République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la recherche scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Option : Systèmes dynamiques et applications

Présenté par : M. Yahiaoui Mohamed

Thème

Les Equations différentielles à retard dépendant de l'état

Soutenu le 07 Janvier 2013 devant le jury composé de:

President:	**Mr. A.Lakmeche**	**Pr. U. S.B.A**
Examinateurs :	**Mr. S.M. Bouguima**	**Pr. U. Tlemcen**
	Mr. A. Ouahab	**M.C.A. U. S.B.A**
Rapporteur :	**Mr. M. Yebdri**	**Pr. U. Tlemcen**

Remerciéments

Je remercie Allah avant tout car à lui seul revient les louanges.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur, le professeur Yebdri, je lui en suis très reconnaissant, Merci.

Je profite de cette occasion pour remercier tous nos enseignants.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury qui me font le grand honneur d'y participer.

Je tiens également à remercier le Professeur Abdelkader Lakmeche pour avoir accepter de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie vivement le professeur Sidi Mouhamed Bouguima et le Docteur Abdelghani Ouahab pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à saluer tous les membres de ma promotion.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

Table des matières

Introduction

L'analyse des équations différentielles à retard, a commencé dans les années (50) ; et l'une des premières approches est présenté par 'Krasovskii' (1977), qui généralise la deuxième méthode de 'Lyaponov'. Ensuite de nombreux auteurs, ont développé différents problèmes, concernant l'analyse de la stabilité des équations différentielles, avec un argument retardé. Parmi les équations différentielles à retard, on distingue ceux qui sont à retard constant. Par exemple : Lorsque, nous passons notre permis de conduire, nous apprenons que le temps de réaction de notre système nerveux, lors de la conduite, est de l'ordre de quelques secondes, et qu'il faut prendre soin de mettre une distance suffisante entre deux voitures qui se suivent, les épidémies, les maladies, possèdent un temps d'incubation, la dynamite inventé par 'Alfred Nobel' dispose d'un dispositif (la mèche) pour retarder le déclenchement de son explosion, son utilisation, serait difficile sans cet artifice. D'après cet exemple, on remarque que le retard peut être utile, il peut même être absolument nécessaire

Le retard multiple :

Comme exemple, les organistes nécessitent un certain temps d'adaptation, lorsqu'ils jouent sur un orgue qu'ils ne connaissent pas. En effet à cause du temps de propagation de l'air dans les tuyaux, le retard entre le moment où le musicien enfonce la touche du clavier et le moment où le son retentit dans la salle, peut être assez conséquent, de l'ordre de la demie seconde, pour certains grands orgues, théoriquement, ce retard varie en fonction de la hauteur de la note, puisque les tuyaux sont de longueurs différentes, ce qui est en fait un exemple des systèmes à retards multiples

Dans ce travail ; on propose de donner une introduction aux équations différentielles à retard (concernant la définition, existence et unicité.)

Dans un premier temps, on donne un exemple où ce genre d'équations se présente comme le modèle le plus adéquat, il sera suivit par une présentation de la méthode des pas pour l'intégration des équations différentielles à retard.

Une fois, que le théorème d'existence et d'unicité est présenté, une comparaison avec les équations différentielles ordinaire sera faite.

Dans le deuxième chapitre ; on va s'intéresser à la linéarisation des équations différentielles à retard (lorsque le retard est nul et différent de zéro). Afin d'étudier l'existence des solutions et leur stabilité, puis on termine dans le troisième chapitre avec les équations différentielles à retard dépendant de l'état ; où on s'intéressera à la définition, existence et unicité, ainsi qu'à la solution constante.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Un aperçu historique sur les équations différentielle avec retard

Rappelons ; que les équations à retard, ont été introduites, pour modéliser des phénomènes dans lesquels, il y'a un mélange temporel entre l'action sur le système et la réponse du système à cette action. Par exemple, dans le processus de naissance des populations biologiques (cellules, bactéries, ...etc.). Beaucoup de phénomènes rencontrés en physiques, biologie, chimie, ...etc., ont trouvé dans la théorie des équations, à retard, un bon moyen de modélisation, (un moyen plus réaliste que dans le cas des équations différentielles ordinaires). A partir des années (40), la théorie des équations à retard a connu, un grand développement, notamment on trouve "Belman" et "Cooke" (1963), "Hale" (1977). Mais récemment, de nombreux phénomènes ont été proposé pour la modélisation de certaines situations compliquées, où il y'a un mélange temporel entre l'action sur le système et la réponse du système. A cette notion, le retard peut être donné comme une intégrale et donc il dépend, des fonctions inconnues, qui sont les solutions du problème, il est appelé dans ce cas, retard distribué ou retard dépendant de l'état.
Des exemples :

Exemple 1 :
La chauve souris, à la chasse, étant aveugle, elle émet des sons, pour utiliser les parois des grottes, afin de localiser sa proie. L'écho obtenu par le rebondissement de ces cris représente le retard qui dépend de l'état, qui est le prédateur.
Exemple 2 :

Imaginons, une population biologique, composée d'individus jeunes et adultes. Soit $N(t)$, indiquant la densité d'adultes, à un temps t. Supposons que la longueur de la période juvénile est exactement h unité de temps pour chaque individu et supposons que les adultes produisent une mutation à un taux α par tète et que leur probabilité par unité de temps pour mourir est μ. Supposons que les nouveaux nés survivant la période juvénile avec une probabilité p et posons $t = \alpha p$. Alors les dynamiques de N, peuvent être décrites par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\mu(N(t), rN(t-h)) \tag{1.1}$$

$rN(t-h)$: Signifie que les nouveaux nées deviennent adultes avec un retard, alors la variation de la densité de population N comprend des valeurs courantes, ainsi que des valeurs au passé. Pour intégrer, l'équation (1.1) en certains temps $t \in [0, h]$, on nécessite de prescrire la valeur $N(t-h)$. Alors on doit considérer une fonction, sur un intervalle de longueur h, pour cela on prescris N sur l'intervalle $[-h, 0]$, et ensuite utiliser (1.1) pour $t \geq 0$, alors on supplémente (1.1) par $N(\theta) = \varphi(\theta)$ pour $-h \leq \theta \leq 0$ où φ est une fonction donnée.
Explicitement, on a alors pour tout $t \in [0, h]$

$$N(t) = \varphi(0)\exp(-\mu t) + r\int_0^t \exp(-\mu(t-r)\varphi(r-h))dr$$

1.2 Equation différentielle à retard constant

Définition 1.1 *On appelle équation différentielle à retard constant, une équation différentielle de la forme*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r)) \tag{1.2}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, et r un nombre réel strictement positif que l'on appelle le retard.

Remarque :
Pour déterminer la solution de l'équation différentielle (1.2) sur un intervalle $[t_0, t_0 + r]$, il faut connaître $x(t)$ sur un intervalle antérieur $[t_0 - r, t_0]$. Soit φ une fonction continue sur l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$ à valeurs dans R.

1.3 Existence, unicité et prolongement, des solutions :

Définition 1.2 *Soit Ω un ouvert de R^2, on dit que la fonction $h : \Omega \ni (t, x) \to h(t, x) \in R$ est lipschitzienne par rapport à x uniformement par rapport à t, si et seulement si $\exists k > 0$, tel que :*
$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in \Omega$ on a :
$|h(t, x_1) - h(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$

Définition 1.3 *On dit que la fonction $h : \Omega \subset R^2 \to\in R$ est localement lipschitzienne par rapport à x, si pour tout point (t_0, x_0) de Ω il existe un voisinage de (t_0, x_0) dans lequel h est lipschitzienne dans ce voisinage autrement dit k dépend de (t_0, x_0).*
Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - r)), & pour\ t > 0 \\ x(t) = \varphi(t), & pour\ t \in [-r, 0]\ et\ \varphi \in C([-r, 0], R) \end{cases} \tag{1.3}$$

Théorème 1.1 *Si $f : R^3 \to R$ est continue, alors le problème (1.3) admet au moins une solution, si de plus f est localement lipschitzienne par rapport aux deux dernières variables, alors cette solution est unique*

Soit x une solution de l'équation (1.2), définie sur lèintervalle $[t_0 - r, \alpha[, \alpha > t_0$

Définition 1.4 *On dit que $\widetilde{x}$ est un prolongement de x, s'il existe $\beta > \alpha$ tel que $\widetilde{x}$ est définie sur $[t_0 - r, \beta[$, coïncide avec x sur $[t_0 - r, \alpha[$ et vérifie l'équation (1.2) sur $[t_0 - r, \beta[$*

Définition 1.5 *La solution x est dite maximale, si elle n'admet pas de prolongement, i.e. que l'intervalle $[t_0-r,\alpha[$ est l'intervalle maximal d'existence de la solution x.*

Définition 1.6 *Une fonction sur $[t_0-r,\infty)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, différentiable sur $[t_0,\infty)$ est solution de l'équation (1.2), si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$i) x_{|[t_0-r,t_0]} = \varphi \tag{1.4}$$

$$ii) \dot{x}(t) = f(t,x(t),x(t-r)), \quad pour \quad t \in [t_0,\infty)$$

Autrement dit ;

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), & pour \quad t \in [t_0-r,t_0] \\ \\ \varphi(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,x(s),x(s-r))ds, & pour \quad t \in [t_0-r,\infty) \end{cases}$$

Exemple
Soit l'équation différentielle à retard constant.

$$\dot{x}(t) = -x(t-\pi/2) \tag{1.5}$$

qui admet comme solution $x(t) = \sin t$.
Cette solution s'annule pour $t = k\pi$, tel que $k \in Z$, mais elle n'est pas identiquement nulle, dont le graphe y est (11).

1.4 Propriétés générales : Comparaison avec les équations différentielles ordinaires :

i/ Pour résoudre l'équation différentielle à retard :

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),x(t-r)) \tag{1.6}$$

il faut connaître $x(t)$ sur un intervalle $[t_0-r,t_0]$, de longueur r. Par contre, pour résoudre une équation différentielle ordinaire il suffit de connaître $x(t)$ en un seul point.

ii/ Une équation différentielle à retard linéaire et homogène, peut avoir des solutions oscillantes non triviales, c'est à dire des solutions qui s'annulent plusieurs fois, mais elles ne sont pas identiquement nulles, or si la solution d'une équation différentielle ordinaire linéaire et homogène, s'annule en un point, elle est nulle partout (grâce à l'unicité de la solution). D'une manière générale, si deux solutions d'une équation différentielle, ordinaire se rencontrent en un point, et si la condition d'unicité est satisfaite, alors elles sont égales, sur tout le domaine de définition.

Par contre, deux solutions, d'une équation différentielle, à retard peuvent se rencontrer en plusieurs points, sans qu'elles soient égales

Exemple

Soit l'equation suivante $\dot{x}(t) = -x(t - \pi/2)$ qui admet comme solutions :

$x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$

voir graphe (1.2)

On remarque que $x(\frac{\pi}{4}) = y(\frac{\pi}{4})$ et $x \neq y$.

Remarque Soit x^{ϕ} et x^{ψ} deux solutions de l'équation (1.2) de conditions initiales $x_{|_{[t_0-r,t_0]}} = \phi$ et $x_{|_{[t_0-r,t_0]}} = \psi$ respectivement.

Si $x^{\phi} = x^{\psi}$, sur un intervalle $[t-r,t]$, de longueur r, alors $\forall \alpha > t$, $x^{\phi} = x^{\psi}$ sur $[t-r,\alpha]$.

Les solutions d'une équation différentielle à retard, ne sont pas en général prolongeables vers la gauche, et quand, c'est le cas, le prolongement n'est pas unique.

Exemple Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x(t) + f(t, x(t-1)) \\ \\ x(t) = \phi(t), \ \ pour \ t \in [-1, 0] \end{cases} \tag{1.7}$$

avec $\phi(t) = \dfrac{1}{\mu}\left(t^2 - \dfrac{2t}{\mu} + \dfrac{2}{\mu^2}\right) - \dfrac{1}{\mu}\left(1 + \dfrac{2}{\mu} + \dfrac{2}{\mu^2}\right)e^{-\mu(t+1)}$ et $f(x) = x^2$

Soit $x : [-1, \infty) \to R$, la solution, définissons deux fonctions x^+ et x^- comme suit :

$$x^+ = \begin{cases} +(t+1), -2 \leq t \leq -1 \\ \\ x(t), t \geq -1 \end{cases} ; \ x^- = \begin{cases} -(t+1), -2 \leq t \leq -1 \\ \\ x(t), t \geq -1 \end{cases}$$

$x^+(t)$ et $x^-(t) : [-2, \infty) \to R$ sont continues, puisque $x^+_{|_{[-1,\infty)}} = x$ et $x^-_{|_{[-1,\infty)}} = x$, alors

$$\begin{cases} \dot{x}^+ = \mu x^+(t) + f(x^+(t-1)), t \geq 0 \\ \\ x^+_{|[-1,0]} = \phi \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dot{x}^- = -\mu x^-(t) + f(x^-(t-1)), t \geq 0 \\ \\ x^-_{|[-1,0]} = \phi \end{cases}$$

Pour $t \in [-1, 0]$; on a :

$$\begin{aligned} -\mu x^+(t) + f(x^+(t-1)) &= -\mu\phi(t) + f(+t) \\ &= \left(t^2 - \frac{2t}{\mu} + \frac{2}{\mu^2}\right) \\ &+ \left(1 + \frac{2}{\mu} + \frac{2}{\mu^2}\right) e^{-\mu(t+1)} + t^2 \\ &= \left(\frac{2t}{\mu} - \frac{2}{\mu^2}\right) + \left(1 + \frac{2}{\mu} + \frac{2}{\mu^2}\right) e^{-\mu(t+1)} \\ &= \dot{\phi}(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\mu x^-(t) + f(x^-(t-1)) &= -\mu\phi(t) + f(-t) \\ &= \left(-\mu \left[(t^2 - \frac{2t}{\mu} + \frac{2}{\mu^2})\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu}(t^2 - \frac{2t}{\mu} + \frac{2}{\mu^2})\right) e^{-\mu(t+1)}\right] + t^2 \\ &= \left(\frac{2t}{\mu} - \frac{2}{\mu^2}\right) + \left(1 + \frac{2}{\mu} + \frac{2}{\mu^2}\right) e^{-\mu(t+1)} \\ &= \dot{\phi}(t) \end{aligned}$$

D'autre part, on a $\dot{x}^{\pm}_{|[-1,0]} = \dot{\phi}$, car $x^{\pm}_{|[-1,0]} = \phi$ alors les fonctions x^+ et x^-, vérifient l'équation (1.7) sur l'intervalle $[-1, 0]$. Ainsi, x^+ et x^- sont deux prolongements différents de la solution sur $[-2, -1]$

1.5 Dépendance continue des solutions par-rapport aux conditions initiales :

Les solutions de l'équation (1.2), dépendent continument des conditions, initiales dans le sens suivant :
Pour tout $\phi \in C([t_0-r, t_0], R)$, $t \geq t_0, \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, telle que $\forall \psi \in C([t_0-r, t_0], R)$; on a :

$$\|\phi - \psi\| \leq \delta \Rightarrow |x^{\phi}(s) - x^{\psi}(s)| < \epsilon, \forall s \in [t_0 - r, t]$$

1.6 Intégration par la méthode des pas

Avant de traiter la méthode d'intégration ; on considère l'exemple suivant, sur lequel, on applique l'intégration par la méthode des pas.
Considérons, une population biologique ou atomique de taille $N(t)$ à l'instant t, soumise à des processus de reproduction ou de disparition. Supposons que la vitesse de croissance $\frac{dN(t)}{dt}$ est proportionnelle à $N(t)$, à l'instant t.
Cette population sera gouvernée par l'équation différentielle ordinaire suivante : $\dfrac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$.
La solution de cette équation est $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$, où N_0 est la taille de cette population à l'instant $t = 0$
Remarque :

1/ Si $\lambda > 0$; on a une explosion de la population ($\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$).

2/ Si $\lambda < 0$; on a une extinction de la population ($\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 0$).

3/ Si $\lambda = 0$; la population, reste constante ($N(t) = N_0, \forall t$).

On remplace, le facteur λ par, une quantité qui décroit, quand $N(t)$ croit et inversement, et on propose comme deuxième modèle, l'équation suivante

$$\frac{dN(t)}{dt} = k\left[1 - \frac{N(t)}{p}\right] N(t), k, p \in R_*^+ \tag{1.8}$$

l'équation (1.8) s'écrit sous la forme :

$$\frac{N'(t)}{N^2(t)} - \frac{k}{N(t)} + \frac{k}{p} = 0 \tag{1.9}$$

Posons $y(t) = \dfrac{1}{N(t)}$;

alors $y'(t) = -\dfrac{N'(t)}{N^2(t)}$ l'équation (1.9) devient :

$$y'(t) + ky(t) = \frac{k}{p} \tag{1.10}$$

Résolvons l'équation homogène suivante :

$$y'(t) + ky(t) = 0$$

$$y'(t) + ky(t) = 0 \Rightarrow y(t) = y_0 e^{-kt}$$

La solution de l'équation (1.9) est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-s)} \frac{k}{p} ds \\ &= y_0 e^{-kt} + \frac{1}{p} e^{-kt} \int_0^t k e^{ks} ds \\ &= y_0 e^{-kt} + \frac{1}{p} e^{-kt} (e^{kt} - 1) \\ &= \frac{y_0 + \frac{1}{p}(e^{kt} - 1)}{e^{kt}} \end{aligned}$$

En remplaçant $y(t)$, par $\dfrac{1}{N(t)}$, et y_0 par $\dfrac{1}{N_0}$, on aura

$N(t) = \dfrac{N_0 e^{kt}}{1 + \dfrac{N_0}{p}(e^{kt} - 1)}$, $k, p \in R_+^*$; on remarque que : $\lim_{t \to +\infty} N(t) = p$.

Le facteur $(1 - N(t)/p)$, joue un rôle de régulateur.

On remarque, que le modèle (1.8), présente un défaut de principe, car on ne peut pas avoir une connaissance claire de la capacité démographique d'une population.

On propose un troisième modèle dans lequel, le facteur régulateur fait intervenir la taille de la population à un instant antérieur $t - r$. On aura donc l'équation suivante

$$\frac{dN(t)}{t} = k \left[1 - \frac{N(t-r)}{p} \right] N(t) \tag{1.11}$$

l'équation (1.11) est une équation différentielle, à retard.
Maintenant, on passe à la méthode d'intégration de l'équation (1.11) qui s'écrira, sous la forme intégrale suivante

$$\int_0^t \frac{N'(s)}{N(s)} ds = \int_0^t k \left[1 - \frac{N(s-r)}{p}\right] ds \tag{1.12}$$

on remarque que pour résoudre cette équation sur l'intervalle $[0, r]$, il faut connaître $N(t)$ sur $[-r, 0]$.
Ainsi ; on se donne, une fonction θ, continue sur $[-r, 0]$; et on pose comme condition initiale $N(t) = \theta(t)$ sur l'intervalle $[-r, 0]$.
En considérant, le changement de variable $u = s - r$ l'équation (1.12) devient, pour $t \in [0, r]$

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{N'(s)}{N(s)} ds &= \int_{-r}^{t-r} k \left[1 - \frac{N(u)}{p}\right] du \\ &= \int_{-r}^{t-r} k \left[1 - \frac{\theta(u)}{p}\right] du \end{aligned}$$

la solution sur $[0, r]$, qu'on notera $N_1(t)$ est donnée par

$$N_1(t) = N_0 e^{\displaystyle\int_{-r}^{t-r} k \left[1 - \frac{\theta(u)}{p}\right] du}, t \in [0, r]$$

on refait l'opération sur $[r, 2r]$, en considérant comme condition initiale $N(t) = N_1(t)$ sur $[0, r]$ et ainsi de suite, cette méthode s'appelle la méthode des pas.
On se propose de donner une illustration détaillée sur l'exemple élémentaire suivant.
Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(t-r)..........(1) \\ \\ x(t) = 1, pour\ t \in [-r, 0]..(2) \end{cases} \tag{1.13}$$

$(1) \Leftrightarrow \int_0^t \dot{x}(s)ds = \int_0^t x(s-r)ds$; en posant $u = s - r$, on obtient ;

$$\begin{aligned}
\int_0^t \dot{x}(s)ds &= \int_{-r}^{t-r} x(u)du \\
&= \int_{-r}^{t-r} \varphi(u)du \\
&= \int_{-r}^{t-r} du \\
&= [u]_{-r}^{t-r} \\
&= t
\end{aligned}$$

Donc $x_1(t) = t + x(0) = t + 1$

$x_1(t) = t + 1$. Posons $x_1(t) = t + 1, \quad t \in [0, r]$.

La résolution de l'équation (1), sur $[r, 2r]$;

On considère, la condition initiale

$x_{|_{[0,r]}} = x_1$ pour tout $t \in [r, 2r] = x_1$; on a :

$(1) \Leftrightarrow \int_r^t \dot{x}(s)ds = \int_r^t x(s-r)ds$;

en posant : $u = s - r$; on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_r^t \dot{x}(s)ds &= \int_0^{t-r} x(u)du \\
&= \int_0^{t-r} x_1(u)du \\
&= \int_0^{t-r} (u+1)du \\
&= \left[\frac{u^2}{2}+u\right]_0^{t-r} \\
&= \frac{(t-r)^2}{2}+t-r \\
&= \frac{t^2+r^2-2rt}{2}+t-r \\
&= \frac{1}{2}\left[t^2+r^2-2rt+2t-2r\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[t^2+2(1-r)t+r^2-2r\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= \frac{1}{2}\left[t^2+2(1-r)t+r^2-2r\right]+r+1 \\
&= \frac{1}{2}\left[t^2+2(1-r)t+r^2-2r+2r+2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[t^2+2(1-r)t+r^2+2\right]
\end{aligned}$$

La résolution $[2r, 3r]$; On considère, comme condition initiale $x_{|_{[r,2r]}} = x_2$, pour tout $t \in [2r, 3r]$; on a :

$(1) \Leftrightarrow \int_{2r}^t \dot{x}(s)ds = \int_{2r}^t x(s-r)ds$;

posant : $u = s - r$; on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{2r}^{t} \dot{x}(s)ds &= \int_{r}^{t-r} x(u)du \\
&= \int_{r}^{t-r} x_2(u)du \\
&= \int_{r}^{t-r} 1/2\left[s^2 + 2(1-r)s + r^2 + 2\right] ds \\
&= 1/2\left[\frac{s^3}{3} + 2(1-r)\frac{s^2}{2} + (r^2+2)s\right]_r^{t-r} \\
&= 1/2\left[\frac{(t-r)^3}{3} + 2(1-r)\frac{(t-r)^2}{2} + (r^2+2)(t-r)\right] \\
&- 1/2\left[\frac{r^3}{3} + 2(1-r)\frac{r^2}{2} + (r^2+2)r\right] \\
&= 1/2\left[\frac{t^3 - 3rt^2 + 3r^2t - r^3}{3} + (1-r)t^2 + 2(r^2-r)t\right] \\
&+ 1/2\left[-r^3 + r^2 + (r^2+2)t - r^3 - 2r - \frac{r^3}{3} - r^2 + r^3 - r^3 - 2r\right] \\
&= 1/2\left[\frac{t^3 - 3rt^2 + 3r^2t - r^3}{3} + (1-r)t^2 + (2r^2 - 2r + r^2 + 2)t\right] \\
&+ 1/2\left[-2r^3 - 4r - \frac{r^3}{3}\right] \\
&= 1/6\left[t^3 + t^2(-3r + 3 - 3r) + t(3r^2 + 9r^2 - 6r + 6) - 6r^3 - 12r - r^3\right] \\
&= 1/6\left[t^3 + t^2(-6r+3) + t(12r^2 - 6r + 6) - 6r^3 - 12r - r^3\right] \\
&= 1/6\left[t^3 + t^2(-2r+1)3 + t(2r^2 - 1r + 1)6 - 7r^3 - 12r\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3(t) &= 1/6\left[t^3 + 3(-2r+1)t^2 + 6(2r^2 - 1r + 1)t - 7r^3 - 12r\right] + x_2(2r) \\
&= 1/6\left[t^3 + 3(-2r+1)t^2 + 6(2r^2 - 1r + 1)t - 7r^3 - 12r\right] + 1/2(r^2 + 4r + 2)
\end{aligned}$$

Exemple 2 :
on propose un autre exemple, plus spécifique, sur lequel, on va appliquer de même l'intégration par la méthode des pas.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1)............(1) \\ \\ x(t) = a \quad , pour\ t \in [-1,0].....(2) \end{cases} \tag{1.14}$$

La résolution sur $[0,1]$;
soit $t \in [0,1]$
$(1) \Leftrightarrow \int_0^1 \dot{x}(s)ds = \int_0^1 x(s-1)ds$, en posant $u = s-1$, obtient,

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{x}(s)ds &= \int_{-1}^{t-1} x(u)du \\ &= \int_{-1}^{t-1} adu \\ &= at \end{aligned}$$

Donc $x(t) = at + x(0) = at + a$.
Posons $x_1(t) = at + a, t \in [0,1]$.

La résolution sur $[1,2]$; on considère la condition initiale $x_{|_{[0,1]}} = x_1$, pour $t \in [1,2]$; on a donc ;

(1) $\Leftrightarrow \int_1^t \dot{x}(s)ds = \int_1^t x(s-1)ds$; en posant $u = s-1$; on obtient

$$\begin{aligned}
\int_1^t \dot{x}(s)ds &= \int_0^{t-1} x(u)du \\
&= \int_0^{t-1} x_1(u)du \\
&= \int_0^{t-1} (au+u)du \\
&= \left[a\frac{u^2}{2} + au\right]_0^{t-1} \\
&= \frac{a}{2}(t-1)^2 + a(t-1) \\
&= a\left(\frac{t^2}{2} - 1 + \frac{1}{2} + t - 1\right) \\
&= \frac{a}{2}(t^2-1)
\end{aligned}$$

Il s'en suit que $x(t) - x(1) = \frac{a}{2}(t^2-1)$ or $x(1) = x_1(t) = 2a$;
alors $x(t) = \frac{a}{2}t^2 + \frac{3a}{2}$
Posons $x_2(t) = \frac{a}{2}t^2 + \frac{3a}{2}, t \in [1,2]$

La résolution sur $[2,3]$; on considère la condition $x_{|_{[1,2]}} = x_2$. Pour $t \in [2,3]$; on a :

$$(1) \Leftrightarrow \int_2^t \dot{x}(s)ds = \int_2^t x(s-1)ds$$

en posant $u = s-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_2^t \dot{x}(s)ds &= \int_1^{t-1} x(u)du \\
&= \int_1^{t-1} x_2(u)du \\
&= \int_1^{t-1} \left(\frac{a}{2}u^2 + \frac{3a}{2}\right) du \\
&= \left[\frac{a}{6}u^3 - \frac{3}{2}au\right]_1^{t-1} \\
&= \frac{a}{6}\left(t^3 - -3t^2 - 1\right) + \frac{3a}{2}(t-1) - \frac{5a}{3} \\
&= \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at - \frac{5}{3}a
\end{aligned}$$

on a alors $x(t) - x(2) = \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at - \frac{5}{3}a$ or $x(2) = x_2(2) = \frac{7}{2}a$, alors

$x(t) = \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at + \frac{1}{6}a.$

Posons $x_3(t) = \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at + \frac{1}{6}a, t \in [2,3].$

1.7 Etude de la continuité de la solution aux points 0,1,2

- $\lim\limits_{t \to 0^+} x(t) = a$;

$\lim\limits_{t \to 0^-} x(t) = a$

Donc x est continue en $t = 0$

- $\lim\limits_{t \to 1^-} x(t) = \lim\limits_{t \to 1^-} x_1(t) = 2a.$

$\lim\limits_{t \to 1^+} x(t) = \lim\limits_{t \to 1^+} x_2(t) = 2a$

Donc x est continue en $t=1$

• $\lim\limits_{t\to 2^-} x(t) = \lim\limits_{t\to 2^-} x_2(t) = \frac{7}{2}a.$

$\lim\limits_{t\to 2^+} x(t) = \lim\limits_{t\to 2^+} x_3(t) = \frac{7}{2}a$

Donc x est continue en $t=2$

1.8 Etude de la dérivabilité de la solution aux points 0,1,2

• $\lim\limits_{t\to 0^-} \frac{x(t)-x(0)}{t} = 0,$

$\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{x(t)-x(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{at+a-a}{t} = a$

Donc x n'est pas dérivable au point $t=0$

• $\lim\limits_{t\to 1^-} \frac{x(t)-x(1)}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1^-} \frac{at+a-2a}{t-a} = a$

$\lim\limits_{t\to 1^+} \frac{x(t)-x(1)}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1^+} \frac{\frac{a}{2}t^2+\frac{3a}{2}-2a}{t-1} = a$ Donc x est dérivable au point $t=1$

• $\lim\limits_{t\to 2^-} \frac{x(t)-x(2)}{t-2} = \lim\limits_{t\to 2^-} \frac{\frac{a}{2}t^2+\frac{3a}{2}-\frac{7}{2}a}{t-2} = \lim\limits_{t\to 2^-} \frac{a}{2}(t+2) = 2a$

$\lim\limits_{t\to 2^+} \frac{x(t)-x(2)}{t-2} = \lim\limits_{t\to 2^+} \frac{\frac{a}{8}t^3-\frac{a}{2}t^2+2at+\frac{a}{6}-\frac{7}{2}a}{t-2} = 2a$ Donc x est dérivable au point $t=2$

Remarque : Considérons la condition, initiale plus générale ; $x_{|_{[-1,0]}} = \theta$, tel que θ est une fonction continue sur l'intervalle $[-1,0]$.

• Pour $t \in [0,1]$; on a :

(1) $\Leftrightarrow \dot{x}(s) = x(t-1) = \theta(t-1) = \theta(u)$, avec $u \in [-1,0]$, θ est continue sur $[-1,0]$; donc $\dot{x}$ est continue sur $[-1,0]$, et par suite x est de classe C^1 sur $[0,1]$.

• Pour $t \in [1,2]$; on a :

(1) $\Leftrightarrow \dot{x}(t) = x(t-1) = x_1(u)$, avec $u \in [0,1]$, x est de classe C^1 sur $[0,1]$, donc $\dot{x}$ est de classe C^1 sur $[1,2]$; il s'en suit que x est de classe C^2 sur $[1,2]$.

• Pour $t \in [2,3]$; on a :

(1) $\Leftrightarrow \dot{x}(s) = x(t-1) = x(u)$, avec $u \in [1,2]$, x est de classe C^2 sur $[1,2]$,

donc $\dot{x}$ est de classe C^2 sur $[2,3]$; il s'en suit que x est de classe C^3 sur $[2,3]$.
En général, sur l'intervalle $[n, n+1]$, x est de classe C^{n+1}.
Ainsi, la régularité de la solution, augmente au fur et à mesure, que le nombre de pas d'intégration devient plus grand.

1.9 Cas particulier :

Soit l'équation différentielle à retard suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r)), \quad t > 0 \\ \\ x(t_0) = \varphi(t_0), \qquad\qquad\qquad \textit{pour } t \in [t_0 - r, t_0] \end{cases} \tag{1.15}$$

1.9.1 Conditions d'existence et d'unicité :

Définition 1.7 *On dit que $x : R^+ \to R$ est une solution de l'équation (1.15) satisfaisant le problème de Cauchy, si*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)); \forall t \in R^+ \\ \\ x(t_0) = a \end{cases}$$

Définition 1.8 *Si $f : R^+ \times R \to R$ est une fonction continue et de plus lipschitzienne, c'est à dire qu'il existe un $k > 0$, tel que :*
$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\|x - y\|$, pour $\forall (x,y) \in R \times R$, alors l'équation (1.15) admet une solution unique.

1.10 Généralité :

Soit l'équation differentièlle à retard suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r)), \quad t \geq 0 \\ \\ x(t) = \varphi(t), \qquad\qquad\qquad \textit{pour } t \in [-r, 0] \end{cases} \tag{1.16}$$

Par la méthode des pas l'équation (1.15) admet les solutions suivantes sur les différents intervalles ou (segments).

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), & pour\ t \in [t_0 - r, t_0] \\ x_1(t), & pour\ t \in [t_0, t_0 + r] \\ x_2(t), & pour\ t \in [t_0 + r, t_0 + 2r] \\ ., & \\ ., & \\ x_n(t), & pour\ t \in [t_0(n-1)r, t_0 + nr] \end{cases}$$

où $x_1(t)$, $x_2(t)$,...., $x_n(t)$ sont les solutions locales de l'équation :

Remarque :

La méthode des pas nous donne, l'existence de solutions.

Ceci nous mène à énoncer les définitions suivantes :

Définition 1.9 *Par la méthode des pas, toute fonction ϕ continue sur l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$ définit une solution de l'équation (1.15)*

Définition 1.10 *Si de plus f est localement lipschitzienne par rapport au troisième argument $x(t - r)$ alors la solution est unique.*

Théorème 1.2 *Soit $f : R^3 \to R$; une fonction continue, localement lipschitzienne par rapport a la troisième variable pour tout $t_0 \in R$, on se donne une fonction $\varphi : [t_0 - r, t_0] \to R$ continue*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r)), \quad t > t_0 \\ x_{|_{[t_0 - r, t_0]}} = \varphi \end{cases} \tag{1.17}$$

admet une solution unique sur tout intervalle $[t_0 - r, \alpha]$ avec $t_0 < \alpha < +\infty$

Pour la démonstration de ce théorème ; on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.1 *de **Granwall** [22]*

Soit c une constante donnée, k une fonction continue sur un intervalle J à valeurs dans R^+, soit $x_0 \in J$

Si $\nu : J \to (0, +\infty)$ est une autre fonction continue et

$$\nu(t) \leq c + \left| \int_{t_0}^{t} k(s)\nu(s)ds \right| \quad \forall t \in J \tag{1.18}$$

alors $\nu(t) \leq ce^{\displaystyle\int_{t_0}^{t} k(s)ds} \quad \forall t \in J$

Preuve :

$k(s)\nu(s) \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{t_0}^{t} k(s)\nu(s)ds$ est positif, si $t \geq t_0$ et négatif si $t < t_0$.

1-cas : $t \geq t_0$

L'inégalité (1.17) peut s'écrire sous la forme :

$$k(t)\nu(t) - k(t)[c + \int_{t_0}^{t} k(s)\nu(s)ds] \leq 0 \tag{1.19}$$

Posons $Q(t) = c + \displaystyle\int_{t_0}^{t} k(s)\nu(s)ds$, alors $Q'(t) = k(t)\nu(t)$.

L'inégalité (1.8) devient $Q'(t) - kQ(t) \leq 0$.

En multipliant par le facteur intégrant $e^{-\displaystyle\int_{t_0}^{t} k(s)ds}$, on obtient :

$Q'(t)e^{-\displaystyle\int_{t_0}^{t} k(s)ds} - Q(t)k(t)e^{-\displaystyle\int_{t_0}^{t} k(s)ds} \leq 0$, i.e.

$\dfrac{d}{dt}\left[Q(t)e^{-\displaystyle\int_{t_0}^{t} k(s)ds}\right] \leq 0$

En intégrant cette dernière inégalité entre t_0 et t et en remarquant que $Q(t_0) = c$, on obtient :

$Q(t)e^{-\displaystyle\int_{t_0}^{t} k(s)ds} - c \leq 0$; ou bien $\qquad Q(t) \leq ce^{\displaystyle\int_{t_0}^{t} k(s)ds}$

or $\nu(t) \leq Q(t)$, alors : $\nu(t) \leq ce^{-\displaystyle\int_{t_0}^{t} k(s)ds}$ (cqfd)

2-cas : $t \leq t_0$

$\left|\displaystyle\int_{t_0}^{t} k(s)\nu(s)ds\right| = -\displaystyle\int_{0}^{t} k(s)\nu(s)ds$

L'inégalité (1.17) s'écrira, sous la forme suivante :

$$k(t)\nu(t) - k(t)[c - \int_{t_0}^{t} k(s)\nu(s)ds] \leq 0 \tag{1.20}$$

Posons $P(t) = c - \int_{t_0}^{t} k(s)\nu(s)ds$, alors $P'(t) = -k(t)\nu(t)$

L'inégalité (1.19) devient $-P'(t) - k(t)P(t) \leq 0$, i.e.

$P'(t) + k(t)P(t) \geq 0$

En multipliant cette inégalité par le facteur intégrant $e^{\int_{t_0}^{t} k(s)ds}$ on obtient

$$\frac{d}{dt}\left[P(t)e^{\int_{t_0}^{t} k(s)ds}\right] \geq 0$$

en intégrant cette inégalité entre t et t_0 on obtient :

$c - P(t)e^{\int_{t_0}^{t} k(s)ds} \geq 0$; ou bien $\qquad P(t) \leq ce^{-\int_{t_0}^{t} k(s)ds}$

or $\nu(t) \leq P(t)$, alors : $\nu(t) \leq ce^{--\int_{t_0}^{t} k(s)ds}$ (cqfd)

Conclusion : $\forall t \in J : \nu(t) \leq ce^{\left|\int_{t_0}^{t} k(s)ds\right|}$

Maintenant entamons la démonstration du théorème :

Démonstration :

Faisons un raisonnement par l'absurde.

Supposons qu'il existe, deux solutions x et $\widetilde{x}$ définies de $[t_0 - r, \alpha]$ à valeurs dans R, telle que $x(t) \neq \widetilde{x}(t)$

Soit $t_1 = \inf\{t \in (t_0, \alpha)$, telle que $x(t) \neq \widetilde{x}(t)\}$.

on a donc $x(t) = \widetilde{x}(t)$, pour $t \in [t_0 - r, t_1]$.

Comme f est localement lipschitzienne, alors $\exists \epsilon_1 > 0$, $\exists \epsilon_2 > 0$ telle que f est localement lipschitzienne sur $(t_1 - \epsilon_1, t_1 + \epsilon_1) \times$ $(x(t_1 - r) - \epsilon_2, x(t_1 - r) + \epsilon_2$.

1-cas : Si $\epsilon_1 \geq r$

Soit $t \in [t_1, t_1 + \epsilon_1)$, alors :

$$x(t) - \widetilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(s, x(s), x(s-r)) - f(s, \widetilde{x}(s), \widetilde{x}(s-r))\right] ds$$

$$= \int_{t_0-r}^{t-r} \left[f(\theta + r, x(\theta + r), x(\theta)) - f(\theta + r, \widetilde{x}(\theta + r), \widetilde{x}(\theta))\right] d\theta$$

puisque $t < t_1 + \epsilon_1$ et $\epsilon_1 \leq r$, alors $t < t_1 + r$,
i.e. $t - r < t_1$.
or $x(\theta) = \widetilde{x}(\theta)$, pour $\theta \in [t_0 - r, t_1]$, alors $x(t) - \widetilde{x}(t) = c$
Ainsi $x(t) = \widetilde{x}(t)$, pour tout $t \in [t_0 - r, t_1 + \epsilon_1)$,
ce qui contredit la définition 1.

2-cas : Si $\epsilon_1 > r$ soit $t \in [t_1, t_1 + \epsilon_1)$

1/ Si $t < t_1 + r$; on a le même résultat précedent

2/ Si $t \geq t_1 + r$; on a :

$$\begin{aligned}
|x(t) - \widetilde{x}(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, x(s), x(s-r)) - f(s, \widetilde{x}(s), \widetilde{x}(s-r))]\, ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s), x(s-r)) - f(s, \widetilde{x}(s), \widetilde{x}(s-r))|\, ds
\end{aligned}$$

Pour $s \in [t_0, t_1 + \epsilon_1)$; on a : $x(s - r) = \widetilde{x}(s - r)$, alors :

$$\begin{aligned}
|x(t) - \widetilde{x}(t)| &\leq \int_{t_1+r}^{t} |f(s, x(s), x(s-r)) - f(s, \widetilde{x}(s), \widetilde{x}(s-r))|\, ds \\
&\leq k \int_{t_1+r}^{t} |x(s-r) - \widetilde{x}(s-r)|\, ds \\
&\leq k \int_{t_1}^{t-r} |x(\theta) - \widetilde{x}(\theta)|\, d\theta \\
&\leq k \int_{t_1}^{t-r} |x(\theta) - \widetilde{x}(\theta)|\, d\theta + k \int_{t-r}^{t} |x(\theta) - \widetilde{x}(\theta)|\, d\theta \\
&\leq k \int_{t_1}^{t} |x(\theta) - \widetilde{x}(\theta)|\, d\theta
\end{aligned}$$

Posons $\nu(t) = |x(t) - \widetilde{x}(t)|$; on a donc $\nu(t) \leq k \int_{t_1}^{t} \nu(\theta) d\theta$

$\nu(t)$ vérifie l'hypothèse du lemme avec $c = 0$, alors $\nu(t) \leq 0$,
(i.e.) $x(t) = \widetilde{x}(t)$. Il s'en suit que $x(t) = \widetilde{x}(t)$, pour tout $t \in [t_0 - r, t_1 + \epsilon_1)$, ce qui contredit la définition de t_1.
Donc la solution du problème posé est unique.

Chapitre 2

Etude des points d'équilibre

Dans ce chapitre on va s'intéresser à l'étude des points d'équilibre d'une équation différentielle à retard, et à la linéarisation de cette équation au voisinage d'un point d'équilibre

2.1 Points d'équilibre :

Soit l'équation differentielle à retard suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), x(t-r)), & t > t_0 \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-r, 0] \end{cases} \tag{2.1}$$

Définition 2.1 *On appelle point d'équilibre d'une équation différentielle à retard, une solution que l'on note x^*, vérifiant la condition suivante :*
$f(t, x^*, x^*) = 0$, donc $\dot{x}^* = 0$, implique que $x^* = Cste$.

Résultat : Le point d'équilibre d'une équation différentielle à retard est une solution constante.
Remarque : Si $r = 0$; l'équation (1.2) devient : $\dot{x} = f(t, x(t), x(t)) = g(t, x(t))$.
Qui est une équation différentielle ordinaire.
En changeant la condition initiale un peu de la solution constante ; on obtient
$x(t_0) = x(t) = x^* + \epsilon$, soit $y(t) = x(t) - x^*$, donc
$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}^* = x(t)$

$$\dot{y}(t) = f(t, x(t), x(t)) = g(t, x(t)) \tag{2.2}$$

En appliquant le développement limité de Taylor à $\dot{y}(t)$; on obtient

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*, x^*)(x(t) - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, x^*, x^*)(x(t) - x^*)$$

En posant : $x(t) - x^* = y(t)$; on obtient,

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*, x^*)y(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, x^*, x^*)y(t)$$

et en posant

$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*, x^*) = a(t), \ \frac{\partial f}{\partial y}(t, x^*, x^*) = b(t)$

on aura finalement :

$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t) = (a(t) + b(t))y(t)$ Soit $c(t) = a(t) + b(t)$;

donc

$$\dot{y}(t) = c(t)y(t) \tag{2.3}$$

2.2 Etude de l'équation ($\dot{y}(t) = C(t)y(t)$) :

Supposons que c est continue et périodique, de période $\omega > 0$, i.e. $c(t+\omega) = c(t)$. Dans ce cas ; on fait appel au théorème de Floquet pour déterminer la solution de l'équation (2.3)

Théorème de Floquet Soit l'équation linéaire

$$X'(t) = A(t)X \tag{2.4}$$

où A est continue, périodique, par rapport à t et de période ω ($\omega > 0$) ; i.e. : $A \in C(R, M_n(R))$ et $A(t + \omega) = A(t)$.

Si $Y(t) = Y(t + \omega)$ est une autre solution.

en effet : $Y'(t) = X'(t + \omega) = A(t + \omega)X(t + \omega) = A(t)Y(t)$

Théorème 2.1 *Toute base de solutions X du système 2.4, peut se représentée sous la forme :*

$$X(t) = P(t).\exp(Rt), \ t \in R \ et \ R \in M_n(R)$$

où $P \in C^1(R, M_n(R))$ et P est inversible, périodique, i.e.

$$detP \neq 0 \quad et \quad P(t + \omega) = P(t), \quad \omega > 0$$

Preuve du théorème de Floquet :

On a $X' = A(t)X \Rightarrow \dfrac{dX}{X} = A(t)dt$

$$\begin{aligned} X' = A(t)X &\Rightarrow \frac{dX}{X} = A(t)dt \\ &\Rightarrow lnX - lnX(0) = \int_0^t A(s)ds \\ &\Rightarrow X = X_0 exp \int_0^{t+\omega} A(s)ds \\ &\Rightarrow X(t+\omega) = X_0 exp \int_0^{t+\omega} A(s)ds \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} X(t+\omega) &= X_0 exp\left(\int_0^t A(s)ds + \int_t^{t+\omega} A(s)ds\right) \\ &= X_0 \left(exp \int_0^{\omega} A(s)ds\right)\left(exp\int_0^t A(s)\right) ds \\ &= CX(t) \end{aligned}$$

avec $C = exp \int_0^{\omega} A(s)ds$

donc $C = expR\omega$

Soit $P(t) = X(t)exp(-Rt)$

$$\begin{aligned} P(t+\omega) &= X(t+\omega)\exp(-R(t+\omega)) \\ &= X(t)\exp(R\omega)\exp(-R\omega)\exp(-Rt) \\ &= X(t)\exp(-Rt) \end{aligned}$$

D'où $X(t) = P(t)\exp(Rt)$

$X' = P'expRt + RPexpRt = A(t)X$

Donc $P'expRt + RPexpRt = A(t)P(t)expRt$,

en simplifiant par $exp(Rt)$ on obtient finalement :

$$P' + RP = AP$$

on pose $X = PY$, obtient
$P'Y + PY' = APY = P'Y + PRY$
ce qui implique

$$Y' = RY \tag{2.5}$$

Le changement $X = PY$ transforme l'équation (2.4) à coefficients périodiques, en un système (2.5) à coefficients constants.

2.3 Les multiplicateurs de Floquet :

Soit l'équation :

$$X'(t) = A(t)X$$

où A est continue, périodique, par rapport à t et de période ω ($\omega > 0$) ; i.e :
$A \in C(R, M_n(R))$ et $A(t+\omega) = A(t)$
Si X une base de solution de (2.4) d'aprés les résultats vu précédaments dans la preuve On a :

$$\begin{aligned} X(t+\omega) &= X(t)C \\ &\Rightarrow X(\omega) = X(0)C \\ &\Rightarrow C = X^{-1}(0)X(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X(0)exp\int_0^\omega A(s)ds \\ &= X(0)exp(R\omega) \end{aligned}$$

Donc $exp(R\omega) = X^{-1}(0)X(\omega) = C$

Définition 2.2 *On appelle multiplicateur de Floquet, les valeurs propres de la matrice C*

Remarque Si X est base de solutions de (2.4), alors si X_1 est une autre solution :
$X_1 = XT$, avec T inversible, appartenant à $M_n(R)$;
$X_1(t+\omega) = X_1(t)C_1, \quad t \in R.$

Donc $C_1 = X_1(0)X_1(\omega) = T^{-1}X^{-1}(0)X(\omega)T = T^{-1}CT$
D'où C_1 est semblable à C

2.4 Résultats

Résultat 2.1 $X_i(t+\omega) = X_i(t)C_i$
A chaque matrice fondamentale $X_i(t)$, correspond un opérateur C_i différent, mais le point essentiel est que tous ces operateurs, ont les mêmes valeurs propres μ_i
(car elle sont semblables).

Les nombres complexes μ_i, $(i-1, ..n)$ valeurs propres des matrices C_i, sont appelés, les multiplicateurs de Floquet de l'équation périodique $X' = A(t)X$, et dépendent du choix de la matrice $A(t)$.

Théorème 2.2 *Le système (2.4), admet une solution non triviale, telle que :*

$$X(t+\omega) = \mu X(t) \tag{2.6}$$

si et seulement si, μ est multiplicateur de (2.4) en particulier, si $\mu = 1$, la solution est périodique.

Preuve : Si X est une base de solutions, i.e. X est la matrice fondamentale de (2.4) ; alors la solution s'écrit : $X = X\varepsilon, \quad \varepsilon = Cste$
Donc

$$\begin{aligned} X(t+\omega) &= X(t+\omega)\varepsilon \\ &= X(t)C\varepsilon \\ &= \mu X(t) \\ &= \mu X(t)\varepsilon \end{aligned}$$

Résultat 2.2 *Soit X, la base de solutions de (2.4) qui satisfait $X(0) = I_n$, avec* $\exp(R\omega) = X(\omega)$*. Les multiplicateurs de (2.4) sont les valeurs propres de $X(\omega)$*

Résultat 2.3 *Dans le système périodique, on a plusieurs solutions, il suffit de trouver la matrice fondamentale X et les autres solutions sont des combinaisons linéaire de X.*

Appliquons directement à notre equation (2.3) ce résultat :
Donc si Y la solution fondamentale de l'équation (2.3) qui est exprimée d'apres le théorème de Floquet par $Y(t) = P(t)exp(Rt)$, avec $t \in R$ et $R \in M_n(R)$ où $P \in C^1(R, M_n(R))$ et P est inversible, périodique alors $Y_1(t) = QY(t)$, tel que $Y_1(t)$ est une autre solution de (2.3) et Q_i une matrice inversible.

Théorème 2.3 *Toutes les solutions de l'équation*

$$X' = A(t)X \tag{2.7}$$

où
$A(t + \omega) = A(t)$
ont les mêmes propriétés de stabilité.

i/ *pour que les solutions de l'équation (2.7) soient stables, il faut et il suffit que $|\mu_j|$ de chaque multiplicateur soit≤ 1.*

ii/ *Pour que les solutions de (2.7) soient asymptotiquement stable, il faut et il suffit que le module $|\mu_j|$ de chaque multiplicateur < 1, i.e. :*
$X(t) \to 0, quand \;\; t \to \infty \Leftrightarrow |\mu_j| < 1$

2.5 Système non homogène du premier ordre

Considérons le système non homogène du premier ordre suivant :

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \tag{2.8}$$

avec $A \in C(R, M_n(R))$ et $B \in C(R, R^n)$ et A, B périodique de même période ω ($\omega > 0$). On 'intéresse aux solutions périodiques de période ω de (2.8).
Notons $S_p(B)$, l'ensemble des solutions non homogènes et S_p l'ensemble des solutions homogènes

$$S_p(B) = v + S_p = \{X/X = v + w, w \in S_p\}$$

Exemple
Soit l'équation

$$X' = -\cos(t)X + \cos(t) \tag{2.9}$$

$A(t) = -\cos(t)$ est périodique de période 2π, $B(t) = \cos(t)$ avec $X(0) = \alpha$ et $n = 1$
Déterminons la solution homogène de (2.9).

$$\begin{aligned} X' = -\cos(t)X \quad &\Rightarrow \quad \frac{dX}{X} = -\cos(t) \\ &\Rightarrow \quad lnX = -\sin(t) + c \\ &\Rightarrow \quad X(t) = Kexp(-\sin(t)) \end{aligned}$$

La solution non homogène de (2.9) :
$X(t) = K(t)\exp(-\sin t)$
Donc $X'(t) = K'(t)\exp(-\sin t) + K(t)\cos t \exp(-\sin t)$
On remplace dans (2.9), on obtient :
$K'(t)\exp(-\sin t) + K(t)\cos t \exp(-\sin t) = \cos(t)K(t)\exp(-\sin t) + \cos(t)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad K'(t)\exp(-\sin t) = \cos(t) \\ &\Rightarrow \quad K'(t) = \cos(t)\exp(\sin(t)) \\ &\Rightarrow \quad K(t) = \exp(\sin(t)) + C_1 \\ &\Rightarrow \quad X(t) = \exp(-\sin(t))[\exp(\sin(t)) + C_1] \\ &\Rightarrow \quad X(t) = 1 + C_1\exp(-\sin(t)) \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} X(0) = \alpha \quad &\Rightarrow \quad X(0) = 1 + c_1 = \alpha \\ &\Rightarrow \quad c_1 = \alpha - 1 \\ &\Rightarrow \quad X(t) = 1 + (\alpha - 1)\exp(-\sin(t)) \\ &\Rightarrow \quad X(t) = 1 - \exp(-\sin t) + \alpha\exp(-\sin t) \end{aligned}$$

Cette solutions est périodique de période 2π.

Exemple

Soit l'équation : $X'(t) = -\cos(t)X + 1$, $A(t) = -\cos t$; $B(t) = 1$, sont périodiques de période 2π, $X(0) = \alpha$, $\alpha \in R$.

Donc $X(t) = \exp(-\sin t)\displaystyle\int_0^t \exp(\sin s)ds + \alpha\exp(-\sin t)$

$$X(2\pi) - X(0) = \int_0^{2\pi} \exp(\sin s)ds > 0.$$

Cette solution n'est pas périodique.

2.6 Equation homogene du second ordre

Soit le système suivant :

$$X'' + a_1(t)X' + a_0(t)X = 0 \tag{2.10}$$

avec $a_i \in C(R, C)$ et $a_i(t+\omega) = a_i(t) : i = 0, 1$

Si on pose : $\begin{cases} X_1 = X \\ X_2 = X' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1' = X_2 \\ X_2' = -a_1(t)X_2 - a_0(t)X_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

On prend $y = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$; on aura $y' = A(t)y$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$

$X = (X_1, X_2)$; base de solutions de (2.9) ssi

$X = (X_1, X_2) = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1' & X_2' \end{pmatrix}$ est base de (2.9)

Soit X la base de (2.9) tel que $X(0) = I_2$, alors les multiplicateurs de (2.9) sont les valeurs propres de la matrice $X(\omega)$

Les valeurs propres μ_1, μ_2 de $X(\omega)$ sont solutions de l'équation caractéristique : $det(X(\omega) - \mu I_2) = 0$, qui implique :

$\mu^2 - 2a\mu + b = 0$, avec $2a = tr(X(\omega))$.

or $tr(X(\omega)) = X_1(\omega) + X_2'(\omega) = \mu_1 + \mu_2$,

d'où $2a = \mu_1 + \mu_2$ et $b = det(X(\omega)) = \mu_1\mu_2$.

Notons que le Wronskien $W_x = det(X)$, qui satisfait :

$det(X(\omega)) = exp\left(-\int_0^{\omega} a_1(s)ds\right) = \mu_1\mu_2,$

Si a_1 est de période 0, alors $\mu_1\mu_2 = 1$ or $b = \mu_1\mu_2$ ce qui donne $b = 1$.

Donc μ_1, μ_2 sont solutions de l'équation :

$\mu^2 - 2a\mu + 1 = 0$, avec $2a = X_1(\omega) + X_2'(\omega)$

d'où $\mu_1 = a + \sqrt{a^2 - 1}$ et $\mu_2 = a - \sqrt{a^2 - 1}$.

Les propriétés de stabilité de l'équation et l'existence de solutions périodiques dépendent des valeurs de a.

Pour illustrer ces notions, nous étudions un exemple de système linéaire à coefficients périodiques, qui est 'l'équation de Mathieu'.

Soit l'équation différentielle du second ordre de période 2π :

$x'' + (\alpha + \beta\cos(t))\, x = 0$ où $\alpha, \beta \in R$, qui est équivalente au système différentiel :

$$X' = A(t)X \text{ où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta\cos(t) & 0 \end{pmatrix} = A(t + 2\pi)$$

$$\text{et où } X = (X_1, X_2) \text{ avec } \begin{cases} X_1 = X \\ X_2 = X' \end{cases}.$$

Il existe deux multiplicateurs μ_1 et μ_2 dont on ne sait pas calculer les valeurs exactes, qui dépendent de α et β puisque $tr(A(t)) = 0$, alors $\mu_1\mu_2 = 1$, μ_1 et μ_2 sont des valeurs propres de $X(2\pi)$ et sont solutions d'une équation du second degré de la forme :

$\mu^2 - \varphi(\alpha, \beta)\mu + 1 = 0$, où $\varphi(\alpha, \beta) = \mu_1 + \mu_2 = tr(X(2\pi))$

Donc μ_1 et $\mu_2 = \dfrac{1}{2}\left(\varphi \pm \sqrt{\varphi^2 - 4}\right)$

Les propriétés de stabilité des solutions de l'équation de 'Mathieu' et l'existence de solutions périodiques dépendent des valeurs de $\varphi(\alpha, \beta)$. Sans connaître explicitement $\varphi(\alpha, \beta)$; on peut en deduire de l'équation de 'Mathieu'

1) Si $\varphi^2 > 4\varphi > 2$ ou $\varphi < 2$, les multiplicateurs sont réels et différent, il résulte que soit $0 < \mu_1 < 1$ et $\mu_2 > 1$, soit $-1 < \mu_1 < 0$ et $\mu_2 < -1$.

Il n'existe donc, pas de solution périodique d'après le théorème (2.3) et toutes les solutions sont instables d'après le théorème précédent. Dans l'espace des paramètres α et β, les régions $\varphi(\alpha, \beta) > 2$ et $\varphi(\alpha, \beta) < -2$ sont des régions d'instabilité.

2) Si $-2 < \varphi^2 < 2$, les multiplicateurs sont complexes, $\mu_1 = \overline{\mu_2}$ et $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$; $\mu_1 = exp(i\theta)$ et $\mu_2 = exp(-i\theta)$, avec $0 < \theta < \pi$. En vertu du théorème 5 la région $-2 < \varphi(\alpha,\beta) < 2$ dans l'espace des paramètres α et β est une region de stabilité.

3) Si $\varphi = 2$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, alors toutes solutions du système $X' = A(t)X$ sont periodique, de période 2π et le système est stable.

4) Si $\varphi = -2$, $\mu_1 = \mu_2 = -1$, alors d'aprés le théorème 5, le système est stable ; on étudie maintenant la périodicité.
On a $X(t+2\pi) = -X(t) \Rightarrow X(t+2(2\pi)) = -X(t+2\pi)$
or $-X(t+2\pi) = X(t)$; donc $X(t+2(2\pi)) = X(t)$.
Alors le système est périodique de période 4π.

2.7 Les équations non homogène du second ordre

Soit l'équation suivante :

$$X'' + a_1(t)X' + a_0(t)X = b(t) \tag{2.11}$$

où $a_j(t+\omega) = a_j(t)$; avec a_j et $b \in C(R,C)$ $j = 0.1$
$S_2p(b)$ est l'ensemble de toutes les solutions de (2.10) qui sont périodiques, de période $\omega > 0$

$$S_2p(b) = \nu + S_2p = \{x/x = \nu + \mu, \mu \in S_2p\}$$

ν est la solution particulière de $S_2p(b)$ et S_2p l'ensemble de toutes les solutions de l'équation homogène, de période ω), le système associé à (2.10) est

$$Y' = A(t)Y + B(t) \tag{2.12}$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$.

A et B sont périodiques de période ω, les solutions de (2.10) sont périodiques de période ω ssi Y est solution de de période (2.10) est périodique de période ω,
le théorème précédent, implique que si l'équation homogène de (2.10) n'a pas de solutions de période ω, alors il existe de l'équation (2.10), une unique solution de période ω, pour chaque $b \in C(R,C)$ de période ω

Conclusion :

Il n'existe pas de méthode générale pour étudier, toutes les équations linéaires périodiques, mais on a montré que les propriétés qualitatives des solutions de chaque équation sont déterminées par un ensemble de nombres complexes μ_j, appelés multiplicateurs de l'équation correspondante.

2éme cas :

Si $r \neq 0$; le développement limité de $\dot{y}(t)$ donne

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*, x^*)y(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, x^*, x^*)y(t-r)$$

où $f : R^3 \to R$, fonction continue et tel que $f(t, x^*, x^*) = 0$

En posant :

$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*, x^*) = a(t)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(t, x^*, x^*) = b(t)$

on obtient :

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t-r) \tag{2.13}$$

Considérons le cas où $a(t)$ et $b(t)$ sont des constantes i.e. :

$a(t) = a$ et $b(t) = b$

L'équation (α) devient :

$$\dot{y}(t) = ay(t) + by(t-r) \tag{2.14}$$

On va s'intéresser particulièrement aux solutions de la forme :

$y(t) = e^{\delta t}$.

$y(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow$

$$\dot{y}(t) = \delta e^{\lambda t} \tag{2.15}$$

En remplaçant dans (2.14) dans (2.13) ; on obtient

$$\lambda e^{\delta t} = ae^{\delta t} + be^{\delta(t-\nu)} \Rightarrow \delta e^{\lambda t} = ae^{\delta t} by^{\delta t} be^{-\delta \nu} \quad (3)$$

En simplifiant par $e^{\delta t}$ dans (3) ; on obtient

$\gamma = a + be^{-\delta r} \Rightarrow \gamma - a = be^{-\delta r} \Rightarrow (\gamma - a)e^{\delta r} = b \Rightarrow$

$(\gamma - a)e^{(\delta r + ar - ar)} = b \Rightarrow (\delta - a)re^{(\delta - a)r} = rbe^{-ar}$

En posant :

$\lambda = (\delta - a)r$ et $\alpha = -rbe^{-ar}$

on obtient l'équation suivante :

$$\lambda e^{\lambda} + \alpha = 0 \tag{2.16}$$

Théorème 2.4 *Soit l'équation*

$$\lambda e^{\lambda} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda} = -\alpha \tag{2.17}$$

1) *Si $\alpha > e^{-1}$, les racines de l'équation (2.15) se présentent en couples de racines complexes conjuguées λ_p et $\overline{\lambda}_p$ avec les propriétés suivantes :*

$\lambda_p = \sigma_p + it_p$ *avec* $2p\pi < t_p < (2p+1)\pi$, $p = 0.1.2....$

$\overline{\lambda}_p = \sigma_p - it_p$

2) *Si $0 < \alpha \leq e^{-1}$, le même résultat reste valable, sauf pour λ_0 et $\overline{\lambda}_0$ qui se remplacent par :*

a/ $\lambda_0 = \overline{\lambda}_0 = -1$, *si* $\alpha = e^{-1}$.

b/ pour $\alpha < e^{-1}$, $\lambda_0 = \sigma_0$ *et* $\overline{\lambda}_0 = \overline{\sigma}_0$ *avec* $\sigma_0 < log\alpha < -1 < \overline{\lambda}_0 < 0$.

c/ si $\alpha < \frac{\pi}{2}$ *; chaque racine à une partie réelle négative*

si $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$, *alors :*

$\sigma_p > 0$, *selon que* $p < \dfrac{2\alpha - \pi}{4\pi}$

$\sigma_p = 0$, *selon que* $p = \dfrac{2\alpha - \pi}{4\pi}$

$\sigma_p < 0$, *selon que* $p < \dfrac{2\alpha - \pi}{4\pi}$

En particulier, l'équation (2.15), admet deux racines avec la partie réelle nulle, ssi $\alpha = 2k\pi + \pi/2$, *si* $k \in N^*$, *ainsi* $\sigma_0 = 0$, *si* $\alpha = \pi/2$ *et* $\sigma_0 > 0$ *si* $\alpha > \pi/2$, *on a aussi* $\sigma_{p+1} < \sigma_p$ *pour tout* α *et tout* $p \geq 0$ *et* $\tan(t_p + 1) > \tan(t_p)$

i/ Pour tout α, *quand* $\sigma_p < -1$

ii/ pour $\alpha < \pi/2$ *et* $\forall p \geq 1$

pour p, plus grand ;

$$\begin{cases} t_p = 2p\pi + \pi/2 - \dfrac{log\frac{2p\pi}{\alpha}}{2p\pi} + O\left\{\left(\dfrac{logp}{p}\right)^2\right\} \\ \\ \sigma_p = -log\left\{\dfrac{(2p+1/2)\pi}{\alpha}\right\} + O\left\{\left(\dfrac{logp}{p}\right)^{2r}\right\} \end{cases}$$

Preuve :

Si on écrit $\Phi(\nu) = \dot{\nu}e^{\nu}$

$\Phi'(\nu) = e^{-\nu} - \nu e^{-\nu} = (1-\nu)e^{-\nu}$

on a $\Phi(\nu)$ est définie, quelque soit ν, elle est croissante si $\Phi'(\nu) > 0$; i.e. $\nu < 1$.

et décroissante si $\Phi'(\nu) < 0$; i.e. $\nu > 1$.

Si $\Phi'(\nu) = 0 \Rightarrow \nu = 1 \Rightarrow \Phi(\nu) = e^{-1}$, qui est une valeur maximale, donc l'équation $\Phi(\nu) = \nu e^{\nu} = \alpha$ admet :

1/ Deux racines réelles ν' et ν'' tel que

$0 < \nu' < 1 < log(\frac{1}{\alpha}) < \nu''$, si $\alpha < e^{-1}$

2/Une racine double $\nu = 1$, si $\alpha = e^{-1}$

3/ Pas de racine réelle, si $\alpha > e^{-1}$

4/ Une racine réelle, $\nu < 0$, si $\alpha < 0$.

L'illustration de ces résultats est donnée selon le graghe (2.1)

Si on écrit $\lambda = -\nu$; on trouve toutes les racines réelles de (2.15)

On va s'intéresser aux solutions complexes :

Posant $\lambda = \sigma + it$ pour n'importe qu'elle racine de l'équation (2.15) avec $t \neq 0$ et $\mu = -\sigma$; on a :

$$\begin{aligned}
\lambda e^{\lambda} = \alpha \quad &\Rightarrow \quad (\sigma + it)e^{\sigma+it} = -\alpha \\
&\Rightarrow \quad (-\mu + it)e^{-\mu+it} = -\alpha \\
&\Rightarrow \quad -(\mu - it)e^{-\mu+it} = -\alpha \\
&\Rightarrow \quad \frac{\mu - it}{e^{\mu-it}} = \alpha \\
&\Rightarrow \quad \mu - it = \alpha e^{\mu-it} \\
&\Rightarrow \quad \mu - it = \alpha e^{\mu}(cost - isint)
\end{aligned}$$

Par identification ; on obtient $\begin{cases} \mu = \alpha e^{\mu} cost & (1) \\ t = \alpha e^{\mu} isint & (2) \end{cases}$

$\dfrac{\mu}{t} = cotg(t) \Rightarrow \mu = tcotg(t)$

La deuxieme équation, nous donne

$t = \alpha e^{tcotg(t)} isint \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{sint} e^{-tcotg(t)}$

notons $cos\omega t = \frac{1}{sint}$, d'où $\alpha = te^{-tcotg(t)} cos\omega t$

on ecrit maintenant :

$$x(T) = Te^{-Tcotg(T)} \cos ecT \tag{2.18}$$

on a : $Te^{-Tcotg(T)} > 0$, ainsi $x(t) < 0$ si $\cos ecT = \frac{1}{sinT} < 0$ i.e. $(2p-1)\pi < T < 2p\pi$

Supposons que $2p\pi < T < (2p+1)\pi$, tel que $x(T) > 0$.

on a : $\dfrac{x'(T)}{x(T)} = \dfrac{1}{T} - 2cotgT + tcos\omega T = \dfrac{(1-Tcotgt)^2+T^2}{T} > 0$

Donc $x'(T) > 0$, pour $2p\pi < T < (2p+1)\pi$

$\lim\limits_{T\to(2p+1)\pi^-} x(T) = +\infty$, $\lim\limits_{T\to(2p)\pi^+} x(T) = 0$, si $p \geq 0$

D'où l'illustration graphique est donnée par (2.2)

Par consèquent, pour tout entier p positive, il existe seulement une valeur qui satisfait (2.17) et telle que $2p\pi < T < (2p+1)\pi$

On appelle cette valeur t_p

Si $p = 0$, $x(T) \to e^{-1}$, quand $T \to 0^+$

D'où l'illustration graphique est donnée par (2.3)

Selon que $\alpha > e^{-1}$ ou non, il existe au plus une valeur de t satisfaisant (2.17) et $2p\pi < t < (2p+1)\pi$, si elle existe on l'appelle t_0, ceci achève la première partie du théorème.

La seconde partie suit, lorsqu'on observe que, $x(T) = Te^{-Tcotg(T)}\cos ecT$,
avec

$$\cos ecT = \frac{1}{\sin T}$$

et

$$x(2p\pi+\pi/2) = (2p\pi+\pi/2)e^{-(2p\pi+\pi/2)cotg(2p\pi+\pi/2)}cos\omega(2p\pi+\pi/2) = 2p\pi+\pi/2$$

on a :

1/ $t_p = 2p\pi + \pi/2$ et $\sigma_p = -t_p cotgt_p = 0$, selon que $\alpha = 2p\pi + \pi/2$

2/ $t_p > 2p\pi + \pi/2$ et $\sigma_p = -t_p cotgt_p > 0$, selon que $\alpha > 2p\pi + \pi/2$

3/ $t_p < 2p\pi + \pi/2$ et $\sigma_p = -t_p cotgt_p < 0$, selon que $\alpha < 2p\pi + \pi/2$

Si on ecrit $\mu_p = -\sigma_p$ et $\nu = \alpha^2 e^{2\mu} - \mu^2$
on a :

$$t_p^2 = \alpha^2 e^{2\mu p}(1 - cos^2(t)) = \alpha^2 e^{2\mu p}(1 - \frac{\mu_p^2}{\alpha^2 e^{2\mu p}})$$

$$= \alpha^2 e^{2\mu p} - \mu_p^2$$

Donc $\nu(\mu_p) = t_p^2$

On suppose $\alpha \geq \pi/2$ pour $p \geq 0$; on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d\nu}{d\mu} &= 2\alpha^2 e^{2\mu} - 2\mu \\
&= 2(\alpha^2 e^{2\mu} - \mu) \\
&= e^{2\mu}(2\alpha^2 - \frac{2\mu}{e^{2\mu}}) \\
&= e^{2\mu}(2\alpha^2 - 2\mu e^{-2\mu}) \\
&= e^{2\mu}(2\alpha^2 - \Phi(2\mu))
\end{aligned}$$

Ainsi $\dfrac{d\nu}{d\mu} \geq e^{2\mu}(2\alpha^2 - e^{-1}) > 0$, pour tout μ, pourvu que $(2\alpha^2 - e^{-1}) > 0$,

Il suit que $\nu(\mu)$ est croissante en μ, si $\alpha \geq \pi/2 > e^{-1}/2$

Comme $t_{p+1}^2 > t_p^2$; on conclut que $\mu_{p+1} > \mu_p$, d'où $\sigma_{p+1} < \sigma_p$, $\forall p \geq 0$

On suppose $\alpha < \pi/2$, pour $p \geq 1$, on a :

$$\mu_p = \frac{1}{2} log(\frac{\mu_p^2 + t_p^2}{\alpha^2}) > \log(\frac{t_p}{\alpha}) > \log(\frac{2\pi}{\pi/2}) = log(4) > 1$$

encore, pour $\mu \geq \mu_1 > 1$; on a :

$$\frac{d\nu}{d\mu} = 2(\alpha^2 e^{2\mu} - \mu) = 2(\nu + \mu^2 - \mu) > \nu \quad et \quad \nu(\mu_1) = t_1^2 > 0$$

ν croissante avec μ, pour tout $\mu \geq \mu_1$.

Ainsi $\mu_{p+1} > \mu_p$, $\forall p \geq 1$.

Mais si $\mu_0 \geq \mu_1$;

on a $t_0^2 = \nu(\mu_0) \geq \nu(\mu_1) = t_1^2$, ce qui est impossible, ainsi $\mu_1 > \mu_0$.

D'où $\sigma_{p+1} < \sigma_p$, $\forall p \geq 0$

encore $\forall \alpha$, par les équations :

$$\begin{cases} \mu = \alpha e^{\mu} \cos t \\ t = \alpha e^{\mu} \sin t \end{cases} \quad \text{et les calculs qui s'en suivent,}$$

la fonction $\Phi(\nu) = \alpha \cos t$ est décroissante.

Quand μ croissante, pourvu que $\mu > 1$.

Ainsi, si $\mu_p > 1$ (i.e. $\sigma_p < -1$) ; on a $\cos t_{p+1} < \cos t_p$ et par consequent

$\tan t_{p+1} > \tan t_p$, mais par les inégalités

$$\mu_p = \frac{1}{2} log \left(\frac{\mu_p^2 + t_p^2}{\alpha^2} \right) > log \left(\frac{t_p}{\alpha} \right) > log \left(\frac{2\pi}{\pi/2} \right) = log 4 > 1$$

où $\mu_1 > 1$, pour $\alpha < \pi/2$, ceci achève la démonstration de la troisième partie du théorème.

Finalement, on ecrit

$t = t_p$, $\mu = \mu_p$, $P = (2p + \frac{1}{2})\pi$ et $\eta = \frac{\mu}{t} = cotg(t)$

quand

$p \to \infty$, on a $\mu = \frac{1}{2} log \left(\frac{\mu^2 + t^2}{\alpha^2} \right) > log \left(\frac{t}{\alpha} \right) \to \infty$

$\alpha \cos t = \mu e^{-\mu} = \Phi(\mu) \to 0$

et de la $\eta = cotg(t) \to 0$.

Par conséquent $0 < P - t \to 0$ et $\eta = \tan(P - t)$ tel que $t = P - \eta + O(\eta^3)$

Dans la suite $\mu = \frac{1}{2} log \left(\frac{\mu^2 + t^2}{\alpha^2} \right) = log \left(\frac{t}{\alpha} \right) + O(\eta^2)$

et $\eta = \left(\frac{\mu}{t} \right) - \left(\frac{logt}{t} \right) - \left(\frac{logP}{P} \right)$

Ainsi $\mu = log \left(\frac{P}{\alpha} \right) + O \left(\frac{\mu}{P} \right) + O(\eta^2) = log \left(\frac{P}{\alpha} \right) + O(\eta^2)$

$$\eta = \left(\frac{\mu}{t} \right) = \frac{log \left(\frac{p}{\alpha} \right) + O(\eta^2)}{P + O(\eta)} = \frac{log(\frac{p}{\alpha})}{P} + O(\eta^2)$$

et $t = P - \frac{log(\frac{p}{\alpha})}{P} + O(\eta^2)$

Ce qui achève la démonstration de la dernière partie du théorème.

Chapitre 3

Equation à retard dépendant de l'état

3.1 Equation à retard dépendant de l'état :

Définition 3.1 *On appelle équation différentièlle à retard dépendant de l'état ; une équation de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - r(x(t)))), & pour \quad tout \quad t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), & \forall \ t \in [-\sigma, 0] \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : R^3 \longrightarrow R$, fonction continue
et $r : R \longrightarrow [0, \infty)$, $\sigma = \max\limits_{x \in R} \tau(x)$ et $\phi \in C\left([-\sigma, 0], R\right)$

On remarque que r est fonction de $x(t)$.

3.2 Exemple et commentaires :

Citons l'exemple suivant qui à été proposé récemment par Arino, Hbid et Bravo [15], comme modèle décrivant l'évolution d'une population de poissons dont les larves consomment une nourriture, supposée limitée.
Le modèle est sous la forme suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - r(t))) \\ \dot{r}(t) = h(x(t - r(t))) \end{cases}$$

où x est le nombre total de la population et r représente la durée nécessaire, pour que les larves deviennent des juvéniles, la deuxième équation différentielle ordinaire, elle dépend de la variable x, c'est pourquoi l'équation est dite, équation différentielle à retard dépendant de l'etat.
Ces dernières années, ces équations ont fait l'objet de plusieurs études, voir par exemple Kuang et Smith [21], Mallet-Aret et Nussbaum [11] qui ont étudié les équations de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - r(t))), t \geq 0$$

3.3 Existences et unicité de la solution :

Soit l'équation différentielle à retard dépendant de l'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - r(x(t)))), & pour \quad tout \quad t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), & \forall \ t \in [-\sigma, 0] \end{cases} \tag{3.2}$$

où $f : R^3 \longrightarrow R$, fonction continue et $r : R \longrightarrow [0, \infty)$,
$\sigma = \max\limits_{x \in R} \tau(x)$ et $\phi \in C\left([-\sigma, 0], R\right)$.

Supposons que f et r vérifient les hypothèses suivantes :

1/ f est localement lipschitzienne, par rapport à $x(t)$ et $x(t - r(x(t)))$.

2/ r est localement lipschitzienne

3/ f est bornée sur les bornes.

Pour un nombre positif T, soit X l'ensemble des fonctions continues de $[-\sigma, T]$ à valeurs réelles, muni de la norme du sup, X est un espace de Banach pour ω et p, deux réels positifs, soit C_ϕ le sous ensemble de X, définit par :

$$C_{\phi,T} = \begin{cases} x \in X, x(s) = \phi(s), & \forall s \in [-\sigma, 0] \\ \|x\| \leq \rho, \quad et \ |x(t) - x(s)| \leq \omega |t - s| & \forall t, s \in [-\sigma, T] \end{cases}$$

Proposition 3.1 *$C_{\phi,T}$ est compact.*

Preuve :

a/ Montrons d'abord que $C_{\phi,T}$ est relativement compact, pour cela, il suffit d'aprés le théorème d'Ascoli (voir annexe, (3.2), que $C_{\phi,T}$ soit borné et uniformément equicontinu.

i/ Il est clair que $C_{\phi,T}$ est bornée par construction

ii/ Pour tout $t, s \in [-\sigma, r]$ et pour tout $x \in C_{\phi,T}$ on a :

$$|x(t) - x(s)| \leq \omega|t - s| \tag{3.3}$$

pour $\epsilon \geq 0$, pour $|t - s| \leq \frac{\epsilon}{\omega}$, (3.3) donne $|x(t) - x(s)| \leq \epsilon$ ce qui prouve que $C_{\phi,T}$ est relativement compact.

b/ Montrons maintenant que $C_{\phi,T}$ est fermé.

Prenons donc, une suite $(x_n)_{n \in N}$ dans $C_{\phi,T}$, telle que $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ et montrons que $x(t) \in C_{\phi,T}$

D'une part, pour $n \in N$, on a $x_n(s) = \phi(s)\,;\forall s \in [-\sigma, 0]$:

En passant à la limite, on trouve :

$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \phi(t)\ \forall s \in [-\sigma, 0]$:

$$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x_n(n)| + |x_n(s) - x_n(t)| + |x_n(t) - x(t)| \tag{3.4}$$

D'après la définition de la limite , (3.4) devient :

$$|x(s) - x(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} + u|s - t| + \frac{\omega}{2} = \epsilon + R|s - t|, \forall \epsilon \geq 0, \quad R \geq 0$$

Ainsi :

$$|x(s) - x(t)| \leq \omega|s - t|$$

c/ $\|x\| = \|\lim_{n\to\infty} x_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \rho$

Alors $x \in C_{\phi,T}$ et par consequent $C_{\phi,T}$ est fermé ; on conclut que $C_{\phi,T}$ est compact.

Théorème 3.1 *Supposons que les hypothèses* 1/, 2/ *et* 3/ *sont vérifiées, alors pour toute fonction* ϕ *dérivable avec* $|\phi'(t)| \leq R$ *(*$R > 0$*), alors le problème (3.2) admet une solution unique* $x(t)$*.*

Preuve : Pour la démonstration, on applique le théorème du point fixe (voir appendice, théorème 3.3).

1/ Soit N la borne de ϕ, M la borne de f, supposons que $R \geq M$

Pour $\omega = R$ et $p = N + TM$, on définit, $C_{\phi,T}$.

D'aprés la proposition, précédente, $C_{\phi,T}$ est compact.

2/ Montrons qu'il est convexe :

a/ Soit $\alpha \in [0,1]$ et $x, y \in C_{\phi,T}$:

$$\begin{aligned} \alpha x(s) + (1-\alpha)y(s) &= \alpha\phi(s) + (1-\alpha)\phi(s), \forall s \in [-\sigma, 0] \\ &= \phi(s), \forall s \in [-\sigma, 0] \end{aligned}$$

b/ Pour tout $t, s \in [-\sigma, T]$ on a :

$$\begin{aligned} |\alpha x(s) + (1-\alpha)y(s) - \alpha x(t) + (1-\alpha)y(t)| &\leq |\alpha(x(s) - x(t)) + (1-\alpha)(y(s) - y(t))| \\ &\leq \alpha|(x(s) - x(t))| + (1-\alpha)|(y(s) - y(t))| \\ &\leq \alpha R|s-t| + (1-\alpha)R|s-t| \\ &\leq R|s-t| \end{aligned}$$

Alors $\alpha x + (1-\alpha)y$ est lipschitzienne sur $[-\sigma, T]$, avec la constante de lipschitz egale à R.

c/ x et y sont bornées par p, alors :

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\| \leq \rho$$

Donc $\alpha x + (1-\alpha)y \in C_{\phi,T}$ et par suite $C_{\phi,T}$ est convexe.

3/ Posons $J = [-\sigma, T]$ et considérons l'application :

$F : C_{\phi,T} \to X$, définie par :

$$(Fx)(t) = \begin{cases} \phi(t) & -\sigma \leq t \leq 0 \\ \\ \phi(0) + \displaystyle\int_0^t f(s, x(s), x(s - r(x(s))))ds, & \forall 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

si F est complétement continue et $F(C_{\phi,T}) \subset C_{\phi,T}$; Alors F admet un point fixe (voir appendice théorème (3.3)). Ce point fixe est une solution de l'équation (3.2)

$\triangleright$ Montrons que $F(C_{\phi,T}) \subset C_{\phi,T}$.

on sait que$(Fx)(t) = \phi(t)$ pour $\forall -\sigma \leq t \leq 0$ comme ϕ est une fonction bornée par N et R lipschitzienne alors $F(C_{\phi,T}) \subset C_{\phi,T}$

-a/ Si $x \in C_{\phi,T}$, on a, pour $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}
|(Fx)(t)| &\leq |\Phi(0) + \int_0^t f(s, x(s), x(s - r(x(s))))ds| \\
&\leq |\Phi(0)| + \int_0^t M ds \\
&\leq |\Phi(0)| + TM \\
&\leq N + TM \\
&= \rho
\end{aligned}$$

Donc F est bornée

-b/ Pour prouver que $F(x)$ est R-lipschitzienne, il suffit de montrer que $|(F(x)(t))'|$ est bornée par R

En effet :

$$(F(x)(t))' = f(t, x(t), x(t - \tau(x(t))))$$

$\|(F(x)(t))'\| \leq M$ d'après l' hypothèse (3/).

$$\|(F(x)(t))'\| \leq M \leq R$$

4/ Montrons maintenant que F est complètement continue

a/ Supposons que $x_j \in C_{\phi,T}$ et $\|x_j - x\|_\infty \to 0$.

Notons par $\rho_j(s) = r(x_j(s))$, $p(s) = r(x(s))$, l la constante de lipschitz de r et k la constante de lipschitz de f.

Donc pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|(Fx_j)(t) - (Fx)(t)| &\leq |\int_0^t f(s, x_j(s), x_j(s - \rho_j(s))) - f(s, x(s), x(s - \rho(s)))|ds \\
&\leq \int_0^t |f(s, x_j(s), x_j(s - \rho_j(s))) - f(s, x(s), x(s - \rho(s)))|ds \\
&\leq \int_0^t |f(s, x_j(s), x_j(s - \rho_j(s))) - f(s, x(s), x(s - \rho_j(s)))|ds \\
&+ \int_0^t |f(s, x(s), x(s - \rho_j(s))) - f(s, x(s), x(s - \rho(s)))|ds \\
&\leq k \int_0^t k \sup\{\sup_{s\in[-\sigma,T]} |x_j(s) - x(s)|, \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x_j(s - \rho_j(s)) - x(s - \rho_j(s))|\}d \\
&+ k \int_0^t k \sup\{\sup_{s\in[-\sigma,T]} |x(s) - x(s)|, \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x_j(s - \rho_j(s)) - x(s - \rho(s))\}ds \\
&\leq \int_0^t k \sup\{\|x_j - x\|_\infty, \|x_j - x\|_\infty\}ds \\
&+ \int_0^t k \sup\{0, \sup_{s\in[\sigma,T]} |x(s - \rho_j(s)) - x(s - \rho(s))|\}ds \\
&\leq \int_0^t k\|x_j - x\|_\infty ds + \int_0^t k \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x(s - \rho_j(s)) - x(s - \rho(s))|ds \\
&\leq \int_0^t k\|x_j - x\|_\infty ds + \int_0^t k \sup_{s\in[-\sigma,T]} R|s - \rho_j(s) - s - \rho(s)|ds \\
&\leq \int_0^t k\|x_j - x\|_\infty ds + \int_0^t kR \sup_{s\in[\sigma,T]} |\rho_j(s) - \rho(s)|ds \\
&\leq \int_0^t k\|x_j - x\|_\infty ds + \int_0^t kRl \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x_j(s) - x(s)|ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|F_j(x)(t) - F(x)(t)| &\leq T[k\|x_j - x\|_\infty + kRl\|x_j - x\|_\infty] \\
&\leq Tk[1 + Rl]\|x_j - x\|_\infty
\end{aligned}$$

Donc F est lipschitzienne dans $C_{\phi,T}$ et par conséquent elle est continue.

b/ F est compact, en effet :

Soit B un ensemble borné de $C_{\phi,T}$.

$\overline{F(B)}$; un fermé inclu dans $C_{\phi,T}$ qui est compact par conséquent, $\overline{F(B)}$ est compact. Ainsi F est complètement continue.
Le théorème du point fixe, nous donne.
Pour tout nombre $T \geq 0$, il existe une fonction $x \in C_{\phi,T}$, tel que
$(Fx)(t) = x(t)$, pour tout $t \in [0, T]$
Dans ce qui suit, on montre, l'unicité de la solution.
On procède par l'absurde.
Supposons qu'il existe deux solutions $x(t)$, $y(t)$; pour $t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|x(t) - y(t)| &\leq |\int_0^t (f(s, x(s), x(s - r(s))) - f(s, y(s), y(s - r(s))))ds| \\
&\leq \int_0^t |(f(s, x(s), x(s - \rho(s))) - f(s, y(s), y(s - \rho(s))))|ds \\
&\leq \int_0^t k\|x_j - x\|_\infty ds + \int_0^t kRl \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x(s) - y(s)|ds \\
&\leq (1 - p)k[1 + Rl]\|x - y\|_\infty \\
&\leq Tk[1 + Rl]\|x - y\|_\infty
\end{aligned}$$

pour $T < \dfrac{1}{k[1 + Rl]}$, on obtient :

$$|x(t) - y(t)| < \|x - y\|_\infty$$

contradiction, et par consequent, on a :
$x(s) = y(s)$, pour $s \in [o, T]$.

Exemple

Considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2\sin\left(x\left(t - \dfrac{(-x + 1)}{2}\right)\right), & t \geq 0 \\ x(t) = e^{-t}, & t \leq 0 \end{cases}$$

$\tau(x(t)) = \dfrac{(-x + 1)}{2}$, $f(t, x(t), x(t - r(x(t)))) = -2\sin\left(x\left(t - \dfrac{(-x + 1)}{2}\right)\right)$

et $\phi(t) = e^{-t}$

Il est clair que ν est une fonction lipschitzienne, f est de classe C^1, par rapport à x, donc elle est localement lipschitzienne et comme la fonction $\sin x$ est bornée par 1 pout tout x, alors f est bornée par 2.
de même ϕ est une fonction de classe C^1 et sa dérivée est bornée par 1.
Alors toutes les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées, donc cette équation, admet une solution unique.

3.4 Solution constante d'une équation différentielle à retard dépendant de l'état non linéaire :

3.4.1 Principaux résultats :

Considérons l'équation à retard dépendant de l'état non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), r(x(t))), & t \geq 0 \quad (3.5.1) \\ x(\theta) = \varphi(\theta), & \varphi \in [-r, 0] \quad (3.5.2) \end{cases} \tag{3.5}$$

Si $x(t) = \overline{x}(t) = \overline{x}$ est solution constante de (3.5) tel que
$\overline{x} : [-r, \infty) \to R$, alors on obtient :

$$\begin{cases} f(t, \overline{x}, \overline{x}), & t \geq 0 \\ x(t) = \varphi(t) = \overline{x}, & t \in [-r, 0] \end{cases} \tag{3.6}$$

Soient les données suivantes :
$\overline{x}_t(s) = \overline{x}(t+s) = \overline{x}_t$, pour $s \in [-r, 0]$, l'espace de Banach des fonctions continues $\overline{x}_t : [-r, 0] \to R$ muni de la norme : $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)|; pour \ \ s \in [-r, 0]\} = \|\overline{x}\|$ dénoté par $C = C([-r, 0], R)$.
Un voisinage fermé de rayon Q, d'un ensemble A dans un espace de Banach X est dénoté par $B_X(A; \theta) = \{x \in X; |x - a|_X \leq Q, \ pour \ a \in A\}$, notons par $|.|$ la norme de R, $\mathcal{L}(C, R)$ désigne l'espace des applications de C dans R.
Soient les hypothèses suivantes :

H_1 $f : [0, \infty) \times \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow R$, continûment différentielle ; où Ω_1, Ω_2 sont des intervalles de R

H_2 i/ $\tau : [0,\infty) \times \Omega_3 \to [0,r]$ continûment différentielle ; où Ω_3 est un sous-ensemble ouvert de C

ii/ τ est localement, continue, lipschitzienne dans le sens suivant

Pour chaque sous-ensemble, fermé et borné M de C, il existe une constante $L_1 = L_1(M) \geq 0$ telle que

$|\tau(t,\overline{\psi}_1) - \tau(t,\overline{\psi}_2)| \leq \|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\|, \quad t \in [0,T]$ et $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2 \in M$.

$\overline{x} : [-r,\infty) \to R$, solution constante de (3.5), la réstriction de $\overline{x}$ sur l'intervalle $[-r,0]$ est notée par $\overline{x}_0$, i.e. que $\overline{x}$ est la solution de (3.5.1) st (3.5.2) correspondante à la condition initiale $\overline{x}_0$.

On remarque que la continuité de la condition initiale n'est pas suffisante pour l'unicité de la solution.

Pour avoir l'unicité de la solution, il faut que la condition initiale soit au moins localement lipschitzienne, ce qui est le cas pour les conditions initiales de classes C^1 (voir J,H).

On notera ; par $x(t,\varphi)$ n'importe qu'elle solution de (3.5.1) et (3.5.2) correspondante à la fonction initiale $\varphi \in C$ et par

$\varepsilon(t) = x(t - \tau(t,x_t))$, $\overline{\varepsilon}(t) = \overline{x}(t - \tau(t,\overline{x}_t)) = \overline{x}$

on définit, donc les ensembles suivants associés à la solution constante $\overline{x}$

$A_1 = \{\overline{x}(t); t \in [0,T]\} = \{\overline{x}\}$, $A_2 = \{\overline{\varepsilon}(t); t \in [0,T]\} = \{\overline{x}\}$

et $A_1 = \{\overline{x}_t; t \in [0,T]\}$, on remarque que $A_1 = A_2$

A_1, A_2 et A_3 sont des sous ensembles compactes d'espaces respectifs R et C.

Puisque $\overline{x}$ est continue, les ensembles Ω_1, Ω_2 et Ω_3 sont des sous ensembles ouverts des espaces R et C respectivement.

Donc il existe des constantes positives Q_1, Q_2 et Q_3 tel que $B_R(A_1,Q_1) \subset \Omega_1$, $B_R(A_2,Q_2) \subset \Omega_2$ et $B_R(A_3,Q_3) \subset \Omega_3$.

Puisque f est continûment différentiable par rapport à son second et troisième argument, il existe une constante $N_1 > 0$ tel que :

$|D_2 f(t,\overline{x},\overline{x}| \leq N_1$ et $|D_3 f(t,\overline{x},\overline{x}| \leq N_1$ pour $t \geq 0$.

Lemme 3.1 *Considérons (H_1) et soit $\overline{x}[-r,\infty) \to R$, solution constante de (3.5), pour n'importe qu'elle $s > 0$;*

$|\varepsilon(t) - \overline{\varepsilon}(t)| \leq \|x_t - \overline{x}_t\|$, pour $t \in [0,s]$ et pour n'importe qu'elle fonction continue $x : [-r,\infty) \to R$ satisfaisant $x_t \in B_C(A_3,\theta_3)$ pour $t \in [0,s]$.

Preuve : Soit L_1 ; la constante de (H_2) (ii), associé à l'ensemble $B_C(A_3, \theta_3)$; en utilisant la définition de ε et $\overline{\varepsilon}$, l'inégalité triangulaire et le théorème de la valeur moyenne ; on obtient :

$$\begin{aligned}
|\varepsilon(t) - \overline{\varepsilon}(t)| &= |x(t - \tau(t, x_t)) - \overline{x}(t - \tau(t, \overline{x}_t))| \\
&= |x(t - \tau(t, x_t)) - \overline{x}(t - \tau(t, \overline{x}_t)) + \overline{x}(t - \tau(t, \overline{x}_t)) - \overline{x}(t - \tau(t, \overline{x}_t))| \\
&\leq |x(t - \tau(t, x_t)) - \overline{x}(t - \tau(t, \overline{x}_t))| + |\overline{x}(t - \tau(t, \overline{x}_t)) - \overline{x}(t - \tau(t, \overline{x}_t))|
\end{aligned}$$

on a $\tau \in [0, r] \Rightarrow -\tau \in [-r, 0]$, prenons comme $-\tau(t, x_t) = \theta$; on obtient

$$\begin{aligned}
|\varepsilon(t) - \overline{\varepsilon}(t)| &\leq \sup_{\theta \in [-r,0]} |x(t+\theta) - \overline{x}(t+\theta)| + \|\dot{\overline{x}}\| |\tau(t, x_t) - \tau(t, x_t)| \\
&\leq \sup_{\theta \in [-r,0]} |x_t(\theta) - \overline{x}_t(\theta)| \\
&\leq ||x_t - \overline{x}_t||
\end{aligned}$$

Pour $\overline{x}$; solution constante de (3.5) et pour n'importe quel t fixé ≥ 0 ; on définit l'opérateur linéaire $F(t)$ tel que $F(t) : C \to R$, défini comme suit :

$$F(t)\psi = D_2 f(t, \overline{x}, \overline{x})\psi(0) + D_3 f(t, \overline{x}, \overline{x})\psi(-\tau(t, \overline{x}_t))$$

et la fonction g : tel que :
$g : [0, \infty) \times \Omega_3 \to R$ et $g(t, \psi) = f(t, \psi(0), \, \psi(-\tau(t, \psi)) - F(t)\psi$
Il est evident que l'opérateur linéaire $F(t)$ soit borné, puisque par (H_2), il satisfait

$$|F(t)\psi| \leq \left(\max_{t \in [0,T]} |D_2 f(t, \overline{x}, \overline{x})| + \max_{t \in [0,T]} |D_3 f(t, \overline{x}, \overline{x})| \right) \|\psi\|$$

pour ces notations ; on peut réecrire (2.1) comme

$$\dot{x}(t) = F(t)x_t + g(t, x_t), \quad t \geq 0 \tag{3.7}$$

à qui lui est associée l'équation linéaire homogène suivante :

$$\dot{y}(t) = F(t)y_t, \quad t \geq 0 \tag{3.8}$$

qui se traduit aussi par l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, s) = F(t)u(t, s), \quad t \geq s \tag{3.9}$$

$$u(t,s) = \begin{cases} 1, & si \quad t = s \\ \\ 0, & t < s \end{cases} \tag{3.10}$$

Il est comme (voir eq [9]) que la stabilité asymptotique de la solution zéro (trivial) de (3.4) est équivalente à sa stabilité exponentielle, i.e. qu'il existe des constantes $K_0 \geq 1$ et$\alpha_0 > 0$ tel que

$$|u(t,s)| \leq K_0 e^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s \tag{3.11}$$

La preuve de notre principal théorème sera basée sur la serie de lemmes suivant :

Lemme 3.2 *En tenant compte des hypothèse (H_1) et (H_2) et soit $\overline{x} : [-r, \infty) \to R$, solution constante de (2.1) correspondante à la fonction initiale $\overline{x}_0$, alors il existe une constante $N_4 > 0$, tel que pour n'importe qu'elle $s > 0$*

$$|\dot{x}(t)| \leq N_4 \|x_t - \overline{x}_t\|, \quad t \in [0,s] \tag{3.12}$$

et

$$\|x_t - \overline{x}_t\| \leq e^{N_4 t} \|\varphi - \overline{x}_0\|, \quad t \in [0,s] \tag{3.13}$$

pour n'importe qu'elle solution x de (3.5.1) et (3.5.2) satisfaisant

$$t \in B_C(A_3, \theta_3) \tag{3.14}$$

Chapitre 4

Appendice

Définition 4.1 *On dit qu'un ensemble est relativement compact si sa fermeture est compact.*

Théorème 4.1 *(d'Ascoli* [7]*)*

Soit K ; un espace métrique compact, soit H un sous espace de $C(K)$, qui est l'ensemble des fonctions continues de K dans K. On suppose que H est uniformément equicontinue, i.e.

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, *tel que* $d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, $\forall f \in H$.

Alors H est relativement compact dans $C(K)$.

Définition 4.2 [7]

On dit qu'un ensemble A est convexe si on a $tx + (1-t)y \in A$, $\forall x, y \in A$, pour $\forall t \in [0, 1]$.

Définition 4.3 *Soient E et F, deux espaces topologiques. Une fonction $H : E \to F$ est dite compact, si l'image de tout borné de E est relativement compact dans F.*

Définition 4.4 *Soient E et F, deux espaces topologiques. Une fonction $h : E \to F$ est dite complètement continue, si elle set continue et compact.*

Théorème 4.2 [9]

Soient X, un espace de Banach U un convexe, fermé borné de X et $T : U \to U$, un opérateur complètement continu, alors T a un point fixe dans U.

Théorème 4.3 [13] *d'inversibilité de l'opérateur I-C*

Soit un espace de Banach X et un operateur $C \in L(X)$, tel que $\|c\| < 1$. Alors *l'operateur I-C est continûment, inversible et vérifie la majoration suivante :*

$$\|(I - C) - 1\| \leq \frac{1}{1 - \|c\|}$$

Théorème 4.4 [8] *(principe des applications contractantes)*
Soient M un espace métrique complet, muni de la distance d, et A un operateur, vérifiant les conditions suivantes :
1/ Pour tout élément x de M, Ax est un élément de M.
2/ Il existe, un réel α, avec $\alpha \in [0, 1]$, tel que pour tout element y, z de M, on a : $d(Ay, Az) \leq \alpha d(y, z)$.
Alors il existe un point fixe unique y de l'operateur A dans M, avec $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, où $y_n = Ay_n$, $n = 1, 2, ..., n$

Bibliographie

[1] *A. Domoshnitsky, M. Drakhlin*, Periodic solutions of differential equation with delay depending on solution, Nonlinear Anal. **30** (**1997**) , **1665-2672**.

[2] *A. Domoshnitsky, M. Drakhlin, E.Litsyn*, On equation with delay depending on solution, Nonlinear Anal. **49** (**5**) , **2002**, **689-701**.

[3] *F. Hartung*, On differentiability of solution with parameters in a class of functional differential equation Funct. Differential equation **4** (**1-2**) , **1997**, **65-79**..

[4] *F. Hartung, J. Turi*, Stability in a class of functional different equation with stat-dependent delay in. C. Corduneanu (Ed). Qualitative problem for differential equation and control theory. World Scientific, Singapore **1995**, pp**15-31**.

[5] *F. Hartung, J. Turi*, On differentiability of solutions with respect to parameters in state-dependent delays equation, J Differential equation **135** (**1997**) , **192-237**.

[6] *F. Hartung, J. Turi*, Linearized stability in functional differential equation with state dependent delays. Proceeding of the conference dynamical system and differential equation. added volume of discrete and continuous dynamical systems, **2000**, **416-425**.

[7] *G.Asonder, H.L.Smith*, overanging method of nonlinear dynamical systems. Nonlinear Anal. Theory Methods and appl **66**, **2000**, **71-84**.

[8] *G.S. Ladde, V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala*, On the exponential stability of stat-dependent delay equation, Acta Sci. Math. (Szeged) **19**, **1992**, **1983**.

[9] *H.P. Krishnan*, Existence of unstable manifolds for a certain class of delay differential equation, Elector J. Differential equation. **32** (**2002**), **1-13**.

[10] *J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel*, introduction to functional differential equation, Springer, New York **1993**.

[11] *J. Mallet-Paret, R.D Nussbaum, P. Paraskevopoulos*, Periodic solutions for functional differential equation with state-dependent time lags, topological method in nonlinear analysis, J ; Julianusz Schauder center. **3** (**1994**), **101-162**.

[12] *K.L Cooke, W. Huang*, On the problem of linearization for state-dependent delay differential equation, Proc, Amer. Math Soc. **124** (**5**), (**1995**) **1417-1426**

[13] *M. Brokate, F. Colonius*, Linearizing equation with state-dependent delay, Aplli. Math. Optim. **21** , (**1990**). **45-52**

[14] *M. Yebdri*, Die lineare stabilitat von periodischen losungen einer differentialgleichung mit verzogerung.

[15] *O. Arino, M.L, Hbid, R. Bravo de la Parra*, A mathematic model of growth of population of fish in the larval stage : density-dependence effects, Math. Biosci **150** (**1**), (**1998**). **1-120**.

[16] *P. Magal, O. Arino*,Existence of periodic solution for a state dependent delay equation, J. Differential equations. **165** (**2000**), **61-65**.

[17] *R.D. Driver*, Ordinary and delay differential equation. Spring-Verlag.

[18] *T. Luzyanina, K. Engelborghs, D. Rose*, Numerical bifurcation analysis of differential equation with state-dependent delays, Internat. J. Bifur. Chaos Appl Sci Eng. **11** (**2001**), **737-753**.

[19] *W.G. Aielle, H.I. Freedman, J. Wu*, Analysis of a model representing stage-structured population growth with delay, Siam J. Appl **52** (**3**), (**1992**). **855-869**

[20] *Y. cao, J. fan, T.C. Gard*, The effect of state-dependent delay on a stage-structured population growth model Nonlinear Anal. **19** (**2**), (**1992**). **95-105**.

[21] *Y. Kuang, H.L.Smith* slowlyautonomous state-depenent delay equation. Nonlinear Anal. Theory Methods and appl. **19** (**1992**), **855-872**.