq C(K)$ dans K, d'où l'affirmation.

Nous estimons que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Pour prouver cette estimation prenons $1 - \dfrac{1}{1+v_n}$ comme fonction test dans (3.10), il résulte que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla v_n|^2}{(1+v_n)^2} = \int_\Omega \frac{f_n v_n}{g(\log(v_n+1)) + \frac{1}{n}}.$$

Par (3.7) nous obtenons

$$\frac{s}{g(\log(s+1))} \leq C,$$

Alors

$$\int_\Omega \frac{|\nabla v_n|^2}{(1+v_n)^2} \leq C \text{ uniformément en } n.$$

Puisque $\nabla u_n = \dfrac{\nabla v_n}{v_n+1}$, alors l'affirmation s'ensuit.

Nous estimons que $\{e^{\delta u_n} - 1\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ pour tout $\delta < \frac{1}{2}$. Nous montrons l'estimation, considérons $v_\varepsilon(x) = e^{\frac{2\delta u_n}{1+\varepsilon u_n}} - 1$ comme fonction test dans (3.9), il suit que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \int_\Omega e^{\frac{2\delta u_n}{1+\varepsilon u_n}}\Big(1 - \frac{2\delta}{(1+\varepsilon u_n)^2}\Big)|\nabla u_n|^2 dx + \int_\Omega (e^{\frac{2\delta u_n}{1+\varepsilon u_n}} - 1)\frac{f_n}{g(u_n) + \frac{1}{n}}.$$

Puisque $\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq C$, alors, en faisant $\varepsilon \to 0$, il suit que

$$\Big(1 - 2\delta\Big)\int_\Omega e^{2\delta u_n}|\nabla u_n|^2 dx \leq C$$

et

$$\int_\Omega (e^{2\delta u_n} - 1)\frac{f_n}{g(u_n) + \frac{1}{n}} \leq C$$

uniformément en n. D'où, nous obtenons l'existence d'une fonction mesurable u telle que $u_n \uparrow u$ p.p. dans Ω et $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Par le Lemme 2.1, on trouve que $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Par conséquent, en passant à la limite en n, nous trouvons facilement que u est une solution du problème (3.8) dans le sens des distributions. Il est clair que $\displaystyle\int_\Omega e^{\delta u}|\nabla u|^2 dx < \infty$ pour tout $\delta < \frac{1}{2}$. $\square$

Remarque 3.1. La condition (3.7) imposée sur g est optimale, dans le sens que si, pour $a < 1$,

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{g(s)}{e^{as}} < \infty, \tag{3.11}$$

alors il existe une fonction $f \in L^1(\Omega)$ telle que le problème (3.8) ne possède pas de solution u avec $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Pour voir ça, nous assumons que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, une solution positive du problème (3.8), alors

$$\int_\Omega e^{2\delta u}|\nabla u|^2 dx \leq C$$

et

$$\int_\Omega (e^{2\delta u_n} - 1)\frac{f}{g(u)} dx \leq C.$$

Donc $e^u - 1$ est bornée dans $W_0^{1,\sigma}(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-1}$. Nous mettons $v_\varepsilon = \int_0^u e^{\frac{s}{1+\varepsilon s}} ds$, alors v_ε résout

$$-\Delta v_\varepsilon = \frac{f e^{\frac{u}{1+\varepsilon u}}}{g(u)} + |\nabla u|^2 e^{\frac{u}{1+\varepsilon u}} \left(1 - \frac{1}{(1+\varepsilon u)^2}\right).$$

Puisque $v_\varepsilon \to v \equiv e^u - 1$ fortement dans $W_0^{1,\sigma}(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-1}$, mettons $\varepsilon \to 0$, il suit que

$$-\Delta v \geq \frac{f(v+1)}{g(\log(v+1))} \equiv f D(v).$$

A partir de (3.11), nous arrivons à $D(s) \geq C(s+1)^{1-a}$, alors

$$-\Delta v \geq C f (v+1)^{1-a} \tag{3.12}$$

avec $f(v+1)^{1-a} \in L^1(\Omega)$. Sans perte de généralité on peut supposer que $\Omega \equiv B_1(0)$ et $f(x) = \dfrac{1}{|x|^{N-\tau}}$, $N \geq 3$, où $\tau << 1$, il est clair que $f \in L^1(\Omega)$. Puisque v satisfait à (3.12), alors nous pouvons prouver que $v(x) \to \infty$ quand $|x| \to 0$. En revenant au problème (3.12), nous concluons que $v \geq \dfrac{C}{|x|^{N-2-\tau}}$ dans $B_r(0) \subset\subset B_1(0)$. Alors

$$f(v+1)^{1-a} \geq \frac{C}{|x|^{(2-a)(N-\tau)-2(1-a)}} \text{ dans } B_r(0).$$

Puisque $a < 1$, alors nous pouvons choisir τ suffisament petit tel que $(2-a)(N-$

$\tau)-2(1-a) \geq N$, ce qui est une contradiction avec le fait que $f(v+1)^{1-a} \in L^1(\Omega)$.

Comme conséquence de résultat de non existence précédent on a la proposition suivante.

Proposition 3.1. Supposons que $g(s) = s^\alpha$, alors il existe $f_\alpha \in L^1(\Omega)$ telle que le problème (3.8) n'admet pas de solution dans le sens que si u_n est la solution minimale de (3.9), alors $u_n(x_0) \to \infty$ pour $n \to \infty$, uniformement en x_0

Démonstration. Procédons par l'absurde, supposons qu'il existe un $x_0 \in \Omega$ tel que $u_n(x_0) \leq C$ uniformément en n, alors $e^{u_n(x_0)} - 1 \leq e^C - 1$. On pose $v_n = e^{u_n} - 1$, il est clair que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante en n et qui vérifie

$$-\Delta v_n = \frac{f_n(v_n+1)}{(\log(v_n+1)+\frac{1}{n})^\alpha}.$$

Comme $v_n(x_0) \leq C$, alors en appliquant le Lemme 1.3, il résulte que

$$\int_\Omega \frac{f_n(v_n+1)}{(\log(v_n+1)+\frac{1}{n})^\alpha}\delta(x)dx \leq C \ \text{ uniformément en } n.$$

Par conséquent

$$||v_n||_{L^1(\Omega)} + ||\Delta v_n||_{L^1_{loc}(\Omega)} \leq C. \text{ uniformément en } n.$$

D'où, par le Lemme 1.2, il existe $v \in W^{1,\sigma}_{loc}(\Omega), \sigma < \frac{N}{N-1}$ tel que $v_n \uparrow v$ fortement dans $L^a_{loc}(\Omega)$ pour tout $a < \frac{N}{N-2}$ et $v_n \rightharpoonup v$ faiblement dans $W^{1,\sigma}_{loc}(\Omega), \sigma < \frac{N}{N-1}$. Il est clair que v est une sur solution du problème

$$-\Delta v \geq \frac{f(v+1)}{(\log(v+1))^\alpha} \equiv fD(v) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ et } fD(v) \in L^1_{loc}(\Omega), \tag{3.13}$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $\Omega = B_1(0)$ et $f(x) = \frac{1}{|x|^{N-\beta}}$ où $N \geq 3$ et $\theta << 1$ à déterminer ultérieurement, où $D(s) = \dfrac{s+1}{(\log(s+1))^\alpha}$. Par le fait que $\dfrac{D(s)}{s^\theta} \to \infty$ quand $s \to \infty$ pour tout $\beta < 1$, et par le principe de maximum fort on obtient facilement que $v \geq C$ dans $B_r(0)$ avec $r << 1$. Alors $-\Delta v \geq \dfrac{C}{|x|^{N-\beta}}$ dans $B_r(0)$. D'où $v \geq \dfrac{C}{|x|^{N-2-\theta}}$ dans $B_r(0)$. Donc, pour tout

$\beta < 1$ il existe $r_\theta << 1$ petit tel que $fD(v) \geq \dfrac{C}{|x|^{(\theta+1)(N-\varepsilon)-2\theta}}$ dans $B_{r_\theta}(0)$. Pour β et ε tels que $(\theta+1)(N-\varepsilon)-2\theta > N$, il découle que $fD(v) \notin L^1(B_r(0))$, ce qui est une contradiction avec (3.13), d'où la conclusion. □

3.4 Résultat d'existence dans le cas : $1 < q < 2$

Dans cette section on considère le cas général $q < 2$, alors le changement de variable utilisé dans le cas $q = 2$ ne permet plus d'éliminer le terme en gradient, par conséquent nous devons utiliser un argument différent afin d'obtenir des estimations a priori. Nous commençons par une analyse du cas où f est "régulière". Le résultat principal dans cette direction est le suivant :

Théorème 3.2. Soit $f \in L^\infty(\Omega)$, alors pour tout $\alpha, a > 0$, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^q + \dfrac{f}{(u+a)^\alpha} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.14}$$

admet une solution minimale positive u_a telle que $u_a \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et $G_k^\sigma(u_a) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ où $\sigma = \frac{(N-2)(q-1)}{2(2-q)}$.

Démonstration. Soit $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ l'unique solution positive du problème approximé

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \dfrac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} + \dfrac{f}{(u_n+a)^\alpha} & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.15}$$

l'existence et l'unicité de u_n sont une conséquence immédiate du résultat classique obtenu par Leray-Lions en [55] et le résultat de comparaison obtenu dans le Lemme3.1. Il est clair que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions croissantes en n. Nous séparons la preuve en deux cas selon la valeur de q.

Premier cas : $1 + \frac{2}{N} \leq q < 2$.

Nous suivons à la lettre l'argument utilisé dans [52]. Soit $\sigma = \frac{(N-2)(q-1)}{2(2-q)}$, alors $\sigma \geq 1$, considérons $s = 2\sigma - 1$, il est clair que $s > 0$. En utilisant $[G_k(u_n)]^s = [G_k(u_n)]^{2\sigma-1}$ comme fonction test dans (3.15), il s'ensuit que

$$s\int_\Omega [G_k(u_n)]^{s-1} |\nabla G_k(u_n)|^2 \, dx \leq \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^q [G_k(u_n)]^s \, dx + \int_\Omega \frac{f}{(u_n+a)^\alpha} [G_k(u_n)]^s \, dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} & s\Big(\frac{2}{s+1}\Big)^2 \int_\Omega |\nabla ([G_k(u_n)]^\sigma)|^2 \, dx \leq \\ & \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^q [G_k(u_n)]^s \, dx + \int_\Omega \frac{f}{(u_n+a)^\alpha} [G_k(u_n)]^s \, dx = I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Nous analysons chaque terme dans le premier membre de l'inégalité précédente. Par l'inégalité de Hölder, il résulte que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^q [G_k(u_n)]^{(s-1)\frac{q}{2}} [G_k(u_n)]^{\left[s(1-\frac{q}{2})+\frac{q}{2}\right]} dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \left[|\nabla G_k(u_n)|^2 [G_k(u_n)]^{(s-1)}\right] dx\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega [G_k(u_n)]^{\left(s(1-\frac{q}{2})+\frac{q}{2}\right)\frac{2}{2-q}} dx\right)^{\frac{2-q}{2}} \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla ([G_k(u_n)]^\sigma)|^2 \, dx\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega [G_k(u_n)]^{\left(s(1-\frac{q}{2})+\frac{q}{2}\right)\frac{2}{2-q}} dx\right)^{\frac{2-q}{2}}. \end{aligned}$$

Observons que $\left(s(1-\frac{q}{2})+\frac{q}{2}\right)\frac{2}{2-q} = \sigma 2^*$, alors par l'inégalité de Sobolev,

$$I_1 \leq C_1 \left(\int_\Omega |\nabla ([G_k(u_n)]^\sigma)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}\left(q+2^*(1-\frac{q}{2})\right)}.$$

On considère maintenant le terme I_2. En utilisant à nouveau l'inégalité de Hölder, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Omega \frac{f}{(u_n+a)^\alpha} [G_k(u_n)]^{2\sigma-1} \, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{f^m}{(u_n+a)^{m\alpha}} dx\right)^{\frac{1}{m}} \left(\int_\Omega [G_k(u_n)]^{(2\sigma-1)m'} \, dx\right)^{\frac{1}{m'}}. \end{aligned}$$

Puisque $f \in L^\infty(\Omega)$, on peut choisir $m = \frac{N}{q'}$, et donc $(2\sigma-1)\,m' = \sigma 2^*$, par conséquent, en utilisant l'inégalité de Sobolev, on déduit que

$$I_2 \leq \frac{C_3}{(k+a)^\alpha}\left(\int_\Omega |\nabla([G_k(u_n)]^\sigma)|^2\,dx\right)^{\frac{2^*}{2m'}}.$$

On pose $Y_k = ||\nabla([G_k(u_n)]^\sigma||_{L^2(\Omega)}$, alors par (3.16) et l'estimation obtenue antérieurement, nous concluons que

$$\frac{4s}{(s+1)^2}Y_k^2 \leq C_1 Y_k^{\left(q+2^*(1-\frac{q}{2})\right)} + \frac{C_3}{(k+a)^\alpha}Y_k^{\frac{2^*}{m'}}.$$

En utilisant le fait que $2-\frac{2^*}{m'} = \frac{2^*}{N}(q'-2)$ et $\left(q+2^*(1-\frac{q}{2})\right)-\frac{2^*}{m'} = \frac{2^*}{N}(q'-q)$, nous obtenons que

$$c_1 Y_k^{\frac{2^*}{N}(q'-2)} - c_2 Y_k^{\frac{2^*}{N}(q'-q)} \leq \frac{c_3}{k^\alpha}.$$

Soit $F(t) = c_1 t^{\frac{2^*}{N}(q'-2)} - c_2 t^{\frac{2^*}{N}(q'-q)}$, alors, pour $t \geq 0$, F est une fonction concave et admet un maximum unique t^* avec $F(t^*) = F^*$. Choisissons $k \geq k^*$ suffisament grand tel que $\frac{c_3}{k^\alpha} < \frac{F^*}{2}$, il est clair que l'équation $F(t) = \frac{F^*}{2}$ admet deux racines t_1 et t_2 telles que $0 < t_1 < t^* < t_2$. Puisque $k \geq k^*$, alors soit $Y_k \leq t_1$ ou $Y_k \geq t_2$. Du fait que $u^\sigma \in W_0^{1,2}(\Omega)$, on déduit que $Y_k \leq t_1 < t^*$. En conclusion, nous faisons l'usage d'un argument de continuité, nous obtenons

$$\|\nabla([G_k(u_n)]^\sigma)\|_{L^2(\Omega)} < s^* \text{ pour tout } k > 0. \tag{3.17}$$

Puisque $|\nabla(G_k(u_n)^\sigma)| = \sigma G_k^{\sigma-1}(u_n)|\nabla G_k(u_n)|$, en utilisant que $\sigma > 1$, et (3.17), il découle que

$$||\nabla G_k(u_n)||_{L^2(\Omega)} < C(k). \tag{3.18}$$

En introduisant $T_k(u_n)$ avec $k > k^*$, comme fonction test dans (3.15), et par l'utilisation de l'inégalité de Young, nous obtenons que

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2\,dx \leq$$
$$\leq k\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^q\,dx + k\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^q dx + Ck.$$

Puisque $q < 2$, alors à l'aide de l'inégalité de Young et pour ε suffisament petit, on aura

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^2 \, dx \leq \overline{C} \text{ for every } k > k^*. \tag{3.19}$$

En combinant (3.17), (3.18) et (3.19), nous concluons que $\|u_n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|u_n^{\sigma}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq M$. Il est clair que par l'usage de l'argument de compacité développé dans la preuve du Théorème 3.1, on peut montrer que $u_n \rightharpoonup u_a$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Donc u_a est la solution du problème (3.14) au moins dans le sens des distributions.

Second cas $1 < q < 1 + \frac{2}{N}$.

Dans ce cas on utilise $G_k(u_n)$ comme fonction test dans (3.15), il s'ensuit que

$$\int_{\Omega} |\nabla G_k(u_n)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla G_k(u_n)|^q \, G_k(u_n) dx + \int_{\Omega} \frac{f}{(u_n + a)^{\alpha}} G_k(u_n) dx.$$

Puisque $q < 1 + \frac{2}{N} < 1 + \frac{2}{N-2}$, alors par l'utilisation des inégalités de Hölder et de Sobolev, on obtient que

$$\int_{\Omega} |\nabla G_k(u_n)|^2 dx \leq C_1 \Big(\int_{\Omega} |\nabla G_k(u_n)|^2 dx \Big)^{\frac{q+1}{2}} + \frac{C_2 ||f||_{\infty}}{(k+a)^{\alpha}} \Big(\int_{\Omega} |\nabla G_k(u_n)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{3.20}$$

On pose $Y_k = ||\nabla G_k(u_n)||_{L^2(\Omega)}$, alors par (3.20), il résulte que

$$Y_k^2 \leq C_1 Y_k^{q+1} + \frac{C_3}{(k+a)^{\alpha}} Y_k.$$

Comme dans le premier cas, nous obtenons que

$$||\nabla G_k(u_n)||_{L^2(\Omega)} < s^* \text{ pour tout } k > 0. \tag{3.21}$$

Choisissons $T_k(u_n)$ comme fonction test dans (3.15), prenons en considération que $q < 2$ et l'estimation (3.21), on obtient que

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^2 \, dx \leq C(k). \tag{3.22}$$

Il est clair que par les mêmes arguments de compacité développés dans la preuve du Théorème 3.1, on trouve que $u_n \to u_a$ fortement $W_0^{1,2}(\Omega)$. Alors u_a est la solution du problème (3.14) au moins dans le sense des distributions. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 3.3. Supposons que $\alpha > \max\{\frac{(q-1)(N-1)-1}{2-q}, 1\}$, alors pour tout $f \in L^1(\Omega)$, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^q + \dfrac{f}{u^\alpha} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.23}$$

admet une solution minimale positive u telle que $G_k(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$.

Démonstration. Fixons $\alpha > \max\{\frac{(q-1)(N-1)-1}{2-q}, 1\}$ et soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ est une suite croissante telle que $||f_n||_{L^1(\Omega)} \leq C$ et $f_n \uparrow f$ fortement dans $L^1(\Omega)$. Considérons $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$, la solution minimale du problème approximé

$$\begin{cases} -\Delta u_n = |\nabla u_n|^q + \dfrac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.24}$$

L'existence de u_n suit par le Théorème 3.2, il est clair que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n. Comme dans la preuve du Théorème 3.2, nous séparons la preuve en deux cas selon la valeur de q.

Premier cas : $1 + \frac{2}{N} \leq q < 2$.

Suivant de près les calculs du théorème précédent, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & s\Big(\frac{2}{s+1}\Big)^2 \int_\Omega |\nabla\left([G_k(u_n)]^\sigma\right)|^2 dx \leq \\ & \leq C_1 \left(\int_\Omega |\nabla\left([G_k(u_n)]^\sigma\right)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}\left(q+2^*(1-\frac{q}{2})\right)} + \int_\Omega \frac{f_n}{u_n^\alpha} [G_k(u_n)]^s \, dx. \end{aligned} \tag{3.25}$$

où $\sigma = \frac{(N-2)(q-1)}{2(2-q)}$ et $s = 2\sigma - 1$. Il est clair que, dans ce cas, $\sigma \geq 1$. Nous analysons le dernier terme dans (3.25). Utilisons les hypothèses sur α, nous trouvons que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{f_n}{u_n^\alpha}\left[G_k(u_n)\right]^s dx &= \int_{u_n\geq k}\frac{f_n}{u_n^\alpha}\left[G_k(u_n)\right]^{2\sigma-1}dx\\ &\leq \frac{1}{k^{\alpha-s}}\int_{u_n>k} f dx.\end{aligned}$$

Definissons $Y_k = ||\nabla([G_k(u_n)]^\sigma||_{L^2(\Omega)}$, puis en combinant les estimations précédentes, il suit que

$$\frac{4s}{(s+1)^2}Y_k^2 \leq C_1 Y_k^{\left(q+2^*(1-\frac{q}{2})\right)} + \frac{1}{k^{\alpha-s}}\int_{u_n>k} f dx.$$

Soit $H(t) = \frac{4s}{(s+1)^2}t^2 \leq C_1 t^{\left(q+2^*(1-\frac{q}{2})\right)}$, puisque $\left(q+2^*(1-\frac{q}{2})\right) > 2$, alors nous concluons que H est une fonction concave pour $t \geq 0$ et admet un maximum unique t^* avec $H(t^*) = H^*$. Notons que, pour n fixé, $\int_{u_n>k} f dx \to 0$ quand $k \to \infty$. Donc nous obtenons l'existence de $k^*(n)$ tel que pour $k \geq k^*(n)$, $\frac{1}{k^{\alpha-s}}\int_{u_n>k} f dx \leq \frac{H^*}{2}$. Il est clair que l'équation $H(s) = \frac{H^*}{2}$ possède deux racines $0 < t_1 < t^* < t_2$. Puisque $H(Y_k) \leq \frac{H^*}{2}$, alors soit $Y_k \leq t_1$ ou $Y_k \geq t_2$. Et aussi puisque $Y_k \to 0$ quand $k \to \infty$, alors pour $k \geq k^*(n)$, $Y_k \leq t_1 < t^*$. En faisant l'usage d'un argument de continuité, nous concluons que

$$\|\nabla\left([G_k(u_n)]^\sigma\right)\|_{L^2(\Omega)} < t^*, \text{ pour tout } k > 0. \tag{3.26}$$

Pour $k > 0$ fixé, alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2 dx &= \int_{u_n>k}|\nabla u_n|^2 dx\\ &\leq (\frac{2}{k})^{2(\sigma-1)}\int_{u_n>\frac{k}{2}}(u_n-\frac{k}{2})^{2(\sigma-1)}|\nabla u_n|^2 \leq CY_{\frac{k}{2}}^2 \leq C.\end{aligned}$$

Donc $\{G_k(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\phi \geq 0$, alors utilisons $T_k(u_n)\phi$ comme fonction test dans (3.24), et prenons en considération que $q < 2$ et les calculs précédents, nous trouvons que

$$C \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 \phi dx + \int_\Omega \Theta_k(u_n)(-\Delta\phi) \leq$$
$$\leq k \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^q \phi dx + \int_\Omega \frac{f_n \phi}{u_n^\alpha} + Ck,$$

où $\Theta_k(s) = \int\limits_0^s T_k(t)dt$. Notons que $\int_\Omega \Theta_k(u_n)(-\Delta\phi) \leq C||\Delta\phi||_{L^\infty}$.

Puisque $u_n \geq C\text{dis}(x, \partial\Omega)$, alors

$$\int_\Omega \frac{f_n\phi}{u_n^\alpha} \leq \int_\Omega \frac{f_n\phi}{\text{dis}^\alpha(x,\partial\Omega)} dx \leq C.$$

D'où nous concluons que

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 \phi dx \leq C \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

En combinant les estimations ci-dessus, on arrive à ce que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$. Puisque $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante en n, par le résultat de compacité du Lemme 2.1, nous trouvons que $u_n \to u$ fortement dans $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$. Alors u est solution du problème (3.14), au moins au sens des distributions.

Deuxième cas $1 < q < 1 + \frac{2}{N}$. Dans ce cas $\alpha > 1$, alors en utilisant $G_k(u_n)$ comme fonction test dans (3.24), il suit que

$$\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^q \, G_k(u_n) dx + \int_\Omega \frac{f}{u_n^\alpha} G_k(u_n) dx.$$

Puisque $q < 1 + \frac{2}{N} < 1 + \frac{2}{N-2}$, alors utilisons les inégalités de Hölder et de Sobolev, nous arrivons à

$$\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2 dx \leq C_1 \Big(\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2 dx \Big)^{\frac{q+1}{2}} + \frac{1}{k^{\alpha-1}} \int_{u_n > k} f dx. \tag{3.27}$$

Mettons $Y_k = ||\nabla G_k(u_n)||_{L^2(\Omega)}$, alors

$$Y_k^2 \leq C_1 Y_k^{q+1} + \frac{1}{k^{\alpha-1}} \int_{u_n>k} f dx.$$

Comme dans le premier cas, nous obtenons que

$$||\nabla G_k(u_n||_{L^2(\Omega)} < C \text{ pour tout } k > 0 \text{ uniformément en } n. \tag{3.28}$$

De la même manière, et comme dans le premier cas, on obtient que le suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$. La monotonie de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et le résultat de compacité du Lemme 2.1, nous permettent de conclure que $u_n \to u$ fortement dans $W^{1,2}_0(\Omega)$. D'où u est une solution du problème (3.14), au moins au sens des distributions. □

Remarque 3.2. le même résultat d'existence est valable si f est substituée par une mesure régulière nonnegative par rapport à la capacité elliptique dans $W^{1,2}_0(\Omega)$, c'est à dire si $f \in (L^1(\Omega) + W^{-1,2}(\Omega)) \cap \mathcal{M}(\Omega)$, où $\mathcal{M}(\Omega)$ est l'espace de mesures de Radon bornées.

Dans le cas général où $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$, en utilisant les mêmes techniques que précédement, on a le résultat d'existence suivant.

Théorème 3.1. Supposons que $f \in L^m(\Omega)$ avec $m \geq 1$, alors :

1. Si $m \geq \frac{N}{2}$, tel que $\forall \alpha > 0$, il existe u solution de (3.23)tel que $G_k(u) \in W^{1,2}_0(\Omega)$ et $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$.
2. Si $1 < m < \frac{N}{2}$ et $1 < q < \frac{N(2m'-2^*)+22^*}{2m'(N-1)-2^*(N-2)} = \overline{q}$ il existe une solution $\forall \alpha > 0$ $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$
3. Si de plus $1 < m < \frac{N}{2}$ et $q \geq \overline{q}$ alors $\forall \alpha \geq \frac{(N-2)(q-1)}{2(2-q)}(2 - \frac{2^*}{m'}) - 1$ donc il existe une solution u où $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ et $G_k(u) \in W^{1,2}_0(\Omega)$.

3.5 Résultat de multiplicité pour le cas $q = 2$

Dans cette section on suppose que $N \geq 2$ et $q = 2$, alors sous une condition de régularité de f nous sommes en mesure de prouver l'existence d'une infinité de solutions positives. Plus précisement nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.4. Soit $\Omega \subset I\!R^N$ un domaine régulier borné, où $N \geq 2$. Supposons que $q = 2$ et $\alpha > 0$ et soit f est une fonction nonnegative telle que $f \in L^m(\Omega)$

avec $m > \dfrac{N}{2}$. Alors le problème (3.8) admet une infinité de solutions positives vérifiant $e^u - 1 \in W_0^{1,\sigma}(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-1}$, cependant il y a une seule solution bornée.

Pour prouver le résultat principal on a besoin du résultat d'existence suivant pour une classe de problèmes elliptiques avec une donnée mesure.

Proposition 3.2. Soit μ une mesure de Radon bornée nonnegative, alors le problème

$$\begin{cases} -\Delta v &= fD(v) + \mu \text{ dans } \Omega, \\ v &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.29}$$

admet une unique solution renormalisée positive v telle que $T_k(v) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ pour tout $k > 0$ et $v \in W_0^{1,\sigma}(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-1}$. Si $\mu \equiv 0$, alors (3.29) possède une unique solution positive $v_0 \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Démonstration. Soit $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ est telle que $h_n \geq 0$, $||h_n||_{L^1(\Omega)} \leq C$ et $h_n \rightharpoonup \mu$ au sens des mesures. Soit v_n l'unique solution positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta v_n &= fD(v_n) + h_n \text{ dans } \Omega, \\ v_n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.30}$$

Il est à noter que v_n peut être obtenue comme le minimum global de la fonctionnelle d'énergie

$$J_n(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \int_\Omega f\widetilde{D}(w)dx - \int_\Omega h_n w dx$$

Avec $\widetilde{D}(s) = \int_0^s D(\sigma)d\sigma$. Il est clair que $\dfrac{D(s)}{s}$ est une fonction décroissante et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $s_\varepsilon > 0$ tel que

$$D(s) \leq \varepsilon s \text{ pour tout } s \geq s_0. \tag{3.31}$$

De la même manière, nous avons

$$D(s) \leq \frac{C}{\log(s+1)} \text{ pour tout } s \leq s_0. \tag{3.32}$$

Soit v_0 la solution de (3.30) avec $h_n \equiv 0$, alors $v_n \geq v_0$ pour tout n. Par le Lemme 1.3 on trouve facilement que $v_0 \geq C\psi_1$ où ψ_1 est la première fonction propre positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta\psi_1 &= \lambda_1 f\psi_1 \text{ dans } \Omega \\ \psi_1 &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.33}$$

Rappelons que $\psi_1 \simeq \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Ainsi, nous concluons que $v_n \geq C\psi_1$ pour tout n. Utilisons ψ_1 comme fonction test et prenons en considération l'inégalité algébrique (3.31), il résulte que

$$(\lambda_1 - \varepsilon)\int_\Omega f v_n \psi_1 \leq C(\varepsilon)||\psi_1||_{L^1(\Omega)} + C(\psi_1, \varepsilon)||f||_{L^1(\Omega)} + ||\psi_1||_{L^\infty(\Omega)}||h_n||_{L^1(\Omega)}.$$

D'où $||f\psi_1 v_n||_{L^1(\Omega)} \leq C$ pour tout n et alors $||f\psi_1 D(v_n)||_{L^1(\Omega)} \leq C$. Nous prenons maintenant ρ, la solution du problème :

$$-\Delta\rho = 1 \ \text{ dans } \ \Omega; \quad \rho = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega,$$

comme fonction test dans (3.30) et sachant que $\rho \backsimeq \psi_1$, on déduit que $||v_n||_{L^1(\Omega)} \leq C$.

Montrons, maintenant que

$$||fD(v_n)||_{L^1(\Omega)} \leq C \text{ pour tout } n. \tag{3.34}$$

Pour prouver cette affirmation, on considère ρ_1 l'unique solution positive du problème

$$-\Delta\rho_1 = f \text{ dans } \Omega, \rho_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Puisque $f \in L^m(\Omega)$, $m > \dfrac{N}{2}$, alors $\rho_1 \in L^\infty(\Omega)$ et par le Lemme de Hopf, $\rho_1 \backsimeq \psi_1$. Prenons ρ_1 comme fonction test dans (3.30) et en utilisant les estimations précédentes, on arrive à $||fv_n||_{L^1(\Omega)} \leq C$. Par (3.31), l'estimation (3.34) s'ensuit. Par conséquent, nous avons prouvé que $||fD(v_n)||_{L^1(\Omega)} + ||v_n||_{L^1(\Omega)} \leq C$. Par le Lemme 1.2, il découle que $||v_n||_{W_0^{1,\sigma}(\Omega)} \leq C$, ainsi, il existe $v \in W_0^{1,\sigma}(\Omega)$, pour tout $\sigma < \frac{N}{N-1}$, telle que $v_n \rightharpoonup v$ faiblement dans $W_0^{1,\sigma}(\Omega)$. Par le résultat de

[41] nous obtenons que $v_n \to v$ fortement dans $W_0^{1,\sigma}(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-1}$ et $T_k(v_n) \to T_k(v)$ fortment dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ pour tout $k > 0$. Il est clair que v est une solution renormalisée de (3.29). Pour l'unicité nous utilisons le Théorème 1.5. □

Nous sommes maintenant prêt à prouver le Théorème 3.4.

Démonstration. Theorème 3.4 Nous reprenons les mêmes arguments utilisés dans [5]. Soit μ une mesure de Radon bornée nonnegative et singulière dans le sens de la définition 1.10. Puisque $N \geq 2$, alors $\mathcal{M}_s(\Omega) \not\subseteq W^{-1,2}(\Omega)$. Soit v_μ, l'unique solution renormalisée positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta v_\mu &= fD(v_\mu) + \mu \text{ dans } \Omega \\ v_\mu &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.35}$$

Par la Proposition 3.2, on peut construire v_μ comme limite de $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ où v_n est l'unique solution du problème approximé

$$\begin{cases} -\Delta v_n &= fD(v_n) + h_n \text{ dans } \Omega \\ v_n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.36}$$

avec $h_n \in L^\infty(\Omega)$, $||h_n||_{L^1(\Omega)} \leq C$ et $h_n \rightharpoonup \mu$ dans le sens des mesures. Rappelons que $v_\mu \in W_0^{1,\sigma}(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-1}$. Utilisons $1 - \dfrac{1}{(1+v_n)^\theta}$, $\theta > 0$, comme fonction test dans (3.36) nous concluons que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla v_n|^2}{(1+v_n)^{1+\theta}} dx \leq C.$$

Soit $u_n = \log(v_n + 1)$, par un calcul direct on obtient que

$$-\Delta u_n = |\nabla u_n|^2 + \frac{f_n}{u_n^\alpha} + \frac{h_n}{v_n + 1}.$$

Il est clair que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Donc il existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. D'après la preuve de la Proposition 3.2 on trouve que $v_n \geq C\psi_1$, donc $u_n \geq \log(C\psi_1 + 1)$, on déduit que pour chaque ensemble compact K de Ω, il existe une constante $C(K) > 0$ telle que $u_n \geq C(K)$ sur K uniformément en n. Alors, en utilisant le Théorème de la convergence dominée, on déduit que

$$\frac{f_n}{u_n^\alpha} \to \frac{f}{u^\alpha} \text{ fortement dans } L^1_{loc}(\Omega).$$

Montrons que

$$\frac{h_n}{v_n+1} \to 0 \text{ dans le sens des distributions.} \tag{3.37}$$

On reprend encore les arguments de [5]. Soit U_ε un ensemble ouvert, $U \subset U_\varepsilon$ telque $\mathrm{Cap_{1,p}(U_\varepsilon)} < \varepsilon$, nous procédons comme dans le Chapitre2. Considérons $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\phi_\varepsilon \geq 0$, $\phi_\varepsilon \equiv 1$ dans U_ε et

$$\int_\Omega |\nabla \phi_\varepsilon|^2 dx < \varepsilon.$$

En utilisant l'inégalité de Picone voir Théorème 1.11, nous obtenons que

$$\int_\Omega \frac{-\Delta v_n}{v_n+1} |\phi_\varepsilon|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla \phi_\varepsilon|^2 dx \leq \varepsilon.$$

Donc,

$$\int_{U_\varepsilon} \frac{h_n}{v_n+1}\, dx \leq \varepsilon.$$

Nous affirmons que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{h_n}{v_n+1} \phi\, dx = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{h_n}{v_n+1} |\phi|\, dx &\leq ||\phi||_\infty \int_{U_\varepsilon} \frac{h_n}{v_n+1}\, dx + \int_{\Omega\setminus U_\varepsilon} \frac{h_n}{v_n+1} |\phi|\, dx \\
&\leq \parallel \phi \parallel_\infty \varepsilon + \int_{\Omega\setminus U_\varepsilon} \frac{h_n}{v_n+1} |\phi|\, dx.
\end{aligned}$$

Puisque $\mu(\Omega\setminus U_\varepsilon) = 0$, on peut choisir une suite $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de telle sorte que $\mathrm{Supp}\,(h_n) \subset U_\varepsilon$ si $n \geq n_0$. Alors

$$\int_{\Omega\setminus U_\varepsilon} \frac{h_n}{v_n+1} |\phi|\, dx = 0 \text{ si } n \geq n_0.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{h_n}{v_n+1}\,\phi\, dx = 0, \tag{3.38}$$

et l'affirmation est montrée. Utilisons les résultats obtenu dans l'article [41] nous obtenons que $T_k(u_n)$ converge fortement vers $T_k(u)$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$.
En revanche, pour conclure la preuve il reste à montrer que

$$|\nabla u_n|^2 \to |\nabla u|^2 \text{ fortement dans } L^1(\Omega),$$

ce qui revient à montrer que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla v_n|^2}{(1+v_n)^2}dx \to \int_\Omega \frac{|\nabla v|^2}{(1+v)^2}dx \text{ fortement dans } L^1(\Omega)$$

Pour cela, puisque on a la convergence p.p dans Ω, pour appliquer le Théorème 1.2 il suffit de vérifier l'equi-intégrabilité de $|\nabla u_n|^2$. Soit $E \subset \Omega$ un ensemble mesurable, alors pour tout $\delta \in]0,1[$ et $k > 0$,

$$\int_E \frac{|\nabla v_n|^2}{(1+v_n)^2}dx = \int_{E\cap\{u_n<k\}} \frac{|\nabla v_n|^2}{(1+v_n)^2}dx + \int_{E\cap\{u_n>k\}} \frac{|\nabla v_n|^2}{(1+v_n)^2}dx.$$

$$\leq \int_E |\nabla T_k(u_n)|^2 dx + \frac{1}{(1+k)^{1-\delta}} \int_{E\cap\{u_n>k\}} \frac{|\nabla v_n|^2}{(1+v_n)^{1-\delta}}dx.$$

La dernière intégrale est uniformément bornée par rapport à n, par conséquent, le terme correspondant peut être controlé en choisissant k assez grand. De plus, pour chaque $k > 0$ d'après la convergente forte de $T_k(u_n) \to T_k(u)$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, il résulte que $\int_E |\nabla T_k(_n)|^2 dx$ est uniformément petit si (la mesure de E) $|E|$ est suffisament petite. Donc l'equi-intégrabilité de $|\nabla u_n|^2$ s'ensuit immédiatement et la preuve est terminée. D'où u est la solution de (3.8).
Il est clair que si μ_1, μ_2 sont deux mesures bornées singulières non-négatives avec $\mu_1 \neq \mu_2$, alors $v_{\mu_1} \neq v_{\mu_2}$ et alors $u_{\mu_1} \neq u_{\mu_2}$, d'où les résultats de multiplicité. $\square$

Remarque 3.3.

1. Comme exemple de mesures singulières, on considère $\mu = \delta_x$ et $x \in \Omega$. Notons que $\mathcal{M}_s(\Omega) \subset W^{-1,2}(\Omega)$ si $N = 1$, cepandant $\mathcal{M}_s(\Omega) \not\subseteq W^{-1,2}(\Omega)$ pour tout $N \geq 2$.

2. Dans le cas général où $q > \frac{N}{N-1}$ et $q \neq 2$, si $\Omega = B_1(0)$ et f est une fonction radiale nonnegative telle que $f \in L^m(B_1(0))$ et $m > \frac{(q-1)m}{q}$, suivons les arguments de [1], on peut démontrer que le problème (3.23) admet une infinité de solutions radiales positives. Il suffit de considérer la famille des mesures singulières $\mu_s = C\delta_0$, $C > 0$.

Deuxième partie

Problèmes Paraboliques

Chapitre 4

Sur une équation parabolique avec poids de Hardy-Leray

Le résultat principal de ce chapitre est une généralisation des résultats obtenus dans [18].

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de discuter l'existence de la solution du problème parabolique suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u > 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x) > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{4.1}$$

Considérons $p \geq 1$ et $\Omega \subset I\!R^N$ un domaine borné, avec $0 \in \partial\Omega$.

1. Le cas avec $0 \in \Omega$, si $p = 1$ est déja traité par Baras-Goldstein dans [20]. Les auteurs y ont prouvé l'existence de solutions distributionnelles pour $\lambda \leq \Lambda_{N,2}$ où $\Lambda_{N,2}$ est la constante optimale de l'inégalité de Hardy et la non-existence de solution distributionnelle pour $p > 1$ si $\lambda > \Lambda_{N,2}$.

2. Le cas stationnaire a été étudié durant les dernières années, on cite quelques

résultats en rapport avec notre problème :

- Si $0 < p < 1$ il est facile de démontrer l'existence d'une solution, indépendamment de l'emplacement de l'origine. Par l'inégalité de Hardy, la fonctionnelle d'énergie vérifie :

  $$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega \frac{u^{p+1}}{|x|^2} \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - C(\Omega,p)\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2\Big)^{\frac{p+1}{2}}$$

  et on peut procéder par minimisation.
- Si $1 < p < 2^* - 1$, dans [42] les auteurs ont prouvé la dépendance entre la forme du domaine et l'existence de solution.

Il est important de souligner que dans cette analyse il n'y a pas de restriction sur la géométrie du domaine et nous pouvons trouver une solution pour tout $\lambda > 0$. Notons que l'importance de travail est aussi revient qu'on a pas une condition au dessous sur p dans le cas super-linéaire. Ce chapitre est organisé comme suit :

- Dans la première section on va faire un rappel du cas stationnaire où on présente des résultats d'existence et de la non-existence des solutions.
- La deuxième section, se décompose en deux principales parties, dans la première partie où on va se concentré au cas parabolique plus précisement le cas linéaire, $p = 1$, on y démontre l'existence d'une unique solution faible dans un espace de Sobolev pour tout $\lambda > 0$, et on traite aussi le comportement asymptotique de la solutionet dans la deuxième partie nous nous concentrons sur le cas sur-linéaire (4.1), $p > 1$, où on montre l'existence, l'unicité de solution faible
- Dans la dernière partie on traite le problème (4.1) avec un terme concave placé comme terme absorbant, nous prouvons l'existence d'une unique solution pour tout $\lambda > 0$. et aussi on analyse le comportement de la solution quand $t \to \infty$.

4.2 Préliminaires :

Etant donné que nous considérons un problème parabolique avec des données générales, nous sommes amenés à utiliser la notion de solution entropique. Le théorème suivant est démontré dans [24], voir aussi [65].

Théorème 4.1. Soit Ω un domaine borné régulier, $f \in L^1(\Omega_T)$, $u_0 \in L^1(\Omega)$, alors le problème (1.10) possède une est une seule solution entropique $u \in C((0,T), L^1(\Omega))$.

De la même manière nous avons besoin du résultat suivant pour le problème elliptique avec terme concave.

Lemme 4.1. Soit Ω est un domaine borné telque $0 \in \partial\Omega$. Supposons que $0 < q < 1$, alors le problème

$$\begin{cases} -\Delta w = \dfrac{w^q}{|x|^2} & \text{dans } \Omega, \\ \quad w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

a une solution unique w tel que $w \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

L'existence de w s'obtient par minimisation de la fonctionnelle d'énergie

$$J(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega \frac{w^{q+1}}{|x|^2} dx.$$

L'unicité et la bornitude de w sont des conséquences du principe de comparaison obtenu dans [35] et du résultat de [42]. De plus ; par le Lemme 1.3 Nous obtenons que

$$w(x) \geq c_1\delta(x) \text{ pour tout } x \in \Omega. \tag{4.3}$$

4.3 Cas Stationnaire : Rappels

Pour le cas elliptique les auteurs dans [42] ont montré que l'existence de la solution dépend de la géométrie du domaine, plus précisement ils se sont interéssés au problème elliptique suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{u^p}{|x|^2} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

où $0 \in \partial\Omega$.

4.3.1 Résultats de non-existence

Théorème 4.2. Supposons que $N \geq 3$ et $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, alors le problème (4.4) n'admet pas de solution au sens d'énergie si $0 \in \partial\Omega$ où Ω est étoilé par rapport à l'origine.

Rappelons que : Ω est dit domaine étoilé en x_0 s'il vérifie :

$$\Omega \equiv: \{\exists x_0 \in \Omega \setminus \forall x \in \Omega \mid < x - x_0.\eta(x) >> 0\}.$$

Avant d'entamer la preuve nous allons introduire le résultat suivant :

Lemme 4.2. Supposons $N \geq 2$ et $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ ($p > 1$ si $N = 2$). Si u est une solution au sens d'énergie de (4.4) alors $u \in L^\infty(\Omega)$, et il existe $C > 0$ telle que

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C}{|x|}, |D^2 u(x)| \leq \frac{C}{|x|^2} \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

Pour la preuve on renvoit le lecteur à [42].

4.3.2 Résultats d'existence :

Avant d'énoncer le résultat d'existence, nous allons présenter la définition suivante :

Définition 4.1. On dit que Ω_ε est un haltère"dumbbell domain" si il est compris entre un domaine avec une frontière régulière de la forme $\Omega_\varepsilon = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup C_\varepsilon$ où Ω_1 et Ω_2 sont deux domaines réguliers bornés telle que $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \varnothing$, et C_ε est

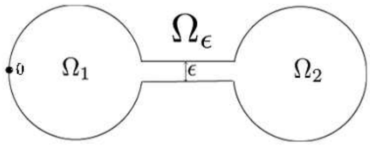

FIGURE 4.1 – domaine haltère tubulaire " dumball domain"

la region contenue dans un voisinage tubulaire de rayon inférieur à $\varepsilon > 0$ autour d'une courbe joignant Ω_1 et Ω_2.

Théorème 4.3. Supposons que

1. Ω_ε est un haltère "dumbbell domain".
2. $0 \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_\varepsilon$.
3. $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$.

Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ telque si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{u^p}{|x|^2} & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{4.5}$$

à une solution.

On trouvera la démonstration de ce résultat dans [42].

4.4 Cas Parabolique : Résultats d'existence

4.4.1 Cas linéaire :

Théorème 4.4. Soit $\Omega \subset I\!R^N$ est un domaine borné avec $N \geq 3$ et $0 \in \partial\Omega$. Supposons que $u_0 \in L^1(\Omega)$ est une fonction non négative, alors pour tout $\lambda > 0$, le problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda \dfrac{u}{|x|^2} & \text{dans } \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{4.6}$$

possède une unique solution entropique u dans le sens de la définition 1.13, de plus $\dfrac{u}{|x|^2} \in L^1(\Omega_T)$ et $u \in L^\sigma(0,T;W_0^{1,\sigma}(\Omega))$ pour tout $\sigma < \frac{N+2}{N+1}$.

Démonstration. Existence : nous procédons par approximation. Fixons $u_0 \in L^1(\Omega)$, on considère une suite de fonctions non négatives $\{u_{0n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ telles que u_{0n} est croissante en n et $u_{0n} \uparrow u_0$ quand $n \to \infty$. Supposons que $u_1 \equiv 0$, et définissons $u_n \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$, avec $n \geq 1$, comme l'unique solution positive du problème approximé

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta u_n = \lambda \dfrac{u_{n-1}}{|x|^2 + \frac{1}{n}} & \text{dans } \Omega_T, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ u(x,0) = u_{0n}(x) & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{4.7}$$

l'existence et l'unicité de u_n découle d'un résultat de comparaison. Il est clair que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante en n.
Fixons $0 < q < \frac{1}{2}$, et rappelons que w est l'unique solution positive de (4.2), puisque $w \in L^\infty(\Omega)$, nous estimons que

$$\forall \lambda > 0, \forall \epsilon > 0, \exists C > 0 \ \text{ telle que } \lambda < C|x|^2 + \epsilon w(x)^{q-1} \text{ pour tout } x \in \Omega. \tag{4.8}$$

Fixons $\lambda > 0$, il est facile de vérifier que :

- Si x est dans une voisinage du bord, alors nous utilisons le fait que $q < 1$, w^{q-1} assez grand et (4.8) s'ensuit.
- À l'intérieur de Ω, (4.8) s'obtient en utilisant le fait pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$, $|x|^2 > C_1(K)$. D'où (4.8) est démontré en choisissant C assez grand.

En utilisant w comme fonction test dans (4.7), on obtient

$$\int_\Omega (u_n)_t w dx - \int_\Omega \Delta u_n w dx = \lambda \int_\Omega \frac{u_{n-1} w}{|x|^2 + \frac{1}{n}} dx \leq \lambda \int_\Omega \frac{u_n w}{|x|^2} dx.$$

Par (4.8) nous avons

$$\lambda \frac{w}{|x|^2} < Cw + \epsilon \frac{w^q}{|x|^2}.$$

Alors,

$$\int_\Omega (u_n)_t w dx + \int_\Omega u_n(-\Delta w)dx \leq C \int_\Omega u_n w + \epsilon \int_\Omega \frac{w^q u_n}{|x|^2} dx.$$

Utilisons la définition de w et choisissons $\varepsilon << 1$, il s'ensuit que

$$\int_\Omega (u_n)_t w dx + (1-\epsilon) \int_\Omega u_n \frac{w^q}{|x|^2} dx \leq C \int_\Omega u_n w dx.$$

Puisque $u_n, w > 0$, alors

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u_n w dx \leq C \int_\Omega u_n w.$$

Nous appliquons, l'inégalité de Gronwall (voir Lemme 1.9) et on intègre en temps

$$\int_\Omega u_n(x,T) w dx + (1-\epsilon) \int_0^T \int_\Omega u_n \frac{w^q}{|x|^2} dx dt \leq T e^{CT} \int_\Omega u_0 w dx. \tag{4.9}$$

Par conséquent, $\int_0^T \int_\Omega u_n \frac{w^q}{|x|^2} dx dt \leq C_1(T)$ et $\int_0^T \int_\Omega \frac{d}{dt} u_n w dx dt \leq C_2(T)$. Puisque $\{u_n\}_{n \in N}$ est croissante en n, utilisons le théorème de la convergence monotone, nous obtenons l'existence d'une fonction mesurable u telle que $u_n \frac{w^q}{|x|^2} \to u \frac{w^q}{|x|^2}$ fortement dans $L^1(\Omega_T)$, il est clair que $u_n \uparrow u$ fortement dans $L^1_{loc}(\Omega_T)$. Nous estimons que $\{\frac{u_n}{|x|^2}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(\Omega_T)$. En effet nous définissons $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ comme étant l'unique solution positive du problème

$$-\Delta \psi = \frac{1}{|x|^2} \text{ dans } \Omega, \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{4.10}$$

Puisque $0 \in \partial\Omega$, alors par le résultat de [42], nous concluons que $\psi \in L^\infty(\Omega)$. Montrons que

$$\psi \leq C w^{1-q}. \tag{4.11}$$

Pour cela définissons $\varphi = \psi^{\frac{1}{1-q}}$, alors par un calcul direct nous obtenons que

$$-\Delta \varphi \leq \frac{1}{1-q} \frac{\varphi^q}{|x|^2}.$$

Donc, par le principe de comparaison dans le Théorème 1.5 nous concluons que

$\varphi \leq Cw$, alors (4.11) est obtenue. Utilisons ψ comme fonction test dans (4.7), nous obtenons que

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} u_n\psi dx + \int\limits_{\Omega} \frac{u_n}{|x|^2}dx = \lambda\int\limits_{\Omega} \frac{u_{n-1}\psi}{|x|^2+\frac{1}{n}}dx \leq C\lambda\int\limits_{\Omega} \frac{u_n w^{1-q}}{|x|^2}dx. \tag{4.12}$$

Puisque $q<\frac{1}{2}$, et par le fait que w est bornée, nous obtenons que $w^{1-q}\leq Cw^q$. Revenons à l'estimation (4.12), il s'ensuit que

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} u_n\psi dx + \int\limits_{\Omega} \frac{u_n}{|x|^2}dx = \lambda\int\limits_{\Omega} \frac{u_{n-1}\psi}{|x|^2+\frac{1}{n}}dx \leq C\lambda\int\limits_{\Omega} \frac{u_n w^{q}}{|x|^2}dx \leq C(T). \tag{4.13}$$

Par intégration en temps, il en résulte que

$$\int\limits_{\Omega} u_n(x,T)\psi dx + \int_0^T\int\limits_{\Omega} \frac{u_n}{|x|^2}dxdt \leq C(T).$$

D'où l'estimation voulue. Par conséquent, nous obtenons que $\dfrac{u_n}{|x|^2}\in L^1(\Omega_T)$. Il est clair que u est une solution entropique du problème (4.6), (voir [65]). Un résultat classique de la régularité de la solution au sens d'entropie nous permet d'avoir que $u\in \mathcal{C}((0,T),L^1(\Omega))$ et $u\in L^\sigma(0,T;W_0^{1,\sigma}(\Omega))$ pour tout $\sigma<\frac{N+2}{N+1}$. L'estimation (4.9) assure que u est globalement définie en temps.

Unicité : Il est clair que u est une solution minimale du problème (4.6), par l'utilisation d'un résultat de comparaison classique et par le principe du maximum fort. Montrons maintenant le résultat d'unicité. Nous procédons par l'absurde, supposons qu'il existe une autre solution entropique v, alors $v\geq u$. Soit $z=v-u$, alors $z\geq 0$, $\dfrac{z}{|x|^2}\in L^1(\Omega_T)$ et z résout

$$\begin{cases} z_t-\Delta z=\lambda\dfrac{z}{|x|^2} & \text{dans } \Omega_T,\\ z(x,0)=0 & \text{dans } \Omega\\ z=0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T). \end{cases} \tag{4.14}$$

Utilisons w, la solution de (4.2), comme fonction test dans (4.14), En reprenant le même calcul que dans la preuve de l'existence, nous obtenons

$$\int_\Omega z_t w dx + (1-\epsilon)\int_\Omega z\frac{w^q}{|x|^2}dx \le C\int_\Omega zw,$$

où $\varepsilon << 1$. Puisque $z, w \ge 0$, alors

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega zwdx \le C\int_\Omega zw.$$

Par l'inégalité de Gronwall, nous arrivons à $z(x,t)w(x) \le 0$ pour tout $t > 0$. Alors $z \equiv 0$ et le résulat d'unicité est démontré. □

Rappelons maintenant la constante de Hardy-Leray, pour $0 \in \partial\Omega$

$$\mu(\Omega) = \inf\Big\{\frac{\int_\Omega |\nabla\phi|^2}{\int_\Omega \frac{|\phi|^2}{|x|^2}} : \phi \in W_0^{1,2}(\Omega),\, \phi \ne 0\Big\}. \tag{4.15}$$

avec $\mu(\Omega) < \mu(\mathbb{R}^N_+) = \frac{N^2}{4}$, alors la constante $\mu(\Omega)$ est atteinte.

Concernant la régularité de u nous avons la remarque suivante :

Remarque 4.1.

Si $\lambda < \mu(\Omega)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, alors $u \in L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega))$. Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors en utilisant un argument d'itération nous pouvons montrer que $u \in L^\infty(D)$ pour tout ensemble compact D de Ω_T.

Si $\lambda \ge \mu(\Omega)$, nous estimons que $\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 wdxdt < \infty$. Pour s'en convaicre nous utilisons $u_n w$ comme fonction test dans (4.7), alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_n^2 wdx + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 wdx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{u_n^2 w^q}{|x|^2}dxdt \le \lambda\int_\Omega \frac{u_n^2 w}{|x|^2}dxdt.$$

De (4.8) nous avons

$$\lambda\frac{wu_n^2}{|x|^2} < Cwu_n^2 + \epsilon\frac{w^q u_n^2}{|x|^2},$$

Pour $\varepsilon < \frac{1}{2}$, nous trouvons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_n^2 wdx + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 wdx + (\frac{1}{2}-\varepsilon)\int_\Omega \frac{u_n^2 w^q}{|x|^2}dxdt \le C\int_\Omega u_n^2 wdx.$$

Par l'inégalité de Gronwall nous concluons que

$$\int_\Omega u_n^2(x,t)wdx \le \Big(\int_\Omega u_0^2 wdx\Big)e^{Ct}, t>0.$$

De la même manière on obtient que

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^2 wdxdt \le C(T).$$

D'où l'estimation s'ensuit. Les arguments d'itération nous permettent de prouver que, si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors $u \in L^\infty(D)$ pour tout ensemble compact D de Ω_T.

Dans le résultat suivant, nous analysons le comportement de la solution entropique du problème (4.6) trouvée dans le Théorème 4.4 quand $t \to \infty$ dépend de la valeur λ. Plus précisement nous avons le Théorème suivant.

Théorème 4.5. Soit u la solution entropique du problème (4.6) trouvée dans le Théorème 4.4, alors nous avons

1. Si $\lambda \le \mu(\Omega)$, alors $u(x,t) \to 0$ dans $L^1(wdx,\Omega)$ quand $t \to \infty$,
2. Si $\lambda > \mu(\Omega)$ alors $u(x,t) \to \infty$ dans $L^1(wdx,\Omega)$ quand $t \to \infty$,

où $\mu(\Omega)$ est la constante de Hardy définie dans (4.15).

Démonstration. Soit u l'unique solution entropique du problème (4.6), alors $\dfrac{u}{|x|^2} \in L^1(\Omega_T)$ pour tout $T < \infty$. Nous divisons la preuve en deux étapes : **Première Etape : $\lambda < \mu(\Omega)$.** Fixons $\lambda < \lambda_1 < \mu(\Omega)$ et définissons ϕ l'unique solution bornée du problème

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \lambda_1 \dfrac{\phi}{|x|^2} + 1 & \text{dans } \Omega, \\ \phi = 0, 0 \in \partial\Omega & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.16}$$

Utilisons ϕ comme fonction test dans (4.6)

$$\int_\Omega u_t\phi dx - \int_\Omega \Delta u\phi dx = \lambda \int_\Omega \frac{u\phi}{|x|^2}dx.$$

D'où

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u\phi dx + (\lambda_1 - \lambda)\int_{\Omega} \frac{u\phi}{|x|^2}dx + \int_{\Omega} udx = 0,$$

puisque $u, \phi \geq 0$ dans Ω_T pour tout T, on pose $Y(t) = \int_{\Omega} u(x,t)w(x)dx$, alors par l'inégalité de Gronwall nous obtenons que $Y(t) \leq Y_0 e^{-(\lambda_1 - \lambda)ct}$.

Deuxième Etape : $\lambda > \mu(\Omega)$. Soit ρ_n la première fonction propre positive du problème des valeurs propres

$$\begin{cases} -\Delta\rho_n = \mu_n \dfrac{\rho_n}{|x|^2 + \frac{1}{n}} & \text{dans } \Omega, \\ \rho_n = 0, 0 \in \partial\Omega & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.17}$$

Nous normalisons ρ_n de sorte que $||\rho_n||_\infty = 1$. Il n'est pas difficile de prouver que $\mu_n \downarrow \mu(\Omega)$ quand $n \to \infty$. Puisque $\lambda > \mu(\Omega)$, il existe $n_0 \in I\!N$ telque pour tout $n \geq n_0$, nous avons $\mu_n < \lambda$. Fixons n_0 pour avoir l'estimation précédente et notons ρ_{n_0} par ρ et μ_{n0} par μ. Utilisons ρ comme fonction test dans (4.6),

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u\rho dx + \mu\int_{\Omega} \frac{u\rho}{|x|^2 + \frac{1}{n_0}}dx = \lambda\int_{\Omega} \frac{u\rho}{|x|^2}dx.$$

Par le fait que $\dfrac{1}{|x|^2} \geq \dfrac{1}{|x|^2 + \frac{1}{n_0}} \geq C$ dans Ω, il s'ensuit que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u\rho dx \geq (\lambda - \mu)\int_{\Omega} u\rho dx.$$

Utilisons encore l'inégalité de Gronwall et le fait que $\mu < \lambda$, nous atteingnons que, pour un $c > 0$,

$$Y(t) \geq Y_0 e^{(\lambda-\mu)ct} \text{ où } Y(t) = \int_{\Omega} u(x,t)\rho dx.$$

Alors $Y(t) \to \infty$, et puisque $\rho \leq w$, alors $u(x,t)wdx \to \infty$ quand $t \to \infty$ d'où le résultat. $\square$

4.4.2 Cas : Sur-linéaire

Dans cette sous-section, nous nous intéréssons au cas sur-linéaire, $p > 1$. Afin de faciliter les calculs nous considérons $\lambda = 1$ dans ce cas. Nous procédons comme suit : on cherche une sur-solution et une sous solution et on procède par itération, en passant à la limite on obtient la solution.
Pour obtenir le résultat d'existence principal il faut trouver une sur-solution et après on procède par itération. Le résultat d'existence principal dans cette section est le suivant :

Théorème 4.6. Supposons que Ω est un domaine borné tel que $0 \in \partial\Omega$ et soit $p > 1$. Alors, il existe $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ tel que le problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \dfrac{u^p}{|x|^2} & \text{dans } \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{4.18}$$

possède une unique solution $u \in L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$.

Démonstration. Pour la clarté de la preuve nous la divisons en plusieurs étapes
Etape 1. Construction de la sur-solution (4.18).
Considérons $d_{\Gamma_1}(x) = dist(x, \Gamma_1)$, avec $x \in \overline{\Omega}$, $0 \in \Gamma_1 \subset \partial\Omega$ et Γ_1 est une sous variète de bord régulièr. Soit ζ définie comme solution de

$$\begin{cases} -\Delta\zeta = \frac{d_{\Gamma_1}^p}{|x|^2} & \text{dans } \Omega \\ \zeta = d_{\Gamma_1} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.19}$$

La fonction $d_{\Gamma_1}^p/|x|^2$ appartient à $L^r(\Omega)$ pour tous $1 \le r < \frac{N}{2-p}$ si $p < 2$ et pour tous $r \ge 1$ si $p \ge 2$. Dans les deux cas, il existe $r > N$ de telle sorte que $d_{\Gamma_1}^p/|x|^2 \in L^r(\Omega)$. Par l'utilisation de l'argument classique de Stampacchia et des résultats de régularité on cite [43, 67], on déduit que la solution ζ de (4.19) est bornée, et appartient à $C^{1,\alpha}(\Omega)$. Pour construire la sur-solution, nous avons besoin d'une majoration de ζ, jusqu'au le bord, par une fonction $d_{\Gamma_1}(x)$. Puisque dans le cas $p \ge 2$ le poids est borné, $\zeta \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ par [43, 56, 67] et de plus $\frac{\partial\zeta}{\partial\nu} < 0$ par [68], soit ν le vecteur unitaire normal extérieur. Nous avons besoin de la bornitude du gradient de la solution de l'équation (4.19) jusqu'au bord, ce qui est la continuité de Lipschitz globale de la solution. Dans [40] les auteurs ont établi les hypothèses minimales sur l'intégrabilité des données et sur la régularité de la frontière pour obtenir la bornitude du gradient pour quelques classes d'équations elliptiques quasilinéaires. En particulier, quand $d_{\Gamma_1}^p/|x|^2 \in L^r(\Omega)$ et $r > N$, ζ s'avère être continuement lipschitzienne sur $\overline{\Omega}$, à savoir que, $\zeta \in C^{0,1}(\overline{\Omega}) \cap C^{1,\alpha}(\Omega)$. Ainsi, il existe une constante $C > 0$ telle que $\zeta \leq C d_{\Gamma_1}$. Posons $T = C^{-\frac{p}{p-1}} > 0$ et $\overline{u} = T\zeta$, la fonction $\overline{u}$ vérifie

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} \geq \dfrac{\overline{u}^p}{|x|^2} & \text{dans } \Omega \\ \overline{u} > 0 & \text{dans } \Omega \\ \overline{u} = T d_{\Gamma_1} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.20}$$

De plus $\overline{u}(x) \leq C d_{\Gamma_1}(x)$ pour une certaine constante C. Par conséquent,si $u_0 \leq \overline{u}$ alors $\overline{u}$ est une sur-solution de (4.18)

Etape 2. Recherche de sous-solution.

Il suffit de considérer $\underline{u}$ comme sous-solution de (4.18) où $\underline{u}$ vérifie

$$\begin{cases} \underline{u}_t - \Delta \underline{u} = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ \underline{u}(x,0) = u_0(x) \leq \overline{u} & \text{dans } \Omega \\ \underline{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{4.21}$$

Etape 3. Comparaison.

Nous allons définir $h(x,t) = (\underline{u}(x,t) - \overline{u}(x,t))^+$. Observons que $\underline{u}_t - \Delta \underline{u} = 0 \leq \dfrac{\overline{u}^p}{|x|^2} \leq \overline{u}_t - \Delta \overline{u}$.

Nous utilisons $h(x,t)$ comme fonction test dans la dernière inégalité. Nous intégrons dans l'espace et en temps, nous obtenons que

$$\int_0^T \int_\Omega (\underline{u}(x,t) - \overline{u}(x,t))_t h(x,t)\,dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta(\underline{u}(x,t) - \overline{u}(x,t)) h(x,t)\,dxdt \leq 0$$

Alors,

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} h^2(x,T)dx + \int_0^T\int_{\Omega} |\nabla h(x,t)|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega} h^2(x,0)dx = 0.$$

Par conséquent, $h(x,t) = 0 \Rightarrow \overline{u}(x,t) \geq \underline{u}(x,t),\ \forall (x,t) \in \Omega_T$.

Etape 4. La construction des problèmes itératifs.

Nous définissons les problèmes approximés suivants

$$\begin{cases} (u^k)_t - \Delta u^k = \dfrac{(u^{k-1})^p}{|x|^2} & \text{dans } \Omega_T, \\ u^k(x,0) = u_0(x) \leq \overline{u} & \text{dans } \Omega, \\ u^k = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{4.22}$$

Considérons $u^0 = \underline{u}$. Pour $k = 1$, nous trouvons $(u^1)_t - \Delta u^1 = \dfrac{(u^0)^p}{|x|^2} \geq 0 = \underline{u}_t - \Delta \underline{u}$. En utilisant le même argument que dans la dernière étape nous obtenons $u^1 \geq \underline{u}$. Par l'argument d'itération, nous arrivons à

$$\underline{u} \leq u^1 \leq u^2 \leq ... \leq u^k \leq u^{k+1} \leq .. \leq \overline{u}.$$

Par conséquent, $\{u^k\}_{k\in N}$ est une suite ordonnée croissante, alors, nous concluons que

$$\lim_{k\to\infty} u^k(x,t) = u(x,t)$$

est une solution du problème (4.18), avec $u \in L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$ et $\dfrac{u^p}{|x|^2} \in L^1(\Omega_T)$.

Etape 5 : Unicité

Pour terminer la preuve nous devons montrer l'unicité de la solution bornée, pour cela nous procédons par absurde, supposons donc que $v \in L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$ une autre solution positive du problème 4.18, alors suivant la construction de u, nous avons que $u \leq v$. Définissons $\overline{v} = v_2 - v_1$, alors $\overline{v}$ est une solution de

$$\begin{cases} \overline{v}_t - \Delta \overline{v} = \dfrac{v_2^p - v_1^p}{|x|^2} \leq cp\dfrac{\overline{v}}{|x|^2} & \text{dans } \Omega_T, \\ \overline{v}(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \overline{v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{4.23}$$

En utilisant le même argument que dans la preuve de l'unicité du cas linéaire, nous arrivons à $\overline{v} = 0$, d'où $v_1 = v_2$. □

Remarque 4.2. Nous pouvons prendre comme sur-solution, la fonction w, solution du problème (4.18), dans ce cas, pour obtenir l'existence d'une solution nous devons supposer que

$$u_0 \in \mathcal{K} \equiv \{u_0 \in L^\infty(\Omega) : u_0 \leq cw \quad c \ \text{ petit. }\}$$

Il est clair que la classe de données obtenue dans le théorème précédent est plus large que $\mathcal{K}$. Il semble naturel de questionner s'il existe une classe de données admissible dans un espace de Lebesgue sans aucune restriction sur la norme de la donnée.

4.5 Cas concave-convexe

Dans cette section nous considérons le problème parabolique concave-convexe nonlinéaire, plus précisement nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \dfrac{u^p}{|x|^2} + \mu u^q & \text{dans } \Omega_{T(\mu)}, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T(\mu)) \end{cases} \tag{4.24}$$

Nous analysons quelques questions sur l'existence locale et globale de la solution et le comportement de chaque solution quand $t \to \infty$. Ces questions sont liées à la valeur de μ, p et la donnée initiale u_0.
Commençons par le résultat d'existence suivant pour le problème elliptique associé, pour la preuve on cite [58].

Théorème 4.7. Supposons que $0 < q < 1 < p < N$, $\mu > 0$ et $0 \in \partial\Omega$. Alors, il existe $\mu_0 > 0$, tel que $\forall \mu \in (0, \mu_0)$, le problème

$$\begin{cases} -\Delta v = \dfrac{v^p}{|x|^2} + \mu v^q & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.25}$$

a une solution minimale positive v_1. Si de plus $p < 2^* - 1$, alors il existe une seconde solution positive v_2. Pour $\mu > \mu_0$, il n'y a pas de solution positive. Si $\mu = \mu_0$, alors le problème a une solution minimale.

Contrairement au cas elliptique, nous allons montrer dans le théorème suivant, un résultat d'existence locale pour tout $\mu > 0$ et pour tout $p > 1$, sous des hypothèses convenables sur u_0.

Théorème 4.8. Supposons que $0 < q < 1 < p$, alors pour tout $\mu > 0$, il existe $T(\mu) > 0$ tel que le problème (4.24) a une solution locale sous des hypothèses convenables sur u_0.

Démonstration. Commençons par la construction de la sur-solution. Rappelons que ψ est l'unique solution du problème (4.10), alors $\psi \in L^\infty(\Omega)$. Définissons $v(x,t) = t^\alpha \psi$, alors

$$v_t - \Delta v = \alpha t^{\alpha-1}\psi + \frac{t^\alpha}{|x|^2}.$$

Soit $\Omega_\beta \equiv \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq \beta\}$ où $\beta << 1$. Il est clair que $\psi \geq C(\beta)$ pour tout $x \in \Omega_\beta$. Fixons $\alpha < 1$, nous trouvons l'existence de $T \equiv T(\mu, \alpha, \beta, \psi)$ telque

$$\alpha t^{\alpha-1}\psi + \frac{t^\alpha}{|x|^2} \geq t^{p\alpha}\frac{\psi^p}{|x|^2} + \mu t^{q\alpha}\psi^q \text{ pour tout } (x,t) \in \Omega_\beta \times (0,T). \tag{4.26}$$

Nous mettons $\theta = q\alpha + 1 - \alpha$, il est clair que $\theta \in (0,1)$ et $\theta \to 1$ quand $\alpha \to 0$. En utilisant l'inégalité d'interpolation nous trouvons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\mu t^\theta \leq C(\varepsilon)\mu^{\frac{1}{1-\theta}}\psi^{\frac{\theta q}{1-\theta}} + \varepsilon\frac{t}{\psi^q}.$$

Choisissons $\alpha < \alpha_0 < 1$ suffisament petit tel que $\frac{\theta q}{1-\theta} >> 1 - q$, alors nous pouvons écrire l'estimation précédente sous la forme suivante :

$$\mu t^\theta \leq C(\varepsilon)\mu^{\frac{1}{1-\theta}}\psi^{\frac{\theta q}{1-\theta}-(1-q)}\psi^{1-q} + \varepsilon\frac{t}{\psi^q}.$$

Comme $\varepsilon\frac{t}{\psi^q} \leq C\varepsilon\frac{t}{|x|^2\psi^q}$ pour tout $(x,t) \in \Omega\backslash\Omega_\beta \times (0,T)$. On peut donc fixer $\varepsilon > 0$ tel que $C\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. D'autre part, et en utilisant le fait que $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$, alors nous pouvons choisir β petite tel que pour tout $x \in \Omega$ avec $d(x,\partial\Omega) \leq \beta$, nous avons

$$C(\varepsilon)\mu^{\frac{1}{1-\theta}}\psi^{\frac{\theta q}{1-\theta}-(1-q)} \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Par conséquent nous concluons que pour tout $(x,t) \in \Omega\backslash\Omega_\beta \times (0,T)$, nous avons

$$\mu t^{q\alpha}\psi^q \leq \frac{\alpha}{2}t^{\alpha-1}\psi + \frac{1}{2}\frac{t^\alpha}{|x|^2}.$$

Il n'est pas difficile de montrer que, pour $(x,t) \in \Omega\backslash\Omega_\beta \times (0,T)$, nous avons

$$t^{p\alpha}\frac{\psi^p}{|x|^2} \leq \frac{\alpha}{2}t^{\alpha-1}\psi + \frac{1}{2}\frac{t^\alpha}{|x|^2}.$$

Comme conclusion, nous avons démontré que pour tout $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$,

$$v_t - \Delta v \geq \frac{v^p}{|x|^2} + \mu v^q. \tag{4.27}$$

Nous posons $v_1(x,t) = v(x,t+\sigma)$, pour $\sigma > 0$ petit, v_1 satisfait (4.27) dans $\Omega \times (0,T_1)$ avec T_1 suffisament petit. Si $u_0 \leq \sigma^\alpha\psi$, alors v_1 est une sur-solution du problème (4.24). Puisque $\underline{u} \equiv 0$ est une sous-solution, alors en utilisant l'argument d'itération nous obtenons l'existence d'une solution u telle que $u \leq v_1$. □

Dans le but d'analyser le comportement de la solution du problème (4.24) quand $t \to \infty$ nous avons besoin de comparer cette solution avec la solution du problème stationnaire. Dans cette direction nous avons les résultats suivants :

Théorème 4.9. Considérons $0 < q < 1 < p < N$ et $0 \in \partial\Omega$, soit $\mu_0 > 0$ donnée dans le Théorème (4.25). Fixons $\mu \leq \mu_0$, alors

1. Si $u_0 \equiv 0$, alors le problème (4.24) a une solution $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$ pour tout $T < \infty$, de plus $u(x,t) \uparrow v_1$, la solution minimale du problème (4.25)
2. Si $u_0 \leq v_1$, alors la même conclusion du premier point reste valable.

Démonstration. Nous suivons l'argument utilisé dans [38].

Premier case : $u_0 = 0$. Supposons que $u_0 \equiv 0$, alors v_1 est la sur-solution de (4.24). Soit w_1 l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = w_1^q & \text{dans } \Omega, \\ w_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.28}$$

Considérons $\eta(t) = (1-q)t^{\frac{1}{1-q}}$ et définissons $\vartheta(x,t) = \eta(\theta t)w_1$, alors nous pouvons choisir θ suffisament petite dépendant seulement de T et de μ tel que $\vartheta(x,t) \leq v_1(x)$ et

$$\vartheta_t - \Delta\vartheta \leq \frac{\vartheta^p}{|x|^2} + \mu\vartheta^q \text{ dans } \Omega_T,$$

Alors ϑ est la sous-solution de (4.24). Nous considérons les problèmes itératifs suivants ; $u^0 = \vartheta$ et pour $k \geq 1$,

$$\begin{cases} (u^k)_t - \Delta u^k = \dfrac{(u^{k-1})^p}{|x|^2} + \mu(u^{k-1})^q & \text{dans } \Omega_T, \\ u^k(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u^k = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{4.29}$$

Il est clair que $\vartheta \leq u^k \leq u^{k+1} \leq v_1$, d'où nous trouvons l'existence d'une solution u telle que $\vartheta \leq u \leq v_1$. Il est clair que u est globalement définie. Nous estimons que pour tout $0 < s$, $u(x,t) \leq u(x,t+s)$. Pour avoir ça, nous définissons $\rho(x,t) = u(x,t+s)$, alors ρ résout

$$\begin{cases} \rho_t - \Delta\rho = \dfrac{\rho^p}{|x|^2} + \mu\rho^q & \text{dans } \Omega_T, \\ \rho(x,0) = u(x,s) > 0 & \text{dans } \Omega \\ \rho(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases}$$

Utilisons l'argument de récurrence nous pouvons montrer que $\rho \geq u^k$ pour tout k. Alors $\rho \geq u$ et l'estimation s'ensuit. Puisque u est croissante en temps, alors en utilisant u comme fonction test dans (4.24), et en prenant en considération que $u \leq v_1$, nous atteignons que

$$u(.,t) \uparrow \varrho \text{ dans } L^\infty(\Omega), \varrho \leq v_1$$

et

$$\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx \le C \text{ pour tout } t.$$

Alors $\varrho \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ et ϱ résout (4.25). Puisque $\varrho \le v_1$, alors $\varrho = v_1$ et le résultat s'ensuit dans ce cas.

Deuxième cas : $u_0 \le v_1$. Dans ce cas, nous prenons comme sous-solution la solution du problème

$$\begin{cases} \zeta_t - \Delta\zeta = \mu\zeta^q & \text{dans } \Omega_T, \\ \zeta(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ \zeta(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{4.30}$$

Il est clair que $\zeta \le v_1$, donc un argument d'itération nous permet d'obtenir l'existence d'une solution $\bar{u}$ telque $\zeta \le \bar{u} \le v_1$. En prenant en consideration la construction de u, la solution de (4.24) avec $u_0 = 0$, nous trouvons que $u \le \bar{u} \le v_1$. Puisque $u \uparrow v_1$ quand $t \to \infty$, alors nous concluons que $u(x,t) \to v_1$ dans $L^\infty(\Omega)$. □

Remarque 4.3.

1. Il semble naturel de se poser la question si le problème (4.24) a une solution locale pour tout $\varepsilon > 0$. Dans le cas sans le poids $|x|^{-2}$, la réponse est affirmative par construction d'une sur-solution convenable dépendant seulement du temps.

2. Trouver la condition optimale sur u_0 pour avoir une solution locale semble aussi un problème ouvert intéréssant.

Chapitre 5

Problème Parabolique avec gradient : l'effet régularisant d'un terme de premier ordre sur le terme de Hardy

Ce chapitre est le développement de l'article [19].

5.1 Introduction.

Dans ce chapitre nous allons étudier l'existence et la non existence d'une solution positive pour le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u|\nabla u|^2 = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} + f(x,t) & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u(x,0) = u_0(x) > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{5.1}$$

où $p > 1$, et $\Omega \subset I\!R^N$, $N \geq 3$, est un domaine borné avec $0 \in \Omega$.
Notre objectif est d'analyser l'interaction entre les deux termes : $u|\nabla u|^2$ et $\lambda \dfrac{u^p}{|x|^2}$ pour prouver l'existence d'une solution positive pour la classe la plus large des

données u_0 et f et pour toute valeur de λ. Dans le cas où le terme $u|\nabla u|^2$ est remplacé par $|\nabla u|^2$, le problème stationnaire est déjà traité dans [59]. Les auteurs ont prouvé que si $p < 2$, alors il existe une solution pour tout $\lambda > 0$ et $f \in L^1(\Omega)$. Il est à noter que dans le cas où le terme de gradient apparait comme terme de reaction, alors le problème n'admet pas de solution distributionnelle positive locale pour tout $p > 1$ et $\lambda > 0$, voir [9].

Ce chapitre est organisé comme suit :

- Dans la première section, nous étudions le cas stationnaire associé à une donnée dans $L^1(\Omega)$, on démontre l'existence d'une solution positive pour tout $p < 3$, $\lambda > 0$. La preuve consiste à utiliser un argument de troncature et d'approximation.
- Dans la deuxième partie, nous considérons le cas parabolique. Il est clair que si u_0, f sont "controlés" par la solution du problème stationnaire, alors l'existence "modulo" un calcul technique se déduit par la méthode de monotonie. L'objectif principal de la section sera de prouver l'existence d'une solution indépendament de "controle stationnaire", c'est à dire pour tout $u_0 \in L^1(\Omega)$ et $f \in L^1(\Omega_T)$.
- Enfin on donne quelques extensions dans le cas où le terme $u|\nabla u|^2$ est remplacé par le terme général $u^\beta|\nabla u|^2$ avec $\beta > p - 2$.

5.2 Cas Stationnaire :

Dans cette section on considère le cas stationnaire associé au problème (5.1), plus précisement on considère le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u|\nabla u|^2 = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} + g(x), & u \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \qquad u = 0 & \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2}$$

On a le Théorème suivant.

Théorème 5.1. Supposons que $g \in L^1(\Omega)$ est une fonction positive et $p < 3$. Alors, pour tout $\lambda > 0$ il existe une solution faible positive $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ de (5.2).

Pour prouver le Théorème précédent, nous procédons étape par étape. Nous prouvons le résultat pour $g \in L^m(\Omega)$, $m > \dfrac{N}{2}$ et puis pour le cas géneral $g \in L^1(\Omega)$.

5.2.1 Résultat d'existence avec $g \in L^m(\Omega),\ \ m > \frac{N}{2}$

Soit le problème approximé suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u_n + u_n|\nabla u_n|^2 & = & \lambda \dfrac{T_n(u_n^p)}{|x|^2+\frac{1}{n}} + g, \quad \text{dans } \Omega, \\ u_n & \in & W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{ et } u_n > 0. \end{array}\right. \tag{5.3}$$

Théorème 5.2. Supposons que $g \in L^m(\Omega)$, $m > \frac{N}{2}$, alors il existe une fonction positive u_n du problème (5.3) pour tout $\lambda > 0$. De plus $u_n \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

Démonstration. Puisque $g \gneq 0$, alors $\phi \equiv 0$ est une sous solution du problème (5.3). Considérons ψ solution de

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta\psi & = & \frac{\lambda n}{|x|^2+\frac{1}{n}} + g \quad x \in \Omega, \\ \psi & = & 0 \quad x \in \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Notons que ψ est une sur-solution de (5.3). Il est clair que $\psi \in L^\infty(\Omega)$. On considère maintenant la suite $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 0$ et w_i est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta w_i + \dfrac{w_i|\nabla w_i|^2}{1+\frac{1}{i}w_i|\nabla w_i|^2} = \lambda \dfrac{T_n(w_{i-1}^p)}{|x|^2+\frac{1}{n}} + g, \\ w_i \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ w_i > 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Par le principe de comparaison de [31], il résulte que la suite $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante en i. Notons que $0 \le w_i \le \psi$. Par la Proposition (3.3) dans [31], on obtient l'existence d'une solution de (5.4) telle que

$$w_i \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ et } 0 \le w_i \le \psi.$$

On pose $H_i(\nabla w_i) = \dfrac{w_i|\nabla w_i|^2}{1+\frac{1}{i}w_i|\nabla w_i|^2}$.

Estimation a priori dans $W_0^{1,2}(\Omega)$

En prenant w_i comme fonction test dans le problème (5.4), il résulte que

$$\int_\Omega |\nabla w_i|^2 dx + \int_\Omega H_i(\nabla w_i) w_i dx = \lambda \int_\Omega \frac{T_n(w_{i-1}^p)}{|x|^2 + \frac{1}{n}} w_i dx + \int_\Omega g w_i dx \leq$$

$$\leq \lambda \int_\Omega n \frac{w_i}{|x|^2 + \frac{1}{n}} dx + \int_\Omega g w_i dx \leq \lambda \int_\Omega n \frac{\psi}{|x|^2 + \frac{1}{n}} dx + \int_\Omega g \psi dx.$$

Donc,

$$\int_\Omega |\nabla w_i|^2 dx + \int_\Omega H_i(\nabla w_i) w_i dx \leq C(n, g, \Omega).$$

Puisque

$$\int_\Omega H_i(\nabla w_i) w_i dx \geq 0, \text{ alors } \int_\Omega |\nabla w_i|^2 dx \leq C(n, g, \Omega).$$

Par conséquent, à une sous suite, $w_i \rightharpoonup u_n$ faiblement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et $w_i \rightharpoonup u_n$ faiblement-* dans $L^\infty(\Omega)$, puisque $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Affirmation : $w_i \to u_n$ fortement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Notons que si $w_i \to u_n$ fortement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, alors u_n est une solution du problème tronqué (5.3). Soit

$$\phi(s) = s e^{\frac{1}{4}s^2}, \quad \text{avec} \quad \phi'(s) - |\phi(s)| \geq \frac{1}{2}. \tag{5.5}$$

En prenant $\phi(w_i - u_n)$ comme fonction test dans (5.4),

$$\int_\Omega \nabla w_i \phi'(w_i - u_n) \nabla(w_i - u_n) dx + \int_\Omega H_i(\nabla w_i) \phi(w_i - u_n) dx =$$

$$= \lambda \int_\Omega \frac{T_n(w_{i-1}^p)}{|x|^2 + \frac{1}{n}} \phi(w_i - u_n) dx + \int_\Omega g \phi(w_i - u_n) dx.$$

Puisque $w_i \rightharpoonup u_n$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, le premier terme est estimé comme suit :

$$\int_\Omega \nabla w_i \phi'(w_i - u_n) \nabla(w_i - u_n) dx = \int_\Omega \phi'(w_i - u_n) |\nabla(w_i - u_n)|^2 dx + \int_\Omega \nabla u_n \phi'(w_i - u_n) \nabla(w_i - u_n) dx$$

$$= \int_\Omega |\nabla(w_i - u_n)|^2 \phi'(w_i - u_n) dx + o(1).$$

Pour le second terme nous avons

$$\int_\Omega H_i(\nabla w_i) \phi(w_i - u_n) dx \leq \int_\Omega w_i |\nabla w_i|^2 |\phi(w_i - u_n)| dx$$

$$\leq ||\psi||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla w_i|^2 |\phi(w_i - u_n)| dx \leq c \int_\Omega |\nabla w_i|^2 |\phi(w_i - u_n)| dx$$

$$= c \int_\Omega |\nabla w_i - \nabla u_n|^2 |\phi(w_i - u_n)| dx - c \int_\Omega |\nabla u_n|^2 |\phi(w_i - u_n)| dx + 2c \int_\Omega \nabla w_i \nabla u_n |\phi(w_i - u_n)| dx.$$

Puisque $w_i \rightharpoonup u_n$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et $|\phi(w_i - u_n)| \to 0$ p.p, nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 |\phi(w_i - u_n)| dx \to 0 \quad \text{quand } i \to \infty,$$

et aussi par la convergence faible, on aura

$$\int_\Omega \nabla w_i \nabla u_n \phi(w_i - u_n) dx \to 0 \quad \text{quand } i \to \infty.$$

Notons aussi que

$$\int_\Omega g\phi(w_i - u_n) dx = o(1).$$

Puis, en passant à la limite dans $i \to \infty$, on obtient

$$\int_\Omega H_i(\nabla w_i)\phi(w_i - u_n) dx \leq c \int_\Omega |\nabla w_i - \nabla u_n|^2 |\phi(w_i - u_n)| dx + o(1).$$

Puisque ϕ vérifie (5.5), nous concluons que

$$c_1 \int_\Omega |\nabla w_i - \nabla u_n|^2 dx \leq \int_\Omega (\phi'(w_i - u_n) - c|\phi(w_i - u_n)|)|\nabla w_i - \nabla u_n|^2 dx \leq o(1).$$

Donc $w_i \to u_n$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, en particulier, à une sous suite, $H_i(\nabla w_i) \to u_n|\nabla u_n|^2$ p.p. dans Ω et comme $w_i \leq \psi$, en appliquant le theoreme de la convergence dominé, on déduit facilement que

$$H_i(\nabla w_i) \to u_n |\nabla u_n|^2 \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega).$$

Puisque $-\Delta w_i \to -\Delta u_n$ dans le sense des distributions, nous concluons que u_n satisfait au problème

$$-\Delta u_n + u_n |\nabla u_n|^2 = \lambda \frac{T_n(u_n^p)}{|x|^2 + \frac{1}{n}} + g \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad u_n \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{et } u_n > 0. \tag{5.6}$$

□

Maintenant, nous sommes en mesure de montrer le résultat suivant.

Théorème 5.3. Considérons $g \in L^m(\Omega)$, $m > \frac{N}{2}$ une fonction positive, alors pour tout $\lambda > 0$ il existe une solution positive $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ du problème (5.2).

Démonstration. Nous avons besoin d'analyser la convergence de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, les solutions des problèmes (5.3).

i) La convergence faible de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $W_0^{1,2}(\Omega)$. Puisque $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, nous pouvons utiliser u_n comme fonction test dans le problème tronqué (5.3). Il s'en suit que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u_n^2|^2 dx \leq \lambda \int_\Omega \frac{u_n^{p+1}}{|x|^2} dx + \int_\Omega g u_n dx. \tag{5.7}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder nous obtenons que,

$$\int_\Omega \frac{u_n^{p+1}}{|x|^2} dx \leq \Big(\int_\Omega \frac{u_n^4}{|x|^2} dx\Big)^{\frac{p+1}{4}} \Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^2} dx\Big)^{\frac{3-p}{4}}.$$

Donc, par l'inégalité de Young nous obtenons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\epsilon = C_\epsilon(p, N) > 0$ telle que

$$\Big(\int_\Omega \frac{u_n^4}{|x|^2} dx\Big)^{\frac{p+1}{4}} \Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^2} dx\Big)^{\frac{3-p}{4}} \leq \varepsilon \int_\Omega \frac{u_n^4}{|x|^2} dx + C_\epsilon \int_\Omega \frac{1}{|x|^2} dx. \tag{5.8}$$

Et utilisons l'inégalité de Hardy nous trouvons que,

$$\varepsilon \int_\Omega \frac{u_n^4}{|x|^2} dx + C_\epsilon \int_\Omega \frac{1}{|x|^2} dx \leq \frac{\varepsilon}{\Lambda_{N,2}} \int_\Omega |\nabla u_n^2|^2 dx + C.$$

En revanche, et par l'inégalité de Sobolev nous trouvons

$$\int_\Omega g u_n dx \leq ||g||_{L^m(\Omega)} ||u_n||_{L^{m'}(\Omega)} \leq c\Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{m'}-\frac{1}{2^*}} ||g||_{L^m(\Omega)}.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $D_\varepsilon = D_\varepsilon(k, N, g, \Omega)$ telle que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u_n^2|^2 dx \leq \frac{\varepsilon\lambda}{\Lambda_{N,2}} \int_\Omega |\nabla u_n^2|^2 dx + \varepsilon c \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \overline{C} + D_\varepsilon. \tag{5.9}$$

Donc, pour un ε très petit, par (5.7), (5.8), (5.9) on déduit donc qu'il existe une constante $A > 0$ telle que,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq A \quad \text{et} \quad \int_\Omega |\nabla u_n^2|^2 dx \leq A.$$

Et par suite, à une sous suite près,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ et } u_n^2 \rightharpoonup u^2 \text{ faiblement dans } W_0^{1,2}(\Omega) \text{ et p.p.}$$

ii) La convergence forte dans $L^1(\Omega)$ des termes tronqués. Nous avons

$$\int_\Omega \frac{T_n(u_n^p)}{|x|^2 + \frac{1}{n}} dx \leq \int_\Omega \frac{u_n^p}{|x|^2} dx \leq \Big(\int_\Omega \frac{u_n^4}{|x|^2} dx \Big)^{\frac{p}{4}} \Big(\int_\Omega \frac{1}{|x|^2} dx \Big)^{\frac{4-p}{4}}$$

$$\leq c \Big(\int_\Omega |\nabla u_n^2|^2 dx \Big)^{\frac{p}{4}} \leq C.$$

Il s'ensuit que $\dfrac{T_n(u_n^p)}{|x|^2 + \frac{1}{n}}$ est borné dans $L^1(\Omega)$ et converge presque partout vers $\dfrac{u^p}{|x|^2}$. En particulier, par le lemme de Fatou, $\dfrac{u^p}{|x|^2} \in L^1(\Omega)$. Soit $E \subset \Omega$ un ensemble mesurable, alors comme auparavant nous avons

$$\int_E \frac{T_n(u_n^p)}{|x|^2 + \frac{1}{n}} dx \leq \int_E \frac{u_n^p}{|x|^2} dx \leq \Big(\int_E \frac{u_n^4}{|x|^2} dx \Big)^{\frac{p}{4}} \Big(\int_E \frac{1}{|x|^2} dx \Big)^{\frac{4-p}{4}} \leq C \Big(\int_E \frac{1}{|x|^2} dx \Big)^{\frac{4-p}{4}},$$

où C est une constante positive indépendante de n. D'où, par la continuité absolue de l'intégrale, nous pouvons utiliser le Théorème 1.2 pour obtenir que

$$\frac{T_n(u_n^p)}{|x|^2 + \frac{1}{n}} \to \frac{u^p}{|x|^2} \text{ dans } L^1(\Omega).$$

iii) Démonstration de la convergence de $u_n|\nabla u_n|^2 \to u|\nabla u|^2$ dans $L^1(\Omega)$. Pour obtenir la convergence forte des gradients nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.1. Soit u_n est définie par (5.3). Alors,

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\{u_n \geq k\}} u_n |\nabla u_n|^2 dx = 0 \tag{5.10}$$

uniformément en n.

Démonstration. Considérons la fonction $\psi_{k-1}(s) = T_1(G_{k-1}(s))$ définie dans la Figure 1.3. Notons que $\psi_{k-1}(u_n)u_n|\nabla u_n|^2 \geq u_n|\nabla u_n|^2_{\chi\{u_n\geq k\}}$. Utilisons $\psi_{k-1}(u_n)$ comme fonction test dans (5.3),

$$\int_{\{u_n\geq k\}} u_n|\nabla u_n|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla\psi_{k-1}(u_n)|^2 dx$$
$$+\int_\Omega \psi_{k-1}(u_n)u_n|\nabla u_n|^2 dx = \int_\Omega \lambda\frac{T_n(u_n^p)}{|x|^2+\frac{1}{n}}\psi_{n-1}(u_n)dx + \int_\Omega \psi_{n-1}(u_n)g dx.$$

Puisque $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, alors à une sous suite, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans $L^s(\Omega)$ ($\forall s < 2^*$) et presque partout. Alors, comme conséquence,

$$|\{x\in\Omega : u_n(x) > k\}| \to 0, \text{ uniformément en } n \text{ quand } k\to\infty.$$

Donc

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\{u_n\geq k\}} u_n|\nabla u_n|^2 dx = 0 \text{ uniformément en } n. \tag{5.11}$$

□

Lemme 5.2. Considérons $u_n \rightharpoonup u$ comme ci dessus. Alors,

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ dans } W_0^{1,2}(\Omega).$$

Démonstration. Utilisons $\phi(T_k(u_n)-T_k(u))$ comme fonction test dans (5.3), avec ϕ définie dans (5.5).

$$\int_\Omega \nabla u_n\phi'(T_k(u_n)-T_k(u))\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))dx + \int_\Omega u_n|\nabla u_n|^2\phi(T_k(u_n)-T_k(u))dx =$$
$$\int_\Omega(\lambda\frac{T_n(u_n^p)}{|x|^2+\frac{1}{n}} + g)\phi(T_k(u_n)-T_k(u))dx.$$

Pour estimer le premier terme du côté gauche on procède comme suit,

$$\begin{gathered}
\int_\Omega \nabla u_n \phi'(T_k(u_n) - T_k(u))\nabla(T_k(u_n) - T_k(u))dx = \\
\int_\Omega \nabla T_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u))\nabla(T_k(u_n) - T_k(u))dx + \\
\int_\Omega \nabla G_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u))\nabla(T_k(u_n) - T_k(u))dx = \\
\int_\Omega |\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^2 \phi'(T_k(u_n) - T_k(u))dx + \\
\int_\Omega \nabla T_n(u)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u))\nabla(T_k(u_n) - T_k(u))dx + \\
\int_\Omega \nabla G_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u))\nabla T_k(u_n)dx - \int_\Omega \nabla G_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u))\nabla T_k(u)dx.
\end{gathered}$$

Puisque les supports de $\nabla G_k(u_n)$ et $\nabla T_k(u_n)$ sont disjoints et ceux de $\nabla G_k(u_n)$ et $\nabla T_k(u)$ sont presque disjoints (car $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante en n), nous trouvons

$$\int_\Omega \nabla G_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u))\nabla T_k(u_n)dx = \int_\Omega \nabla G_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u))\nabla T_k(u)dx = 0.$$

En revanche, puisque $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla T_k(u)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u))\nabla(T_k(u_n) - T_k(u))dx \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Donc,

$$\begin{gathered}
\int_\Omega \nabla u_n \phi'(T_k(u_n) - T_k(u))\nabla(T_k(u_n) - T_k(u))dx = \\
= \int_\Omega |\nabla(T_k(u_n) - T_k(u))|^2 \phi'(T_k(u_n) - T_k(u))dx + o(1).
\end{gathered}$$

Notons que nous avons $\phi(T_k(u_n) - T_k(u))_{\chi_{\{u_n \geq k\}}} = 0$,

$$\int_\Omega u_n |\nabla u_n|^2 \phi(T_k(u_n) - T_k(u))dx$$

$$= \int_{\{u_n \leq k\}} u_n |\nabla u_n|^2 \phi(T_k(u_n) - T_k(u))dx + \int_{\{u_n \geq k\}} u_n |\nabla u_n|^2 \phi(T_k(u_n) - T_k(u))dx =$$

$$= \int_\Omega T_k(u_n)|\nabla T_k(u_n)|^2 |\phi(T_k(u_n) - T_k(u))|dx \leq$$

$$\leq k\int_\Omega |\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^2 |\phi(T_k(u_n) - T_k(u))|dx - k\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2 |\phi(T_k(u_n) - T_k(u))|dx$$

$$+2k\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)\nabla T_k(u)|\phi(T_k(u_n)-T_k(u))|dx.$$

Puisque $\nabla T_k(u)\phi(T_k(u_n)-T_k(u)) \to 0$ dans $L^2(\Omega)$, et $\nabla T_k(u_n) \rightharpoonup \nabla T_k(u)$ dans $L^2(\Omega)$ nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2|\phi(T_k(u_n)-T_k(u))|dx \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

et

$$\int_\Omega \nabla T_k(u_n)\nabla T_k(u)\phi(T_k(u_n)-T_k(u))dx \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Alors, en passant à la limite quand $n \to \infty$, nous avons

$$\int_\Omega u_n|\nabla u_n|^2\phi(T_k(u_n)-T_k(u))dx \leq k\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)|^2|\phi(T_k(u_n)-T_k(u))|dx+o(1).$$

Par (5.5), nous concluons que

$$c\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)|^2dx \leq$$

$$\leq \int_\Omega (\phi'(T_k(u_n)-T_k(u))-k|\phi(T_k(u_n)-T_k(u))|)|\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)|^2dx \leq o(1),$$

d'où $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. □

Remarque 5.1. Comme conséquence du Lemme précédent, nous avons $\nabla T_k^{\frac{3}{2}}(u_n) = \frac{3}{2}T_k(u_n)\nabla T_k(u_n) \leq \frac{3}{2}k\nabla T_k(u_n)$ alors par le fait que $\nabla T_k(u_n) \to \nabla T_k(u)$ fortement dans $L^2(\Omega)$ et $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $L^s(\Omega), \forall s$, et que $|T_k(u_n)| \leq k$, alors on peut conclure par l'utilisation du Théorème de la convergence dominée que $T_k^{\frac{3}{2}}(u_n) \to T_k^{\frac{3}{2}}(u)$ fortement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$.

iv) Conclusion de la démonstration du Théorème 5.3. Pour finir, nous prouvons que

$$u_n|\nabla u_n|^2 \to u|\nabla u|^2 \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

Utilisons le Lemme 5.1 alors la suite des gradients converge p.p, afin d'appliquer le Théorème 1.2, nous devons prouver l'équi-intégrabilité de $u_n|\nabla u_n|^2$.

Soit $E \subset \Omega$ un ensemble mesurable. Alors

$$\int_E u_n|\nabla u_n|^2 dx \leq \int_{\{u_n \leq k\}\cap E} |\nabla T_k(u_n)|^2 T_k(u_n) dx + \int_{\{u_n \geq k\}\cap E} u_n|\nabla u_n|^2 dx \leq$$

$$\leq \int_{\{u_n \leq k\}\cap E} |\nabla T_k^{\frac{3}{2}}(u_n)|^2 + \int_{\{u_n \geq k\}\cap E} u_n|\nabla u_n|^2 dx.$$

Par le Lemme 5.1, et la Remarque 5.1 pour tout $k > 0$, $T_k(u_n)^{\frac{3}{2}} \to T_k(u)^{\frac{3}{2}}$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, donc $\int_E T_k(u_n)|\nabla T_k(u_n)|^2 dx$ est uniformément petit pour $|E|$ suffisament petit. Et par le Lemme 5.1, nous obtenons

$$\int_{\{u_n \geq k\}\cap E} u_n|\nabla u_n|^2 dx \leq \int_{\{u_n \geq k\}} u_n|\nabla u_n|^2 dx \to 0$$

quand $k \to \infty$ uniformément en n. Alors

$$u_n|\nabla u_n|^2 \to u|\nabla u|^2 \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega)$$

par le Théorème 1.2. Donc, en particulier nous concluons que u est une solution distributionnelle du problème,

$$\begin{cases} -\Delta u + u|\nabla u|^2 = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} + g, & u \geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.12}$$

Il est clair que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et que $u^{\frac{3}{2}} \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Notons que, par la regularité de u, l'équation (5.12) est vérifiée dans un cadre plus général, en particulier, on peut prendre des fonctions test $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

$\square$

5.2.2 Résolution du problème (5.2) avec une donnée dans $L^1(\Omega)$.

Considérons $g_n = T_n(g)$, qui est $g_n \uparrow g$ dans $L^1(\Omega)$. Et soit u_n la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + u_n|\nabla u_n|^2 = \lambda \dfrac{u_n^p}{|x|^2} + g_n, & u_n \geq 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.13}$$

Trouvée dans la section 5.2.1. Définissons

$$\Psi_k(s) = \int_0^s (tT_k(t))^{\frac{1}{2}} dt,$$

plus précisment par,

$$\Psi_k(s) = \begin{cases} \frac{s^2}{2} \quad \text{si } s < k, \\ \frac{2}{3} k^{\frac{1}{2}} (s^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}}) \text{ si } s > k. \end{cases} \tag{5.14}$$

On peut vérifier l'estimation suivante.

Lemme 5.3. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall k > 0$, $\exists C_\varepsilon$ tel que

$$s^p \; T_k(s) \leq \varepsilon \Psi_k^2(s) + C_\varepsilon, \quad s \geq 0.$$

Prenons $T_k(u_n)$ comme fonction test dans le problème tronqué, il s'ensuit que

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 T_k(u_n) u_n dx = \lambda \int_\Omega \frac{u_n^p}{|x|^2} T_k(u_n) dx + \int_\Omega g_n T_k(u_n) dx.$$

Alors,

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla \Psi_k(u_n)|^2 dx \leq \lambda \int_\Omega \frac{u_n^p}{|x|^2} T_k(u_n) dx + \int_\Omega g T_k(u_n) dx.$$

Par le Lemme 5.3 et les inégalités de Hardy et Young,

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla \Psi_n(u_n)|^2 dx \leq \varepsilon \frac{\lambda}{\Lambda_{N,2}} \int_\Omega |\nabla \Psi_k(u_n)|^2 dx + \int_\Omega \frac{C_\varepsilon}{|x|^2} dx + k||g||_{L^1(\Omega)}.$$

Choisissons $0 < \varepsilon \dfrac{\lambda}{\Lambda_{N,2}} < 1$, nous trouvons

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 dx + (1 - \varepsilon \frac{\lambda}{\Lambda_{N,2}}) \int_\Omega |\nabla \Psi_k(u_n)|^2 dx \leq \int_\Omega \frac{C_\varepsilon}{|x|^2} dx + k||g||_{L^1(\Omega)}.$$

Donc, pour tout $k > 0$ il s'ensuit que

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 dx \leq C(\lambda, \varepsilon, \Omega, g, k) \quad \text{uniformément pour tout} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\int_\Omega |\nabla \Psi_k(u_n)|^2 dx \leq C(\lambda, \varepsilon, \Omega, g, k) \quad \text{uniformément pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

D'où, en utilisant la définition de Ψ_k, il existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. En effet

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 dx + \int_{\Omega \cap \{u_n > k\}} |\nabla u_n|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla \Psi_k(u_n)|^2 dx \leq C,$$

où C est indépendant de n. D'où, à une sous suite près

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } W_0^{1,2}(\Omega).$$

Nous prouvons maintenant d'une manière similaire à la section précédente que

1. $\dfrac{u_n^p}{|x|^2} \to \dfrac{u^p}{|x|^2}$ dans $L^1(\Omega)$.
2. $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ pour tout $k > 0$.
3. $\lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\int_{\{u_n \geq k\}} u_n |\nabla u_n|^2 dx = 0$ uniformément en n.

Comme dans la sous section 5.2.1 nous déduisons que $\dfrac{u_n^p}{|x|^2}$ est bornée dans $L^1(\Omega)$ et converge p.p. dans $\dfrac{u^p}{|x|^2}$. Afin d'appliquer le Théorème 1.2, nous vérifions l'équi-intégrabilité de $\dfrac{u_n^p}{|x|^2}$. Nous prouvons maintenant d'une manière similaire à la sous section précédente que $\dfrac{u_n^p}{|x|^2}$ converge fortement vers $\dfrac{u^p}{|x|^2}$ dans $L^1(\Omega)$. De cette façon, nous obtenons (1). Notons que (2) et (3) sont nécessaires pour démontrer la convergence forte des gradients. Pour avoir (2) nous considérons la même fonction test $\phi(T_k(u_n) - T_k(u))$ dans (5.13),

$$\int_\Omega \nabla u_n \phi'(T_k(u_n) - T_k(u)) \nabla(T_k(u_n) - T_k(u))dx + \int_\Omega u_n |\nabla u_n|^2 \phi(T_k(u_n) - T_k(u))dx =$$

$$= \int_\Omega (\lambda \frac{u_n^p}{|x|^2} + g_n)\phi(T_k(u_n) - T_k(u))dx.$$

Étant donné que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et en utilisant l'hypothèse sur $\phi(s)$ nous concluons (2). Pour avoir (3) nous utilisons $\psi_{r-1}(s) = T_1(G_{r-1}(s))$ comme fonction test dans (5.13), et procédons exactement comme dans la preuve du Lemme 5.1. Nous sommes maintenant prêt à prouver que

$$u_n|\nabla u_n|^2 \to u|\nabla u|^2 \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

Notons que la suite converge p.p. dans Ω (par (2)). Maintenant pour montrer la convergence forte des gradients, nous procédons comme suit : Soit $E \subset \Omega$ un ensemble mesurable. Alors

$$\int_E u_n |\nabla u_n|^2 dx \leq \int_{\{u_n \leq k\} \cap E} |\nabla T_k(u_n)|^2 T_k(u_n) dx + \int_{\{u_n \geq k\} \cap E} u_n |\nabla u_n|^2 dx.$$

Par (2), pour tout $k > 0$, $T_k(u_n)^{\frac{3}{2}} \to T_k(u)^{\frac{3}{2}}$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, et donc $\int_E T_k(u_n)|\nabla T_k(u_n)|^2 dx$ est uniformément petit dans un ensemble de $|E|$ suffisament petit. Par (3), nous obtenons que

$$\int_{\{u_n \geq k\} \cap E} u_n |\nabla u_n|^2 dx \leq \int_{\{u_n \geq k\}} u_n |\nabla u_n|^2 dx \to 0$$

quand $k \to \infty$ uniformément en n. Alors, par le Théorème1.2 nous obtenons que

$$u_n|\nabla u_n|^2 \to u|\nabla u|^2 \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega).$$

Donc, en particulier nous concluons que u est une solution distributionelle du problème,

$$\begin{cases} -\Delta u + u|\nabla u|^2 = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} + g, & u \geq 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.15}$$

et, en particulier, u est sur-solution du problème (5.1).

5.3 Cas Parabolique

Dans cette section nous ferons souvent appel au principe de maximum suivant :

Théorème 5.4. *(Principe de Maximum)* Supposons que $1 < q \leq 2$ et soit $w \in \mathcal{C}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ est la solution de

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + \dfrac{|\nabla w|^q}{a + |\nabla w|^q} & = & f(x,t) \text{ dans } \Omega_T \equiv \Omega \times (0,T), \\ w(x,t) & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ w(x,0) & = & w_0(x) \text{ si } x \in \Omega, \end{cases} \tag{5.16}$$

où $f \in L^\infty(\Omega_T)$, $w_0 \in L^\infty(\Omega)$ avec $f \gneqq 0$ où $w_0 \gneqq 0$ et $a \geq 0$. Alors $w(x,t) \geq 0$ dans Ω_T.

Voir [10] pour la preuve. Le premier résultat d'existence dans cette section est le suivant.

5.3.1 Résoultion du problème (5.1) avec donnée dans $L^m(\Omega_T)$.

Théorème 5.5. Soit $\bar{u}$ la solution du problème stationnaire obtenu dans la section précédente. On suppose que $f(x,t) \leq g(x)$ $\forall (x,t) \in \Omega_T$ où $g \in L^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{2}$. On suppose aussi que $u_0 \leq \bar{u}$, alors pour tout $\lambda > 0$, le problème suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u|\nabla u|^2 = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} + f(x,t) & \text{dans } \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{5.17}$$

possède une solution u, tel que $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$.

Démonstration. Nous séparons la preuve en plusieurs étapes.

Etape 1. La Construction de la sur-solution de (5.1).

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} + \overline{u}|\nabla \overline{u}|^2 \geq \lambda \dfrac{\overline{u}^p}{|x|^2} + g, & \overline{u} \geq 0 \ \text{ dans } \Omega, \\ \overline{u} = 0 & \text{sur } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.18}$$

L'existence de la solution de (5.18) pour tout $\lambda > 0$ est une conséquence de l'article [59].

Par conséquent, nous obtenons la sur-solution $\overline{u}$ du problème (5.1) pour tout $\lambda > 0$.

Etape 2. Recherche de la sous-solution.

Nous considérons $\underline{u} = 0$ comme sous solution du problème (5.1) pour tout $\lambda > 0$.

Etape 3. Comparaison.

$$\underline{u} = 0 \leq f + \lambda \frac{\overline{u}^p}{|x|^2} = \overline{u}_t - \Delta \overline{u} + \overline{u}|\nabla \overline{u}|^2$$

Il est clair que $\underline{u} = 0 < \overline{u}$

Etape 4. La Construction des problèmes itératifs. Nous définissons les problèmes suivant :

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta u_n + u_n|\nabla u_n|^2 = \lambda \dfrac{(u_{n-1})^p}{|x|^2 + \frac{1}{n}} + f_n & \text{dans } \Omega_T, \\ u_n(x,0) = u_{0n}(x) \leq \overline{u} & \text{dans } \Omega \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{5.19}$$

Soit $u^0 = \underline{u} = 0$. Procédons par itération afin d'avoir une suite ordonnée croissante $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

La convergence faible de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$. Puisque $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$ on peut utiliser u_n comme fonction test dans le probème tronqué (5.19). Il s'en suit que

$$\int\int_{\Omega_T} (u_n)_t u_n + \int\int_{\Omega_T} |\nabla u_n|^2 + \frac{1}{4}\int\int_{\Omega_T} |\nabla u_n^2|^2 \tag{5.20}$$

$$\leq \lambda \int\int_{\Omega_T} \frac{u_n^{p+1}}{|x|^2} + ||f||_{L^m(\Omega_T)} ||u_n||_{L^{m'}(\Omega_T)}.$$

Intégrons en temps,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_n^2(x,T)dx + \int\int_{\Omega_T} |\nabla u_n|^2 + \frac{1}{4}\int\int_{\Omega_T} |\nabla u_n^2|^2 \le \lambda \int\int_{\Omega_T} \frac{u_n^{p+1}}{|x|^2} \tag{5.21}$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2 dx + ||u_n||_{L^{m'}(\Omega_T)}||f||_{L^m(\Omega_T)}$$

En utilisant les inégalités de Sobolev et Young, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $D_\varepsilon = D_\varepsilon(k, N, f, \Omega)$ tel que,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_n^2(x,T)dx + \int\int_{\Omega_T} |\nabla u_n|^2 + \frac{1}{4}\int\int_{\Omega_T} |\nabla u_n^2|^2$$

$$\le \lambda \int\int_{\Omega_T} \frac{u_n^{p+1}}{|x|^2} + \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2 dx + \varepsilon C \int\int_{\Omega_T} |\nabla u_n|^2 + D_\varepsilon. \tag{5.22}$$

Utilisons aussi les inégalités de Hölder et de Hardy-Sobolev, on aura

$$\lambda \int\int_{\Omega_T} \frac{u_n^{p+1}}{|x|^2} \le \lambda\Big(\int\int_{\Omega_T} \frac{u_n^4}{|x|^2}\Big)^{\frac{p+1}{4}} \Big(\int\int_{\Omega_T} \frac{1}{|x|^2}\Big)^{\frac{3-p}{4}} \le C\lambda\Lambda_{N,2}^{-\frac{p+1}{4}}\Big(\int\int_{\Omega_T} |\nabla u_n^2|^2\Big)^{\frac{p+1}{4}}.$$

Par conséquent, puisque $p + 1 < 4$ nous obtenons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\epsilon = C_\epsilon(p, N) > 0$ telle que

$$\Big(\int\int_{\Omega_T} |\nabla u_n^2|^2\Big)^{\frac{p+1}{4}} \le \varepsilon \int\int_{\Omega_T} |\nabla u_n^2|^2 + C_\epsilon. \tag{5.23}$$

Donc pour ε suffisament petit, de (5.20), (5.23), nous trouvons une constante A telle que,

$$\int\int_{\Omega_T} |\nabla u_n|^2 \le A \quad \text{et} \quad \int\int_{\Omega_T} |\nabla u_n^2|^2 \le A.$$

Alors, à une sous suite près,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ et } u_n^2 \rightharpoonup u^2 \text{ faiblement dans } L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \text{ et p.p. dans } \Omega$$

Dans le but de passer à la limite et pour prouver que $u_n \to u$ fortement dans $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$, nous devons obtenir la convergence forte des termes tronqués, *La convergence forte dans $L^1(\Omega_T)$ de* $\frac{(u_{n-1})^p}{|x|^2+\frac{1}{n}}$. Nous avons

$$\int\int_{\Omega_T} \frac{(u_{n-1})^p}{|x|^2+\frac{1}{n}} \leq \int\int_{\Omega_T} \frac{u_n^p}{|x|^2} \leq \Big(\int\int_{\Omega_T} \frac{u_n^4}{|x|^2}\Big)^{\frac{p}{4}} \Big(\int\int_{\Omega_T} \frac{1}{|x|^2}\Big)^{\frac{4-p}{4}}$$

$$\leq C\Big(\int\int_{\Omega_T} |\nabla u_n^2|^2\Big)^{\frac{p}{4}} \leq C(T).$$

Comme $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante en n, donc d'aprés le Théorème de la convergence Monotone, on déduit facilement que

$$\frac{(u_{n-1})^p}{|x|^2+\frac{1}{n}} \to \frac{u^p}{|x|^2} \text{ dans } L^1(\Omega_T).$$

La convergence forte dans $L^1(\Omega_T)$ de $u_n|\nabla u_n|^2$. Pour obtenir la convergence forte des gradients nous avons besoin des résultats suivants.

Lemme 5.4. Soit u_n définie par (5.19). Alors,

$$\lim_{k\to\infty} \int\int_{\{u_n\geq k\}} u_n|\nabla u_n|^2 = 0 \tag{5.24}$$

uniformément en n.

Démonstration. Nous utilisons $\psi_{k-1}(u_n)$ définie précédement comme fonction test dans (5.19),

$$\int\int_{\Omega_T} u_{n_t}\psi_{k-1}(u_n) + \int\int_{\{u_n\geq k\}} u_n|\nabla u_n|^2 \leq$$

$$\int\int_{\Omega_T} u_{n_t}\psi_{k-1}(u_n) + \int\int_{\Omega_T} |\nabla\psi_{k-1}(u_n)|^2 + \int\int_{\Omega_T} \psi_{k-1}(u_n)u_n|\nabla u_n|^2$$

$$= \int\int_{\Omega_T} \lambda\frac{u_{n-1}^p}{|x|^2+\frac{1}{n}}\psi_{k-1}(u_n) + \int\int_{\Omega_T} \psi_{k-1}(u_n)f_n \leq o(1) \text{ quand } k\to\infty.$$

Comme dans la preuve du Lemme 5.1,

$$|\{(x,t)\in\Omega_T : u_n(x,t)>k\}| \to 0, \text{ uniformément en } n \text{ quand } k\to\infty. \tag{5.25}$$

Soit $H_k(\sigma) = \int_0^\sigma \psi_{k-1}(s)ds$, alors

$$\int\int_{\Omega_T} u_{n_t}\psi_{k-1}(u_n) = \int\int_{\Omega_T} (H_k(u_n))_t = \int_\Omega H_k(u_n(x,T))dx - \int_\Omega H_k(u_0(x))dx$$

Et puisque $H_k(u_n(x,T)) \geq 0$ alors

$$-\int_\Omega H_k(u_0(x))dx \leq \int\int_{\Omega_T} u_{n_t}\psi_{k-1}(u_n).$$

Donc

$$\int\int_{\{u_n\geq k\}} u_n|\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega H_k(u_0(x))dx + o(1) \leq \int_{\{u_0\geq k\}} u_0(x)dx + o(1).$$

Il résulte que

$$\int\int_{\{u_n\geq k\}} u_n|\nabla u_n|^2 \to 0 \quad \text{quand } k\to\infty \text{ uniformément en } n.$$

□

Lemme 5.5. Pour chaque $k > 0$, on a

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \ \text{ dans } \quad L^2(0,T,W_0^{1,2}(\Omega)).$$

Démonstration. Comme dans le travail de [26], nous notons par $w(k,\nu,n,\varepsilon)$ toute quantité qui satisfait à

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\limsup_{k\to\infty}\limsup_{\nu\to\infty}\limsup_{n\to\infty} w(k,\nu,n,\varepsilon) = 0,$$

et par $w^{\nu,k,\varepsilon}(n)$ toute quantité qui tend vers zero lorsque $n\to\infty$ pour ν, k et ε fixés. Nous introduisons le terme régularisant en temps suivant, pour $v \in L^2(0,T,W_0^{1,2}(\Omega))$,

$$v_\nu(x,t) = \nu\int_{-\infty}^t \bar{v}(x,s)e^{\nu(s-t)}ds,$$

où

$$\bar{v}(x,s) = \begin{cases} v(x,s) & \text{si } t\in(0,T), \\ 0 & \text{si } t\notin(0,T). \end{cases} \tag{5.26}$$

Il est clair que $v_\nu \to v$ fortement dans $L^2(0,T,W_0^{1,2}(\Omega))$, $(v_\nu)' = \nu(v - v_\nu)$ dans le sens faible, i.e.,

$$< (v_\nu)', w >= \nu \int\int_{\Omega_T} (v - v_\nu)w \quad \text{pour tout } w \in L^2(0,T,W_0^{1,2}(\Omega)).$$

Considérons le terme régularisant de $T_k(u)$ qui dépendent du paramètre $\nu > 0$ et on le note par $T_n(u)_\nu$, les principales caractéristiques de cette fonction étant

$$\begin{cases} \dfrac{dT_k(u)_\nu}{dt} & = & \nu(T_k(u) - T_k(u)_\nu) \\ T_n(u)_\nu(0) & = & T_n(u_{0,\nu}) \end{cases}$$

alors

$$T_k(u)_\nu \to T_k(u) \;\text{ fortement dans }\; L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \;\text{ et p.p dans }\; \Omega_T.$$

$$||T_k(u)_\nu||_{L^\infty(\Omega_T)} \leq k \quad \forall k > 0$$

Utilisons $\phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)$ comme fonction test dans (5.19),

$$< (u_n)_t, \phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)) > + \int\int_{\Omega_T} \nabla u_n \phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)$$
$$+ \int\int_{\Omega_T} u_n|\nabla u_n|^2\phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) = \int\int_{\Omega_T} (\lambda\frac{u_{n-1}^p}{|x|^2 + \frac{1}{n}} + f)\phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu).$$

Mettons

$$I_1 =< (u_n)_t, \phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)) >$$

$$I_2 = \int\int_{\Omega_T} \nabla u_n \phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)$$

$$I_3 = \int\int_{\Omega_T} u_n|\nabla u_n|^2\phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)$$

et

$$I_4 = \int\int_{\Omega_T} (\lambda\frac{u_{n-1}^p}{|x|^2 + \frac{1}{n}} + f)\phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu).$$

Puisque la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante en n, alors en utilisant les estimations précédentes sur u_n, il s'ensuit que

$$I_4 = \omega(\nu, n).$$

Nous analysons le terme I_1. Nous avons

$$\begin{aligned}
&I_1 =< (T_k(u_n) + G_k(u_n))_t, \phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) > \\
&=< (T_k(u_n))_t, \phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) > + < (G_k(u_n))_t, \phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) > \\
&= J_1 + J_2
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$J_1 =< (T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)_t, \phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) > + < (T_k(u)_\nu)_t, \phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) >$$

Alors

$$< (T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)_t, \phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) >= \int_\Omega [\overline{\phi}(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)]_0^T dx \geq \omega(\nu, n).$$

Où $\overline{\phi}(s) = \int_0^s \phi(\sigma) d\sigma$. Utilisons la définition de $(T_k(u)_\nu)_t$, il résulte que

$$\begin{aligned}
< (T_k(u)_\nu)_t, \phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) > &= \nu \int\int_{\Omega_T} (T_k(u) - T_k(u)_\nu) \phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) \\
&\geq \omega^\nu(n).
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous concluons que

$$J_1 \geq \omega(\nu, n) + \omega^\nu(n).$$

Et pour J_2. Nous avons

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_\Omega [G_k(u_n) \phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)]_0^T + \int\int_{\Omega_T} G_k(u_n) \phi'(k - T_k(u)_\nu)(T_k(u)_\nu)_t \\
&\geq \omega^\nu(n) + \omega(\nu) + \int\int_{\Omega_T} G_k(u_n) \phi'(k - T_k(u)_\nu)(T_k(u)_\nu)_t.
\end{aligned}$$

Utilisons la définition of $(T_k(u)_\nu)_t$, nous obtenons que

$$\int\int_{\Omega_T} G_k(u_n)\phi'(k - T_k(u)_\nu)(T_k(u)_\nu)_t = \nu \int\int_{\Omega_T} G_k(u_n)\phi'(k - T_k(u)_\nu)(T_k(u) - T_k(u)_\nu)$$
$$\nu \int\int_{\Omega_T} G_k(u_n)\phi'(k - T_k(u)_\nu)(k - T_k(u))_\nu$$

Utilisons le fait que $(T_k(u))_\nu) \leq k$ et $\phi' \geq 0$, il s'ensuit que

$$\int\int_{\Omega_T} G_k(u_n)\phi'(k - T_k(u)_\nu)(T_k(u)_\nu)_t \geq 0$$

Alors

$$J_2 \geq \omega^\nu(n) + \omega(\nu).$$

En combinant les éstimations précédentes de J_1 et J_2, nous concluons que

$$I_1 \geq \omega(\nu, n) + \omega^\nu(n) + \omega(\nu).$$

Nous traitons maintenant I_2.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int\int_{\Omega_T} \nabla T_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) \\
&+ \int\int_{\Omega_T} \nabla G_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) \\
&= \int\int_{\Omega_T} |\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)_\nu|^2\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) \\
&+ \int\int_{\Omega_T} \nabla T_k(u)_\nu\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) \\
&+ \int\int_{\Omega_T} \nabla G_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla T_k(u_n) \\
&- \int\int_{\Omega_T} \nabla G_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla T_k(u)_\nu.
\end{aligned}$$

Puisque $T_k(u)_\nu \to T_k(u)$ fortement dans $L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))$, alors

$$\int\int_{\Omega_T} \nabla T_k(u)_\nu\phi'(T_n(u_k) - T_k(u)_\nu)\nabla(T_n(u_k) - T_k(u)_\nu) = \omega(\nu, n).$$

D'autre part, en utilisant la convergence faible de $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ nous obtenons alors, quand $n \to \infty$,

$$\int\int_{\Omega_T} \nabla G_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla T_k(u_n) \to \int\int_{\Omega_T} \nabla G_k(u)\phi'(T_k(u) - T_k(u)_\nu)\nabla T_k(u).$$

Maintenant mettons $\nu \to \infty$, il s'ensuit que

$$\int\int_{\Omega_T} \nabla G_k(u)\phi'(T_k(u) - T_k(u)_\nu)\nabla T_k(u_n) \to 0.$$

Par conséquent

$$\int\int_{\Omega_T} \nabla G_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla T_k(u_n) = \omega(n,\nu).$$

Puisque les supports de $\nabla G_k(u_n)$ et $\nabla T_k(u_n)$ sont disjoints, alors

$$\int\int_{\Omega_T} \nabla G_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla T_k(u_n) = 0.$$

Par conséquent, nous concluons que

$$I_2 = \int\int_{\Omega_T} |\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)_\nu|^2\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu),$$

et ceux de $\nabla G_k(u_n)$ et $\nabla T_k(u)_\nu$ sont presque disjoints. Puisque $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante en n, nous obtenons

$$\int\int_{\Omega_T} \nabla G_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla T_k(u_n) = \int\int_{\Omega_T} \nabla G_k(u_n)\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla T_k(u)_\nu = \omega(\nu,n).$$

D'autre part, puisque $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)_\nu$ faiblement dans $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$, alors

$$\int\int_{\Omega_T} \nabla T_k(u)_\nu\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) \to 0, \text{ quand } n,\nu \to \infty.$$

Donc,

$$\begin{aligned}&\int\int_{\Omega_T} \nabla u_n\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\nabla(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\\ &= \int\int_{\Omega_T} |\nabla(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)|^2\phi'(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) + o(1).\end{aligned}$$

Notons que $\phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)_{\chi_{\{u_n\geq k\}}} \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} I_3 &= \int\int_{\{u_n\leq k\}} u_n|\nabla u_n|^2\phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu) + \int\int_{\{u_n\geq k\}} u_n|\nabla u_n|^2\phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu)\\ &\geq \int\int_{\Omega_T} T_k(u_n)|\nabla T_k(u_n)|^2\phi(T_k(u_n) - T_k(u)_\nu).\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega_T} T_k(u_n)|\nabla T_k(u_n)|^2\phi(T_k(u_n)-T_k(u)_\nu)\\
&=\int\int_{\Omega_T} T_k(u_n)|\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)_\nu+\nabla T_k(u)_\nu|^2\phi(T_k(u_n)-T_k(u)_\nu)\\
&=\int\int_{\Omega_T} T_k(u_n)|\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)_\nu|^2\phi(T_k(u_n)-T_k(u)_\nu)+\omega(\nu,n)\\
&\geq -k\int\int_{\Omega_T}|\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)_\nu+\nabla T_k(u)_\nu|^2|\phi(T_k(u_n)-T_k(u)_\nu)|
\end{aligned}$$

Maintenant, en combinant les estimations précédentes, on obtient donc

$$\int\int_{\Omega_T}|\nabla(T_k(u_n)-T_k(u)_\nu)|^2\Big(\phi'(T_k(u_n)-T_k(u)_\nu)-k|\phi(T_k(u_n)-T_k(u)_\nu)|\Big)\leq\omega(\nu,n).$$

En Choisissant $\alpha>k^2$, il s'ensuit que

$$\phi'(s)-k|\phi(s)|\geq\frac{1}{2}$$

Alors

$$\int\int_{\Omega_T}|\nabla(T_k(u_n)-T_k(u)_\nu)|^2\leq\omega(\nu,n).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega_T}|\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))|^2=\int\int_{\Omega_T}|\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)_\nu+\nabla T_k(u)_\nu-\nabla T_k(u)|^2\\
&\leq c\int\int_{\Omega_T}|\nabla(T_k(u_n)-T_k(u)_\nu)|^2+c\int\int_{\Omega_T}|\nabla(T_k(u)_\nu-T_k(u))|^2\\
&\leq\omega(\nu,n)+\omega(\nu)
\end{aligned}$$

Mettons $\nu\to\infty$ et $n\to\infty$, donc nous obtenons les résultats voulue.

□

Remarque 5.2. Nous procédons de la même façon que dans le cas elliptique, nous pouvons obtenir facilement que $T_k^{\frac{3}{2}}(u_n)\to T_k^{\frac{3}{2}}(u)$ fortement dans $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ Pour cela, nous considérons $|\nabla w_n|^2=T_k(u_n)|\nabla T_k(u_n)|^2$, alors $|\nabla w_n|^2\leq k|\nabla T_k(u_n)|^2$. Comme $|\nabla T_k(u_n)|^2\to|\nabla T_k(u)|^2$ fortement dans $L^1(\Omega_T)$, alors par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$|\nabla w_n|^2\text{converge fortement dans }|\nabla w|^2\text{ dans }L^1(\Omega_T).$$

Et comme conséquence nous obtenons que $T_k^{\frac{3}{2}}(u_n) \to T_k^{\frac{3}{2}}(u)$ fortement dans $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$.

Pour finir, nous prouvons que

$$u_n|\nabla u_n|^2 \to u|\nabla u|^2 \text{ fortement dans } L^1(\Omega_T).$$

Utilisons le Lemme 5.5 alors la suite des gradients converge p.p. Dans le but d'appliquer le Théorème 1.2 encore, nous devons prouver l'équi-intégrabilité de $u_n|\nabla u_n|^2$. Soit $E_T \subset \Omega_T$ un ensemble mesurable. Alors

$$\int\int_{E_T} u_n|\nabla u_n|^2 \leq \int\int_{\{u_n\geq k\}\cap E_T} u_n|\nabla u_n|^2 + \int\int_{\{u_n\leq k\}\cap E_T} T_k(u_n)|\nabla u_n|^2.$$

Par le Lemme 5.5 et la Remarque 5.2, pour tout $k>0$, $T_k^{\frac{3}{2}}(u_n) \to T_k(u)^{\frac{3}{2}}$ dans $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$, donc $\int\int_{E_T} |\nabla T_k(u_n)|^2 T(u_n)$ est uniformément petit pour $|E_T|$ suffisament petit.
Et par le Lemme 5.4, nous obtenons

$$\int\int_{\{u_n\geq k\}\cap E_T} u_n|\nabla u_n|^2 \leq \int\int_{\{u_n\geq k\}} u_n|\nabla u_n|^2 \to 0$$

lorsque $k\to\infty$ uniformément en n. Alors

$$u_n|\nabla u_n|^2 \to u|\nabla u|^2 \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega_T).$$

Et par suite nous concluons que u est une solution distributionelle du problème suivant,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u|\nabla u|^2 = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} + f & \text{dans } \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T), \end{cases} \tag{5.27}$$

Il est intéréssant de noter qu'ont peut prendre des fonctions test $v \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$.

5.3.2 Résoultion du problème (5.1) avec donnée dans $L^1(\Omega_T)$.

Nous procédons exactement comme dans le cas elliptique, on considère $f_n = T_n(f)$, il est clair que $f_n \uparrow f$ dans $L^1(\Omega_T)$. Et soit u_n la solution de

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta u_n + u_n|\nabla u_n|^2 = \lambda \dfrac{u_{n-1}^p}{|x|^2 + \frac{1}{n}} + f_n(x,t) & \text{dans } \Omega_T, \\ u_n(x,0) = u_0(x) \leq \overline{u} & \text{dans } \Omega \\ u_n(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{5.28}$$

trouvé dans la sous section 5.3.1.

Prenons comme fonction test $T_k(u_n)$ dans le problème approximé (5.28),

$$\int_\Omega \Psi_k(u_n(x,T))dx + \int\int_{\Omega_T} |\nabla T_k(u_n)|^2 + \int\int_{\Omega_T} |\nabla \Psi_k(u_n)|^2$$

$$\leq \lambda \int\int_{\Omega_T} \frac{u_n^p}{|x|^2} T_k(u_n) + \int\int_{\Omega_T} f_n T_k(u_n) + \int_\Omega \Psi_k(u_0(x))dx.$$

Par le Lemme 5.3 et les inégalités de Hardy et Young,

$$\int_\Omega \Psi_k(u_n(x,T))dx + \int\int_{\Omega_T} |\nabla T_k(u_n)|^2 + \int\int_{\Omega_T} |\nabla \Psi_k(u_n)|^2$$

$$\leq \varepsilon \frac{\lambda}{\Lambda_{N,2}} \int\int_{\Omega_T} |\nabla \Psi_k(u_n)|^2 + \int\int_{\Omega_T} \frac{C_\varepsilon}{|x|^2} + k||f||_{L^1(\Omega_T)} + \int_\Omega \Psi_k(u_0(x))dx.$$

Choisissons $0 < \varepsilon \dfrac{\lambda}{\Lambda_{N,2}} < 1$ et pour tout $k > 0$ il s'ensuit que,

$$\int\int_{\Omega_T} |\nabla T_n(u_n)|^2 \leq C(\lambda, \varepsilon, \Omega_T, f, n) \quad \text{uniformément en} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\int\int_{\Omega_T} |\nabla \Psi_n(u_n)|^2 \leq C(\lambda, \varepsilon, \Omega_T, f, n) \quad \text{uniformément en} \quad n \in \mathbb{N}.$$

D'où, à une sous suite

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega)).$$

Nous prouvons maintenant d'une manière similaire à la section précédente que

1. $\dfrac{u_{n-1}^p}{|x|^2 + \frac{1}{n}} \to \dfrac{u^p}{|x|^2}$ dans $L^1(\Omega_T)$.

2. $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ pour tout $k>0$.

3. $\lim\limits_{k\to\infty} \int\int_{\{u_n\geq k\}} u_n|\nabla u_n|^2 = 0$ uniformément en n.

Comme auparavant, nous déduisons que $\dfrac{u_{n-1}^p}{|x|^2}$ est borné dans $L^1(\Omega_T)$ et converge p.p. vers $\dfrac{u^p}{|x|^2}$. On va appliquer le Théorème 1.2, pour cela nous vérifions l'équi-intégrabilité de $\dfrac{u_{n-1}^p}{|x|^2}$. De cette façon, nous obtenons (1). Notons que (2) et (3) sont nécessaires pour démontrer la convergence forte des gradients. Pour avoir (2) nous utilisons le Lemme 5.5 pour la donnée dans $L^1(\Omega_T)$ nous trouvons

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ fortement dans } L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \text{ pour tout } k>0.$$

Nous utilisons aussi la Remarque 5.2, il résulte que

$$T_k^{\frac{3}{2}}(u_n) \to T_k^{\frac{3}{2}}(u) \text{ fortement dans } L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \text{ pour tout } k>0$$

Pour prouver (3), on utilise $\psi_{k-1}(u_n)$, comme fonction test dans (5.28), et nous procédons exactement comme dans la preuve du Lemme 5.4. Maintenant nous somme en musure de montrer que

$$u_n|\nabla u_n|^2 \to u|\nabla u|^2 \text{ fortement dans } L^1(\Omega_T).$$

Notons que la suite $\{u_n|\nabla u_n|^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. (Par (2)). Dans l'ordre d'appliquer le Théorème 1.2, nous avons besoin de prouver l'equi-intégrabilité de $u_n|\nabla u_n|^2$. Soit $E_T\subset\Omega_T$ un ensemble mesurable. Alors

$$\int\int_{E_T} u_n|\nabla u_n|^2 \leq \int\int_{\{u_n\leq k\}\cap E_T} T_k(u_n)|\nabla T_k(u_n)|^2 + \int\int_{\{u_n\geq k\}\cap E_T} u_n|\nabla u_n|^2.$$

Par (2), pour tout $k>0$, $T_k^{\frac{3}{2}}(u_n) \to T_k^{\frac{3}{2}}(u)$ dans $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$, et par suite $\int\int_{E_T} T_k(u_n)|\nabla T_k(u_n)|^2$ est suffisament petit pour $|E_T|$ suffisament petite. Par (3), nous obtenons

$$\int\int_{\{u_n\geq k\}\cap E_T} u_n|\nabla u_n|^2 \leq \int\int_{\{u_n\geq k\}} u_n|\nabla u_n|^2 \to 0$$

quand $k \to \infty$ uniformément en n. Alors, par le Théorème 1.2 nous avons que

$$u_n|\nabla u_n|^2 \to u|\nabla u|^2 \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega_T).$$

Donc, en particulier nous concluons que u est une solution distributionnelle du problème,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u|\nabla u|^2 = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} + f(x,t) & \text{dans } \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x) \leq \overline{u} & \text{dans } \Omega \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{5.29}$$

□

5.4 Remarques et Extensions

Notons que, avec les mêmes arguments utilisés dans la section précédente, on peut prouver l'extension suivante.

Proposition 5.1. Soit $\Omega \subset I\!R^N$ un ouvert borné. On suppose que $\beta > p - 2$, alors pour tout $\lambda > 0$, et $u_0 \in L^1(\Omega), f \in L^1(\Omega_T)$, il existe une solution positive u du problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u^\beta|\nabla u|^2 = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} + f & \text{dans } \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{5.30}$$

verifiant $u^{\frac{\beta+1}{2}} \in L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega))$.

Notons que le problème stationnaire associé admet aussi une solution minimale $\bar{u}$ vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u} + \overline{u}^\beta|\nabla\overline{u}|^2 = \lambda \dfrac{\overline{u}^p}{|x|^2} + f, \quad \bar{u} \geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ \overline{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.31}$$

Chapitre 6

Perspectives et Problèmes Ouverts

Le but de ce chapitre est d'énoncer quelques perspectives et de présenter des problèmes ouverts rencontrés durant l'élaboration de cette thèse. On présente ces perspectives et problèmes ouverts dans le même ordre que les chapitres de cette thèse.

6.1 Problèmes ouverts pour le Chapitre 2

Certains problèmes ouverts relatifs au Chapitre 2 sont les suivants :

1. Supposons que $\gamma = 0$, dans le cas $p = 2$, alors le problème

$$-\Delta u = \lambda \frac{u}{|x|^2} + h$$

   a une solution distributionnelle si et seulement si $|x|^{-\alpha_{1,2}} h \in L^1_{loc}(\Omega)$. Aucune condition similaire n'est connue à ce jour pour la cas du $p-$laplacien pour assurer l'existence de solution.

2. La preuve du Théorème d'existence 2.4 est purement linéaire. Il serait intéressant d'étudier si une condition similaire sur h assurerait l'existence de solution pour le cas quasilinéaire du $p-$laplacien.

6.2 Problèmes ouverts pour le Chapitre 3

Pour le chapitre 3 nous présentons les problèmes ouverts suivants :

1. Dans les Théorèmes 3.1 et 3.3 nous avons prouvé l'existence d'une solution pour toutes données dans $L^1(\Omega)$, et même pour f donnée mesure de Radon bornée avec $f \in (L^1(\Omega)+W^{-1,2}(\Omega))$, par contre, le cas où f est une mesure singulière dans le sens de la Définition 1.10 semble être plus délicat. Nous ferons observer au lecteur que dans l'absence du terme en gradient et f mesure singulière, le problème est déjà traité dans [32].
2. Dans le cas où f est une fonction régulière dans $\bar{\Omega}$, alors sous certaines hypothèses convenables sur le comportement de f dans un voisinage du bord $\partial\Omega$, il existe dans la littérature plusieurs résultats donnant le comportement de u au voisinage de $\partial\Omega$ en fonction de $dist(x, \partial\Omega)$. Il sera intéressant de généraliser ces résultats au cas d'une donnée générale dans $L^1(\Omega)$.
3. Le résultat de multiplicité du Théorème 3.4 est prouvé sous une condition de régularité sur f, par conséquent, nous savons par le Théorème 2.7 que l'existence reste valable pour tout $f \in L^1(\Omega)$. Il semble intéressant de montrer que le problème (3.8) possède aussi d'autres solutions. Nous rappelons que le problème (3.35) n'admet pas de solution pour une donnée générale f.

6.3 Problèmes ouverts du Chapitre 4

Concernant le chapitre 4 voici une proposition de problèmes ouverts :

1. L'argument utilisé dans le Chapitre 3 est purement linéaire. Une question intéréssante serait d'étudier pour tout $\lambda > 0$ l'existence de solutions pour le problème (4.4) avec un opérateur non-linéaire, $u_t - \Delta_p u$. Nous ferons remarquer que l'opérateur $p-$laplacien parabolique, présente des difficultés et des résultats insoupçonnables ; il est donc très difficile de prédire à l'avance si il est possible d'obtenir les mêmes résultats.
2. Dans le cas linéaire et sous des hypothèses supplémentaires sur u_0 nous pouvons prouver que $u \in L^\infty(\Omega_T)$. Un des problèmes ouverts dans ce sens

serait d'essayer d'obtenir plus d'informations sur le comportement de la solution au voisinage du bord de Ω_T pour $t > 0$ fixé.

3. Pour le cas sur-critique il serait plus qu'intéressant de déterminer la classe des données initiales admissibles pour les quelles on a l'existence de solution.

6.4 Problèmes ouverts pour le Chapitre 5

On présente ici des perspectives et quelques problèmes ouverts liés au chapitre 5 :

1. Dans la Proposition 5.1 on a supposé que $\beta > p - 2$, une question intéressante est de traiter le cas où $p \geq \beta + 2$.
2. Un problème proposé à traiter est le suivant :

$$u_t - \Delta u + g(u)|\nabla u|^q = \lambda \frac{u^p}{|x|^2} + f(x,t),$$

   où $1 < q \leq 2$, $p > 0$ et $f \in L^1(\Omega_T)$, $g : I\!R \to I\!R$ est une fonction continue, croissante vérifiant la condition de signe $g(s)s \geq 0$, on cherche une solution non nécessairement positive, il est intéressant de trouver l'interaction entre p, q et g afin d'avoir une solution dans un espace de Sobolev convenable.
3. Le cas $p > 2$ est trés intéressant et exige des nouveaux outils pour prouver des résultats de compacité soit pour le cas elliptique ou parabolique.

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui, *Multiplicity Result for Quasilinear Elliptic Problems with General Growth in the Gradient.* Adv. Nonlinear Stud. **8**,(2008), 289-301.

[2] B. Abdellaoui, A. Attar, *Quasilinear elliptic problem with Hardy potential and singular term.* Communications on Pure and Applied Analysis, **12**, (2013), 1363-1380.

[3] B. Abdellaoui, A. Attar, S.E. Miri, *Non linear singular elliptic problem with gradient term and general datum.* Submitted.

[4] B. Abdellaoui, E. Collorado, I. Peral, *Some improved Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities.* Calc. Var. **23**, (2005), 327-345.

[5] Abdellaoui, B. Dall'Aglio, A. and I. Peral, *Some remarks on elliptic problems with critical growth in the gradient.* J. Differential Equations, **222,** (2006), 21-62.

[6] B. Abdellaoui, V. Felli, I. Peral, *Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-laplacian.* Journal :Boll.Unione Mat. Ital. Sez. B . **2**, (2006), 445-484.

[7] B. Abdellaoui, I. Peral, *Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacien with a critical potential.* Ann. di .Math, **182**, (2003), 247-270.

[8] B. Abdellaoui, I. Peral, *A note on a critical problem with natural growth in the gradient.* Journal : Euro. Math. Soc, **6**, (2006), 119-136.

[9] B. Abdellaoui, I. Peral, *The Equation $-\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} = |\nabla u|^p + cf(x)$, the optimal power.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **VI**, (2007), 159-183.

[10] B. Abdellaoui, I. Peral, *Optimal results for parabolic problems arising in some models with critical growth in the gradient respect to Hardy potential.* Avanced in Mathematics. **225**, (2010), 2967-3021.

[11] B. Abdellaoui, I. Peral, A. Primo, *Strong regularizing effect about a gradient term in the heat equation with Hardy potential.* J. Funct. Anal, **258**, (2010), 1247-1272.

[12] R. A. Adams, *Sobolev spaces.* Academic press New York San Francisco London, (1975).

[13] N.E. Alaa, M. Pierre, *Weak solutions of some quasilinear elliptic equations with data measures.* SIAM J. Math. Anal, **24**, (1993), 23-35.

[14] C.O. Alves, J.V.Goncalves, L.Maia, *Singular nolinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$*.* Abstr. Appl.Anal, **3**, (1998), 411-423.

[15] W. Allegretto, Y. X. Huang, *A Picone's identity for the* $p-$*Laplacian and applications.* Nonlinear Ana. T.M.A, **32**, (1998), 819-830.

[16] F. Antoci, *Some necessary and some sufficient conditions for the compactness of the embedding of weighted Sobolev spaces.* Ricerche di Matematica, **LII**, (2003), 55-71

[17] D. Arcoya, J. Carmona, T. Leonori, P. Martínez-Aparicio, L. Orsina, F. Petitta, *Existence and nonexistence of solutions for singular quadratic quasilinear equations.* J. Differential Equations, **246**, (2009), 4006-4042.

[18] A. Attar, S. Merchán, I. Peral, *A remark on existence of semilinear heat equation involving Hardy-Leray potentiel.* Submitted.

[19] A. Attar, S. Merchán, I. Peral, *A strong regularizing effect of a first order term on a parabolic problem with superlinear term and hardy potential.* Submitted.

[20] P. Baras and J. Goldstein , *The heat equation with a singular potential.* Trans. Amer. Math. Soc, **294**, (1984), 121-139.

[21] P. Baras, M. Pierre, *Singularités éliminables pour des équations semilinéaires.* Ann. Inst. Fourier, **34**, (1984), 185-206.

[22] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, M. Pierre, J.L. Vazquez, *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci, **22,** (1995), 241-273.

[23] D. Blanchard, *Truncation and monotonicity methods for parabolic equations.* Nonlinear anall, **21**, (1993), 725-43.

[24] D. Blanchard, F. Murat, *Renormalised solutions of nonlinear parabolic problems with L^1 data : existence and uniqueness.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **127**, (1997), 1137-1152.

[25] D. Blanchard, F. Murat, H. Redwane, *Existence and uniqueness of a renormalized solution for a fairly general class of nonlinear parabolic problems.* J. Differential Equations. **177**, (2001), 331-374.

[26] L. Boccardo, A. Dall'Aglio, T. Gallouet, L.Orsina, *Nonlinear parabolic equations with measure data,* J. Funct. Anal. **147,** (1997), 237-258.

[27] L. Boccardo, *Dirichlet problems with singular and gradient quadratic lower order terms.* ESAIM - Control, Optimisation and Calculus of Variations, **14**, (2008), 411-426.

[28] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data.* J. Funct. Anal, **87,** (1989), 149-169.

[29] L. Boccardo, T. Gallouët, F. Murat, *A unified representation of two existence results for problems with natural growth.* Research Notes in Mathematics, **296**, (1993), 127-137.

[30] L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina, *Existence and uniqueness of entropy solutions for a nonlinear elliptic equations with a measure data.* Annales de l'I. H. P, section C, tome 13, (1996), 539-551.

[31] L. Boccardo, F. Murat, J.P. Puel, *Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, **11**, (1984), 213-235.

[32] L. Boccardo, L. Orsina, *Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities.* Calc.Var, **37**, (2010), 363-380.

[33] L. Boccardo, L. Orsina, I. Peral, *A remark on existence and optimal summability of solutions of elliptic problems involving Hardy potential*, Discrete Contin. Dyn. Syst, **16**, (2006), 513-523.

[34] H. Brezis, X. Cabré, *Some simple nonlinear PDE's without solution.* Boll. Unione. Mat. Ital. Sez. B, **8**, (1998), 223-262.

[35] H. Brezis, S. Kamin, *Sublinear elliptic equations in* $I\!R^N$. Manuscripta Math, **74**, (1992), 87-106.

[36] H. Brezis, M. Marcus, *Hardy's inequalities revisited.* Annali della Scuola Seperior do Piza Classe di Scienze 4 série, tome 25, (1997), 217-237.

[37] H. Brezis, A. C. Ponce, *Kato's inequality when* Δu *is a measure.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser(2004).

[38] T. Cazenave, F. Dickstein, M. Escobedo, *A semilinear heat equation with concave-convex nonlinearity.* Rendiconti di Matematica, **19**, (1999), 211-242.

[39] J. Cheng, Z. Zhang, *Existence and optimal estimates of solutions for singular nonlinear Dirichlet problems.* Nonlinear Anal, **57**, (2004), 473-484.

[40] A. Cianchi, V. Maz'ya, *Global Lipschitz regularity for a class of quasilinear elliptic equations.* Comm. Partial Differential Equations, **36**, (2011), 100-133.

[41] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, Luigi, A. Prignet, *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci, **4**, (1999), 741-808.

[42] J. Dávila, I. Peral, *Nonlinear elliptic problems with a singular weight on the boundary.* Calc. Var. Partial Differential Equations, **41**, (2011), 567-586.

[43] E. Di Benedetto, $C^{1+\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations.* Nonlinear Anal, **7**, (1983), 827-850.

[44] R. Di Nardo, *nonlinear elliptic and parabolic equations with measure data.* Thèse de Doctorat, Université Fedrico II, Napoli, (2008).

[45] M.M. Fall, R. Musina, *Hardy-Poincaré inequalities with boundary singularities.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A, **142**, (2012), 1-18.

[46] C.L. Feffermanll, *The uncertainly principle.* Bull. Amer. Math. Soc Sect (N.S), **9**, (1983), 129-206.

[47] J. García Azorero, I. Peral, *Hardy Inequalities and some critical elliptic and parabolic problems.* J. Diff. Eq, **144**, (1998), 441-476.

[48] M. Ghergu, V. Radulescu, *Bifurcation for a class of singular elliptic problems with quadratic convection term.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **338**, (2004), 831-836.

[49] M. Ghergu, V. Radulescu, *Multiparameter bifurcation and asymptotics for the singular Lane-Emden-Fowler equation with a convection term.* Proc. Royal Society of Edinburgh : Section A (Mathematics) **135**, (2005), 63-79.

[50] M. Ghergu, V. Radulescu, *On a class of sublinear singular elliptic problems with convection term.* J. Math. Anal. Appl. **311**, (2005), 635-646.

[51] D.Gilbarg, N. Trudinger, *Partial Differential Equations of Second Order.* 2nd ed, Springer-Verlag, Berlin/New-York, (1983).

[52] N. Grenon, F. Murat, A. Porretta, *Existence and a priori estimate for elliptic problems with subquadratic gradient dependent terms.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **342**, (2006), 23-28.

[53] A. Kufner, B. Opic, *Hardy-type inequalities.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, 219. Longman Scientific & Technical, Harlow, (1990).

[54] A.C. Lazer, J.P. McKenna, *On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem.* Proc. Amer.Math. Soc. **111**, (1991), 721-730.

[55] J. Leray, J.L.Lions, *Quelques résulatats de Visik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder.* Bull. Soc. Math. France, **93**, (1965), 97-107.

[56] G.M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations.* Nonlinear Anal, **12** (1988), 1203-1219.

[57] V. G. Maz'jadams, *Sobolev spaces.* Springer Berlin, (1985).

[58] S. Merchán, L. Montoro, *Remarks on the existence of solutions to some quasilinear elliptic problem involving the Hardy-Leray potential.* J.Annali Di Mathematica Pura ed Applicata, (2012), 1-24.

[59] S. Merchán, I. Peral, *Remarks on the solvability of an elliptic equation with a supercritical term involving the Hardy-Leray potential.* J. Math. Anal. App, (2012), 1-23.

[60] S.E.H. Miri, *Problèmes elliptiques et paraboliques avec comportement critique en gradient.* Thèse Doctorat Université de Tlemcen, (2012).

[61] S.E.H. Miri, *Quasilinear elliptic problems with general growth and nonlinear term having singular behavior.* Advanced Nonlinear Studies, **12**, (2012), 19-48.

[62] F. Murat, *L'injection du cone positif de $H^{-1}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$ est compacte pour tout $q < 2$.* J. Math. Pures Appl. **60**, (1981), 309-322.

[63] F. Petitta, *Nonlinear parabolic equations with general measure data.* Tesi di Dottorato, Universitá La Sapienza di Roma, (A.A 2004-2005).

[64] A. Prignet, *Problèmes elliptiques et paraboliques dans un cadre non variationnel.* Thèse de Doctorat. UMPA-ENS Lyon. (1997).

[65] A. Prignet, *Existence and uniqueness of entropy solution of parabolic problems with L^1 data.* Nonlinear Anal. T.M.P, **28**, (1997), (1943-1954).

[66] G.Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second order à cofficients discontinus.* Ann. Inst. Fourier, **15**, (1965), 189-258.

[67] P. Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations.* J. Differential Equations, **51**, (1984), 126-150.

[68] J. L. Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations.* Appl. Math. Optim, **12**, (1984), 191-202.

[69] Z. Zhang, Y. Guo, Yiming, F. Huabing, *Boundary behaviour of the unique solution to a singular Dirichlet problem with a convection term.* J. Math. Anal. Appl, **352**, (2009), 77-84.

[70] Z. Zhang, J. Yu, *On a singular nonlinear Dirichlet problem with a convection term.* SIAM J. Math. Anal, **32**, (2000), 916-927.

Résumé :

Dans cette thèse on s'intéresse aux problèmes elliptiques et paraboliques avec terme singulier, en particulier le terme singulier sera une non linéarité ou un potentiel de Hardy-Sobolev. L'objectif étant d'obtenir des résultats d'existence, non-existence et de comportement asymptotique des solutions.

Mots Clés :

Equations elliptiques et paraboliques non linéaires, terme singulier, potentiel de Hardy-Sobolev, solutions renormalisées.

Abstract :

In this thesis, we focus on some elliptic and parabolic problems with singular term, this one can be a singular nonlinearity or a Hardy-Sobolev term. Our aim is to obtain existence, non existence results and the asymptotic behaviour of the solutions.

Key words :

Nonlinear Elliptic and parabolic problems, singular term, Hardy-Sobolev potential, Renormalized solutions.

الملخص:

في هذه الأطروحة نتطرق لدراسة بعض المعادلات التفاضلية الجزئية الغير الخطية و التي تحتوي على حد شاذ هذا الأخير قد يتمثل في حد غير خطي أو في حد هاردي- سوبولاف. هدفنا هو الحصول على وجود أو عدم وجود حلول و على السلوكات المقاربة لها.

الكلمات المفتاحية:

المعادلات التفاضلية الجزئية الغير الخطية ، الحد الشاذ ، حد هاردي سوبولاف ، الحلول التقريبية