REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE ABOU BAKR BELKAID

TLEMCEN

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de Magistère

Option : Géométrie différentielle

Théme

Existence et multiplicité de Solutions d'une équation elliptique du 4eme ordre Singulière sur une variété Compacte.

Présentée par : Zouaoui Ali

Soutenue le : 20 Mars 2013 devant le jury composé de :

M. H. DIB	**(Président)**	**Professeur Université de Tlemcen**
M. M. BOUCHEKIF	**(Examinateur)**	**Professeur Université de Tlemcen**
M. S. M. BOUGUIMA	**(Examinateur)**	**Professeur Université de Tlemcen**
M. M. BENALILI	**(Rapporteur)**	**Professeur Université de Tlemcen**

Année Universitaire 2012/2013

Remerciements

C'est avec un immense plaisir que je remercie mon directeur de thèse Monsieur Benalili Mohammed Professeur à l'Université de Tlemcen qui a guidé mes premiers pas de recherches lors de mon mémoire de Magistère. Son soutient continu, ses suggestions stimulantes, et accueils chaleureux pendant mes visites régulières au département de Mathématiques de L'UABB de Tlemcen ont été nécessaires et déterminants pour la réalisation de ce travail. Je profite de la présente occasion pour lui exprimer toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur Dib Hacène Professeur à L'Université de Tlemcen, qui a accepté de présider mon jury.

Je remercie très respectueusement Messieurs Bouchekif Mohammed et Bouguima Sidi Mohammed Professeurs à L'Université de Tlemcen pour avoir accepté d'être membres de jury.

Je remercie aussi l'équipe sympathique du département de Mathématiques, du chef du département Monsieur Mebkhout Benmiloud.

Un grand merci aussi à tous mes collègues du groupe d'analyse sur les variétés :Kamel Tahri, Abdelmalek Mohammed et les autres...

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des Matières

Introduction

0.1 Motivations

L'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques est l'un des sujets de recherche de grande importance dans l'analyse sur les variétés développé ces dernières années dans de nombreux travaux (voir [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [9], [10]).
Différentes techniques sont employées pour la résolution d'équations aux dérivées partielles elliptiques comme par exemple "la méthode variationnelle" développée par Yamabe lui même pour résoudre le problème de la courbure scalaire prescrite. Par ailleurs la théorie des champs scalaires d'Einstein a connu des dévéloppements considérables ces dernières années. Parmi ces avancées, on peut citer les récentes tentatives pour expliquer par cette théorie l'accélération de l'expansion de l'univers observée. Utilisant la méthode conforme, Choquet-Bruhat, Isenberg et Pollack ont reformulé les équations de contraintes du champ scalaire d'Einstein comme un système déterministe d'équation aux dérivées partielles nonlinéaires. L'une de ces équations est celle appelée communément équation de Lichnerowicz des champs scalaires d'Einstein (voir [8]) et qui s'écrit:

$$\begin{cases} \Delta_g u + hu = Bu^{2^*-1} + \frac{A}{u^{2^*+1}} \\ u > 0 \end{cases} \tag{1}$$

où $n = \dim(M) \geq 3$, les fonctions h, A, $B > 0$ sont de classe $C^\infty(M)$, $2^* = \frac{2n}{n-2}$ est l'exposant critique de l'espace de Sobolev $H_1^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ et $\Delta_g = -div(\nabla_g)$.
Cette équation qui contient une nonlinéarité critique de Sobolev et une puissance négative

devient mathématiquement intéréssante. Comparativement à l'équation (1) on considère l'équation

$$\begin{cases} \Delta_g^2 u - div\left(a\nabla_g u\right) + bu = Bu^{2^\natural - 1} + \frac{A}{u^{2^\natural + 1}} + \frac{C}{u^p} \\ u > 0 \end{cases} \tag{2}$$

où $n = \dim(M) \geq 5$, a, b, A, B et C sont des fonctions de classe $C^\infty(M)$; $p > 1$ et $2^\natural = \frac{2n}{n-4}$ est l'exposant critique pour les inclusions de l'espace de Sobolev $H_2^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^{2^\natural}(\mathbb{R}^n)$. Dans ce mémoire on étudie partiellement l'équation (2).

0.2 Enoncé du problème

Etant donnée une variété Riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geq 5$ et de métrique g. On désigne pour $H_2{}^2(M)$ l'espace de Sobolev qui est par définition le complété de l'espace $C_2^2(M)$ pour la norme

$$\|u\|_{2,2} = \sum_{i=0}^{2} \left(\int_M \left|\nabla^i u\right|^2 dv\left(g\right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace $H_2{}^2(M)$ sera muni de la norme équivalente suivante:

$$\|u\|_{H_2{}^2} = \left(\sum_{i=0}^{2} \int_M \left|\nabla^i u\right|^2 dv\left(g\right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notre problème peut être énoncé de la façon suivante:

Existe-t-il une fonction $u > 0$ solution de l'équation suivante

$$\Delta_g^2 u - div_g\left(a\left(x\right)\nabla_g u\right) + b\left(x\right)u = B\left(x\right)u^{2^\sharp - 1} + \frac{A\left(x\right)}{u^{2^\sharp + 1}} + \frac{C\left(x\right)}{u^p} \tag{3}$$

où a, b, A, B et C des fonctions de classe C^∞ sur M et $2^\sharp$ l'exposant critique pour l'inclusion de Sobolev $H_2{}^2(M)$ dans $L^p(M)$? où $\Delta_g u = -div\left(\nabla_g u\right)$ est le Laplacien Riemannien.

Pour aborder l'équation (3), on introduit les équations $\epsilon-$approchées suivantes:

$$\Delta_g^2 u - div_g\left(a\left(x\right)\nabla_g u\right) + b\left(x\right)u = B\left(x\right)u^{2^\sharp - 1} + \frac{A\left(x\right)u}{\left(\epsilon + u^2\right)^{2^\flat + 1}} + \frac{C\left(x\right)u}{\left(\epsilon + u^2\right)^{\frac{p+1}{2}}}$$

où $2^\flat = \frac{2^\sharp}{2}$ et $p > 1$ puis on fait tendre ϵ vers 0 pour obtenir la solution désirée.

Il existe des méthodes pour étudier ce type d'équations citons entre autres: le théorème du point fixe; la méthode des barrières; et la méthode du semi-groupe. L'approche utilisée ici, s'y réfère traditionnellement d'approche variationnelle utilisée par Hebey, Pacard et Pollack dans [8] où la solution s'obtient comme point critique de la fonctionnelle appropriée.

Une classe importante d'équations aux dérivées partielles elliptiques du $4^{i\grave{e}me}$ordre sont celles qui contiennent l'opérateur de Paneitz-Branson sur les variétés Riemannienne de dimension $n \geq 5$.

Par analogie avec le problème de Yamabe on peut se poser la question de savoir s'il existe une métrique $\tilde{g}$ conforme à g telle que la Q-courbure de $\tilde{g}$ soit égale à une fonction f positive de classe C^∞ donnée sur M ?

Répondre à cette question revient à étudier l'équation du 4ième ordre suivante

$$P_g^n\left(u\right) = f(x)\left|u\right|^{2^\sharp - 2}u$$

où P_g^n est l'opérateur de Paneitz-Branson. Dans le cas particulier où ce dernier est à coefficients constants i.e.

$$P_g^n\left(u\right) = \Delta_g^2 u + \alpha\Delta_g u + \beta u$$

avec α, β des constantes. Alors d'aprés un résultat de Djadli-Hebey-Ledoux ([7] corollaire (2.1)) si $\frac{\alpha^2}{4} - \beta \geq 0$

et

$$\frac{\int_M f dv\left(g\right)}{V_g\left(M\right)\max\limits_{x\in M} f(x)} > \left(\beta.K_0\right)^{\frac{2^\sharp}{2}}\left(V_g\left(M\right)\right)^{\frac{2^\sharp}{2} - 1}$$

où K_0 est la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev i.e.

$$\frac{1}{K_o} = \inf_{u \in C_o^\infty(R^n)-\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^\sharp} \, dx\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}}$$

alors l'équation précédente possède une solution positive de classe $C^\infty(M)$.

On sait pour une variété d'Einstein (le tenseur de Ricci est multiplicateur du tenseur métrique) les coefficients α et β sont constants. En particulier pour la sphère unité S^n on a

$$\alpha = \frac{(n^2 - 2n - 4)}{2} \qquad \text{et} \quad \beta = \frac{n(n-4)(n^2-4)}{16}.$$

Le calcul du membre de droite dans l'inégalité qu'on a vue précédemment donne

$$(\beta.K_0)^{\frac{2^\sharp}{2}} (V_g(S^n))^{\frac{2^\sharp}{2}-1} = 1$$

et par suite cette inégalité n'est pas satisfaite donc on ne peut pas appliquer le resultat de Djadli-Hebey-Ledoux .

Djadli, Malchiodi et Ould-Ahmedou [6] ont montré l'existence de solutions dans le cas de la sphère S^n, ils ont utilisé la méthode du Blow-up. Les équations contenant l'opérateur de Paneitz-Branson ont attiré l'intension de beaucoup d'auteurs pour leur intéret à l'application à la géométrie différentielle et à la physique (voir [5], [6], [7], [9], [12], [13]). Des conditions nécessaires à la positivité de l'opérateur de Paneitz-Branson sont données dans [11]. Les conditions nécessaires et suffisantes à la coercivité de cet opérateur sont formulées dans [9].

Chapitre 1

Notions Préliminaires

Dans ce chapitre, nous donnons les notions d'analyse nécessaires à la compréhension de la suite de notre travail.

1.1 Définitions et propriétés

Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension $n \geq 1$ et ∇ la connexion de Levi-Civita donnée par son expression locale

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

où g_{ij} et g^{ij} désignent respectivement le tenseur métrique riemannien et son inverse. Le tenseur de courbure R relatif à la connexion ∇ s'écrit

$$R_{ijk}^{l} = \frac{\partial \Gamma_{ki}^{l}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^{l}}{\partial x_k} + \Gamma_{j\alpha}^{l} \Gamma_{ki}^{\alpha} - \Gamma_{k\alpha}^{l} \Gamma_{ji}^{\alpha}$$

celui de Riemann Rm_g est alors donné par

$$R_{ijkl} = g_{i\alpha} R_{jkl}^{\alpha}.$$

Le tenseur de courbure de Ricci est obtenu par contraction de R i.e.

$$R_{icij} = R^{\alpha}_{i\alpha j} = g^{\alpha\beta} R_{i\alpha j\beta}.$$

La courbure scalaire est la fonction numérique de classe C^{∞}sur M notée par S_g est définie par

$$S_g = R_{ij} g^{ij}$$

1.2 Classe conforme

Comme la famille des métriques Riemanniennes est très large on se restreint à une classe importante appelée la classe conforme.

Définition 1 *Si $f > 0$ une fonction de classe C^{∞}sur M , $\tilde{g} = fg$ est dite métrique conforme à g. La classe conforme de g est notée $[g]$ est donnée par*

$$[g] = \{fg,\ f \in C^{\infty}(M)\ \text{et}\ f > 0\ \}.$$

La méthode variationelle est essentiellement basée sur le théorème important suivant:

1.3 Théorème de Rellich-Kondrakov

Théorème 1.1 *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$, $q \geq 1$ réel, et $m < k$ deux entiers*

1. *Si $\frac{1}{q} > \frac{k-m}{n}$, alors $H^q_k(M) \subset H^p_m(M)$ pour tout $p \geq 1$ tel que $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} - \frac{k-m}{n}$.*
2. *Si $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} - \frac{k-m}{n}$, alors l'inclusion est compacte.*
3. *Pour $N = \frac{2n}{n-4}$ l'inclusion de $H^2_2(M)$ dans $L^N(M)$ cesse d'être compacte.*

$N = \frac{2n}{n-4}$ est dit exposant critique de Sobolev.

1.4 Solutions faibles

On précise la notion de solution faible, celle-ci fait intervenir les espaces de Sobolev qui sont le cadre approprié.

Définition 1.1 *Soient (M, g) une variété Riemannienne, a, b, A, B et C des fonctions réelles de classe C^{∞} sur M et alors u est dite solution faible de l'équation*

$$\Delta_g^2 u - div_g\left(a\left(x\right)\nabla_g u\right) + b\left(x\right)u = B\left(x\right)u^{2^{\sharp}-1} + \frac{A\left(x\right)}{u^{2^{\sharp}+1}} + \frac{C\left(x\right)}{u^p}$$

si pour tout $\varphi \in C^{\infty}\left(M\right)$

$$\int_M \left(\Delta_g u.\Delta_g \varphi + a\left(x\right)g\left\langle \nabla_g u,\ \nabla_g \varphi\right\rangle + b\left(x\right)u\varphi\right)dv\left(g\right) = \int_M \left(B(x)\left|u\right|^{2^{\sharp}-1} + \frac{A(x)}{u^{2^{\sharp}+1}} + \frac{C\left(x\right)}{u^p}\right)\varphi dv\left(g\right)$$

Les solutions obtenues par la méthode variationnelle sont les points critiques de fonctionnelles, sont dans les espaces fonctionnelles de Sobolev, elles sont dites distributionnelles ou faibles.

1.5 Inégalité de Sobolev

Théorème 1.2 *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $A_{\varepsilon} \in R$ telle que :*

$$\forall u \in H_2^2(M) : \left\|u\right\|_N^2 \leq (1+\varepsilon)K_{\circ}\int_M \left|\Delta_g u\right|^2 + \left|\nabla_g u\right|^2 dv(g) + A_{\varepsilon}\int_M \left|u\right|^2 dv(g)$$

avec $N = \frac{2n}{n-4}$ et $K_{\circ}^{-1} = \pi^2 n(n-4)(n^2-4)\left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)}\right)^{\frac{4}{n}}$ où Γ est la fonction de Gamma l'Euler.

On établit l'existence de solution faible par la méthode variationnelle, via le Théorème suivant

1.6 Lemme du col (Ambrosetti-Rabinowitz).

Théorème 1.3 *Soit F une fonctionnelle de classe C^1 sur un espace de Banach E, telle que*

1. *Il existe $u_0 \in E$, $\rho > 0$, et $\alpha > 0$ tels que pour tout $u \in E$ vérifiant $\|u - u_0\| = \rho$ on a*

$$F(u) > F(u_0) + \alpha$$

2. *Il existe un point $u_1 \in E$ tel que*

$$\|u_0 - u_1\| > \rho \quad \text{et} \quad F(u_1) < F(u_0) + \alpha.$$

Soit Γ l'ensemble des chemins reliant u_0 à u_1, c'est-à-dire

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) \ \text{tels que } \gamma(0) = u_0,\ \gamma(1) = u_1\}.$$

Si

$$\beta = \inf_{\gamma \in \Gamma} \left(\sup_{t \in [0,1]} F(\gamma(t)) \right)$$

alors

$$\beta \geq F(u_0) + \alpha$$

et β est une valeur critique de F.

1.7 Théorèmes de régularité

Pour traiter la question de régularité des solutions faibles d'une équation elliptique, on a besoin des Théorèmes suivants

1.7.1 Inclusions de Sobolev

Théorème 1.4 *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 1$. Soient $p \geq 1$ et $0 \leq m < k$ deux entiers tels que $n > p(k-m)$. Alors $H_k^p(M) \subset H_m^q(M)$ où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n}$. De plus l'inclusion est continue. En d'autres termes pour tout $u \in H_k^p(M)$ il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\|_{H_m^q} \leq C \|u\|_{H_k^p}$.*

Théorème 1.5 *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 1$. Soient $p \geq 1$ et $0 \leq m < k$ deux entiers tels que $n = p(k-m)$. Alors $H_k^p(M) \subset H_m^q(M)$ pour tout $q \geq 1$. De plus l'inclusion est continue. En d'autres termes pour tout $q \geq 1$ il existe une constante $C(q) > 0$ telle que pour tout $u \in H_k^p(M)$, $u \in H_m^q(M)$ et $\|u\|_{H_m^q} \leq C(q) \|u\|_{H_k^p}$.*

Etant donné $\alpha \in (0,1)$, on dit que $u \in C^{0,\alpha}(M)$ s'il existe $C > 0$ tel que $|u(x) - u(y)| \leq C d_g(x,y)$ pour tous x, $y \in M$, où d_g désigne la distance géodésique.

L'espace $C^{0,\alpha}(M)$ muni de la norme $\|u\|_{C^{0,\alpha}} = \|u\|_\infty + \sup_{\substack{x,y \in M \\ x \neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{d_g(x,y)^\alpha}$ est un espace de Banach.

Théorème 1.6 *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 1$. Soient $p \geq 1$ et un entier $k \geq 1$ tels que $pk > n$. Alors $H_k^p(M) \subset C^{0,\alpha}(M)$ pour tout $\alpha \in (0,1)$ avec $\alpha < k - \frac{n}{p}$. De plus l'inclusion est continue et il existe $C(\alpha) > 0$ tel que pour tout $u \in H_k^p(M)$, $u \in C^{0,\alpha}(M)$ et $\|u\|_{C^{0,\alpha}(M)} \leq C(\alpha) \|u\|_{H_k^p}$.*

1.7.2 Théorèmes de régularité

Ici on donne deux résultats de régularité dans le contexte des variétés Riemanniennes:

On suit les notes de Fréderic Robert (Fourth order Equations with critical growth in Riemannian Geometry)

Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte, A un tenseur symétrique de type $(0,2)$ et de classe $C^\infty(M)$ et $a \in C^\infty(M)$. On considère l'opérateur $P_g = \Delta_g^2 - div_g \left(A(\nabla .)^\natural \right) + a$, ici $A(\nabla u)^\natural$ est le $(1,0)$-tenseur qui en coordonnées est donné par $A(\nabla u)_j^\natural = A_{ij} g^{ik} (\nabla u)_k$.

Soit $f \in L^1(M)$, on dira que $u \in H_2^2(M)$ est une solution faible de l'équation $P_g u = f$ si

$$\int_M \left(\Delta_g u.\Delta_g \varphi + A\left(\nabla u^\natural \nabla^\natural \varphi\right) + au\varphi\right) dv_g = \int_M f\varphi dv_g$$

pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$.

L^p-Théorie

Théorème 1.7 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte et $a \in C^\infty(M)$. Soient A un tenseur symétrique de type (0,2) de classe C^∞ sur M et $f \in H_k^p(M)$. Si $u \in H_2^2(M)$ est une solution faible de $P_g u = f$ alors $u \in H_{k+4}^p(M)$. En plus nous avons*

$$\|u\|_{H_{k+4}^p} \leq C\left(\|f\|_{H_k^p(M)} + \|u\|_{L^p(M)}\right)$$

où $C(M,g,K)$ et

$$\|a\|_{C^{k+1}(M)} + \|A\|_{C^{k+2}(M)} < K.$$

Théorie de Schauder

Théorème 1.8 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte et $a \in C^\infty(M)$. Soient A un tenseur symétrique de type (0,2) de classe C^∞ sur M et $\alpha \in (0,1)$. Soit encore $f \in C^{0,\alpha}(M)$. Si $u \in H_2^2(M)$ est une solution faible de $P_g u = f$ alors $u \in C^{4,\alpha}(M)$. En plus nous avons*

$$\|u\|_{C^4(M)} \leq C\left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(M)} + \|u\|_{C^0(M)}\right)$$

où $C(M,g,K)$ et

$$\|a\|_{C^{k+1}(M)} + \|A\|_{C^{k+2}(M)} < K.$$

1.7.3 Méthode du bootstrap

Vu l'impotance de la régularité des solutions faibles nous allons exposer en détail la méthode

Proposition 2 *Soit (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$. Soit A un champ de tenseurs symétrique de type (0,2) et de classe $C^{\infty}(M)$ et $a,\ f \in C^{\infty}(M)$ telle que $f > 0$. Soit $u \in H_2^2(M)$ une solution faible de l'équation*

$$P_g u = \Delta_g^2 u - div_g\left(A(\nabla u)^{\sharp}\right) + au = f|u|^{q-2}u \tag{1.1}$$

avec $2 < q < 2^{\natural} = \frac{2n}{n-4}$, alors $u \in C^4(M)$ et c'est une solution au sens classique de l'équation (1.1).

Preuve: Cette méthode est appelée la méthode du bootstrap. Soit $p_o = \max\{p \geq 1 : u \in L^p(M)\}$, il résulte de l'inclusion de Sobolev (voir Théorème 1.4) que $p_o \geq 2^{\natural}$. Nous voulons montrer que $p_o = +\infty$. Suppons que $p_o < +\infty$ et soit $p \in (2, p_o)$. Alors $u \in L^p(M)$ et $|u|^{q-2}u \in L^{\frac{p}{q-1}}(M)$ et puisque $P_g u = f|u|^{q-2}u$ il résulte du Théorème 1.7 que $u \in H_4^{\frac{p}{q-1}}(M)$. D'après les Théorèmes 1.4, 1.5, et 1.6 nous avons les situations suivantes:

(i) $\frac{q-1}{p} - \frac{4}{n} < 0$ alors $u \in C^0(M)$ et par conséquent $u \in L^r(M)\ \forall r \geq 1$ et donc $p_o = +\infty$, une contradiction.

(ii) $\frac{q-1}{p} - \frac{4}{n} = 0$ alors $u \in L^r(M)\ \forall r \geq 1$ et encore $p_o = +\infty$, une contradiction.

(iii) $\frac{q-1}{p} - \frac{4}{n} > 0$ alors $u \in L^r(M)$ avec $\frac{1}{r} = \frac{q-1}{p} - \frac{4}{n}$ et par suite nous avons $p_o > r > p$ ainsi nous avons amélioré la régularité. Comme cela étant vraie pour tout $p \in (2, p_o)$, on fait tendre p vers p_o et on obtient $\frac{1}{p_o} \leq \frac{q-1}{p_o} - \frac{4}{n}$ i.e. $p_o \leq \frac{n(q-2)}{4} < 2^{\natural}$. Une contradiction avec $p_o \geq 2^{\natural}$. Ainsi $p_o = +\infty$ et donc $P_g u \in L^p(M)$ pour tout $p \geq 1$ et par le Théorème 1.7 $u \in H_4^p(M)$ pour tout $p \geq 1$ et encore par le Théorème 1.6 nous obtenons que $u \in C^{0,\alpha}(M)$, $\alpha \in (0,1)$ et par conséquent $P_g(u) \in C^{0,\alpha}(M)$ et par le Théorème 1.8 $u \in C^4(M)$. ■

La méthode du bootstrap ne fonctionne pas dans le cas critique i.e. si $q = 2^{\natural}$ car la méthode ne permet pas le gain en régularité on expose alors une méthode développée par Von Der Vorst dans le cas des domaines de $\mathbb{R}^n$ et par Djadli-Hebey- Ledoux [7] et Espisito-Robert [12] dans le contexte des variétés Riemanniennes.

Proposition 3 *Soit (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$. Soit A un champ de tenseurs symétrique de type (0,2) et de classe $C^{\infty}(M)$ et a, $f \in C^{\infty}(M)$ telle que $f > 0$. Soit $u \in H_2^2(M)$ une solution faible de l'équation*

$$P_g u = \Delta_g^2 u - div_g \left(A (\nabla u)^{\natural} \right) + au = f |u|^{2^{\natural}-2} u \tag{1.2}$$

où $2^{\natural} = \frac{2n}{n-4}$, alors $u \in C^4(M)$ et c'est une solution au sens classique de l'équation (1.2).

Preuve: On suppose d'abord que P_g est coercif i.e. il existe $\Lambda > 0$ tel que $\int_M uP_g u dv_g \geq \Lambda \|u\|^2_{H_2^2(M)}$. Soient $p \geq 1$, $R > 0$ et $v \in L^p(M)$. Par l'inégalité de Hölder $f |u|^{2^{\natural}-2} 1_{|u| \geq R} v \in L^r(M)$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{4}{n}$ et

$$\left\| f |u|^{2^{\natural}-2} 1_{|u|\geq R} v \right\|_r \leq \|f\|_{\infty} \left\| |u|^{2^{\natural}-2} 1_{|u|\geq R} \right\|_{\frac{n}{4}} \|v\|_p .$$

D'après la théorie de la régularité il existe $w \in H_4^r(M)$ tel que

$$P_g w = f |u|^{2^{\natural}-2} 1_{|u|\geq R} v$$

et il existe une constante $C(n,p,r) > 0$ telle que

$$\|w\|_{H_4^r(M)} \leq C(n,p,r) \left\| f |u|^{2^{\natural}-2} 1_{|u|\geq R} v \right\|_r .$$

Par ailleurs et d'après le Théorème 1.4 $H_4^r(M) \subset L^q(M)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{4}{n} = \frac{1}{p}$ i.e. $w \in L^p(M)$ et aussi

$$\|w\|_{L^p(M)} \leq C(n,p,r) \|f\|_{\infty} \left\| |u|^{2^{\natural}-2} 1_{|u|\geq R} \right\|_{\frac{n}{4}} \|v\|_p .$$

On définit l'opérateur suivant $T_{p,R} : L^p(M) \to L^p(M)$ tel que $T_{p,R}(v) = w$ où w est construite ci-dessus. $T_{p,R}$ est un opérateur continu et comme

$$\|T_{p,R}\| = \sup_{\|v\|_{L^p(M)}=1} \|T_{p,R}(v)\|_{L^p(M)} \le C(n,p,r)\,\|f\|_\infty \left(\int_M |u|^{2^\natural} 1_{|u|\ge R} dv_g\right)^{\frac{4}{n}}$$

et puisque $u \in L^{2^\natural}(M)$ il existe $R_o = R_o(n,p,r) > 0$ tel que $\|T_{p,R_o}\| < 1$. Alors l'opérateur linéaire continu $I_{L^p(M)} - T_{p,R_o} : L^p(M) \to L^p(M)$ est inversible d'inverse linéaire continu.

Maintenant, puisque $|u|^{2^\natural-2} u 1_{|u|<R} \in L^\infty(M)$ par Théorème 1.7 alors pour tout $p \ge 2^\natural$ il existe $\widetilde{u} \in H_4^p(M)$ tel que $P_g(\widetilde{u}) = f\,|u|^{2^\natural-2} u 1_{|u|<R}$. Posons $\overline{u} = \left(I_{L^p(M)} - T_{p,R}\right)^{-1}(\widetilde{u}) \in L^p(M)$.

$$\begin{aligned} P_g(u) &= f\,|u|^{2^\natural-2} u 1_{|u|\ge R} + f\,|u|^{2^\natural-2} u 1_{|u|<R} \\ &= f\,|u|^{2^\natural-2} u 1_{|u|\ge R} + P_g(\widetilde{u}) \end{aligned}$$

où encore

$$P_g(u-\widetilde{u}) = f\,|u|^{2^\natural-2} u 1_{|u|\ge R}$$

et par conséquent

$$T_{2^\natural,R}(u) = u - \widetilde{u}$$

et alors

$$\left(I_{L^{2^\natural}(M)} - T_{2^\natural,R}\right)(u) = \widetilde{u} = \left(I_{L^{2^\natural}(M)} - T_{2^\natural,R}\right)(\overline{u})$$

i.e. $u = \overline{u} \in L^p(M)$ pour tout $p \ge 2^\natural$. Par la méthode du bootstrap on conclut que $u \in C^4(M)$.

Le cas où l'opérateur n'est pas coercif on prend un $K > 0$ tel que $P_g + K$ soit coercif et donc inversible. On définit l'opérateur $T_{p,R} : L^p(M) \to L^p(M)$ par $T_{p,R}(v) = (P_g+K)^{-1}\left(f\,|u|^{2^\natural-2} 1_{|u|\ge R} v\right)$ pour tout on prend $p \ge 2^\natural$ tel que $u \in L^p(M)$et comme ci-dessus on obtient que $u \in L^q(M)$ pour tout $q > 2^\natural$. La conclusion s'ensuit. ∎

1.8 Fonctions de Green

1.8.1 Fonction de Green du Laplacien

Définition 1.2 *Soit M une variété Riemannienne compacte de volume $V(M)$. La fonction de Green G(x,y) de l'opérateur Laplacien est solution au sens des distributions à l'équation*

$$\Delta_y G(x,y) = \delta_x(y) - \frac{1}{V(M)}$$

où δ_p est la fonction de Dirac.

Dans ce cas la fonction de Green est déterminée modulo une constante.

Théorème 1.9 *Soit M une variété Riemannienne compacte de classe C^∞. Le Laplacin admet une fonction de Green $G(x,y)$ qui satisfait les conditions suivantes:*

(a) pour tout $\varphi \in C^2(M)$

$$\varphi\left(x\right) = \int_M G(x,y)\Delta\varphi(y)dv_g\left(y\right) + \frac{1}{V(M)}\int_M \varphi(y)dv_g(y)$$

(b) Il existe une constante k telle que

$$|G(x,y)| \leq k(1+|\log r|),\ \textit{pour}\ n=2$$

$$|G(x,y)| \leq kr^{2-n},\ \textit{pour}\ \ n>2,\ |\nabla_y G(x,y)| \leq kr^{1-n}$$

et

$$\left|\nabla_y^2 G(x,y)\right| \leq kr^{-n}$$

où $r = d(x,y)$.

(b) $G(x,y)$ est de classe C^∞ sur $M \times M$ privé de la diagonale ($x \neq y$).

(c) $G(x,y) = G(y,x)$

(d) Il existe une constante A telle que $G(x,y) \geq A$. Comme la fonction de Green est déterminée à une constante prés, on peut choisir la fonction de Green partout positive.

1.8.2 Fonction de Green du bi-Laplacien

Soit $\varphi \in C^4(M)$ et posons $\Delta\varphi \in C^2(M)$ alors d'après le paragraphe précédent

$$\Delta\varphi\,(y) = \int_M G(y,z)\Delta^2\varphi(z)dv_g\,(z)\,. \tag{1.3}$$

Multipliant (1.3) par $G(x,y)$, et intégrant sur M

$$\int_M G(x,y)\Delta\varphi\,(y)\,dv_g\,(y) = \int_M\int_M G(x,y)G(y,z)\Delta^2\varphi(z)dv_g\,(z)\,dv_g\,(y)\,.$$

En posant

$$G_o(x,z) = \int_M G(x,y)G(y,z)dv_g\,(y)$$

et en tenant compte de

$$\int_M G(x,y)\Delta\varphi\,(y)\,dv_g\,(y) = \varphi\,(x) - \frac{1}{V(M)}\int_M \varphi(y)dv_g\,(y)$$

on obtient que

$$\varphi\,(x) = \int_M G_o\,(x,y)\,\Delta^2\varphi(y)dv_g(y) + \frac{1}{V(M)}\int_M \varphi(y)dv_g\,(y)\,.$$

Pour avoir des estimations de la fonction $G_o(x,y)$ on a besoin de la proposition suivante:

Proposition 4 *(Lemme de Giraud) Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et X(x,y) , Y(x,y) deux fonctions continues sur $\Omega\times\Omega$ privé de la diagonale telles que $|X(x,y)| \leq const \times d(x,y)^{\alpha-n}$, $|Y(x,y)| \leq const \times d(x,y)^{\beta-n}$ avec $\alpha,\beta \in (0,n)$. Alors la fonction $Z\,(x,y) =$*

$\int_{\Omega} X(x,z)Y(z,y)dv(z)$ *est continue pour* $x \neq y$

$$\begin{cases} |Z(x,y)| \leq const \times d(x,y)^{\alpha+\beta-n} & si\ \alpha+\beta < n \\ |Z(x,y)| \leq const \times (1+\log d(x,y)\ ) & si\ \alpha+\beta = n \\ |Z(x,y)| \leq const & si\ \alpha+\beta > n. \end{cases}$$

dans le dernier cas $Z(x,y)$ *est continue sur* $\Omega \times \Omega$.

Si M est une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$, par lemme de Giraud, on obtient en tenant compte des estimations de la fonction de Green données dans le Théorème 1.9 que:

$$\begin{aligned} |G_o(x,y)| &= \left| \int_M G(x,z)G(z,y)dv_g(z) \right| \\ &\leq \int_M |G(x,z)G(z,y)|\, dv_g(z) \\ &\leq const \times r^{4-n} \end{aligned}$$

où $r = d(x,y)$.

1.9 Opérateur de Paneitz-Branson

Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$, $H_2^2(M)$ l'espace de Sobolev des fonctions de $L^2(M)$ telles que $\nabla u \in L^2(M)$ et $\nabla^2 u \in L^2(M)$ muni de la norme usuelle

$$\|u\|_{H_2^2} = \left(\int_M \left(\left|\nabla^2 u\right|^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \right) dv_g \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considérons l'opérateur de Paneitz-Branson

$$P_g^n : C^4(M) \rightarrow C^o(M)$$

défini par

$$P_g u = \Delta^2 u - div_g\left(\left(a_n R_g.g + b_n Ric_g\right)(\nabla u)^{\sharp}\right) + \frac{n-4}{2} Q_g u$$

où $\sharp$ l'opérateur musical,

$$a_n = \frac{(n-2)^2 + 4}{2\,(n-1)\,(n-2)} \quad , \quad b_n = -\frac{4}{n-2}$$

et

$$Q_g = \frac{1}{2\,(n-1)} \Delta R_g + \frac{n^3 - 4n^2 + 16n - 16}{8\,(n-1)^2\,(n-2)^2} R_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2} \left|Ric_g\right|_g^2$$

est la Q-courbure. Considérons la métrique $\widetilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-4}} g$, où $\varphi > 0$ est une fonction lisse sur M, qui est conforme à g. P_g est un opérateur conforme dans le sens que pour tout $u \in C^4(M)$

$$P_{\widetilde{g}} u = \varphi^{-\frac{n+4}{n-4}} P_g\left(\varphi u\right)$$

et en prenant $u \equiv 1$, on obtient

$$P_g\left(\varphi\right) = \frac{n-4}{2} Q_{\widetilde{g}} \varphi^{\frac{n+4}{n-4}}.$$

Etant donnée une fonction $\psi : M \rightarrow R$, de classe $C^{\infty}(M)$, on définit le champ scalaire conforme de l'opérateur de Paneitz-Branson $P_{g,\psi}$ par: pour tout $u \in C^4(M)$

$$P_{g,\psi} u = \Delta_g^2 u - div_g\left(\left(a_n R_g.g + b_n Ric_g\right)(\nabla u)^{\sharp}\right) + \frac{n-4}{2}\left(Q_g - \left|\nabla \psi\right|_g^2\right) u.$$

Si $\widetilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-4}} g$ pour une certaine $\varphi > 0$, alors tenant compte de l'invariance conforme de l'opérateur de Paneitz-Branson, on obtient que

$$P_{\widetilde{g},\psi} u = \varphi^{-\frac{n+4}{n-4}} P_{g,\psi}(\varphi u)$$

et prenant $u \equiv 1$, on déduit la relation

$$\frac{n-4}{2}\left(Q_{\widetilde{g}} - |\nabla\psi|^2_{\widetilde{g}}\right) = \varphi^{-\frac{n+4}{n-4}} P_{g,\psi}(\varphi).$$

qui nous montre comment varie la quantité $\frac{n-4}{2}\left(Q_g - |\nabla\psi|^2_g\right)$ dans la classe des métriques conformes.

On considére la fonctionnelle d'énergie associée

$$E_{g,\psi}(u) = \int_M u P_{g,\psi}(u)\, dv_g\ .$$

Le quotient de Sobolev du champ scalaire est alors donné par: pour tout $u \in H_2^2(M) - \{0\}$

$$Q_{g,\psi}(u) = \frac{E_{g,\psi}(u)}{\|u\|^2_{2^\natural}}$$

$$= \frac{\int_M \left((\Delta u)^2 + \left(a_n R_g |\nabla u|^2_g + b_n Ric_g(\nabla u, \nabla u)\right) + \frac{n-4}{2}\left(Q_g - |\nabla\psi|^2_g\right) u^2\right) dv_g}{\left(\int_M |u|^{2^\natural} dv_g\right)^{\frac{n-4}{n}}}$$

où $2^\natural = \frac{2n}{n-4}$ est l'exposant critique de l'injection de Sobolev $H_2^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, $q \le 2^\natural$.

Si $[g]$ désigne la classe conforme de la métrique g i.e. $[g] = \left\{\varphi^{\frac{4}{n-4}} g : \varphi \in C^\infty(M)\right\}$, l'invariant conforme du champ scalaire de l'opérateur de Paneitz-Branson est alors défini par

$$I_\psi(g) = \inf_{u \in H_2^2(M) - \{0\}} Q_{g,\psi}(u).$$

Par une inégalité bien connue voir le livre de T. Aubin (Some Problems in Riemannian Geometry), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que

$$\|\nabla u\|_2 \le \varepsilon \|\Delta_g u\|_2 + C(\varepsilon)\|u\|_2 \tag{1.4}$$

et $u \in H_2^2(M)$, alors

$$\left| \int_M \left(a_n R_g \left| \nabla u \right|^2 + b_n Ric_g \left(\nabla u, \nabla u \right) \right) dv_g \right| \leq \left(a_n \left\| R_g \right\|_\infty + b_n \left\| Ric_g \right\|_\infty \right) \left\| \nabla u \right\|_2^2$$

$$\leq \frac{1}{2} \left\| \Delta_g u \right\|_2^2 + C \left\| u \right\|_2^2$$

donc

$$E_{g,\psi}(u) \geq -C \left\| u \right\|_2^2$$

où $C > 0$ est une constante universelle. L'inégalité de Hölder donne

$$E_{g,\psi}(u) \geq -C \left\| u \right\|_{2^\sharp}^2$$

et en conséquence

$$I_\psi(g) = \inf_{u \in H_2^2(M) - \{0\}} Q_{g,\psi}(u) > -\infty.$$

Proposition 5 *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 6$.*

Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $I_\psi(g) > 0$

(ii) Pour toute métrique $\widetilde{g} \in [g]$, la première valeur propre λ_1 de $P_{\widetilde{g},\psi}$ est strictement positive.

Preuve: (ii)$\Rightarrow$(i) De la définition de λ_1, nous avons

$$\frac{E_{g,\psi}(v)}{\left\| v \right\|_2^2} \geq \lambda_1 > 0$$

pour tout $v \in H_2^2(M) - \{0\}$ alors

$$I_\psi\left(g\right) = \inf_{v \in H_2^2(M) - \{0\}} \frac{E_{g,\psi}(v)}{\left\| v \right\|_{2^\sharp}^2} \geq 0.$$

Si $I_\psi(g) = 0$, il existe une suite $(v_k)_k$ qui par l'homogénéité du quotient de Sobolev peut être choisie de nome $\|v_k\|_{2^\sharp} = 1$, telle que $E_{g,\psi}(v_k) \to 0$. Ce qui entraîne que $\lambda_1 = 0$. Donc $I_\psi(g) > 0$.

(i)$\Rightarrow$(ii) De l'inégalité de Böchner on déduit que

$$\begin{aligned}
\int_M (\Delta_g u)^2 \, dv_g &= \int_M \left(\left|\nabla^2 u\right|^2 + Ric_g(\nabla u, \nabla u) \right) dv_g \\
&\geq \frac{1}{n} \int_M (\Delta_g u)^2 \, dv_g + \int_M Ric_g(\nabla u, \nabla u) \, dv_g
\end{aligned}$$

ce qui nous mène à écrire

$$\int_M (\Delta_g u)^2 \, dv_g \geq \frac{n}{n-1} \int_M Ric_g(\nabla u, \nabla u) \, dv_g.$$

Donc si λ_1 est la première valeur propre non nulle de l' opérateur $P_{g,\psi}$ et u la fonction propre non nulle correspondante on obtient

$$\left[-\lambda_1 \int_M u^2 dv_g + \int_M \left(a_n R_g |\nabla u|^2 + \left(b_n + \frac{n}{n-1} \right) Ric_g(\nabla u, \nabla u) \right) dv_g \right] \leq 0$$

$$+ \int_M \left(Q_g - |\nabla \psi|^2 \right) u^2 dv_g.$$

Maintenant puisque pour $n \geq 6$

$$b_n + \frac{n}{n-1} > 0$$

on déduit que $\lambda_1 > 0$. ■

Chapitre 2

Existence de Solutions

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$ et de métrique g. Considérons l'équation suivante:

$$\begin{cases} \Delta_g^2 u - div_g\left(a\left(x\right)\nabla_g u\right) + b\left(x\right)u = B\left(x\right)u^{2^\sharp - 1} + \frac{A(x)}{u^{2^\sharp + 1}} + \frac{C(x)}{u^p} \\ u > 0 \end{cases} . \tag{2.1}$$

où $2^\natural = \frac{2n}{n-4}$ et $p > 1$.

Il s'agit de montrer l'existence d'une fonction $u > 0$ de classe $C^{4,\lambda}$, pour un certain $\lambda \in \left]0, 1\right[$, vérifiant (2.1). Ce type d'équation constitue un type limite; à cause des exposants à puissance positive et négative de u au deuxième membre.

Dans toute la suite on prend $a\left(x\right)$ et $b\left(x\right)$ de tels sorte que l'opérateur

$$\Delta_g^2 u - div_g\left(a\left(x\right)\nabla_g u\right) + b\left(x\right)u$$

soit coercif.

Il convient alors d'introduire dans $H_2^2\left(M\right)$ la norme appropriée équivalente suivante

$$\|u\| = \left(\int_M \left(\left(\Delta_g u\right)^2 + a\left(x\right)\left|\nabla_g u\right|^2 + b\left(x\right)u^2\right)dv\left(g\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

cela résulte du fait que notre opérateur est coercif et grâce à la proposition (2.1) de [10].

Il suit de cette définition et de la continuité de l'inclusion $H_2^2(M) \subset L^{2^\sharp}(M)$, l'existence d'une constante $S_{a,b} > 0$

$$\|u\|_{2^\sharp}^{2^\sharp} \leq S_{a,b}. \|u\|^{2^\sharp} \tag{2.2}$$

où $2^\sharp = \frac{2n}{n-4}$.

Un des résultats principals de notre travail s'énonce comme suit

Théorème 2.1 *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$ et soit a, b, $A > 0$, $B > 0$ et $C > 0$ des fonctions de classe $C^\infty(M)$, pour lesquelles l'opérateur $P_g = \Delta_g^2 - div_g(a(x)\nabla_g) + b(x)$ soit coercif. Supposons qu' il existe une constante $C(n,p) > 0$ qui ne dépend que de n et de p telle que*

$$\frac{\|\varphi\|^{2^\sharp}}{2^\sharp} \int_M \frac{A(x)}{\varphi^{2^\natural}} dv_g \leq C(n,p) \left(S_{a,b} \max_{x \in M} B(x) \right)^{1-\frac{n}{2}} \tag{2.3}$$

et

$$\frac{\|\varphi\|^{p-1}}{p-1} \int_M \frac{C(x)}{\varphi^{p-1}} dv_g \leq C(n,p) \left(S_{a,b} \max_{x \in M} B(x) \right)^{-\frac{(p+1)(n-4)}{8}}$$

pour une certaine fonction $\varphi > 0$ de classe $C^\infty(M)$. Alors l'équation (2.1) possède une solution de classe $C^4(M)$.

Si en outre, l'opérateur P_g possède une fonction de Green positive alors la solution de (2.1) est positive.

Preuve: La démonstration de ce théorème passe par plusieurs étapes.

1^{ere} étape :

Pour prouver l'existence de u on considére l'équation ϵ-approchée suivante:

$$\Delta_g^2 u - div_g(a(x)\nabla_g u) + b(x)u = B(x)u^{2^\sharp-1} + \frac{A(x)u}{(\epsilon + u^2)^{2^\flat+1}} + \frac{C(x)u}{(\epsilon + u^2)^{\frac{p+1}{2}}} \tag{2.4}$$

où $2^\flat = \frac{2^\sharp}{2}$et $p > 1$.

Puis on passe à la limite quand $\epsilon \to 0$.

La fonctionnelle adaptée à (2.4) est

$$I_\epsilon\left(u\right)=I^1\left(u\right)+I_\varepsilon^{(2)}\left(u\right)$$

où $I^{(1)}:H_2^{\ 2}\left(M\right)\longrightarrow\mathbb{R}$ est défini par :

$$I^{(1)}\left(u\right)=\frac{1}{2}\int_M\left(\left(\Delta_g u\right)^2+a\left(x\right)\left|\nabla_g u\right|^2+b\left(x\right)u^2\right)dv_g-\frac{1}{2^\sharp}\int_M B\left(x\right)\left|u\right|^{2^\sharp}dv_g$$

et $I_\varepsilon^{(2)}:H_2^{\ 2}\left(M\right)\longrightarrow\mathbb{R}$ est défini par:

$$I_\varepsilon^{(2)}\left(u\right)=\frac{1}{2^\sharp}\int_M\frac{A\left(x\right)}{\left(\varepsilon+u^2\right)^{2^\flat}}dv_g+\frac{1}{p-1}\int_M\frac{C(x)}{\left(\epsilon+u^2\right)^{\frac{p-1}{2}}}dv_g.$$

Tout d'abord on établit que l'inégalité suivante est vérifiée

$$\Phi\left(\|u\|\right)\leq I^{(1)}\left(u\right)\leq\Psi\left(\|u\|\right)\tag{2.5}$$

avec

$$\Phi\left(t\right)=\frac{1}{2}t^2-\left(S_{a,b}\max_M B(x)\right)\frac{t^{2^\sharp}}{2^\sharp}$$

et

$$\Psi\left(t\right)=\frac{1}{2}t^2+\left(S_{a,b}\max_M B(x)\right)\frac{t^{2^\sharp}}{2^\sharp}.$$

Clairement on a

$$I^{(1)}\left(u\right)=\frac{1}{2}\left\|u\right\|^2-\frac{1}{2^\sharp}\int_M B(x)\left|u(x)\right|^{2^\sharp}dv_g.$$

Comme $B\left(x\right)$ est une fonction positive et continue sur M alors

$$I^{(1)}\left(u\right)\geq\frac{1}{2}\left\|u\right\|^2-\frac{1}{2^\sharp}\max_{x\in M}B(x)\int_M\left|u(x)\right|^{2^\sharp}dv_g.$$

Par ailleurs

$$\int_M\left|u(x)\right|^{2^\sharp}dv_g=\left\|u\right\|_{2^\sharp}^{2^\sharp}\leq S_{a,b}.\left\|u\right\|^{2^\sharp}$$

Donc

$$I^{(1)}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2^\sharp}\left(S_{a,b}\max_{x\in M} B(x)\right).\|u\|^{2^\sharp}$$

Il vient que

$$I^{(1)}(u) \geq \Phi(\|u\|)$$

d'où la première inégalité.

D'autre part nous avons

$$I^{(1)}(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2^\sharp}\max_{x\in M} B(x)\int_M |u(x)|^{2^\sharp} dv_g$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2^\sharp}\left(S_{a,b}\max_{x\in M} B(x)\right)\|u\|^{2^\sharp} \leq \Psi(\|u\|)$$

i.e. on obtient (2.5). ■

Remarque 2.1 *On remarque que $\Phi(t)$ est une fonction croissante sur $[0, t_0]$ et décroissante sur $[t_0, +\infty[$, où*

$$t_0 = \left(S_{a,b}\max_{x\in M} B(x)\right)^{\frac{4-n}{8}}.$$

Lemme 2.1 *Soit $\theta > 0$ tel que*

$$0 < \theta^2 < \frac{1}{n-2}$$

et posons

$$t_1 = \theta t_0$$

alors on a l'inégalité suivante

$$\Psi(t_1) \leq \theta^2 \frac{2^\sharp + 2}{2^\sharp - 2}\Phi(t_0) < \frac{1}{2}\Phi(t_0) \tag{2.6}$$

Preuve: En effet

$$\Psi\left(t_1\right)=\frac{1}{2}t_1^2+\left(S_{a,b}\max_{x\in M}B(x)\right)\frac{t_1^{2^\sharp}}{2^\sharp}=\frac{1}{2}\left(\theta t_0\right)^2+S_{a,b}.\max_{x\in M}B(x)\frac{\left(\theta t_0\right)^{2^\sharp}}{2^\sharp}$$

$$=\theta^2\left(\frac{1}{2}t_0^2+S_{a,b}\max_{x\in M}B(x)\theta^{2^\sharp-2}\frac{t_0^{2^\sharp}}{2^\sharp}\right).$$

Or nous avons

$$t_0^{2^\sharp}\left(S_{a,b}\max_{x\in M}B(x)\right)=t_0^2 \tag{2.7}$$

et donc

$$\Psi\left(t_1\right)=\theta^2\left(\frac{1}{2}t_0^2+\frac{\theta^{2^\sharp-2}}{2^\sharp}t_0^2\right)=\theta^2t_0^2\left[\frac{1}{2}+\frac{\theta^{2^\sharp-2}}{2^\sharp}\right]$$

$$\leq\theta^2t_0^2\left(\frac{1}{2}+\frac{n-4}{2n}\right)\leq\theta^2t_0^2\frac{2n-4}{2n}\leq\left(n-2\right)\theta^2\frac{t_0^2}{n}.$$

De plus

$$\frac{2^\sharp+2}{2^\sharp-2}=\frac{n-2}{2}\quad\text{et}\quad\frac{1}{2}\Phi\left(t_0\right)=\frac{t_0^2}{n}.$$

Finalement on trouve que

$$\Psi\left(t_1\right)\leq\theta^2\frac{2^\sharp+2}{2^\sharp-2}\Phi\left(t_0\right)<\frac{1}{2}\Phi\left(t_0\right)$$

■

Maintenant on vérifie les conditions du lemme du Col.

Lemme 2.2 *La fonctionnelle I_ϵ satisfait les conditions suivantes:*

(i) Il existe $u_0\in {H_2}^2\left(M\right)$, $\rho>0$ et $t_0>0$ tels que

$$I_\epsilon\left(u_0\right)\geq\rho\ \text{ pour }\ \left\|u_0\right\|=t_0$$

(ii) il existe $u_2\in {H_2}^2\left(M\right)$ avec

$$\left\|u_2\right\|=t_2>t_0\text{ tel que }:I_\epsilon\left(u_2\right)<0.$$

Preuve: Soit $\varphi \in C^{\infty}(M)$, $\varphi > 0$ sur M et sans perdre de généralité on peut supposer que $\|\varphi\| = 1$. Posons

$$C(n,p) = \frac{\theta^{2^\sharp+p}}{2n} \leq C_1(n) = \frac{\theta^{2^\sharp}}{2n} \tag{2.8}$$

l'inégalité (2.3) devient

$$\frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{(t_1\varphi)^{2^\sharp}} dv_g \leq \frac{1}{4}\Phi(t_0). \tag{2.9}$$

En effet, nous avons

$$\Phi(t_o) = \frac{1}{2}t_o^2 - \left(S_{a,b}\max_M B(x)\right)\frac{t_o^{2^\sharp}}{2^\sharp}$$

et en tenant compte de (2.7), on obtient

$$\Phi(t_o) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^\natural}\right)t_o^2 = \frac{2}{n}t_o^2.$$

Par ailleurs et en vertu de (2.8), nous avons

$$\frac{1}{2^\natural}\int_M \frac{A(x)}{(t_1\varphi)^{2^\sharp}} dv_g \leq \frac{C_1(n)}{t_o^{2^\natural}\theta^{2^\natural}}\left(S_{a,b}.\max_M B(x)\right)^{-\frac{n-2}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\Phi(t_o).$$

De façons analogue et en prenant

$$C_2(n,p) = \frac{\theta^{p-1}}{2n}$$

on obtient que

$$\frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{(t_1\varphi)^{p-1}} dv_g \leq \frac{1}{4}\Phi(t_o). \tag{2.10}$$

Prouvons maintenant l'assersion (i). Des relations (2.5), (2.6), (2.9) et (2.10) on tire

$$I_\epsilon(t_1\varphi) \leq \Psi(\|t_1\varphi\|) + \frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{\left(\varepsilon + (t_1\varphi)^2\right)^{2^\flat}} dv_g + \frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(\varepsilon + (t_1\varphi)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}} dv_g$$

$$\leq \Psi\left(t_1\right)+\frac{1}{2^{\sharp}}\int_M \frac{A\left(x\right)}{\left(\varepsilon+\left(t_1\varphi\right)^2\right)^{2^{\flat}}}dv_g+\frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(\varepsilon+\left(t_1\varphi\right)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}}dv_g \leq \Phi\left(t_0\right). \tag{2.11}$$

Encore de (2.5), on déduit que

$$I_{\epsilon}\left(t_0\varphi\right) \geq \Phi\left(t_0\right)+\frac{1}{2^{\sharp}}\int_M \frac{A\left(x\right)}{\left(\varepsilon+\left(t_0\varphi\right)^2\right)^{2^{\flat}}}dv_g+\frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(\varepsilon+\left(t_o\varphi\right)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}}dv_g$$

comme A et C sont supposées à valeurs positives, on trouve que

$$I_{\epsilon}\left(t_0\varphi\right) \geq \Phi\left(t_0\right). \tag{2.12}$$

Finalement de (2.11) et (2.12), on tire que

$$I_{\epsilon}\left(t_1\varphi\right) < \Phi\left(t_0\right) \leq I_{\epsilon}\left(t_0\varphi\right).$$

Maintenant pour avoir (i) il suffit de prendre

$$u_0 = t_0\varphi \qquad \text{et} \quad \rho = \Phi\left(t_0\right).$$

Il reste à prouver la condition (ii); pour cela on remarque

$$\lim_{t\to+\infty} I_{\epsilon}\left(t\varphi\right) = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left\|t\varphi\right\|^2-\frac{1}{2^{\sharp}}\int_M\left(B(x)\left(t\varphi\right)^{2^{\sharp}}dv_g-\frac{A(x)}{\left(\varepsilon+\left(t\varphi\right)^2\right)^{2^{\flat}}}-\frac{2^{\sharp}}{p-1}\frac{C(x)}{\left(\varepsilon+\left(t\varphi\right)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}}\right)dv_g\right]$$

$$= \lim_{t\to+\infty} t^{2^{\sharp}}\left(\frac{1}{2t^{2^{\sharp}-2}}-\frac{1}{2^{\sharp}}\int_M B\left(x\right)\varphi^{2^{\sharp}}dv\left(g\right)\right).$$

Comme par hypothèse $B>0$ alors

$$\lim_{t\to+\infty} I_{\epsilon}\left(t\varphi\right) = -\infty$$

et par conséquent on peut choisir un t_2 tel que

$$t_2 > t_0 \ \text{ et } \ I_\epsilon\left(t_2.\varphi\right) < 0.$$

Donc si on pose $u_2 = t_2\varphi$ on obtient la condition (ii) du Lemme 2.2.

2^e étape : Le lemme 2.2 nous permet d'appliquer le théorème du col à la fonctionnelle I_ϵ. Soit

$$C_\epsilon = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{u\in\gamma} I_\epsilon\left(u\right)$$

où Γ est l'ensemble des chemins reliant $u_1 = t_1.\varphi$ à $u_2 = t_2.\varphi$.

Alors C_ε est une valeur critique pour I_ε et on a de plus

$$C_\epsilon > \Phi\left(t_0\right)$$

et si on prend $\gamma\left(t\right) = t.\varphi$ pour $t \in [t_1, t_2]$ on voit que C_ε est bornée uniformément quand ε tend vers 0 et on a de plus :

$$0 < \Phi\left(t_0\right) < C_\epsilon \leq C \tag{2.13}$$

pour toute ε suffisament petit et $C > 0$ indépendant de ε.

Par conséquence il existe une suite de fonctions $\left(u_k\right)_k$ dans $H_2^{\ 2}\left(M\right)$ telles que:

$$I_\epsilon\left(u_k\right) \underset{k\to+\infty}{\to} C_\epsilon \ \text{ et } \ DI_\epsilon\left(u_k\right) \underset{k\to+\infty}{\to} 0 \tag{2.14}$$

■

Comme il est d'usage, on va montrer que la suite de Palais-Smale est bornée.

Lemme 2.3 *La suite de Palais-Smale $\left(u_k\right)_k$ est bornée dans $H_2^{\ 2}\left(M\right)$, de plus la limite de cette suite qu'on note par u_ϵ est une solution faible de l'équation (2.4).*

Preuve: De (2.14) on déduit que $\forall \varphi \in H_2^2(M)$

$$DI_\epsilon(u_k).\varphi = o(1)$$

c'est-à-dire $\forall \varphi \in H_2^2(M)$ on a

$$\int_M (\Delta_g u_k \Delta_g \varphi + a(x)\langle \nabla_g u_k, \nabla_g \varphi\rangle + b(x) u_k \varphi) dv_g = \int_M B(x)|u_k|^{2^\sharp - 1} \varphi dv_g \tag{2.15}$$

$$+ \int_M \frac{A(x) u_k \varphi}{\left(\varepsilon + (u_k)^2\right)^{2^\flat + 1}} dv_g + \int_M \frac{C(x) u_k \varphi}{\left(\varepsilon + (u_k)^2\right)^{\frac{p+1}{2}}} dv_g + o(1)$$

en particulier pour $\varphi = u_k$ on trouve

$$\int_M \left((\Delta_g u_k)^2 + a(x)|\nabla_g u_k|^2 + b(x) u_k^2\right) dv_g - \int_M B(x)|u_k|^{2^\sharp} dv_g = \int_M \frac{A(x) u_k^2}{\left(\varepsilon + (u_k)^2\right)^{2^\flat + 1}} dv_g$$

$$+ \int_M \frac{C(x) u_k^2}{\left(\varepsilon + (u_k)^2\right)^{\frac{p+1}{2}}} dv_g + o(1).$$

ou encore que

$$-\frac{1}{2}\int_M \left((\Delta_g u_k)^2 + a(x)|\nabla_g u_k|^2 + b(x) u_k^2\right) dv_g + \frac{1}{2}\int_M B(x)|u_k|^{2^\sharp} dv_g$$

$$= -\frac{1}{2}\int_M \frac{A(x) u_k^2}{\left(\varepsilon + (u_k)^2\right)^{2^\flat + 1}} dv_g - \frac{1}{2}\int_M \frac{C(x) u_k^2}{\left(\varepsilon + (u_k)^2\right)^{\frac{p+1}{2}}} dv_g + o(1). \tag{2.16}$$

D'autre part il vient de (2.14) que

$$I_\epsilon(u_k) - C_\epsilon = o(1)$$

i.e.

$$\frac{1}{2}\int_M \left((\Delta_g u_k)^2 + a(x)|\nabla_g u_k|^2 + b(x) u_k^2\right) dv_g - \frac{1}{2^\sharp}\int_M B(x)|u_k|^{2^\sharp} dv_g$$

$$+\frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{\left(\varepsilon+(u_k)^2\right)^{2^\flat}}dv_g+\frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(\varepsilon+(u_k)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}}dv_g+o\left(1\right)=C_\epsilon+o\left(1\right). \tag{2.17}$$

Donc par addition de (2.16) et (2.17) on obtient

$$\frac{2}{n}\int_M B(x)\left|u_k\right|^{2^\sharp}dv_g+\frac{1}{2}\int_M \frac{A(x)u_k^2}{\left(\varepsilon+(u_k)^2\right)^{2^\flat+1}}dv_g+\frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{\left(\varepsilon+(u_k)^2\right)^{2^\flat}}dv_g \tag{2.18}$$

$$+\frac{1}{2}\int_M \frac{C(x)u_k^2}{\left(\varepsilon+(u_k)^2\right)^{\frac{p+1}{2}}}dv_g+\frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(\varepsilon+(u_k)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}}dv_g=C_\epsilon+o\left(1\right).$$

Pour k assez grand on déduit que

$$\frac{2}{n}\int_M B(x)\left|u_k\right|^{2^\sharp}dv_g\leq 2C_\epsilon+o\left(1\right)$$

ou encore

$$\frac{1}{2^\sharp}\int_M B(x)\left|u_k\right|^{2^\sharp}dv\left(g\right)\leq\frac{n}{2^\sharp}C_\epsilon+o\left(1\right)$$

combinant cette inégalité dans (2.17) nous obtenons

$$\frac{1}{2}\int_M\left(\left(\Delta_g u_k\right)^2+a\left(x\right)\left|\nabla_g u_k\right|^2+b\left(x\right)u_k^2\right)dv\left(g\right)\leq C_\epsilon+\frac{n}{2^\sharp}C_\epsilon+o\left(1\right)$$

$$\leq nC_\epsilon+\frac{n\left(n-4\right)}{2n}C_\epsilon+o\left(1\right)\leq 2\left(n-2\right)C_\epsilon+o\left(1\right).$$

Et pour k assez grand

$$\int_M\left(\left(\Delta_g u_k\right)^2+a\left(x\right)\left|\nabla_g u_k\right|^2+b\left(x\right)u_k^2\right)dv\left(g\right)\leq 4nC_\epsilon+o\left(1\right)\leq 4nC_\epsilon+1$$

i.e.

$$\left\|u_k\right\|^2\leq 4nC_\epsilon+1. \tag{2.19}$$

De (2.17) on a aussi

$$-\frac{1}{2^{\sharp}}\int_M B(x)|u_k|^{2^{\sharp}}dv(g)\leq C_\epsilon+o(1).$$

Pour k assez grand:

$$\int_M B(x)|u_k|^{2^{\sharp}}dv(g)\geq -2^{\sharp}C_\epsilon\geq -\frac{2nC_\epsilon}{n-4}.$$

Or on sait que

$$\int_M B(x)|u_k|^{2^{\sharp}}dv(g)\leq nC_\epsilon+o(1)$$

donc pour k assez grand

$$\int_M B(x)|u_k|^{2^{\sharp}}dv(g)\leq 2nC_\epsilon.$$

En conclusion on a

$$-\frac{2nC_\epsilon}{n-4}\leq\int_M B(x)|u_k|^{2^{\sharp}}dv(g)\leq 2nC_\epsilon. \tag{2.20}$$

Ainsi on a démontrer que la suite $(u_k)_k$ est bornée dans $H_2^2(M)$ donc on peut extraire une sous-suite qu'on note encore par $(u_k)_k$qui vérifie

1. $u_k\rightarrow u_\epsilon$ faiblement dans $H_2^2(M)$.
2. $u_k\rightarrow u_\epsilon$ fortement dans $L^r(M)$, $\forall r<\frac{2n}{n-4}$
3. $u_k\rightarrow u_\epsilon$ p.p dans M.
4. $(u_k)^{2^{\sharp}-1}\rightarrow u_\epsilon^{2^{\sharp}-1}$ faiblement dans $L^{\frac{2^{\sharp}}{2^{\sharp}-1}}(M)$.

On pose $g(x)=\frac{1}{\epsilon^q}$ où $\epsilon>0$ et $q>0$ alors on a d'apres le théorème de convergence dominée de Lebesgue:

$$\forall k\in\mathbb{N}:\ \left((u_k)^2+\epsilon\right)^{-q}<\epsilon^{-q}\ \text{ et }\ \epsilon^{-q}\in L^r(M)\quad\forall r\geq 1$$

donc $\left((u_k)^2+\epsilon\right)^{-q}\rightarrow\left((u_\epsilon)^2+\epsilon\right)^{-q}$ fortement dans $L^r(M)$ $\forall r\geq 1$ avec (ii) on déduit que:

$\frac{u_k}{\left(u_k^2+\epsilon\right)^q}\rightarrow\frac{u_\epsilon}{(\epsilon+u_\epsilon^2)^q}$ fortement dans $L^2(M)$. Ainsi si on fait tendre k vers $+\infty$ dans (2.15) on obtient que u_ϵ est une solution faible de l'équation :

$$\Delta_g^2 u - div\left(a\left(x\right)\nabla_g u\right) + b\left(x\right)u = B\left(x\right)\left|u\right|^{2^\sharp-2}u + \frac{A\left(x\right)u}{\left(\varepsilon+u^2\right)^{2^\flat+1}} + \frac{C(x)u}{\left(\varepsilon+u^2\right)^{\frac{p+1}{2}}} \qquad (2.21)$$

avec $2^\flat = \frac{2^\natural}{2}$ et $p > 1$.

Notre solution u_ϵ est non identiquement nulle.

En effet: de (2.17) nous avons

$$-\frac{1}{2^\sharp}\int_M B\left(x\right)\left|u_k\right|^{2^\sharp} dv\left(g\right) \leq C_\varepsilon + o\left(1\right) \leq 2C_\varepsilon + o\left(1\right)$$

ou encore

$$-\frac{2}{n}\int_M B.\left|u_k\right|^{2^\sharp} dv\left(g\right) \leq \frac{4}{n}.2^\sharp C_\varepsilon + o\left(1\right).$$

D'autre part de (2.18) on obtient

$$\frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A\left(x\right)}{\left(\varepsilon+\left(u_k\right)^2\right)^{2^\flat}}dv\left(g\right) \leq C_\varepsilon - \frac{2}{n}\int_M B\left(x\right)\left|u_k\right|^{2^\sharp} dv\left(g\right)$$

$$\leq C_\varepsilon + \frac{4}{n}2^\sharp C_\varepsilon + o\left(1\right) \leq \left(2^\sharp - 1\right)C_\varepsilon + o\left(1\right).$$

Quand $k \to +\infty$ et avec (2.13) on déduit

$$\frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A\left(x\right)}{\left(\varepsilon+\left(u_\varepsilon\right)^2\right)^{2^\flat}}dv\left(g\right) \leq \left(2^\sharp - 1\right)C \qquad (2.22)$$

où C est la borne supèrieure des C_ε.

Maintenant si pour une suite $\varepsilon_j \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (Avec $\epsilon_j \geq 0\ \forall j \in \mathbb{N}$) ; u_{ε_j} vaut 0 alors on aurra

$$\frac{1}{2^\sharp\left(2^\sharp-1\right)\varepsilon_j^{2^\flat}}\int_M A\left(x\right)dv\left(g\right) \leq C.$$

Et quand $j \to +\infty$ on aboutit à une contradiction car on à supposé que $A > 0$.

Finalement on déduit que pour ε suffisament petit ; u_ε est une solution non identiquement nulle de l'équation (2.4).

Maintenant en écrivant l'équation (2.21) sous la forme

$$\Delta_g^2 u - div\,(a(x)\nabla u) + \left(b(x) - \frac{A\,(x)}{(\epsilon + u_\epsilon^2)^{2^\flat+1}} - \frac{C\,(x)}{(\epsilon + u_\epsilon^2)^{\frac{p+1}{2}}} \right) u = B\,(x)\,|u|^{2^\natural - 2}\, u$$

et en remarquant que

$$b\,(x) - \frac{A\,(x)}{(\epsilon + u_\epsilon^2)^{2^\flat+1}} - \frac{C\,(x)}{(\epsilon + u_\epsilon^2)^{\frac{p+1}{2}}} \in L^\infty(M)$$

on déduit par la propostion (3) que $u_\epsilon \in C^4\,(M)$.

<u>3^e étape :</u>**(le passage à la limite)**

D'après ce qui précéde u_ϵ est une solution non identiquement nulle de l'équation (2.4) de plus u_ϵ est une limite faible de la suite $(u_k)_k$ et par la semi-continuité inférieure de la norme, nous avons

$$\|u_\epsilon\| \le \lim_{k\to+\infty} \inf \|u_k\|$$

et par l'inégalité (2.19), nous obtenons

$$\|u_\epsilon\|^2 \le 4nC + 1 \tag{2.23}$$

pour toute $\epsilon > 0$ suffisament petit. Maintenant on prend une suite dénombrable $(\epsilon_k)_k$ convergente vers 0 et en posant $u_k = u_{\epsilon_k}$, nous avons

$$\Delta_g^2 u_k - div\,[a\,(x)\,\nabla_g u_k] + b\,(x)\ \ u_k = B\,(x)\,|u_k|^{2^\sharp-2}\,u_k + \frac{A\,(x)\,u_k}{(\varepsilon_k + u_k^2)^{2^\flat+1}} + \frac{C(x)u_k}{(\varepsilon_k + u_k^2)^{\frac{p+1}{2}}} \tag{2.24}$$

Par (2.23) la suite $(u_k)_k$ est bornée indépendament de ϵ dans $H_2^2\,(M)$ et par suite on peut extraire une sous-suite qu'on note encore $(u_k)_k$ vérifiant

i) $u_k \longrightarrow u$ faiblement dans $H_2^2\,(M)$

ii) $u_k \longrightarrow u$ fortement dans $L^p(M)$ $\forall p < 2^\sharp$

iii) $u_k \longrightarrow u$ p.p dans M.

vi) $u_k^{2^\sharp-1} \longrightarrow u^{2^\sharp-1}$ faiblement dans $L^{\frac{2^\sharp}{2^\sharp-1}}(M)$.

Par ailleurs la suite $(u_k)_k$ est bornée inférieurement: en effet comme les u_k sont continues, notons par x_k le minimum de u_k et $x_o = \lim_k x_k$ (une sous-suite encore notée (x_k)) et comme l'opérateur possède une fonction de Green positive G par supposition alors

$$u_k(x_k) = \int_M G(x_k, u_k(y)) \left(B(y)\, u_k^{2^\sharp-1}(y) + \frac{A(y)\, u_k(y)}{(\varepsilon_k + u_k^2(y))^{2^\flat+1}} + \frac{C(y)\, u_k(y)}{(\varepsilon_k + u_k^2(y))^{\frac{p+1}{2}}} \right) dv_g$$

et par le Lemme de Fatou

$$\liminf_k u_k(x_k) \geq \int_M \liminf_k G(x_k, u_k(y)) \left(B(y)\, u_k^{2^\sharp-1}(y) + \frac{A(y)\, u_k(y)}{(\varepsilon_k + u_k^2(y))^{2^\flat+1}} + \frac{C(x)\, u_k(y)}{(\varepsilon_k + u_k^2(y))^{\frac{p+1}{2}}} \right) dv_g$$

$$= \int_M G(x_o, u(y)) \left(B(y) u^{2^\natural-2}(y) + \frac{A(y)}{u(y)^{2^\natural+2}} + \frac{C(x)}{u(y)^{p+1}} \right) u(y) dv_g$$

et comme par hypothèse $B > 0$, $A \geq 0$ et $C \geq 0$ alors $\lim_k \inf u_k(x_k) = 0$ entraîne que $u \equiv 0$ ce qui contredit la relation (2.22) alors il existe $\delta > 0$ tel que $u_k \geq \delta$. On peut utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue et on obtient

$$\frac{1}{(\epsilon_k + u_k^2)^q} \longrightarrow \frac{1}{u^{2q}} \text{ fortement dans } L^p(M) \quad \forall p \geq 1,\ \forall q > 1.$$

Finalement avec (ii) il vient que

$$\frac{u_k}{(\epsilon_k + u_k^2)^{2^\flat+1}} \longrightarrow \frac{1}{u^{2^\sharp+1}} \quad \text{et} \quad \frac{u_k}{(\epsilon_k + u_k^2)^{\frac{p+1}{2}}} \longrightarrow \frac{1}{u^p} \text{ fortement dans } L^2(M).$$

Evidemment $u \geq \delta > 0$.

Par conséquent u est une solution positive de l'équation

$$\Delta_g^2 u - div\left[a\left(x\right)\nabla_g u\right] + b\left(x\right)\; u = B\left(x\right) u^{2^\sharp - 1} + \frac{A(x)}{u^{2^\natural + 1}} + \frac{C(x)}{u^p}.$$

■

Chapitre 3

Non Existence de Solution.

Dans ce chapitre on va présenter un résultat de non existence

Théorème 3.1 *Etant donnée* $(M\ ,g)$ *une variété Riemannienne compacte de dimension* $n \geq 5$ *et* a, b, A, B *et* C *des fonctions de classe* $C^{\infty}(M)$ *avec* $A > 0$ *et* $C \geq 0$ *sur* M *et* $1 < p \leq 2^{\natural} + 1$.

Alors si

$$\int_M \sqrt{A + Cu^{2^{\natural}-p+1}}dv_g > S\Lambda^{2^{\sharp}}\left[\frac{K_{a,b}}{S\Lambda^{\frac{8}{n-4}}} + \max_M B^{-}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.1}$$

où $\Lambda > 0$, $B^{-} = \max\ (0, -B)$ *et* S *la meilleure constante dans l'inclusion de Sobolev* $H_2^{\ 2}(M) \subset L^{2^{\sharp}}(M)$.

Alors l'équation(2.1) ne possède pas de solution positive vérifiant

$$\|u\|_{H_2^2(M)} \leq \Lambda.$$

Preuve: Supposons que $u \in H_2^{\ 2}(M)$ soit une solution positive de l'équation (2.1) telle que $\|u\ \|_{H_2^2} \leq \Lambda$.

Posons $b^{+} = \max(0, b)$ et $a^{+} = \max(0, a)$ et soit

$$K_{a,b} = \max\ \left(1, \max_M a^{+}, \max_M b^{+}\right)$$

alors

$$\int_M \left((\Delta_g u)^2 + a\,|\nabla_g u|^2 + bu^{\ 2}\right) dv_g \ \leq \ K_{a,b}\|u\ \|^2_{H_2^2(M)}. \tag{3.2}$$

En multipliant (2.1) par u et en intégrant sur M on obtient

$$\int_M \left((\Delta_g u)^2 + a\,|\nabla_g u|^2 + bu^2\right) dv_g = \int_M \left(Bu^{\ 2^\sharp} + \frac{A}{u^{2^\sharp}} + \frac{C}{u^{p-1}}\right) dv_g$$

et en tenant compte de (3.2) il vient

$$\int_M B\ u^{\ 2^\sharp} dv_g + \int_M \frac{A}{u^{\ 2^\sharp}} dv_g + \int_M \frac{C}{u^{p-1}} \leq K_{a,b}\|u\ \|^2_{H_2^2(M)}.$$

Or par hypothèse nous avons $\|u\|_{H_2^2} \leq \Lambda$, ainsi

$$\int_M \left(B\ u^{\ 2^\sharp} + \frac{A}{u^{\ 2^\sharp}} + \frac{C}{u^{p-1}}\right)\ dv_g \ \leq K_{a,b}\ \Lambda^2. \tag{3.3}$$

Par ailleurs nous avons

$$\int_M B\ u^{\ 2^\sharp} dv\,(g) \geq -\left(\max_M B^-\right) \int_M u^{2^\sharp} dv\,(g)$$

et par définition de S il vient que

$$\int_M B\ u^{\ 2^\sharp} dv_g \geq -\left(\max_M\ B^-\right) S\Lambda^{2^\sharp}. \tag{3.4}$$

De (3.3) on déduit que

$$\int_M \left(\frac{A}{u^{\ 2^\sharp}} + \frac{C}{u^{p-1}}\right) dv_g \leq K_{a,b}\Lambda^2 + \left(\max_M\ B^-\right) S\Lambda^{2^\sharp}. \tag{3.5}$$

L'inégalité de Hölder nous donne

$$\int_M \left(A + Cu^{2^\natural - p+1}\right)^{\frac{1}{2}} dv_g = \int_M \sqrt{\frac{A + Cu^{2^\natural - p+1}}{u^{2^\natural}}} \sqrt{u^{2^\sharp}} dv_g$$

$$\leq \left(\int_M \left(\frac{A}{u^{\,2^\sharp}} + \frac{C}{u^{p-1}}\right) dv_g\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M u^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{1}{2}}$$

et avec (3.5) on tire

$$\int_M \left(A + Cu^{2^\natural - p+1}\right)^{\frac{1}{2}} dv_g \leq \left[K_{a,b}\Lambda^2 + \left(\max_M B^-\right) S.\Lambda^{2^\sharp}\right]^{\frac{1}{2}} \left(S\Lambda^{2^\sharp}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(S\Lambda^{2^\sharp}\right)^{\frac{1}{2}} \left[S\Lambda^{2^\sharp}\left(\max_M B^- + \frac{K_{a,b}}{S\Lambda^{2^\sharp - 2}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq S\Lambda^{2^\sharp}\left(\max_M B^- + \frac{K_{a,b}}{S\Lambda^{\frac{8}{n-4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où le résultat. ■

Remarque 6

Si on suppose que $B > 0$ dans le Théorème 3.1 on obtient une autre forme pour (3.1).

En effet si $B > 0$ alors :

$$\int_M B\ u^{\,2^\sharp} dv\,(g) \geq \min_M B \int_M u^{\,2^\sharp} dv\,(g) > 0$$

et par suite et avec (3.3) on obtient

$$\int_M \left(\frac{A}{u^{\,2^\sharp}} + \frac{C}{u^{p-1}}\right) dv_g \leq K_{a,b}\Lambda^2 - \min_M B \int_M u^{\,2^\sharp} dv_g$$

$$\leq K_{a,b}\Lambda^2.$$

Par ailleurs

$$\min_M B \int_M u^{\,2^\sharp} dv_g \leq \int_M B\ u^{\,2^\sharp} dv_g + \int_M \left(\frac{A}{u^{\,2^\sharp}} + \frac{C}{u^{p-1}}\right) dv_g$$

$$\leq K_{a,b}\Lambda^2$$

ainsi

$$\int_M u^{\;2^\sharp} dv\,(g) \leq \frac{K_{a,b}\Lambda^2}{\min\limits_M B}.$$

Finalement avec l'inégalité de Hölder

$$\int_M \left(A + Cu^{2^\natural - p+1}\right)^{\frac{1}{2}} dv_g \leq \frac{K_{a,b}\Lambda^2}{\sqrt{\min\limits_M B}}$$

et par conséquent si

$$\int_M \left(A + Cu^{2^\natural - p+1}\right)^{\frac{1}{2}} dv_g > \frac{K_{a,b}\Lambda^2}{\left(\min\limits_M B\right)^{\frac{1}{2}}}$$

alors (2.1) ne possède pas de solution positive.

Bibliographie

[1] M. Benalili, Nodal solutions to quasilinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds. Communications in Contemporary Mathematics, vol. 12, No.6 (2010) 1-29.

[2] M. Benalili, K. Tahri, Nonlinear elliptic fourth order equations existence results, Nonlinear differential equations and applications, NoDEA (2011) .

[3] M. Benalili, H. Boughazi, On the second Yamabe invariant with singularities. Annales mathématiques Blaise Pascal Volume 19, no 1 (2012), p 239-269.

[4] M. Benalili, On the singular Q-curvature type equation, (accepté dans Journal of Differential Equations).

[5] S. Y. A. Chang, On Paneitz operator-a fourth order differential operator in conformal geometry, Harmonic Analysis and Partial Differential Equations Essays in honor of Alberto P. Calderon, Eds: M. Christ, C. Kenig and C. Sadorsky. Chicago Lectures in Mathematics, (1999), p 127-150.

[6] Z. Djadli, A. Malchiodi, M. Ould Ahmedou, Prescribing a fourth order conformal invariant on the standard sphere. II Blow-up analysis and applications, Ann Sc. Norm, Supper. Pisa CL. Sci, 1, (2002) p 387-434.

[7] Z. Djadli, E. Hebey, M. Ledoux, Paneitz type operators and applications, Duke Math.J. 104, (2000) p 129-169.

[8] E. Hebey, F. Pacard, D. Pollack, A variational Analysis of Einstein-scalar Field Lichnerowicz Equations on compact Riemannien Manifolds, commun. Math. Phys. 278, (2008) p 117-132.

[9] E. Hebey, F. Robert, Coercivity and Struwe's compactness for paneitz type operators with constant coefficients, Calc. Var. 13, (2001) p 491-517.

[10] K. Tahri: Les équations elliptiques d'ordre 4 sur une Variété Riemannienne. Mémoire de Magister, Université Abou-Bekr Belkaïd Tlemcen, 2010.

[11] P. C. Yang, X.W. Xu, Positivity of Paneitz operators, Discret and Continuous Dynamical Systems, 7(2), (2001), p 329-342.

[12] P. Esposito, F. Robert, Mountain Pass critical points for Paneitz-Branson operators, Calc. Var.15, (2002) p 493-517.

[13] P. C., Yang, S.Y. A., Chang, On a fourth order curvature invariant, Comp.Math. 237, Spectral Problems in Geometry and Arithmetic, Ed: T, Branson, AMS, (1999), p 9-28.