République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bakr Belkaid Tlemcen

FACULTE DES SCIENCES

Département de Mathématiques

Mémoire **P**our **L**'Obtention **D**u **D**iplôme

De Magistère

Option: **Géométrie Différentielle**

Thème

Multiplicité de la première valeur propre d'un opérateur elliptique sur une variété compacte.

Présenté en 2012 par :

Melle. Fatima Zohra TERKI

Devant le Jury composé de :

Président :	Mr Mohamed BENALILI	Professeur	Université de Tlemcen
Rapporteur :	Mr Sidi Mohamed BOUGUIMA	Professeur	Université de Tlemcen
Examinateurs :	Mr Boumedienne ABDELLAOUI	M.C.A	Université de Tlemcen
	Mr Youcef MALIKI	M.C.A	Université de Tlemcen

Année universitaire : 2012-2013

Dédicace

Au nom du Dieu le tout puissant qui m'a donné la volonté, la patience et qui m'avait mis sur le bon chemin pour arriver à ce jour.

J'ai le grand plaisir de dédier ce travail :

A la mémoire de mon père, que Dieu lui accorde son pardon et l'accueil dans son paradis, je ne l'oublierai jamais ; j'espère qui il soit fier de moi aujourd'hui.

A la femme qui a consacré sa vie pour que la mienne soit meilleure, par l'amour, l'aide, le soutien et les encouragements qu'elle m'a réservé, pour que je puisse continuer mes études, ma très chère mère. Que Dieu la garde pour moi longtemps.

A ma sœur Samra qui m'a encouragé depuis mon enfance ; et mon adorable et unique frère Tewfik je les remercie très fort, que dieu les garde pour nous;

A tous ce qui sont chers et trouvent leurs places dans mon cœur. Et tous les gens qui ont contribués d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Fatima Zohra TERKI

Remerciements

Mes profonds remerciements

Au directeur de mémoire :

Mr Bouguima Sidi Mohamed

Je lui dois beaucoup pour le contenu du travail présenté, pour ses critiques constructives et son aide aux différentes entraves rencontrées, pour sa gentillesse et ses qualités humaines et pour sa confiance.

Au président de jury :

Mr Benalili Mohamed

Qui ma fait l'honneur de bien vouloir accepter la présidence de ce mémoire, je le remercie encore une fois pour son soutien tout le long de mon cursus universitaire (en D.E.S et en magistère).

Aux examinateurs :

Messieurs Abdelloui Boumedienne et Maliki Youcef :

Qu'ils veuillent ici l'expression de mon profond respect pour avoir eu l'amabilité de vouloir trouver bien faire de jury de mon mémoire.

Enfin, je ne pourrais terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

Fatima Zohra TERKI

Multiplicité de la première valeur propre d'un opérateur elliptique sur une variété compacte

Fatima Zohra TERKI

Table des Matières

Notations

Par soucis de lisibilité , on a besoin des notations suivantes.

$N(T)$ noyau de l'opérateur T

$R(T)$ image de l'opérateur T

$L(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires de X dans Y

$F(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm de X dans Y

$ind(T)$ l'indice d'un opérateur de Fredholm T

$\oplus$ la somme orthogonale (dans ce mémoire)

$D^m f(x) = \left\{ (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f(x) : |\alpha| = m \right\}$

Chapitre 1

Introduction

Ce mémoire est basé essentiellement sur les travaux de Pereira (voir par exemple [11] , [12])

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; un ouvert ,borné à bord régulier avec $n \geq 2$ .Soit $V(.)$ une fonction définie sur Ω de classe $C^\alpha(\alpha$ un entier $\geq 0)$.

Considérons le problème des valeurs propres suivant:

$$\begin{cases} (\Delta^2 + V + \lambda)u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = \Delta u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

Dans ce travail , on s'intéresse à la simplicité générique des valeurs propres du problème (1.1).

Si le potentiel $V \equiv 0$, la simplicité générique des valeurs propres du problème (1.1) découle de la simplicité générique des valeurs propres du problème de Dirichlet pour le Laplacien (voir Micheletti[3] et Uhlenback[4]).

Sur ces questions, nous renvoyons le lecteur aux travaux de D.Henry [2],C.Rocha[5],Teman [6] et A.L.Pereira[7],[8] .

Dans le cas unidimensionnel, le problème:

$$\begin{cases} -u^{(4)}(t) = \lambda u(t) & t \in [0,1] \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

admet des valeurs propres ayant la propriété suivante:

Théorème 1.1 [1] *L'ensemble de toutes les valeurs propres du problème (1.2) forment une suite croissante non bornée*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2. < .. \to +\infty$$

Chaque valeur propre λ_n *,*$n \in \mathbb{N}$ *est une valeur propre positive, simple et isolée .Chaque fonction propre* u_n *a* $(n-1)$ *zéros dans l'intervalle* $]0,1[$.

Soit le problème

$$\begin{cases} \Delta^2\varphi = \lambda\varphi & \text{dans } \Omega \\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

En 1949, Duffing a donné un contre exemple montrant que (1.3) a une première fonction propre qui change de signe.En 1950, Szego a fait une conjecture que si le domaine Ω possède des propriétés convenables, alors(1.3) possède une fonction propre de signe constant.

Soit le problème

$$\begin{cases} \Delta^2\varphi = f & \text{dans } \Omega \\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

En 1908, Hadamard, a conjecturé que si Ω est convexe avec de bonne propriétés alors, $f \geq 0$ implique que $u \geq 0$.Ceci est faux comme le montre le contre exemple de Coffman sur un rectangle.En 1905, Boggio, a établi que si Ω est le disque unité du plan alors la fonction de Green est positive.La conjecture qui résiste jusqu'à maintenant , est la suivante:

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine convexe.Il existe une constante $C \geq 0$,telle que si k_Ω est la courbure maximale de $\partial\Omega$ et

$$\lambda_1 \geq Ck_\Omega^4$$

alors $f \geq 0$ implique que $u \geq 0$.

Maintenant ,nous donnons un exemple qui illustre que le principe de maximum tombe en défaut pour le biharmonique

Proposion 1.2: *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$.*
Si

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : Q(x,y) < 0\right\}$$

où

$$Q(x,y) = x^2 + 25y^2 - 1$$

et

$$f(x) = (1-x)^2(4-3x)$$

alors

$$\Delta^2(Q^2 f) > 0 \;\; \text{sur } \overline{\Omega}$$

Preuve:

Un calcul simple montre que

$$\Delta^2(Q^2 f) = 96P(x,y)$$

où

$$P(x,y) = 596 - 1825x + 1850x^2 + 620x^3 + 3250y^2 - 3000xy^2.$$

Maintenant , on montre que

$$P(x,y) > 0 \quad \forall\ (x,y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$$

Nous démontrons cette relation en deux étapes .

Etape 1 :

$$P(x,y) > 0 \text{ sur } \;\partial\Omega \times \partial\Omega.$$

En effet , remarquons que

$$P(x, \frac{\sqrt{1-x^2}}{5}) = R(x) \equiv 726 - 1945x + 1720x^2 - 500x^3$$

une étude de variation de R , montre que

$$R(x) > 0 \quad \text{sur} \quad [-1,1]$$

Etape 2:

$$P(x,y) > 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \times \Omega$$

Supposons que P prend des valeurs négatives dans $\Omega \times \Omega$ .Soit (x_0, y_0) le minimum négatif de P qui est un point intérieur .

$$\begin{aligned}
(x_0, y_0) \text{ est un minimum de } P \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} P_x(x_0, y_0) = 0 \\ P_y(x_0, y_0) = 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} -1825 + 3700x - 1860x^2 - 3000y^2 = 0 \\ 500y(13 - 12x) = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$P_y(x,y) = 500y(13 - 12x)$$

Si $P_y(x_0, y_0) = 0$ avec $(x_0, y_0) \in \Omega$,on doit avoir $y_0 = 0$ en utilisant le fait que $P_x(x,y) = 0$,x_0 est une racine de l'équation :

$$372x^2 - 740x + 365 = 0$$

cette équation a deux racines distincts mais l'un des deux racines et dans l'intervalle $]-1,1[$.

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{185 - 2\sqrt{70}}{186} \\
x_0 &\simeq 0.904
\end{aligned}$$

donc

$$P(x_0, 0) \simeq 0.01 > 0$$

alors on trouve que

$$P(x,y) > 0 \qquad \text{pour } (x,y) \in \overline{\Omega}$$

donc

$$\Delta^2(Q^2 f) > 0 \quad \text{sur } \overline{\Omega}$$

D'où le résultat.

On voit bien que $\Delta^2(Q^2 f) > 0$ sur $\overline{\Omega}$, mais $Q^2 f$ change de signe sur $\overline{\Omega}$.

Le mémoire est organizé comme suit :

Dans le deuxième chapitre , on donne quelques définitions , notions et des théorèmes qui seront utils dans la suite .

Le chapitre 3, est consacré au résultat essentiel de ce mémoire.

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire , certains théorèmes et lemmes sont donnés en annexe.

Chapitre 2

Domaine perturbé

Pour plus de détails sur les résultats obtenus dans cette partie, nous renvoyons le lecteur à D.Henry [2] .

2.1 Préliminaire

Definition 2.1.1: *Une application $f : X \to Y$ est dite propre si pour toute suite $(x_n, y_n) \in Y$,tel que $\{y_n\}$ est convergente ,il existe une sous suite $\{y_{\sigma n}\}$ qui a une limite dans Y.*

Soit f une fonction à valeur réelle , définie dans un voisinage d'un point x de $\mathbb{R}^n$.La dérivée d'ordre m au point x de la fonction f notée $D^m f(x)$ est une une forme $m-$linéaire , symétrique :

$$h \to D^m f(x) h^m \text{ dans } \quad \mathbb{R}^n$$

munie de la norme:

$$|D^m f(x)| = \max_{|h| \leq 1} |D^m f(x) h^m|$$

Soit Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit E est un espace vectoriel normé ,$C^m(\Omega, E)$ est l'espace des fonctions m -fois continument différentiables sur Ω , dont les dérivées se prolongent d'une manière continue à la fermeture $\overline{\Omega}$ avec la norme usuelle :

$$\|f\|_{C^m(\Omega,E)} = \max_{0\leq j\leq m} \sup_{x\in\Omega} \left|D^j f(x)\right|$$

Dans le cas ou $E = \mathbb{R}$ on écrit simplement $C^m(\Omega)$.

Soit $C_0^m(\Omega) \subset C^m(\Omega)$ le sous espace des fonctions à support compact dans Ω.

Soit $C_{unif}^m(\Omega, E) \subset C^m(\Omega, E)$ le sous espace fermé des fonctions m- fois différentiables et de dérivées uniformément continues .Si Ω est borné, cet espace coïncide avec $C^m(\Omega, E)$.

Soit $C^{m,\alpha}(\Omega, E)$ l'espace des fonctions m -fois différentiables dont les dérivées sont continues au sens de Hölder avec l'éxposant α ,$0 < \alpha \leq 1$, muni de la norme :

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\Omega,E)} = \max\left\{\|f\|_{C^m(\Omega)}, H_\alpha^\Omega(D^m f)\right\}$$

où

$$H_\alpha^\Omega = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}, x, y \in \Omega \text{ tel que } x \neq y\right\}$$

Un sous ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dit régulier de classe C^m , s'il existe une fonction $\phi \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ qui est au moins $C_{unif}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \phi(x) > 0\}$$

et $\phi(x) = 0$ implique $|\nabla\phi(x)| \geq 1$.

Soit m un entier non négatif , p un nombre réel $\geq$ 1,et Ω un ouvert borné l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ (resp $W_0^{m,p}(\Omega)$) est le complété de $C^m(\Omega)$ (resp $C_0^m(\Omega)$) suivant la norme :

$$\|u\| = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = 2$ on écrit $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$,et $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

Soit S une hypersurface de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ et , soit $\phi : S \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , alors $\nabla_S \phi$ est un champ de vecteurs tangent à S , si pour chaque courbe de classe C^1 ,$t \to x(t) \subset S$ on a

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t)) = \nabla_S \phi(x(t)).\dot{x}(t)$$

Soit S une hypersurface de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ et, $\overrightarrow{a} : S \to \mathbb{R}^n$ un fibre tangent à S ,alors $div_S \overrightarrow{a} : S \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue tel que , pour toute $\phi : S \to \mathbb{R}$ de classe C^1 à support compact dans S , on a

$$\int_S (div_S \overrightarrow{a})\phi = -\int_S \overrightarrow{a}.\nabla_S \phi.$$

Si $u : S \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, alors $\Delta_S u = div_S(\nabla_S u)$ et pour toute $\phi : S \to \mathbb{R}$ de classe C^1 à support compact , on a:

$$\int_S \phi \Delta_S u = -\int_S \nabla_S \phi.\nabla_S u$$

Théoreme 2.1.2 [2]

(1)*Si* S *est une hypersurface et* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est de classe* C^1 *dans un voisinage de* S*,alors sur* S ,$\nabla_S \phi(x)$ *est la composante de* $\nabla\phi(x)$ *tangente à* S *au point* x , *c' est à dire :*

$$\nabla_S \phi(x) = \nabla\phi(x) - \frac{\partial\phi}{\partial N} N(x)$$

où N *est le champ normal à* S *.*

(2)*Si* S *est une hypersurface de classe* C^2 *dans* $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{a} : S \to \mathbb{R}^n$ *est de classe* C^1 *dans un voisinage de* S ,$N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est le champ normal dans un voisinage de* S *de classe* C^1,et $H = divN$ *est la courbure moyenne de* S , *alors :*

$$div_S \overrightarrow{a} = div \overrightarrow{a} - H \overrightarrow{a}.N - \frac{\partial}{\partial N}(a.N)$$

sur S.

(3) *Si* S *est une hypersurface* ,$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est de classe* C^2 *dans un voisinage de* S ,*et* N *le champ de vecteur de la normale à* S *alors :*

$$\Delta_S u = \Delta u - H\frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} + \nabla_S u.\frac{\partial N}{\partial N}$$

sur S *au voisinage de* x_0 *. On peut choisir* N *de telle sorte que* $\frac{\partial N}{\partial N} = 0$ *sur* S *.(* voir [2 théorème 1.13])

Avant de passer au calcul différentiel ,on a besoin d'une identité vérifiée par l'opérateur biharmonique .Cette identité est nécessaire pour la suite .

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$,u et v deux fonctions régulières définies sur Ω montrons la relation :

$$\int_\Omega \left\{ v\Delta^2 u - u\Delta^2 v \right\} = \int_{\partial\Omega} \left\{ v\frac{\partial \Delta u}{\partial N} - \Delta u \frac{\partial v}{\partial N} - u\frac{\partial \Delta v}{\partial N} + \Delta v \frac{\partial u}{\partial N} \right\} \qquad (2.1)$$

En effet , d'aprés la deuxième identité de Green on a :

$$\int_{\Omega}\{v\Delta(\Delta u)-\Delta v\Delta u\}=\int_{\partial\Omega}\left\{v\frac{\partial\Delta u}{\partial N}-\Delta u\frac{\partial v}{\partial N}\right\}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\left\{v\Delta^2u-u\Delta^2v\right\} &= \int_{\partial\Omega}\{v\Delta\left(\Delta u\right)-\Delta v\Delta u+\Delta u\Delta v-u\Delta\left(\Delta v\right)\}\\ &= \int_{\partial\Omega}\left\{v\frac{\partial\Delta u}{\partial N}-\Delta u\frac{\partial v}{\partial N}-u\frac{\partial\Delta v}{\partial N}+\Delta v\frac{\partial u}{\partial N}\right\}\end{aligned}$$

2.1.1 Calcul différentiel:

On considère l'opérateur différentiel formel non linéaire suivant :

$$u\to v$$

défini par:

$$v(x)=f(x,Lu(x))\quad x\in\mathbb{R}^n$$

où

$$Lu(x)=(u(x),\frac{\partial u}{\partial x_1}(x),.......,\frac{\partial u}{\partial x_n}(x),\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}(x),\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_2},.....);x\in\mathbb{R}^n.$$

Plus précisément $Lu(.)$ a valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et $f(x,\lambda)$ définie pour $(x,\lambda)\in O$ (O un ouvert de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$).

Pour un sous ensemble $\Omega\subset\mathbb{R}^n$,on définit $\digamma_\Omega$ par:

$$\digamma_\Omega(u)(x)=f(x,Lu(x));x\in\Omega$$

avec u une fonction suffisamment régulière tel que $(x,Lu(x))\subset O$ pour $x\in\overline{\Omega}$.

Soit h: $\Omega\to\mathbb{R}^n$, une application de classe C^m ,h est un C^mdifféomorphisme de Ω dans son image $h(\Omega)$,on définit:

$$\digamma_{h(\Omega)}:C^m(h(\Omega))\to C^0(h(\Omega))$$

Soit la fonction h^* définie par:

$$h^* : C^k(h(\Omega)) \to C^k(\Omega) \qquad 0 \leq k \leq m$$

où

$$h^*u(x) = (u \circ h)(x) = u(h(x)) \quad x \in \Omega;$$

avec u est une fonction suffisament régulière dans $h(\Omega)$.

L'application h^* est un isomorphisme [2] d'inverse $h^{*-1} = (h^{-1})^*$, h^* et h^{*-1} sont aussi des isomorphismes dans les espaces de Sobolev [2]:

$$h^* : W^{k,p}(h(\Omega)) \to W^{k,p}(\Omega) \qquad 0 \leq k \leq m \ , \quad 1 \leq p \leq \infty$$

où

$$h^*u(x) = (u \circ h)(x) = u(h(x)) \quad x \in \Omega$$

La forme $F_{h(\Omega)}$ s'appelle la forme d'Euler pour l'opérateur différentiel non linéaire :

$$v \to f(., Lv(.)) \quad \text{sur} \quad h(\Omega).$$

Cependant :

$$h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} : h^* D_{F_{h(\Omega)}} \subset C^m(\Omega) \to C^0(\Omega)$$

est la forme de Lagrange pour le même opérateur non linéaire .

Mais une nouvelle variable h est introduite donc, on a besoin d'étudier les propriétés de différentiabilité de l'application :

$$\begin{array}{rcl} (h, u) & \to & h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}(u) = f(h(.), h^* L h^{*-1} u) \\ Diff^m(\Omega) \times C^m(\Omega) & \to & C^0(\Omega) \end{array}$$

où

$$Diff^m(\Omega) = \left\{ h \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^n) / \ h \text{ est injective, et } \frac{1}{|\det h'(x)|} \text{ est borné sur } \Omega \right\}$$

cette application est une application de classe C^k (ou analytique) [2] sur son domaine de définition .

2.1.2 Calcul différentiel de la forme de Lagrange

Pour calculer la dérivée de l'application

$$h \to h^* \digamma_{h(\Omega)} h^{*-1} u$$

il suffit de calculer la dérivée de Gâteaux le long d'une courbe de plongement régulière $t \to h(t, .)$ de classe C^1 .

On a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \digamma_{\Omega(t)}(v)(y) = \frac{\partial}{\partial t} f(y, Lv(y))$$

L'opérateur différentiel:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - U(x,t) \frac{\partial}{\partial x}$$

est appelé la dérivée anti-convective .

On a le lemme suivant:

Lemme 1.1.3 [2] *On suppose que* $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et*, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *sont de classe* C^1 *et que* $h(t, .)$ *est un difféomorphisme de classe* C^1 *dans son image* $\Omega(t)$ *pour toute* t, *alors:*

$$D_t(h^*(t)\psi(., t)) = h^*(t)(\frac{\partial \psi}{\partial t}(., t))$$

Le théorème suivant nous permet de calculer la dérivée de la forme de Lagrange de la non linéarité.

Théorème 2.1.5 [2] *On suppose que $f(t, y, \lambda)$ est de classe C^1 sur un ensemble ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$.Soit L un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre $\leq m$ avec $Lv(y) \in \mathbb{R}^p$.*

Pour un ensemble ouvert $Q \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction v définie sur Q de classe C^m,soit $F_Q(t)v$ la fonction définie par:

$$y \to f(t, y, Lv(y)) \qquad y \in Q$$

*On suppose $t \to h(t, .)$ est une courbe, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*Posons *$\Omega(t) = h(t, \Omega)$ .Pour chaque $|j| \leq m; |k| \leq m+1;$ $(t, x) \mapsto \partial_t\partial_x^j h(t, x), \partial_x^k h(t, x), \partial_x^k u(t, x)$,sont continues dans $\mathbb{R}\times\Omega$ au voisinage de $t = 0$.Alors en chaque point de Ω on a:*

$$D_t(h^* F_{\Omega(t)}(t)h^{*-1})(u) = (h_t^* \dot{F}_{\Omega(t)}(t)h^{*-1})(u) + (h^* F'_{\Omega(t)}(t)h^{*-1})(u).D_t u.$$

où $D_t$est la dérivée anti-convective.

$$\dot{F}_Q(t)v(y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y, Lv(y)),$$

et

$$F'_Q(t)vw(y) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, y, Lv(y)).Lw(y) \qquad y \in Q$$

est la linéarisation de $v \to F_Q(t)v$.

Exemple 1: Supposons que A est un opérateur différentiel linéaire défini par :

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(y)(\frac{\partial}{\partial y})^\alpha$$

ne dépend pas explicitement de t et :

$$h(t,x) = x + tV(x) + o(t) \quad , \ x \ \in \Omega$$

D'aprés la définition de D_t :

$$D_t(h^* A h^{*-1} u) \mid_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \left(h^* A h^{*-1} u \right) \mid_{t=0} - h_x^{-1} h_t \nabla (h^* A h^{*-1} u) \mid_{t=0} .$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(h^* A h^{*-1} u \right) \mid_{t=0} = D_t(h^* A h^{*-1} u) \mid_{t=0} + h_x^{-1} h_t \nabla (h^* A h^{*-1} u) \mid_{t=0}$$

d'aprés le théorème 2.1.4:

$$\begin{aligned} D_t(h^* A h^{*-1} u) &= (h^* A h^{*-1}) D_t u \\ &= h^* A h^{*-1} (\frac{\partial}{\partial t} - h_x^{-1} h_t \nabla) u \end{aligned}$$

car $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$.
or

$$h^* \mid_{t=0} = h^{*-1} \mid_{t=0} = I \ ; \qquad h_x^{-1} \mid_{t=0} = 1; \qquad h_t \mid_{t=0} = V$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(h^* A h^{*-1} u \right) \mid_{t=0} &= h^* A h^{*-1} (\frac{\partial}{\partial t} - h_x^{-1} h_t \nabla) u \mid_{t=0} + h_x^{-1} h_t \frac{\partial}{\partial t} (h^* A h^{*-1} u) \mid_{t=0} \\ &= A(\frac{\partial}{\partial t} - V \nabla) u + V \nabla (Au) \\ &= A \frac{\partial u}{\partial t} + [V \nabla, A] (u) \end{aligned}$$

par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial t} (h^* A h^{*-1} u) \mid_{t=0} = A \frac{\partial u}{\partial t} + [V \nabla, A] (u)$$

et $[.,]$ est le crochet de commutateur donné par la ralation :

$$[V\nabla, A]\,(.) = V\nabla A(.) - AV\nabla(.)$$

On considère la forme générale des conditions aux bord :

$$b(t, y, Lv(y), MN_{\Omega(t)}(y)) = 0 \quad \text{pour} \quad y \in \partial\Omega(t).$$

où L, M sont des opérateurs différentiels à coefficients constants, et $N_{\Omega(t)}$ est la normale extérieure pour $y \in \partial\Omega(t)$,on choisit une extention de N_Ω dans la région de référence Ω .Alors $N_{\Omega(t)} = N_{h(t,\Omega)}$ définie par :

$$h^* N_{h(t,\Omega)}(h(x)) = \frac{(h_x^{-1})^T N_\Omega(x)}{\|(h_x^{-1})^T N_\Omega(x)\|} \tag{2.2}$$

pour x dans un voisinage de $\partial\Omega$.

$(h_x^{-1})^T$ est la transposée de l'inverse de la matrice jacobienne; et $\|.\|$ désigne la norme Euclidienne .

Le lemme suivant nous permet de calculer la dérivée anti-convective de la normale extérieure .

Lemme1.1.6 [2]

Soit Ω une région régulière de classe C^2.

Soit $N_{\Omega(.)}$ un champ de vecteurs unitaires de classe C^1 défini au voisinage du $\partial\Omega$ qui est la normale extérieure du $\partial\Omega$,et pour une fonction de classe C^2 $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ on *définit $N_{h(\Omega)}$ dans un voisinage de $h(\partial\Omega) = \partial h(\Omega)$ .Supposons que $h(t, .)$ est défini par :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h(t, x) &= V(t, h(t, x)) \text{ pour } x \in \Omega \\ h(x, 0) &= x; \end{aligned}$$

où $(t,y) \to V(t,y)$ *est de classe* C^2 *et* $\Omega(t) = h(t,\Omega)$, $N_{\Omega(t)} = N_{h(t,\Omega)}$,
Alors pour x *au voisinage de* $\partial\Omega$ *et* $y = h(t,x)$ *au voisinage de* $\partial\Omega(t)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} N_{\Omega(t)}(y) &= D_t(h^* N_{h(t,\Omega)})(x) \\ &= -(\nabla_{\partial\Omega(t)}\sigma + \sigma \frac{\partial N_{\Omega(t)}}{\partial N_{\Omega(t)}}(y)).\end{aligned}$$

où $\sigma = V.N_{\Omega(t)}$ *est la vitesse normale et* $\nabla_{\partial\Omega(t)}$ *est le gradient tangentiel à* $\partial\Omega$.

Le théorème suivant donne les propriétés de différentiabilité des conditions au bord.

Théorème 1.1.7 [2]

Soit $b(t,y,\lambda,\mu)$ *une fonction de classe* C^1*sur un ensemble ouvert de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ *,et L,M des opérateurs différentiels à coefficients constants d'ordre* $\leq m$ *.On suppose que* Ω *est une région de classe* C^{m+1}*,*$N_\Omega(x)$ *est un champ de vecteurs unitaires de classe* C^m *défini sur voisinage de* $\partial\Omega$ *, qui est le vecteur normal extérieur à* $\partial\Omega$ *et* $N_{h(t,\Omega)}$ *défini par (2.2) pour* h*:*$\Omega \to R^n$ *de classe* C^{m+1}.

Soit $B_{h(\Omega)}$ *défini par :*

$$B_{h(\Omega)}v(y) = b(t,y,Lv(y),MN_{h(\Omega)}(y)) \text{ pour } y \in h(\Omega) \text{ au voisinage de } \partial h(\Omega)$$

Si $t \to h(t,.)$ *est une courbe de classe* C^{m+1} et *pour* $|j| \leq m, |k| \leq m+1$ $(t,y) \to (\partial_t\partial_x^j h, \partial_x^k, , \partial_t\partial_x^j u, \partial_x^k u)(t,x)$ *sont continues dans* $\mathbb{R}\times\Omega$ *au voisinage de* $t = 0$.

Alors au points de Ω *assez voisin de* $\partial\Omega$ *on a:*

$$D_t(h^* B_{h(\Omega)} h^{*-1})(u) = (h^* \dot{B}_{h(\Omega)} h^{*-1})(u) + (h^* B'_{h(\Omega)} h^{*-1})(u).D_t u + (h^* \frac{\partial B_{h(\Omega)}}{\partial N} h^{*-1})(u).D_t(h^* N_{\Omega(t)}).$$

où $h = h(t,.)$*;* $\dot{B}_{h(\Omega)}$ *et* $B'_{h(\Omega)}$ *sont définies dans le théorème 1.1.5 et*

$$\frac{\partial B_{h(\Omega)}}{\partial N}(v).n(y) = \frac{\partial b}{\partial \mu}(t,y,Lv(y),MN_{h(\Omega)}(y)).Mn(y)$$

et $D_t(h^* N_{\Omega(t)})\,|_{\partial\Omega}$ *est donnée par le lemme 1.1.6.*

Exemple 2: On considère l'opérateur différentiel linéaire au bord :

$$B = \frac{\partial^2}{\partial N^2}$$

qui ne dépend pas éxplicitement de t

et

$$h(t,x) = x + V(x) + \sigma(t) \quad \text{avec } \sigma(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow 0 \ \text{ et } x \in \partial\Omega$$

d'aprés la définition de D_t :

$$\frac{\partial}{\partial t}(h^* B h^{*-1} u) \,|_{t=0} \, = D_t(h^* B h^{*-1} u) \,|_{t=0} + h_x^{-1} h_t \nabla (h^* B h^{*-1} u) \,|_{t=0}$$

et d'aprés le théorème 1.1.7 :

$$D_t(h^* B h^{*-1} u) \,|_{t=0} \, = (h^* B h^{*-1})(D_t u) \,|_{t=0} + (h^* B h^{*-1})(D_t h^* N) \,|_{t=0}$$

d'aprés le lemme 1.1.6:

$$(D_t h^* N) \,|_{t=0} \, = \frac{\partial}{\partial t} N \,|_{t=0} \, = \dot{N}$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(h^* B h^{*-1} u) \,|_{t=0} \quad &= \quad h^* B h^{*-1} (\frac{\partial}{\partial t} - h_x^{-1} h_t \nabla)(u) \,|_{t=0} + \nabla(\frac{\partial u}{\partial N} \dot{N}) N + \nabla(\nabla u . \dot{N}) N \\ &\quad + h_x^{-1} h_t \nabla (h^* B h^{*-1} u) \,|_{t=0}\end{aligned}$$

or

$$h^* \,|_{t=0} \, = h^{*-1} \,|_{t=0} \, = I \ ; \qquad h_x^{-1} \,|_{t=0} \, = 1; \qquad h_t \,|_{t=0} \, = V$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t}(h^* B h^{*-1} u) \,|_{t=0} \, = B \frac{\partial u}{\partial t} - B V \nabla u + \nabla(\frac{\partial u}{\partial N} N) N + \nabla(\nabla u \dot{N}) N + V \nabla(Bu)$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial t}(h^* B h^{*-1} u) \,|_{t=0} \, = B \frac{\partial u}{\partial t} + [V\nabla, B](u) + \nabla(\frac{\partial u}{\partial N} N) N + \nabla(\nabla u \dot{N}) N + V \nabla(Bu)$$

et $[.,]$ est le crochet de commutateur donné par la ralation :

$$[V\nabla, B]\,(.) = V \nabla B(.) - B V \nabla(.)$$

2.2 Changement de variables

On peut toujours transférer "l'origine " ou la région de référence $\Omega \in \mathbb{R}^n$, à une région Ω_1 difféomorphe à Ω.

Soit $H_1 : \Omega \to \Omega_1$ un difféomorphisme , et soit $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$, on définit :

$$h_1 = h \circ H_1^{-1} : \Omega_1 \to \mathbb{R}^n$$

Si

$$\begin{aligned} x_1 &= H_1(x) \\ u_1 &= H^{*-1} u \\ N_{\Omega_1}(x_1) &= N_{H_1(\Omega)}(H_1(x)) = \frac{(H_{1,x}^{-1})^T N_\Omega(x)}{\left\|(H_{1,x}^{-1})^T N_\Omega(x)\right\|} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} h_1(\Omega_1) &= h \circ H_1^{-1}(H_1(\Omega)) \\ &= h \circ (H_1^{-1} \circ H_1)(\Omega) \\ &= h(\Omega) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h_1^* \digamma_{h_1(\Omega_1)} h_1^{*-1} u_1(x_1) &= h^* \digamma_{h(\Omega)} h^{*-1}(H_1^{*-1} u)(H_1(x)) \\ &= h^* \digamma_{h_{(\Omega)}} h^{*-1}((H_1^{-1})^* u)(H_1(x)) \\ &= h^* \digamma_{h_{(\Omega)}} h^{*-1}(u(H_1^{-1} \circ H_1(x)) \\ &= h^* \digamma_{h_{(\Omega)}} h^{*-1}(u(x)) \end{aligned}$$

et de même ,les conditions au bord:

$$\begin{aligned} h_1^* B_{h_1(\Omega_1)} h_1^{*-1} u_1(x_1) &= h^* B_{h(\Omega)} h^{*-1}(H_1^{*-1} u)(H_1(x)) \\ &= h^* B_{h_{(\Omega)}} h^{*-1}((H_1^{-1})^* u)(H_1(x)) \\ &= h^* B_{h_{(\Omega)}} h^{*-1}(u(H_1^{-1} \circ H_1(x)) \\ &= h^* B_{h_{(\Omega)}} h^{*-1}(u(x)) \end{aligned}$$

La normale est donnée par:

$$\begin{aligned} N_{h_1(\Omega_1)}(h_1(x_1)) &= N_{h(\Omega)}(h \circ H_1^{-1}(H_1(x)) \qquad \text{car } h_1(\Omega_1) = h(\Omega) \\ &= N_{h(\Omega)}(h \circ H_1^{-1} \circ H_1(x)) \\ &= N_{h(\Omega)}(h(x)) \end{aligned}$$

2.3 Théorème d'unicité

Pour montrer la simplicité générique des valeurs propres , nous aurons besoin du théorème suivant :

Théorème 1.3.1: *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert ,connexe,borné,régulier de classe C^4,et B une boule telle que $B \cap \partial\Omega$ est une hypersurface . On suppose que $u \in H^4(\Omega)$ .Si pour une constante K, on a:*

$$\begin{aligned} \left|\Delta^2 u\right| &\leq K(|\Delta u| + |\nabla u| + |u| \qquad pp\ sur\ \Omega \\ avec\ u &= \frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} = \frac{\partial u^3}{\partial N} = 0 \quad \text{sur } B \cap \partial\Omega \end{aligned}$$

alors $u \equiv 0$ *sur* Ω.

2.4 Théorème de transversalité

L'outil de base de notre résultat est le théorème de transversalité de R.Thom et Abraham [9] .

D.Henry [2] a donné une version généralisée du théorème afin de l'appliquer en dimension infinie et au cas des indices négatifs .

Avant d'enoncer le théorème de transversalité on a besoin de quelques résultats et définitions.

Définition 1.4.1 : Soit X et Y sont des espaces de Banach et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire , continu .

T est dite de Fredholm,s'il vérifie :

(1) $N(T)$ est de dimension finie dans X.

(2) $R(T)$ est fermée et de codimension finie dans$Y$.

La quantité

$$\begin{array}{rcl} ind & : & F(X,Y) \to \mathbb{Z} \\ T & \to & ind(T) := \dim N(T) - co\dim R(T) \end{array}$$

est dite indice de T.

Remarque:

Si au moins l'une des dimensions de $N(T)$, ou dimension de $R(T)$ sont finis l'opérateur T est dite semi-Fredholm.

Définition 1.4.3: Soit f une application de classe C^k . Un point x est dit point régulier de f si la dérivée $f'(x)$ est surjective et la dimension de son noyau est finie ; dans le cas contraire x est dite point critique .

Soit X un espace de Baire et $I = [0,1]$.Pour tout fermé ou $\sigma-$fermé $F \subset X$ et chaque entier non négative m , on dit que la codimension de F est supérieure ou égale à $m(codimF \geq m)$ si le sous ensemble $\{\phi \in C(I^m, X); \phi(I^m) \cap F$ est non vide $\}$ est un ensemble maigre dans $C(I^m, X)$.

On dit que $codimF = k$ si k est le plus grand entier qui satisfait $codimF \geq m$.

Le théorème de transversalité s'enonce comme suit :

Théorème 1.4.4: *Soient k, m des nombres positifs.Soient X, Y, Z des variétés Banachiques de classes C^k.*

On suppose que A est un ensemble ouvert tel que $A \subset X \times Y$,et $f : A \to Z$ une application de classe C^k .Soit un point $\xi \in Z$;

On suppose que pour tout $(x,y) \in f^{-1}(\xi)$

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) : T_x X \to T_\xi Z$ *est semi-Fredholm avec indice $\leq k$.*

(2)

(2α) $DF(x,y) : (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) : T_xX \times T_YY \to T_\xi Z$ *est surjective*

où

$(2\beta)\dim\left\{\frac{R(Df(x,y))}{R(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y))}\right\} \geq m + \dim N(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)).$

(3) *L'application* $(x,y) \to y : f^{-1}(\xi) \to Y$ *est* σ*-propre c'est à dire* $f(\xi) = \cup_{j=1}^{\infty} M_j$ *une réunion dénombrable d'ensembles* M_j *tel que* $(x,y) \to Y$ *est une application propre pour toute* j *.*

Notons que (3) est satisfaite si $f^{-1}(\xi)$ *est Lindelöf [chaque recouvrement ouvert a un sous recouvrement dénombrable] ,où plus spécifiquement si* $f^{-1}(\xi)$ *est un espace métrique séparable où si* X, Y *: sont des espaces métriques séparables.*

Soient :

$$A_y = \{x : (x,y) \in A\};$$

et

$$Y_{crit} = \{y : \xi \textit{ valeur critique de } f(.,y) : A_y \to Z\};$$

Alors Y_{crit} *est un ensemble maigre dans* Y *et si*

$$\begin{array}{ccc} (x,y) & \to & y \\ f^{-1}(\xi) & \to & Y \end{array} \quad \textit{est propre et fermé} \quad , Y_{crit} \textit{est aussi fermé}$$

Si $Ind(\frac{\partial f}{\partial x}) \leq -m \leq 0$ dans $f^{-1}(\xi)$ *alors* ((2α) *implique* (2β)) *et*

$$Y_{crit} = \{y : \xi \in f(A_y, y)\}$$

a une dimension inférieure ou égale à m *dans* Y. [*on note que* Y_{crit} *est maigre si et seulement si* $co\dim Y_{crit} \geq 1$].

Terminons ce chapitre par le lemme suivant :

Lemme 2.5.6: *Soit* $h_0 \in Diff^4(\Omega)$*, il existe un voisinage* V_0 *de* h_0 *dans* $Diff^4(\Omega)$ *tel que , pour toute* $h \in V_0$ *et* $u \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)$,

$$\left\|(h^*\Delta^2 h^{*-1} - h_0^*\Delta^2 h_0^{*-1})u\right\|_{L^2(\Omega)} = \varepsilon(h)\left\|h_0^*\Delta^2 h_0^{*-1}u\right\|_{L^2(\Omega)}$$

avec $\varepsilon(h) \to 0$ *quand* $h \to h_0$ *dans* $C^4(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Preuve: Sans perdre de généralité, il suffit de considérer le cas $h_0 = i_\Omega$; on a :

$$h^* \frac{\partial}{\partial y_i} h^{*-1} u(x) = \frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ h^{-1})(h(x)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)(h_x^{-1})_{jh}(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$

où

$b_{ij}(x) = (h_x^{-1})_{jh}(x)$, $b_{ij}(x)$ la transposée de l'inverse de la matrice jacobienne de $h_x = (\frac{\partial h_i}{\partial x_i})_{i,j=1}^{n}$,alors:

et

$$\begin{aligned} h^* \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} h^{*-1} u(x) &= \sum_{r=1}^{n} b_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} (\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j=i}^{n} [\frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + b_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x)] \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} b_{ik}(x) b_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x) + \sum_{j,k=1}^{n} b_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned} h^* \frac{\partial^4}{\partial y_s^2 \partial y_i^2} h^{*-1} u(x) &= \frac{\partial}{\partial y_s} \frac{\partial^3}{\partial y_s \partial y_i^2}(u \circ h^{-1})(h(x)) \\ &= \sum_{r=1}^{n} b_{rs}(x) \frac{\partial}{\partial x_r} (\frac{\partial^3}{\partial y_s \partial y_i^2}(u \circ h^{-1})(h(x)) \\ &= \frac{\partial^4 u}{\partial x_s^2 \partial x_i^2}(x) + L_{si}^h(u)(x) \end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
L^h_{si}(u)(x) \;\; = \;\; & (b_{ss}(x)^2 b_{ii}(x)^2 - 1)\frac{\partial^4 u}{\partial x_s^2 \partial x_i^2}(x) + \\
& \sum_{r,l,j,k=1}^{n} (1 - \delta_{s,r,l}\delta_{i,j,k}) b_{sl}(x) b_{sr}(x) b_{ik}(x) b_{ij(x)} \frac{\partial^4 u}{\partial x_r \partial x_l \partial x_j \partial x_k}(x) \\
& + \sum_{r,l,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_r}[b_{sl}(x) b_{ik}(x) b_{ij}(x)] b_{sr}(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x_l \partial x_j \partial x_k}(x) \\
& + \sum_{r,l,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}[b_{ik}(x) b_{ij}(x)] b_{sr}(x) b_{sl}(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x_r \partial x_k \partial x_j}(x) \\
& + \sum_{r,l,j,k=1}^{n} b_{sr}(x) b_{sl}(x) b_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij}(x)) \frac{\partial^3 u}{\partial x_r \partial x_l \partial x_j}(x) \\
& + \sum_{r,l,j,k=1}^{n} b_{sr}(x) \frac{\partial}{\partial x_r}[\frac{\partial}{\partial x_l}(b_{ij}(x) b_{ik}(x)) b_{sl}(x)] \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x) \\
& + \sum_{r,l,j,k=1}^{n} b_{sr}(x) b_{sl}(x) \frac{\partial}{\partial x_l}(\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij}(x))) \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_j}(x) \\
& + \sum_{r,l,j,k=1}^{n} b_{sr}(x) \frac{\partial}{\partial x_r}[b_{sl}(x) b_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_r}(b_{ij}(x))] \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_j}(x) \\
& + \sum_{r,l,j,k=1}^{n} b_{sr}(x) \frac{\partial}{\partial x_r}[\frac{\partial}{\partial x_l}(b_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij}(x))) b_{sl}(x)] \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)
\end{aligned}
$$

alors

$$h^* \Delta^2 h^{*-1} u = \Delta^2 u + L^h u \tag{2.3}$$

avec

$$L^h u = \sum_{s,i=1}^{n} L^h_{is} u \tag{2.4}$$

puisque $b_{ij} \to \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } \; i \neq j \end{cases}$ dans $C^4(\Omega, \mathbb{R}^n)$ quand h tend vers i_Ω dans $C^4(\Omega, \mathbb{R}^n)$.Les coefficients de L^h converge vers 0 unifomément en x quand h tend vers i_Ω dans $C^4(\Omega, \mathbb{R}^n)$,donc :

$$\left\| L^h u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon(h) \left\| \Delta^2 u \right\|_{L^2(\Omega)}$$

avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand : h tend vers i_Ω dans $C^4(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Chapitre 3

Simplicité génériques des valeurs propres

Dans notre application l'espace topologique de Baire est la classe des régions C^m difféomorphe à une région fixé Ω_0 de classe C^m .

$$X = \{h(\Omega_0) : h \in Diff^m(\Omega_0)\}$$

On introduit une topologie dans X définie par une sous-base de voisinage de $\Omega \subset X$:

$$\{h : \|h - i_\Omega\|_{C^m(\Omega,\mathbb{R}^n)} < \varepsilon; \varepsilon > 0 \text{ suffisament petit}\}$$

Micheletti [3] a montré que cette topologie est métrisable, et l'ensemble des régions C^m difféomorphe à Ω est un espace métrique noté $M_m(\Omega)$.

Définition 3.1.1: Soit A une partie d'un espace topologique .On dit que A est résiduelle si elle contient l'intersection d'une famille dénombrables d'ouverts dense.

Définition 3.1.2 On appelle espace de Baire, l' espaces où toute partie résiduelle est dense .

Dans le but d'appliquer le théorème de transversalité , on se ramène à montrer que zéro est une valeur régulière d'une certaine application.

Proposition 3.1.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,un ouvert , connexe, borné de classe C^4 , $V(.)$ une fonction définie dans Ω de classe C^α et $h \in Diff^4(\Omega)$.*

Alors toutes les valeurs propres de (1.1) sont simples dans $h(\Omega)$ si et seulement si zéro est une valeur régulière de l'application:

$$\begin{aligned} \Phi_h \quad &: \quad H^4 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \to L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \\ \Phi_h(u, \lambda) \quad &= \quad \left(\left(h^*(\Delta^2 + V + \lambda\right) h^{*-1}u, h^*\Delta h^{*-1}u\,|_{\partial\Omega}\right) \end{aligned}$$

Preuve:

0 est une valeur régulière de Φ_h si et seulement si pour toute $(u, \lambda) \in H^4 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ avec $\Phi_h(u, \lambda) = 0$, $D\Phi_h(u, \lambda)$ est surjective où

$$D\Phi_h(u, \lambda)(\dot{u}, \dot{\lambda}) = \left(h^*(\Delta^2 + V + \lambda\right) h^{*-1}\dot{u} + \dot{\lambda}u, h^*\Delta h^{*-1}\dot{u}\,|_{\partial\Omega}).$$

On définit l'opérateur:

$$\begin{aligned} L_0 \quad &: \quad H^4 \cap H_0^1 \to L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \\ u \quad &\to \quad \left(\left(\Delta^2 + V + \lambda\right) u, \Delta u\,|_{\partial\Omega}\right) \end{aligned}$$

L'opérateur L_0 est un opérateur autoadjoint de Fredholm d'indice zéro .

Soit l'application:

$$\begin{aligned} \Pi \quad &: \quad L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \to L^2(\Omega) \\ \text{définie par :} \quad &\quad \Pi(u, \varphi) = u \end{aligned}$$

Π est une application linéaire .

Comme L_0 est un opérateur de Fredholm d'indice zéro alors:

$$\Pi[R(\Delta^2 + V + \lambda)] \oplus N((\Delta^2 + V + \lambda) = L^2(\Omega)$$

Alors ,$D\Phi_h$ est surjective si et seulement si :

$$\Pi[R(\Delta^2 + V + \lambda)] \oplus [u] = L^2(\Omega)$$

cette relation a lieu si et seulement si λ est une valeur propre simple de problème suivant :

$$\begin{cases} h^*(\Delta^2 + V + \lambda)h^{*-1}u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = h^*\Delta h^{*-1}u(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

On est conduit à montrer que le problème (1.1) dans $h(\Omega)$ est équivalent à (3.1).

Pour $h \in Diff^4(\Omega)$ et $u \in H^4 \cap H_0^1(\Omega)$,

$$h^*(\Delta^2+V+\lambda)h^{*-1}u(x) = 0 \quad x \in \Omega \Longrightarrow (\Delta^2+V+\lambda)h^{*-1}u(x) = 0 \quad x \in h(\Omega)$$

et

$$h^*\Delta h^{*-1}\ u(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega \qquad \Longrightarrow \Delta h^{*-1}u(x) = 0 \quad x \in \partial h(\Omega)$$

car h^* et h^{*-1} sont des isomorphismes [2]. Si on pose $v = h^{*-1}u$, on obtient

$$\begin{cases} (\Delta^2 + V + \lambda)v(x) = 0 & x \in h(\Omega) \\ u(x) = \Delta v(x) & x \in \partial h(\Omega) \end{cases}$$

Alors u solution de (3.1) si et seulement si $v = h^{*-1}u$ solution de (1.1) dans $h\,(\Omega)$.

On considère l'application:

$$\digamma : H^4 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \times Diff^4(\Omega) \to L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$$

définie par

$$\digamma(u, \lambda, h) = (h^*(\Delta^2 + V + \lambda)h^{*-1}u, h^*\Delta h^{*-1}u\,|_{\partial\Omega})$$

On remarque que 0 est une valeur régulière de l'application :

$$(u, \lambda) \longrightarrow F(u, \lambda, h) \tag{3.2}$$

Pour $h \in Diff^4(\Omega)$ si et seulement si $0 \in L^2(h(\Omega))$ est une valeur régulière de Φ_h.

Comme les deux problèmes (1.1) et (3.1) sont équivalents , nous avons par la proposition 3.1.3 que toutes les valeurs propres de (1.1) sont génériquement simples dans $h(\Omega)$ si et seulement si $0 \in L^2(\Omega)$ est une valeur régulière de F pour tout de $h \in Diff^4(\Omega)$.

On considère l'application suivante:

$$H : H^4 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \times Diff^4(\Omega) \to L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{\frac{5}{2}}(\partial\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$$

définie par

$$\begin{aligned} H(u, v, \lambda, h) &= (h^* \left(\Delta^2 + V + \lambda\right) h^{*-1} u, h^* \Delta h^{*-1} u \,|_{\partial\Omega} , h^* \left(\Delta^2 + V + \lambda\right) h^{*-1} v, h^* \Delta h^{*-1} v \,|_{\partial\Omega} \\ &\quad , h^* \frac{\partial^2}{\partial^2 N} u h^* \frac{\partial^2 \Delta}{\partial N^2} h^{*-1} v) \end{aligned}$$

On a besoin du lemme suivant .

Lemme 3.1.4: *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,$n \geq 2$ un ouvert ,connexe,borné de classe C^6 et $M \in \mathbb{N}$.Alors il existe un sous ensemble ouvert dense $O_M \subset Diff^6(\Omega)$,tel que pour tout $h \in O_M$.*

Si $w \in H^5(h(\Omega))$ avec $\|w\| \leq M$ vérifiant

$$\begin{cases} \left(\Delta^2 + V(x) + \lambda\right) w(x) = 0 & x \in h(\Omega) \\ w(x) = \frac{\partial^2}{\partial N^2} w(x) = \Delta w(x) = 0 & x \in \partial h(\Omega) \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \left(\Delta^2 + V(x) + \lambda\right) w(x) = 0 & x \in h(\Omega) \\ w(x) = \Delta w(x) = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial N^2} w(x) = 0 & x \in \partial h(\Omega) \end{cases}$$

pour un certain $\lambda \in [-M, 0]$.

Alors w est identiquement nulle.

preuve:

Il suffit de considérer les applications suivantes:

$$K : B_M \times [-M,0] \times Diff^5(\Omega) \to L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$$
$$(u,\lambda,h) \to h^*\left(\Delta^2 + V + \lambda\right) h^{*-1}u, h^*\Delta h^{*-1}u\mid_{\partial\Omega}, h^*\tfrac{\partial^2}{\partial^2 N} h^{*-1}u$$

et

$$G : C_M \times [-M,0] \times Diff^6(\Omega) \to H^1(\Omega) \times H^{\frac{5}{2}}(\partial\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$$
$$(v,\lambda,h) \to \Big(h^*\left(\Delta^2 + V + \lambda\right) h^{*-1}v, h^*\Delta h^{*-1}v\mid_{\partial\Omega}, h^*\tfrac{\partial^2\Delta}{\partial N^2} h^{*-1}v\Big)$$

où

$$B_M = \{u \in H^4 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\} \,/\, \|u\| \le M\},$$

et

$$C_M = \{u \in H^5 \cap H_0^1 - \{0\} \,/\, \|u\| \le M\}.$$

et on applique le théorème de transversalité, voir [11,lemme 5.3]

Lemme 3.1.5: *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n; n \ge 2$ un ouvert ,connexe ,borné de classe C^6 et $M \in \mathbb{N}$.*

On considère l' application suivante :

$H : B_M \times C_M \times [-M,0] \times O_M \to L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{\frac{5}{2}}(\partial\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$

définie par

$$\begin{aligned} H(u,v,\lambda,h) &= (h^*\left(\Delta^2 + V + \lambda\right) h^{*-1}u, h^*\Delta h^{*-1}u\mid_{\partial\Omega}, h^*\left(\Delta^2 + V + \lambda\right) h^{*-1}v, h^*\Delta h^{*-1}v\mid_{\partial\Omega} \\ &\quad , h^*\frac{\partial^2}{\partial^2 N} u h^*\frac{\partial^2\Delta}{\partial N^2} h^{*-1}v) \end{aligned}$$

où

$$B_M = u \in H^4 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\}/\, \|u\| \le M\} \quad ;$$
$$C_M = \{v \in H^5 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\} \,/\, \|v\| \le M\} \;;$$

et O_M l'ouvert donné dans le lemme précedent.

Alors

$$Q_M = \Big\{h \in Diff^6(\Omega)/\,(0,0,0,0,0) \in H\left(B_M \times C_M \times [-M,0], h\right)\Big\}$$

est un sous ensemble maigre fermé dans $Diff^6(\Omega)$.

Preuve : Pour montrer que l'ensemble Q_M , est une ensemble maigre et fermé , on utilise le théorème de transversalité .

Premièrement ,vérifions l'hypothèse (3) , on va montrer que l'application:

$$\begin{array}{rcl} (u, \lambda, h) & \rightarrow & h \\ H^{-1}(0,0,0,0,0) & \rightarrow & Diff^6(\Omega) \end{array}$$

est une application propre , cette hypothèse prouve que l'ensemble Q_M est fermé .

Soit $\{(u_n, \lambda_n, h_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in H^{-1}(0,0,0,0,0)$,avec h_n tend vers $h_0 = i_\Omega$.

Puisque $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_M$ et $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [-M, 0]$,alors par compacité ,il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\lambda \in [-M, 0]$ tels que :

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ et } \lambda_n \rightarrow \lambda \text{ dans } [-M, 0]$$

au cours de la démonstration du lemme(2.5.6) on a trouvé la relation (2.4) suivante

$$h^*\Delta^2 h^{*-1}u = \Delta^2 u + L^h u \qquad \text{pour tout } h \in Diff^6(\Omega)$$

où L^h défini par (2.5).

Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega v\left\{h_n^*(\Delta^2 + V + \lambda_n)h_n^{*-1}\right\} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega v\left\{(\Delta^2 + V + \lambda_n)u_n + L^{h_n}u_n\right\} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\int_\Omega v\Delta^2 u_n + \int_\Omega v\left\{(V + \lambda_n)\, u_n + L^{h_n}u_n\right\}\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\int_\Omega \Delta v\Delta u_n + \int_\Omega v\left\{(V + \lambda_n)\, u_n + L^{h_n}u_n\right\}\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\int_\Omega \Delta v\Delta u_n + \int_\Omega v(V + \lambda_n)u_n + \int_\Omega vL^{h_n}u_n\right] \end{aligned}$$

puisque $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$,et $\lambda_n \to \lambda$ dans $[-M, 0]$, et $h_n \to i_\Omega$ dans $Diff^6(\Omega)$ on a les majorations suivantes:

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \Delta v.\Delta u_n \right| &\leq \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta u_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq k \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

k une constante, positive.

D'aprés l'inégalité de Hölder et le fait que $V \in C^\alpha(\Omega)$,nous avons

$$\begin{aligned} |v(V+\lambda_n)u_n| &\leq c\|v\|_{L^2(\Omega)} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c\|v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

et

$$\left| \int_\Omega v L^{h_n} u_n \right| \leq M\varepsilon(h_n) \|v\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

d'aprés l'équation (2.4) ; on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(h_n) = 0$

donc

$$0 = \int_\Omega \Delta u \Delta v + \int_\Omega (V+\lambda) v u$$

alors u est une solution faible du problème (1.1) , d'aprés la théorie de régularité des équations elliptiques u est une solution forte du même problème

Maintenant , on va monter que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $H^4 \cap H_0^1(\Omega)$ vers $u \in H^4 \cap H_0^1(\Omega)$.

En effet $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 &= h_n^*(\Delta^2 + V + \lambda_n) h_n^{*-1} u_n - h_m^*(\Delta^2 + V + \lambda_m) h_m^{*-1} u_m \\ &= (\Delta^2 + V + \lambda_n) u_n + L^{h_n} u_n - (\Delta^2 + V + \lambda_m) u_m + L^{h_m} u_m \\ &= \Delta^2(u_n - u_m) + (V+\lambda_n)(u_n - u_m) + u_m(\lambda_n - \lambda_m) + L^{h_n}(u_n - u_m) + u_m(L^{h_n} - L^{h_m}) \end{aligned}$$

$$= \Delta^2(u_n - u_m) + (V+\lambda_n)(u_n - u_m) + u_m(\lambda_n - \lambda_m) + L^{h_n}(u_n - u_m) + u_m(L^{h_n} - L^{h_m})$$

$$\left\|\Delta^2(u_n-u_m)\right\|_{L^2(\Omega)}=\left\|(V+\lambda_n)(u_n-u_m)+u_m(\lambda_n-\lambda_m)+L^{h_n}(u_n-u_m)+u_m(L^{h_n}-L^{h_m})\right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\begin{aligned}\left\|\Delta^2(u_n-u_m)\right\|_{L^2(\Omega)} &= \left\|(V+\lambda_n)(u_n-u_m)+u_m(\lambda_n-\lambda_m)+L^{h_n}(u_n-u_m)+u_m(L^{h_n}-L^{h_m})\right\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \left\|(V+\lambda_n)(u_n-u_m)\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|u_m(\lambda_n-\lambda_m)\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|L^{h_n}(u_n-u_m)\right\|_{L^2(\Omega)}\\ &\quad+\left\|u_m(L^{h_n}-L^{h_m})\right\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

comme la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B$ alors par compacité

$$u_n\to u \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega)$$

de même

$$\lambda_n\to\lambda \quad \text{dans} \quad [-M,0]$$

et

$$h_n\to i_\Omega \quad \text{dans} \quad C^5(\Omega,\mathbb{R}^n) \quad \text{quand} \quad n\to+\infty$$

de plus on a $V(.)\subset C^\alpha(\Omega)$; $(\alpha\geq 0)$ et :

$$\left\|L^h u\right\|_{L^2(\Omega)}\leq\varepsilon(h)\left\|u\right\|_{H^4\cap H_0^1(\Omega)} \quad \text{avec} \lim_{h\to i_\Omega}\varepsilon(h)=0$$

donc

$$\left\|\Delta^2(u_n-u_m)\right\|_{L^2(\Omega)}\to 0 \text{ quand } n,m\to+\infty \tag{3.3}$$

et de plus

$$\Delta^2: H^4\cap H_0^1(\Omega)\to L^2(\Omega) \qquad \text{est un isomorphisme}$$

alors il existe $c_0>0$ tel que :

$$\left\|\Delta^2(u_n-u_m)\right\|_{L^2(\Omega)}\geq c_0\left\|u_n-u_m\right\|_{H^4\cap H_0^1(\Omega)}$$

par suite et d' aprés (3.3)

$$\left\|u_n-u_m\right\|_{H^4\cap H_0^1(\Omega)}\to 0 \quad n,m\to+\infty$$

par conséquent $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $H^4\cap H_0^1(\Omega)$ vers $u\in H^4\cap H_0^1(\Omega)$, on conclut que l'application:

$$\begin{array}{rcl}(u,\lambda,h) & \to & h\\ H^{-1}(0,0,0,0,0) & \to & Diff^6(\Omega) \quad \text{est propre}\end{array}$$

alors Q_M est un ensemble fermé dans $Diff^6(\Omega)$.

Soit $(u, v, \lambda, h) \in H^{-1}(0, 0, 0, 0, 0)$,on suppose que $h = i_\Omega$.

La dérivée partielle

$\frac{\partial H}{\partial(u,v,\lambda)}(u, v, \lambda, i_\Omega)$:$H^4 \cap H_0^1(\Omega) \times H^5 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \to L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{\frac{5}{2}}(\partial\Omega)$

donnée par

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial H}{\partial(u, v, \lambda)})(u, v, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{v}, \dot{\lambda}) &= (\frac{\partial H_1}{\partial(u, \lambda)}(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}), \frac{\partial H_2}{\partial(u, \lambda)}(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}) \\
&\quad , \frac{\partial H_3}{\partial(v, \lambda)}(v, \lambda, i_\Omega)(\dot{v}, \dot{\lambda}), , \frac{\partial H_4}{\partial(v, \lambda)}(v, \lambda, i_\Omega)(\dot{v}, \dot{\lambda}) \\
&\quad , \frac{\partial H_5}{\partial(u, v)}(u, v)(\dot{u}, \dot{v}))
\end{aligned}$$

par un simple calcul , on trouve:

$$\begin{aligned}
&= ((\Delta^2 + V + \lambda)\dot{u} + \dot{\lambda}u, \Delta\dot{u}\,|_{\partial\Omega}, (\Delta^2 + V + \lambda)\dot{v} + \dot{\lambda}v, \Delta\dot{v}\,|_{\partial\Omega} \\
&\quad , \frac{\partial^2\dot{u}}{\partial N^2}\frac{\partial^2\Delta v}{\partial N^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}\frac{\partial^2\Delta\dot{v}}{\partial N^2}).
\end{aligned}$$

La dérivée de la fonction H, on utilise le théorème 2.1.4:

$$\begin{aligned}
DH(u, v, \lambda, i_\Omega)(.) &= (DH_1(u, \lambda, i_\Omega)(.), DH_2(u, i_\Omega), DH_3(v, \lambda, i_\Omega)(.), DH_4(v, i_\Omega), \\
&\quad DH_5(u, v, i_\Omega)(.))
\end{aligned}$$

où

$$DH_1(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) = (\Delta^2 + V + \lambda)(\dot{u} - \dot{h}.\nabla u) + \dot{\lambda}u.$$

et

$$DH_2(u, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{h}) = \Delta(\dot{u} - \dot{h}.\nabla u)\,|_{\partial\Omega}.$$

de même

$$DH_3(v, \lambda, i_\Omega)(\dot{v}, \dot{\lambda}, \dot{h}) = (\Delta^2 + V + \lambda)(\dot{v} - \dot{h}.\nabla v) + \dot{\lambda}v$$

et

$$DH_4(v, i_\Omega)(\dot{v}, \dot{h}) = \Delta(\dot{v} - \dot{h}.\nabla v)\,|_{\partial\Omega}\,.$$

d'aprés le théorème 2.1.7:

$$\begin{aligned} DH_5(u, v, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{v}, \dot{h}) &= \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial N^2}(\dot{v} - \dot{h}.\nabla v) + \nabla(\frac{\partial \Delta v}{\partial N})\dot{N} + \nabla(\frac{\partial \Delta v}{\partial N}N.\dot{N}).N + \dot{h}.\nabla(\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2})] \\ &\quad + \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2}[\frac{\partial^2}{\partial N^2}(\dot{u} - \dot{h}.\nabla v) + \nabla(\frac{\partial u}{\partial N}).\dot{N} + \nabla(\frac{\partial u}{\partial N}).\dot{N} + \nabla(\frac{\partial u}{\partial N}N.\dot{N}).N \\ &\quad + \dot{h}.\nabla(\frac{\partial^2 u}{\partial N^2})] \end{aligned}$$

avec $\quad \dot{N} = -\nabla_{\partial\Omega}(\dot{h}.N).$

Soit l'opérateur :

$$T_1 = \frac{\partial H_1}{\partial(u, \lambda)}(u, \lambda, i_\Omega) : H^4 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \to L^2(\Omega).$$

pour montrer l'hypothèse (1) du théorème de transversalité on montre que T_1 est un opérateur de Fredholm,on remarque premièrment que la codimension de l'image de T_1est fini et $R(T_1)$ est fermé dans $L^2(\Omega)$.

En effet :

$T_1 \Big|_{\{(\dot{u},0)/\dot{u}\in H^4\cap H_0^1(\Omega)\}}$ coïncide avec l'opérateur de Fredholm d'indice zéro :

$$L_0 = \left(\Delta^2 + V + \lambda\right) : H^4 \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega).$$

si

$$T_1\left(\dot{u}, \dot{\lambda}\right) = 0 \iff \left(\Delta^2 + V + \lambda\right)\dot{u} + \dot{\lambda}u = 0$$

$(\dot{u}, \dot{\lambda}) \subset N(T_1)$
on a

$$0 = \int_\Omega u\left\{\left(\Delta^2 + V + \lambda\right)\dot{u} + \dot{\lambda}u\right\}$$

ainsi

$$0 = \int_\Omega u\Delta^2 \dot{u} + \int_\Omega u\,(V+\lambda)\,\dot{u} + \dot{\lambda}u^2$$

par conséquent

$$0 = \int_\Omega \dot{u}\left(\Delta^2 + V + \lambda\right) u + \dot{\lambda}u^2$$

d'où

$$0 = \int_\Omega \dot{\lambda}u^2$$

$\dot{\lambda} = 0 \quad$ alors

$$\left(\Delta^2 + V + \lambda\right)\dot{u} = 0 \Longrightarrow \dot{u} \in N\left(\Delta^2 + V + \lambda\right)$$

$N(T_1) = \{(\dot{u}, 0)\,/\dot{u} \in N\left(\Delta^2 + V + \lambda\right)\}$ est un sous ensemble de dimension fini , on peut conclure que T_1 est un opérateur de Fredholm.

Maintenant on montre (2β) ,on montre que:

$$\dim\left\{\frac{R(DH(u,v,\lambda,h))}{R\left(\frac{\partial H}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,h)\right)}\right\} = \infty$$

pour toute $(u,v,\lambda,h) \in H^{-1}(0,0,0,0,0)$.

On suppose que ceci n'est pas vraie pour toute $(u,v,\lambda,h) \in H^{-1}(0,0,0,0,0)$.

Par un changement d'origine on suppose que $h = i_\Omega$,alors il existe $\theta_1,\theta_2,...,\theta_m \in L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{\frac{5}{2}}(\partial\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ tel que pour toute $\dot{h} \in C^6(\Omega,\mathbb{R}^n)$ il existe $\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda} \in H^4 \cap H_0^1(\Omega) \times H^5 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ et $\dot{z},\dot{w},\dot{\mu} \in H^5 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$;

tel que :

$$DH(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda}) = \sum_{j=1}^{m} c_j\theta_j + \frac{\partial H}{\partial(u,v,\lambda,h)}(u,v,\lambda,i_\Omega,)(\dot{z},\dot{w},\dot{\mu})$$

alors

$$DH(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda}) - \frac{\partial H}{\partial(u,v,\lambda,h)}(u,v,\lambda,i_\Omega,)(\dot{z},\dot{w},\dot{\mu}) = \sum_{j=1}^{m} c_j\theta_j$$

or DH est donnée en fonction de $\frac{\partial H}{\partial(u,v,\lambda,h)}$ donc

$$DH(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot{u}-\dot{z},\dot{v}-\dot{w},\dot{\lambda}-\dot{\mu},i_\Omega) = \sum_{j=1}^{m} c_j\theta_j \qquad \theta_j = (\theta_j^1,\theta_j^2,\theta_j^3,\theta_j^4,\theta_j^5)$$

Comme $\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda},\dot{z},\dot{w},\dot{\mu}$ sont choisis arbitrairement, en particulier pour toute $\dot{h} \in C^6(\Omega,\mathbb{R}^n)$,il existe $\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda} \in H^4 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ et des scalaires $c_1, c_2, ..., c_m$ tel que :

$$DH(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda},\dot{h}) = \sum_{j=1}^{m} c_j\theta_j$$

c'est à dire

$$(\Delta^2 + V + \lambda)(\dot{u} - \dot{h}.\nabla u) + \dot{\lambda}u = \sum_{j=1}^{m} c_j\theta_j^1 \tag{3.4}$$

et

$$\Delta(\dot{u} - \dot{h}.\nabla u)\,|_{\partial\Omega} = \sum_{j=1}^{m} c_j\theta_j^2 \tag{3.5}$$

de même

$$(\Delta^2 + V + \lambda)(\dot{v} - \dot{h}.\nabla v) + \dot{\lambda}v = \sum_{j=1}^{m} c_j\theta_j^3 \tag{3.6}$$

et

$$\Delta(\dot{v} - \dot{h}.\nabla v)\,|_{\partial\Omega} = \sum_{j=1}^{m} c_j\theta_j^4 \tag{3.7}$$

Enfin

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \theta_j^5 = \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial N^2}(\dot{v} - \dot{h}.\nabla v) + \nabla(\frac{\partial \Delta v}{\partial N}).\dot{N} + \nabla(\frac{\partial \Delta v}{\partial N}N.\dot{N}) \quad (3.8)$$
$$+\dot{h}.\nabla(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial N^2})] + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial N^2}[\frac{\partial^2}{\partial N^2}(\dot{u} - \dot{h}.\nabla u) + \nabla(\frac{\partial u}{\partial N}).\dot{N} +$$
$$\nabla(\frac{\partial u}{\partial N}N.\dot{N}).N + \dot{h}.\nabla(\frac{\partial^2 u}{\partial N^2})]$$

On définit l'opérateur L_0 par :

$$\begin{array}{ccl} L_0 & : & H^4 \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \\ u & \to & ((\Delta^2 + V + \lambda)u, \Delta u\,|_{\partial\Omega}) \end{array}$$

et l'opérateur :

$$A_{L_0} : L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \to H^4 \cap H_0^1(\Omega)$$

défini par:

$$w = A_{L_0}(z, g)$$

où $(\Delta^2 + V + \lambda)w - z \in N(L_0)$ avec $w \perp N(L_0)$ dans $L^2(\Omega)$,et $\Delta w = g$ sur $\partial\Omega$. Cet opérateur est bien défini .

En effet :

comme L_0 est un opérateur auto-adjoint de Fredholm d'indice zéro on a :

$$R(L_0) \oplus N(L_0) = L^2(\Omega)$$

donc pour tout

$$t = w_1 + w_2 \quad \text{pour tout } t \in L^2(\Omega)$$

avec $w_1 \in R(L_0)$, et $w_2 \in N(L_0)$, il existe une unique solution $w \in H^4 \cap H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(\Delta^2 + V + \lambda)w = w_1 \quad \text{avec} \quad w \perp N(L_0)$$

Soit J un sous ensemble ouvert défini par:

$$J = \{x \in \partial\Omega / \quad H(x) \neq 0\} \text{ un sous ensemble du } \partial\Omega$$

où H est la courbure moyenne du $\partial\Omega$.

Comme le bord est une variété compacte de $\mathbb{R}^n$;J ne peut pas être vide [14, théorème 2].

D'aprés le relation 3 du théorème 1.1.2 on a:

$$0 = \Delta_{\partial\Omega}(\Delta v) = \Delta(\Delta v) - H\frac{\partial \Delta v}{\partial N} - \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2}$$

or v est une solution du problème (1.1) donc:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda v - H\frac{\partial \Delta v}{\partial N} - \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2} \\ &= -\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2} \end{aligned}$$

$$0 \equiv \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2} \qquad \text{sur } \partial\Omega / J$$

d'aprés le lemme(3.1.4), il existe un ensemble ouvert non vide$\widetilde{J} \subset J$ tel que $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2}(x) \neq 0$ pour toute $x \in \widetilde{J}$,puisque $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2}\frac{\partial^2 u}{\partial N^2} \equiv 0$ sur $\partial\Omega$ on a forcément $\frac{\partial^2 u}{\partial N^2} \equiv 0$ sur $\widetilde{J}$.

On utilise l'égalité 3 le théorème 1.1.2 on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_{\partial\Omega} u = \Delta u - H\frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} \\ &= -H\frac{\partial u}{\partial N} \ \text{ sur } \widetilde{J} \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial u}{\partial N} \equiv 0 \quad \text{sur } \widetilde{J} \quad \text{car} \quad H \neq 0 \ \text{ sur } \widetilde{J}$$

si $\dot{u} \in H^4 \cap H_0^1(\Omega)$ et $\dot{h} \equiv 0$ sur $\partial\Omega/\widetilde{J}$ on obtient :

$$\dot{u} - \dot{h}.\nabla u = -\dot{h}N\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

car $u \in H_0^1(\Omega)$ implique que $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial N}N$,d'une part

$$\dot{u} - \dot{h}.\nabla u \in H^4 \cap H_0^1(\Omega)$$

d'autre part , il existe une unique solution α de

$$(\Delta^2 + V + \lambda)\alpha - \sum_{j=1}^{m} \zeta_i u_i \in N(L_0) \quad \text{avec } \alpha \perp N(L_0) \tag{3.9}$$

alors

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} c_j A_{L_0}(\theta_j^i) \qquad \text{pour} \quad i = \overline{1,5}$$

La résolution de l'equation (3.4) est la même que l'equation (3.9)alors

$$\dot{u} - \dot{h}.\nabla u - \alpha \in N(L_0)$$

donc pour $\{u_1, u_2, ..., u_3\}$ une base de $N(L_0)$; est un choix de $\dot{h} \equiv 0$ sur $\partial\Omega/\widetilde{J}$ on a :

$$\dot{u} - \dot{h}.\nabla u = \sum_{j=1}^{m} \zeta_i u_i + \sum_{j=1}^{m} c_j A_{L_0}(\theta_i^1, \theta_j^2) \tag{3.10}$$

On substitue (3.10) dans (3.8) on utilise le fait que $\frac{\partial^2 u}{\partial N^2} \equiv 0$ sur $\widetilde{J}$, on trouve :

$$\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2} \left[\nabla \left(\frac{\partial u}{\partial N} \right) .\dot{N} + \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial N} N.\dot{N} \right) .N + \dot{h}.\nabla \left(\frac{\partial^2 u}{\partial N^2} \right) \right] |_{\widetilde{J}} = \sum_{j=1}^{m} c_j \theta_j^5 \tag{3.11}$$

or $u \in H_0^1(\partial\Omega)$ implique que $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial N} N$, alors l'équation (3.11) devienne

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \theta_j^5 = \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial N^2} N.\dot{N} + \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} N.\dot{N} + \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} \nabla(N.\dot{N})N + \dot{h}.N \frac{\partial^3 u}{\partial N^3} \right] |_{\widetilde{J}}$$

alors

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \theta_j^5 = \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2} \frac{\partial^3 u}{\partial N^3} \dot{h}.N \, |_{\widetilde{J}}$$

appartient a un sous espace de dimension finie de $L^1(\partial\Omega)$ pour toute $\dot{h} \in C^6(\Omega, \mathbb{R}^n)$ vérifiant $\dot{h} = 0$ sur $\partial\Omega/\widetilde{J}$, puisque $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2}(x) \neq 0$ pour $x \in \widetilde{J}$,ceci est possible seulement dans le cas ou $\dim \Omega \geq 2$.

Si $\frac{\partial^3 u}{\partial N^3} \equiv 0$ sur $\widetilde{J}$ alors u satisfait:

$$\begin{cases} (\Delta^2 + V + \lambda)u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial N^3} = 0 & \text{sur } \widetilde{J} \end{cases} \tag{3.12}$$

u vérifie les hypothèses du théorème d'unicité de Cauchy , alors $u \equiv 0$ sur Ω ce qui est une contradiction.

Par conséquent et d'aprés le théorème de transversalité ,Q_M est un ensemble maigre et fermé.

Enfin le théorème suivant qui montre la simplicité générique des valeurs propres du problème (1.1).

3.1 Théorème

Soit Ω un ensemble ouvert ,connexe, borné de classe C^4 de $\mathbb{R}^n$ tel que $n \geq 2$.

Alors toutes les valeurs propres du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique (1.1) sont génériquement simples.

Preuve: On considère l' application différentiable suivante:

$$F : B_M \times [-M, 0] \times \Lambda_M \to L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$$

définie par :

$$(u, \lambda, h) \to \left(h^* \left(\Delta^2 + \lambda\right) h^{*-1} u, h^* \Delta h^{*-1} u \,|_{\partial\Omega}\right)$$

où

$$B_M = \left\{u \in H^4 \cap H_0^1(\Omega)\text{-}\{0\} \,/\, \|u\| \leq M\right\}$$

Soit $\Lambda_M = O_M/Q_M$; tel que O_M est un ensemble ouvert dense donné par le lemme 3.1.4 ,et Q_M est l'ensemble maigre fermé du lemme 3.1.5.

On remarque que Λ_M est un ensemble ouvert dense dans $Diff^4(\Omega)$.

On suppose que le domaine est régulier de classe C^6.

A travers le théoreme de transversalité on va montrer que l'ensemble :

$$\{h \in \Lambda_M / (u, \lambda) \to F(u, \lambda, h) \text{ a zéro comme valeur régulière}\}$$

est un ensemble ouvert dense de Λ_M.

La vérification des hypothèses (1) et (3) du théorème de transversalité est similaire à celle du lemme 3.1.5., il nous reste à montrer (2α)

Sans perdre de généralité on change l'origine,on suppose que $h = i_\Omega$.

Raisonnement par l'absurde,on suppose qu'il existe un point critique $(u, \lambda, h) \in F^{-1}(0,0)$,donc il existe $(v, \theta) \in L^2(\Omega) \times H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ tel que :

$$\left\langle DF(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}), (v, \theta)\right\rangle = 0 \text{ pour toute } (\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) \in H^4 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \times C^6(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

où

$$DF(u, \lambda, i_\Omega) : H^4 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \times C^6(\Omega, \mathbb{R}^n) \to L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega).$$

on utilise le théorème 2.1.4 , la dérivée de F est:

$$DF\left(u,\lambda,i_{\Omega}\right)(\dot{u},\dot{\lambda},\dot{h})=\left(\left(\Delta^{2}+V+\lambda\right)(\dot{u}-\dot{h}\nabla u)+\dot{\lambda}u,\Delta(\dot{u}-\dot{h}\nabla u)\,|_{\partial\Omega}\right).$$

c'est à dire

$$0=\int_{\Omega}v\left[\left(\Delta^{2}+V+\lambda\right)(\dot{u}-\dot{h}\nabla u)+\dot{\lambda}u\right]+\int_{\partial\Omega}\theta\Delta(\dot{u}-\dot{h}\nabla u)\qquad(3.13)$$

avec $\langle .,.\rangle_{\partial\Omega}$ indique le crochet de dualité de $H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$.

Si $\dot{h}=\dot{\lambda}=0$ dans (3.13) on a :

$$0=\int_{\Omega}v\left(\Delta^{2}+V+\lambda\right)\dot{u}+\int_{\partial\Omega}\theta\Delta\left(\dot{u}\right)\qquad\forall\dot{u}\in H^{4}\cap H_{0}^{1}\left(\Omega\right)\qquad(3.14)$$

donc

$$0=\int_{\Omega}v\Delta^{2}\dot{u}+(V+\lambda)v\dot{u}+\int_{\partial\Omega}\theta\Delta\left(\dot{u}\right)\qquad\forall\dot{u}\in H^{4}\cap H_{0}^{1}\left(\Omega\right)$$

aprés intégration par parties on obtient:

$$\int_{\Omega}\dot{u}\left(\Delta^{2}+V+\lambda\right)v+\int_{\partial\Omega}\dot{u}\Delta(\ \theta)\qquad\forall\dot{u}\in H^{4}\cap H_{0}^{1}\left(\Omega\right)$$

donc v est une solution faible du problème :

$$\begin{cases}\quad\left(\Delta^{2}+V+\lambda\right)v(x)=0 & x\in\Omega\\ v(x)=\Delta v(x)=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

or $\Omega\subset\mathbb{R}^{n}$ est régulier de classe C^{6} ,d'aprés le théorème de régularité des équations uniformément elliptique $v\in H^{5}\left(\Omega\right)\cap C^{4,\alpha}\left(\partial\Omega\right)$,pour $0<\alpha<1$ avec $\langle\theta,g\rangle_{\partial\Omega}=\int_{\partial\Omega}g\frac{\partial v}{\partial N}$ pour toute $g\in H^{\frac{3}{2}}\left(\partial\Omega\right)$.

Si $\dot{h}=\dot{u}=0$ et $\dot{\lambda}$ varie on obtient de la relation (3.13)

$$0 = \int_{\Omega} v\dot{\lambda}u \qquad \forall\dot{\lambda} \in \mathbb{R}$$

$$0 = \int_{\Omega} vu$$

Si $\dot{u} = \dot{\lambda} = 0$ et $\dot{h}$ varie dans $C^6(\Omega, \mathbb{R}^n)$,on obtient d'aprés la relation (3.13)

$$0 = \int_{\Omega} -v\left(\Delta^2 + V + \lambda\right)(\dot{h}\nabla u) - \left\langle \theta, \Delta(\dot{h}\nabla u)\right\rangle_{\partial\Omega}.$$

puisque v est une solution alors

$$0 = \int_{\Omega}(\dot{h}\nabla u)\left(\Delta^2 + V + \lambda\right)v - v\left(\Delta^2 + V + \lambda\right)\ (\dot{h}\nabla u) - \left\langle \theta, \Delta(\dot{h}\nabla u)\right\rangle_{\partial\Omega}$$

donc

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \int_{\Omega}(\dot{h}\nabla u)(\Delta^2 u) + \int_{\Omega}(\dot{h}\nabla u)Vv + \int_{\Omega}(\dot{h}\nabla u)\lambda v - \int_{\Omega} v\Delta^2(\dot{h}\nabla u) \\ &\quad - \int_{\Omega} vV\left(\dot{h}\nabla u\right) - \int_{\Omega} v\lambda\left(\dot{h}\nabla u\right) - \left\langle \theta, \Delta(\dot{h}\nabla u)\right\rangle_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

d'aprés l'identité de l'opérateur biharmonique (2.1)

$$0 = \int_{\partial\Omega}\left[(\dot{h}\nabla u)\frac{\partial\Delta v}{\partial N} - \Delta v\frac{\partial}{\partial N}(\dot{h}\nabla u) - v\frac{\partial\Delta v}{\partial N}(\dot{h}\nabla u) + \Delta(\dot{h}\nabla u)\frac{\partial v}{\partial N}\right] - \int_{\partial\Omega}\Delta(\dot{h}\nabla u)\frac{\partial v}{\partial N}.$$

or v est une solution de problème (1.1) ,donc notre formule devienne :

$$0 = \int_{\partial\Omega}\left[(\dot{h}\nabla u)\frac{\partial\Delta v}{\partial N} + \Delta(\dot{h}\nabla u)\frac{\partial v}{\partial N}\right] - \int_{\partial\Omega}\Delta(\dot{h}\nabla u)\frac{\partial v}{\partial N}.$$

de sorte que

$$0 = \int_{\partial\Omega}(\dot{h}\nabla u)\frac{\partial\Delta v}{\partial N}$$

or $u \in H^4 \cap H_0^1(\Omega)$ ie $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial N}.N$, ainsi

$$0 = \int_{\partial\Omega} \dot{h}N \frac{\partial u}{\partial N}\frac{\partial \Delta v}{\partial N}; \qquad \forall \dot{h} \in C^6(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

on conclut que

$$\frac{\partial u}{\partial N}\frac{\partial \Delta V}{\partial N} \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

d'aprés l'equation 3 du Théorème 1.1.2 ,on trouve:

$$0 = \Delta_{\partial\Omega} = \Delta u - H\frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}$$

comme u est une solution de (1.1) , on obtient

$$0 = -H\frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} \quad \text{sur} \ \ \partial\Omega.$$

On multiplie cette relation par $\frac{\partial \Delta v}{\partial N}$ on a

$$0 = -H\frac{\partial u}{\partial N}\frac{\partial \Delta v}{\partial N} - \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}\frac{\partial \Delta v}{\partial N}$$

or $\frac{\partial u}{\partial N}\frac{\partial \Delta V}{\partial N} \equiv 0$ sur $\partial\Omega$ alors:

$$0 \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}\frac{\partial \Delta v}{\partial N} \quad \text{sur} \ \ \partial\Omega \tag{3.15}$$

d'aprés l'équation 3 du théorème 1.1.2 on trouve:

$$0 = \Delta_{\partial\Omega}(\Delta v) = \Delta(\Delta v) - H\frac{\partial \Delta v}{\partial N} - \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2}.$$

le fait que v est une solution, la dernière relation devienne

$$0 = -(V + \lambda)v - H\frac{\partial \Delta v}{\partial N} - \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2}..$$

On multiplie la dernière relation par $\frac{\partial^2 u}{\partial N^2}$ et d'aprés la relation (3.15)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial N^2}\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2} \equiv 0 \text{ sur } \ \partial\Omega \tag{3.16}$$

On suppose qu 'il existe un point x_0 sur le quel $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2} \neq 0$, alors il existe un voisinage ouvert Ω_0 de x_0 tel que $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2} \neq 0$,or on a la propriété $\frac{\partial^2 u}{\partial N^2} \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2} \equiv 0$ sur $\partial\Omega$,donc $\frac{\partial^2 u}{\partial N^2} = 0$ sur Ω_0,le fait que u solution du problème (1.1) vérifiée

$$\begin{cases} (\Delta^2 + V + \lambda)\, u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = \Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} = 0 & x \in \partial\Omega \cap \Omega_0 \end{cases}$$

d'aprés l'unicité de la solution d'un probleme de Cauchy $u \equiv 0$ sur Ω , contradiction avec notre hypothèse que $u \in H^4 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\}$.

De même ,on suppose qu'il existe x_1,tel que $\frac{\partial^2 u}{\partial N^2}(x_1) \neq 0$,d'aprés (3.14) $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2} = 0$ sur Ω_1, par suite v satisfait le probème suivant :

$$\begin{cases} (\Delta^2 + V + \lambda)\, v(x) = 0 & x \in \Omega \\ v(x) = \Delta v(x) = \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial N^2} = 0 & x \in \partial\Omega \cap \Omega_1 \end{cases}$$

d'aprés l'unicite de la solution d'un problème de Cauchy $v \equiv 0$ sur Ω , contradiction avec notre hypothèse que $u \in H^5 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\}$.

Alors 0 est un point régulièr de $\digamma$, par suite

$$\{h \in \Lambda_M / \, (u, \lambda) \to \digamma(u, \lambda, h) \text{ a zéro comme valeur régulière}\}$$

est un ensemble ouvert dense de Λ_M

Par conclusion et d'aprés le théorème de Baire , les valeurs propres sont génériquement simples sur l'ouvert $\underset{M \in \mathbb{N}}{\cap} \Lambda_M$.

Annexe

Nous donnons dans cette annexe quelques définitions et théorèmes qui sont utilisés dans ce mémoire :

Ensemble maigre:

Un ensemble est dit maigre s'il est inclus dans un réunion dénombrable de sous ensemble rare de X.

Ensemble rare:

F un sous ensemble d'un espace topologique X est dit rare si son interieur est vide .

Ensemble résiduel:

Un ensemble est dit résiduel si son complémentaire est un ensemble maigre.

Espace de Baire:

Un espace topologique est dit de Baire si tout sous ensemble résiduel de X est dense .

Théorème:

Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.

Théorème:

Toute espace métrique complet est de Baire .En particulier , tout espace vectoriel de dimension finie est de Baire .

Bibliographie

[1] J.Benedikt, *On the discreteness of the spectra of the Dirichlet and Neumann p_Biharmonic problems,*Abstract and Applied Analysis 2004:9(2004) 777-792.

[2] D.B.Henry, *Perturbation of the Boundary in Boundary Value Problems of PDEs*, Cambridge University Press (2005).

[3] A.M.Micheletti, *Pertubazione dello spettro dell operatore de Laplace in relazione ad una variazone del campo*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 26(1972), 151-169.

[4] K.Uhlenbeck, *Generic Properties of Eigenfunctions*, American Journal Mathematics, vol.98, No. 04 (1976), 1059-1078.

[5] C.Rocha, *Generic properties of equilibria of reaction-diffusion equations with variable diffusion*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 101(1985) No. 1-2, 45-55.

[6] J.C.Saut and R. Teman, *Generic properties of nonlinear boundary value problems*, Comm. Partial Differential Equations, 4(1979) no. 3, 293-319.

[7] A.L.Pereira, *Generic hyperbolicity for scalar parabolic equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 123(1993) No. 6, 1031-1040.

[8] A.L.Pereira, *Generic hyperbolicity for the equilibria of the one-dimensional parabolic equation ut = (a(x)ux)x + f(u)*, Journal of Nonlinear Analysis, v. 56/4(2004), 485-500.

[9] R. Abraham and J. Robin, *Transversal Mappings and Flows*, W. A. Benjamin, 1967.

[10] H.S.SHapiro and M.Tegmark,*An elementary proof that the biharmonic Green function of An Excentrix Ellipse Changes Sign* Vol .36,No .L,pp.99-101.march 1994.

[11] Marconne C Pereira, Pereira,*Generic simplicity of eigenvalues for a Dirichlet problem of the the Bilaplacien operateur* Electronic Journal of Differential Equations ,Vol,2004(2004),No.114,pp.1-21.

[12] M.C.Pereira, *Generic simplicity of the eingenvalues for a supported plate equation*,Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications ,Volume 67, Issue 3, 1 August 2007, Pages 889–900

[13] Sandra Martinez and J.D.Rossi,*Isolation and Simplicity for the first eigenvalue of the p-Laplacien with a nonlinear boundary condition,*Abstract and Applied Analysis 7:5(2002) 287-293.

[14] A.Ros,*Compact Hypersurface With Constant Higher Order Mean Curvatures* ,Revista matemática iberoamericana, ISSN 0213-2230, Vol. 3, N^o 3-4, 1987 , págs. 447-453

[15] L.Hormander ,*Linear partial Differential Operators,* Springer - Verlag,Grundkehren 116(1964).

[16] A.L.Pereira and M.C.Pereira ,*An extension of the method of rapidly oscillating functions* Matematica contemporanea Vol,27 (2004)

[17] Frank Pacard, *Surfaces à courbure moyenne constante* - Images des Mathématiques, CNRS, 2006.

Résume :

Dans ce travail on traite la notion de la perturbation du bord pour montrer la simplicité générique des valeurs propres de problème de Dirichlet pour le bilaplacien dans un ensemble C^4 difféomorphe à un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$.

Mots clés:

Perturbation du bord, Simplicité générique des valeurs propres, valeurs propre de l'operateur biharmonique.

Abstract :

In this work we treat the notion of boundary perturbation to show the generic simplicity of the eigenvalues of the Dirichlet problem for bilaplacian opertor in a set of C^4 difféomorph to an open bounded set of $\mathbb{R}^n$ for $n \geq 2$.

Keywords:

Boundary perturbation, Simplicity generic of the eigenvalues , eingenvalues of biharmonic operator.

ملخص:

عالج هذا العمل فكرة اضطراب الحدود لنبين بساطة القيم الحقيقية لمشكلة ديريشلي وذلك من اجل المشغل الثنائي لبلاس في مجموعة تقابل مشتق وذلك ضمن تشكل تفاضلي مفتوح و محدود من$\mathbb{R}^n$, من اجل القيمة $n>=2$.

كلمات البحث :اضطراب الحدود، البساطة العلمية القيم الذاتية، القيم الذاتية للمشغل الثنائي.