

Table des matières

Introduction générale	1
Chapitre 1 : Préliminaires	3
1.1 Définitions	3
1.2 Résultat principal.....	4
1.3 Fonction de Green	6
1.4 Quelques inégalités utiles.....	8
Chapitre 2 : Quelques résultats de la théorie du point fixe	9
2.1 Théorème du point fixe du type Banach.....	9
2.1.1 Théorème de l'application contractante	9
2.1.2 Extension du principe de l'application contractante.....	10
2.1.3 Dépendance continue aux paramètres	14
2.1.4 Les applications lipschitziennes monotones.....	15
2.1.5 La signification du théorème de point fixe de Banach	16
2.2 Théorème du point fixe du type Brouwer - Schauder	17
2.2.1 Le théorème du point fixe de type Brouwer	17
2.2.2 Théorème du point fixe de type Schauder	19
2.3 Théorème du point fixe de krasnoselskii.....	21
Chapitre 3 : Applications	23
3.1 Les formes bilinéaires symétriques	23
3.2 Les formes bilinéaires continues	25
3.3 Approche numérique du théorème du point fixe	29
3.4 Application du théorème de Krasnoselskii.....	31
3.5 Théorème du point fixe pour les opérateurs généraux α -concaves.....	36
Conclusion	40
Références	41

Introduction générale

Introduction générale

Dans ce mémoire, on étudie quelques théorèmes du point fixe de Banach, Brouwer, Schauder et krasnoselskii et quelques-unes de leurs applications. Etant donné un ensemble M et une application $T : M \rightarrow M$, on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur T et M pour que T ait un point fixe. Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problèmes comme par exemple trouver les zéros d'un polynôme, ou prouver que certaines équations différentielles admettent des solutions sans les déterminer explicitement.

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs, d'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach (par exemple, l'identité).

En 1955, et pour la première fois, Krasnoselskii a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

Ce travail est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré d'une part, à quelques définitions concernant les cônes et d'autre part, à un résultat principal qui concerne les opérateurs α -concaves ou homogènes. Quelques résultats de la théorie du point fixe constituent les quatre paragraphes du second chapitre.

Le premier paragraphe du chapitre 3 s'étend aux applications du principe de l'application contractante. On se penche, particulièrement, sur les résultats d'existence pour les inégalités variationnelles définies par des formes bilinéaires sur un espace de Banach et dans lesquelles le principe de l'application contractante est applicable.

Nous abordons dans le deuxième paragraphe du chapitre 3 quelques applications du théorème du point fixe de Krasnoselskii pour établir l'existence et l'unicité des solutions.

Enfin on étudie le théorème du point fixe pour les opérateurs α -concaves, pour lesquels l'existence et l'unicité des solutions positives des équations du type $x = Ax + x_0$ sont assurées.

Chapitre 1

Préliminaires

Chapitre1 : Préliminaires

On commence par donner des définitions, ainsi que quelques résultats connus qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

1.1 Définitions

a. Définition d'un cône :

Soit E un espace de Banach réel. Un sous ensemble convexe P de E est dit un cône s'il satisfait :

- $x \in P$ et $\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in P$
- $x \in P$ et $-x \in P \Rightarrow x = \theta$ où θ est l'élément nul de E .

b. Définition d'un cône solide :

Soit $\overset{\circ}{P}$ l'intérieure du cône P . Alors P est dit cône solide si son intérieure est non vide.

c. Définition d'un cône normal :

P est dit cône normal s'il existe une constante $N > 0$ telle que :
pour tout $x, y \in P, \theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N\|y\|$.

N est dite constante de normalité de P .

d. Autres définitions :

- On dit que E est partiellement ordonné par le cône P si :

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P.$$

- Si $a, b \in E$, l'ensemble $[a, b] = \{x \in E / a \leq x \leq b\}$ est dit intervalle ordonné entre a et b .

- On dit qu'un opérateur $A: E \rightarrow E$ est croissant (décroissant) si :

$$x \leq y \Rightarrow Ax \leq Ay \quad (Ax \geq Ay)$$

- Pour tout $x, y \in E$, la notation $x \sqsubset y$ montre qu'ils existent $\lambda > 0, \mu > 0$ telles que $\lambda x \leq y \leq \mu x$. \sqsubset est une relation d'équivalence.

- Soit h un élément de E positif, tel que $h \geq \theta$ et $h \neq \theta$. On note par P_h

l'ensemble :

$$P_h = \{x \in E / \exists \lambda(x), \mu(x) > 0 \text{ tels que } \lambda(x)h \leq x \leq \mu(x)h\}.$$

$$P_h \subset P.$$

Soit $D \subset E$, un opérateur $A: D \rightarrow E$ est dit compact si pour tout ensemble S borné dans D , $A(S)$ est relativement compact. De plus A est dit complètement continu s'il est continu et compact.

1.2 Résultat principal

Ce résultat nous donne l'existence et l'unicité des solutions positives de l'équation

$$x = Ax + x_0 \quad (1)$$

avec opérateur α -concave ou homogène. On suppose toujours, que E est un espace de Banach réel avec un ordre partiel introduit par le cône normal P de E . On prend $h \in E$, $h > \theta$.

P_h est défini comme précédemment.

Définition d'un opérateur α -concave :

Soit l'opérateur $A: P_h \rightarrow P_h$, alors A est dit général α -concave si :

$$\forall x \in P_h \text{ et } t \in (0,1) \text{ il existe } \alpha(t) \in (0,1) \text{ tel que : } A(tx) \geq t^{\alpha(t)} Ax$$

Le lemme suivant sera utile pour démontrer le résultat principal.

Lemme 1.1

Supposons que A satisfait les conditions suivantes :

(H₁) $A: P_h \rightarrow P_h$ est croissant dans P_h .

(H₂) $\forall x \in P_h$ et $t \in (0,1)$, il existe $\alpha(t) \in (0,1)$ tel que : $A(tx) \geq t^{\alpha(t)} Ax$. Alors il existe $u_0, v_0 \in P_h$ tel que $u_0 < v_0, u_0 \leq Au_0 \leq Av_0 \leq v_0$.

Soit l'hypothèse (H₃) : il existe une constante $l \geq 0$ telle que $x_0 \in [\theta, lh]$.

Le théorème suivant, est le résultat principal de cette partie.

Théorème 1.2

Supposons que l'opérateur A satisfait (H₁), (H₂) et (H₃). Alors l'équation (1) admet une solution unique dans P_h .

Preuve :

$Ax \in P_h$ pour tout $x \in P_h$, alors ils existent $\lambda, \mu > 0$ telles que $\lambda h \leq Ax \leq \mu h$.

On obtient donc :

$$\lambda h \leq Ax + x_0 \leq \mu h + lh = (\mu + l)h. \text{ Alors } Ax + x_0 \in P_h \quad \forall x \in P_h.$$

Définissons un opérateur C par : $Cx = Ax + x_0, \forall x \in P_h$

$C: P_h \rightarrow P_h$ est croissant. Donc, pour tout $x \in P$ et $t \in (0,1)$ on sait que :

$$C(tx) = A(tx) + x_0 \geq t^{\alpha(t)} Ax + x_0 \geq t^{\alpha(t)} (Ax + x_0) \geq t^{\alpha(t)} Cx$$

Le lemme (1.1) implique l'existence de $u_0, v_0 \in P_h$ tels que $u_0 < v_0, u_0 \leq Cu_0 \leq Cv_0 \leq v_0$ (*).

Construisons, successivement, la suite :

$u_n = Cu_{n-1}v_n = Cv_{n-1}, n = 1, 2, \dots$ C étant croissant, on a : $u_1 = Cu_0 \leq Cv_0 = v_1$. Et en général, on obtient $u_n \leq v_n, n = 1, 2, \dots$

On obtient de (*) et la monotonie de C : $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq v_0$ (**).

Soit $t_n = \sup\{t > 0 / u_n \geq tv_n\}$ Alors $u_n \geq t_n v_n, n = 1, 2, \dots$

$u_{n+1} \geq u_n \geq t_n v_n \geq t_n v_{n+1}, n = 1, 2, \dots$ or on a $u_{n+1} \geq t_{n+1} v_{n+1}, n = 1, 2, \dots$

avec $t_{n+1} = \sup\{t > 0 / u_{n+1} \geq tv_{n+1}\}$ donc $t_{n+1} \geq t_n \Rightarrow (t_n)_n$ est croissante et puisque $(t_n)_n \subset [0, 1]$

(i.e. bornée) elle est donc convergente. Supposons que $t_n \rightarrow t^*$ alors $t^* = 1$. Sinon $0 < t^* < 1$.

Si $0 < t^* < 1$, on distingue deux cas :

1. Il existe un entier N tel que $t_N = t^*$. Dans ce cas, on sait que $t_n = t^*$ pour tout $n \geq N$.

Donc pour $n \geq N$ on a :

$$u_{n+1} = Cu_n \geq C(t^* v_n) \geq t^{*\alpha(t^*)} C v_n = t^{*\alpha(t^*)} v_{n+1}$$

on a $t_{n+1} = t^*$ (car $t_n = t^*$ pour tout $n \geq N$)

$$t_{n+1} = t^* \geq t^{*\alpha(t^*)} > t^* \text{ d'où la contradiction.}$$

2. Pour tout entier n , $t_n < t^*$. On obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= Cu_n \geq C(t_n v_n) = C\left(\frac{t_n}{t^*} t^* v_n\right) \\ &\geq \left(\frac{t_n}{t^*}\right)^{\alpha\left(\frac{t_n}{t^*}\right)} C(t^* v_n) \geq \left(\frac{t_n}{t^*}\right)^{\alpha\left(\frac{t_n}{t^*}\right)} t^{*\alpha(t^*)} C(v_n) \\ &\geq \frac{t_n}{t^*} t^{*\alpha(t^*)} v_{n+1} \geq t_n \left[t^{*\alpha(t^*)-1} \right] v_{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Par définition de } t_n, t_{n+1} \geq t_n \left[t^{*\alpha(t^*)-1} \right].$$

Quand $n \rightarrow \infty$, on aura : $t^* \geq t^{*\alpha(t^*)} > t^*$ d'où la contradiction.

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$.

Pour tout entier p on a :

$$\theta \leq u_{n+p} - u_n \leq v_n - u_n \leq v_n - t_n v_n \leq (1-t_n) v_n \leq (1-t_n) v_0$$

$$\theta \leq v_n - v_{n+p} \leq v_n - u_n \leq (1-t_n) v_0$$

Puisque P est normal de constante N , on aura :

$$\|u_{n+p} - u_n\| \leq N(1-t_n) \|v_0\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \text{ (car } t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1)$$

$$\|v_n - v_{n+p}\| \leq N(1-t_n) \|v_0\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Donc $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites de Cauchy dans E qui est complet. Alors ils existent

u^*, v^* tels que $u_n \rightarrow u^*$ et $v_n \rightarrow v^*$ quand $n \rightarrow \infty$

D'après (***) on a : $u_n \leq u^* \leq v^* \leq v_n$ avec $u^*, v^* \in P_h$ et $\theta \leq v^* - u^* \leq v_n - u_n \leq (1-t_n) v_0$ et donc

$$\|v^* - u^*\| \leq N(1-t_n) \|v_0\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Donc $u^* = v^*$. Soit $x^* := u^* = v^*$, on obtient $u_{n+1} = Cu_n \leq Cx^* \leq Cv_n = v_{n+1}$.

Quand $n \rightarrow \infty$, on aura $x^* = Cx^*$, x^* est donc un point fixe de C dans P_h .

Dans ce qui suit, on va prouver que x^* est l'unique point fixe de C dans P_h .

Soit $t_1 = \sup\{t > 0 / \bar{x} \geq t x^*\}$, \bar{x} un point fixe quelconque de C dans P_h $0 < t_1 < \infty$ et $\bar{x} \geq t_1 x^*$.

On doit prouver que $t_1 \geq 1$.

Si $0 < t_1 < 1$ alors :

$$\bar{x} = C\bar{x} \geq C(t_1 x^*) \geq t_1^{\alpha(t_1)} Cx^* = t_1^{\alpha(t_1)} x^*$$

Puisque $t_1^{\alpha(t_1)} > t_1$, ceci contredit la définition de t_1 . Alors $t_1 \geq 1$, et donc $\bar{x} \geq t_1 x^* \geq x^*$ et de façon similaire on prouve que $x^* \leq \bar{x}$ ce qui implique que $x^* = \bar{x}$. Donc C possède un point fixe x^* dans P_h .

On en déduit que l'équation (1) possède une solution unique dans P_h .

En jouant sur les hypothèses $(H_1)(H_2)$ et (H_3) on obtient le corollaire et les théorèmes suivants :

Corollaire 1.3 :

Supposons que A satisfait (H_1) et (H_2) et $x_0 \in P_h$. Alors l'équation (1) admet une solution unique dans P_h .

Théorème 1.4 :

Soit $A: P \rightarrow P_h$ un opérateur croissant, supposons (H_3) satisfaite. Et pour $t \in (0,1)$, il existe $0 < \eta(t) < 1$ tel que $A(tx) \geq t(1 + \eta(t))Ax, \forall x \in P_h, t \in (0,1)$ alors l'équation (1) admet une solution unique dans P_h .

Théorème 1.5 :

Soit P un cône solide et $x_0 \in \overset{\circ}{P}$. Supposons que A satisfait :

(H_4) $A: \overset{\circ}{P} \rightarrow \overset{\circ}{P}$ est croissant et homogène (i.e. $A(\lambda x) = \lambda Ax$ pour tout $x \in \overset{\circ}{P}$ et $\lambda > 0$).

(H_5) A est complètement continu.

(H_6) il existe $v_0 \in \overset{\circ}{P}$ tel que $Av_0 \leq v_0 - x_0$

Alors l'équation (1) possède une solution unique.

La résolution de certaines équations différentielles fait appel aux fonctions de Green. Dans cette partie, on va voir comment intervient cette fonction dans la résolution d'une équation pour un opérateur du type Sturm-Liouville en dimension 1. On aura besoin de cette notion dans le chapitre 3.

1.3 Fonction de Green

Soit (a,b) un intervalle fini, $q: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue. On considère l'équation :

$$(Lf)(x) \equiv -f''(x) + q(x)f(x) = h(x) \quad (1)$$

où h est une fonction donnée supposée continue par morceau,

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad (2)$$

est l'opérateur différentiel du type Sturm-Liouville, avec les conditions aux limites suivantes :

$$\alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \quad (3)$$

$$\alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0 \quad (4)$$

où α_i, β_i sont des constantes données.

Dans le cas où $\alpha_i = 0$ on a des conditions de Neumann.

Dans le cas où $\beta_i = 0$ on a des conditions de Dirichlet.

Définition de la fonction de Green :

La méthode de Green consiste à résoudre pour chaque y fixé dans (a, b) l'équation différentielle :

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right] G(x, y) = \delta(x - y) \quad (5)$$

où la fonction de Green doit satisfaire les mêmes conditions aux limites en $x = a$ et $x = b$ que la solution f de (1).

Si on arrive à déterminer G , la solution f de (1) s'obtient :

$$f(x) = \int_a^b G(x, y) h(y) dy \quad (6)$$

δ étant une distribution, l'équation (5) s'interprète dans un sens distributionnel par :

$$L_x G = \delta(x - y).$$

Détermination de la fonction de Green

Pour $y \in (a, b)$ fixé, on détermine $G(x, y)$ en tant que fonction de x par les conditions suivantes :

- i) Elle doit satisfaire l'équation différentielle $L_x G = 0$ sur (a, y) et (y, b) .
- ii) Elle doit satisfaire les conditions aux limites (3) et (4) en $x = a$ et $x = b$.
- iii) Elle doit être continue au point $x = y$.
- iv) La dérivée doit avoir une discontinuité de -1 au point $x = y$ c'est-à-dire la deuxième dérivée de G au point $x = y$ est égale à $-\delta(x - y)$.

Désignons par g_a une solution de $LG = 0$ qui satisfait la condition (3) et par g_b une solution de $LG = 0$ qui satisfait la condition (4). g_a et g_b sont déterminées à des coefficients multiplicatifs près.

On suppose qu'on peut les choisir linéairement indépendantes sur (a, b) i.e.

$$\lambda g_a + \mu g_b = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0 \quad (g_a \text{ n'est pas proportionnelle à } g_b).$$

Alors pour y fixé, ils existent des constantes γ et k qu'on peut déterminer à partir des conditions iii) et iv) et qui peuvent dépendre de y telles que :

$$G(x, y) = \begin{cases} \gamma g_a(x) & \text{si } x < y \\ k g_b(x) & \text{si } x > y \end{cases}$$

On détermine γ et k à partir de iii) et iv) au point $x = y$, on obtient

$$G(x, y) = \frac{-1}{W(y)} \begin{cases} g_a(x) g_b(y) & \text{si } x < y \\ g_a(y) g_b(x) & \text{si } x > y \end{cases}$$

où $W(y) = g_a(y) g_b'(y) - g_a'(y) g_b(y)$ est le Wronskien de g_a, g_b .

Pour conclure ce chapitre on va donner quelques outils utiles qu'on va les utiliser dans le chapitre 3

a) Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $x, y \in E$ ($(E, \|\cdot\|)$ est un espace préhilbertien) alors :

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \text{ où } (\cdot|\cdot) \text{ est le produit scalaire dans } E.$$

b) Inégalité de Hölder

Soit $1 \leq p \leq \infty$, p' l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ alors $f \cdot g \in L^1$ et $\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

c) Inégalité de Young

Soit $1 < p < \infty$ alors $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}, \forall a \geq 0, \forall b \geq 0$.

d) Inégalité de Poincaré

$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ où λ_1 est la plus petite valeur propre de $-\Delta$.

Chapitre 2

Quelques résultats de la théorie du point fixe

Chapitre 2 : Quelques résultats de la théorie du point fixe

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe. A savoir le théorème du point fixe de Banach, celui de Brouwer et Schauder et enfin nous abordons le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

2.1 Théorème du point fixe du type Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

2.1.1 Théorème de l'application contractante

Définition 2.1 :

Soit (M, d) un espace métrique complet et l'application $T: M \rightarrow M$. On dit que T est une application lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x, y de M , l'inégalité

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(x, y)) \quad (1)$$

Si $k \leq 1$, T est appelé non expansive

Si $k < 1$, T est appelé contraction

Théorème 2.2 : (Théorème du point fixe de Banach(1922)) [18]

Soit (M, d) un espace métrique complet et soit $T: M \rightarrow M$ une application contractante avec la constante de contraction k alors T a un unique point fixe $x \in M$.

De plus nous avons la propriété suivante qui est importante :

$$- \text{ Si } x_0 \in M \text{ et } x_n = Tx_{n-1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

$$\text{ et } d(x_n, x) \leq k^n(1 - k)^{-1}d(x_1, x_0) \quad , \quad n \geq 1$$

x étant le point fixe de T .

Preuve :

L'existence :

Soit $y \in M$ un point arbitraire dans M . Considérons la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ donnée par :

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = T(x_{n-1}), n \geq 1 \end{cases}$$

On doit prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans M .

Pour $m < n$, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

Puisque T est une contraction, on a :

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(Tx_{p-1}, Tx_p) \leq k d(x_{p-1}, x_p), \text{ pour } p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m(1 + k + \dots + k^{n-m-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m(1 - k)^{-1}d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

On déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans M qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans M .

Par ailleurs puisque T est continue, on a :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = Tx$$

Donc x est un point fixe de T (i.e. $Tx = x$)

L'unicité :

supposons $x = Tx$ et $y = Ty$ alors :

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

ce qui implique que $d(x, y) = 0$ i. e. $x = y$ (puisque $k < 1$).

Remarques :

- Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a encore un point fixe et un seul.

Ceci résulte de l'unicité.

En effet, soit x l'unique point fixe de T^p on a $T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$ ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité $T(x) = x$.

Donc ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

- Il se peut que T ne soit pas une contraction sur tout l'espace M mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant :

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T: B \rightarrow M$ telle que :

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in B \text{ et } k < 1,$$

avec $B = \{x \in M, d(x, z) < \varepsilon\} \quad z \in M \text{ et } \varepsilon > 0.$

En plus on suppose que $d(z, T(z)) < \varepsilon(1 - k)$ alors T possède un unique point fixe $x \in B$.

Le principe du point fixe a connu diverses extensions. Dans ce qui suit nous allons aborder quelques unes en précisant le lien entre elles.

2.1.2 Extension du principe de l'application contractante

En premier temps on va voir une extension qui consiste à prendre un autre type de contraction et donne le même résultat de Banach.

a. Extension de Boyd et Wong

Elle consiste à remplacer la contraction par la φ -contraction dont nous donnons la définition :

Définition 2.3 :

Soit M un espace métrique et T une application de M dans M . On dit que T est une φ -contraction, s'il existe une application φ semi-continue supérieurement de $[0, \infty)$ dans $[0, \infty)$ avec $\varphi(r) < r$ pour $r > 0$ telle que :

$$\forall x, y \in M, d(T(x), T(y)) \leq \varphi(d(x, y)) \quad (2)$$

Le résultat suivant va assurer l'existence d'un unique point fixe pour une telle application :

Théorème 2.4: [3]

Toute φ -contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

Remarque :

- La contraction est un cas particulier de la φ -contraction (il suffit de prendre $\varphi(r) = kr$ pour tout $r \geq 0$, $0 \leq k < 1$).

On va voir que si on remplace l'hypothèse que T soit une contraction par l'hypothèse plus faible qu'est : $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$, T n'a pas de point fixe. En effet nous avons l'exemple suivant :

Exemple :

Considérons l'espace suivant : $M = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ muni de la métrique

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in M.$$

Soit $T: M \rightarrow M$ tel que : $T(x) = x + \frac{1}{x}$ alors :

$$d(T(x), T(y)) = |T(x) - T(y)| = |x - y| \cdot \frac{xy - 1}{xy} < |x - y| = d(x, y)$$

$$\text{donc } d(T(x), T(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

$$\text{c'est-à-dire : } \nexists k < 1 \text{ tel que : } d(T(x), T(y)) < kd(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

On vérifie que T ne possède aucun point fixe dans M .

En effet : $T(x) = x \Rightarrow \frac{1}{x} = 0$ impossible.

En compensant par d'autres hypothèses supplémentaires, Edelstein a obtenu le résultat suivant :

b. Extension d'Edelstein

Théorème 2.5 : [5]

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T: M \rightarrow M$ une application telle que

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in M, x \neq y \quad (3)$$

Supposons qu'il existe $y \in M$ tel que les itérations de $\{x_n\}$ données par

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = T(x_{n-1}) \quad n \geq 1 \end{cases}$$

possèdent une sous suite $\{x_{n_j}\}$ avec $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x \in M$. Alors x est un point fixe de T et il est unique.

Remarque :

- L'application $T: M \rightarrow M$ avec la propriété (3) ne donne pas le même résultat que le théorème (2.4) mais si M est compact alors T avec la propriété (3) est une φ -contraction.
- Le résultat précédent (d'Edelstein) a une importante conséquence qu'est :

Théorème 2.6 :

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T: M \rightarrow M$ telle que :

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y), \quad \forall x, y \in M, x \neq y.$$

En plus, supposons que : $T: M \rightarrow K$ où K est un sous ensemble compact de M alors T possède un unique point fixe dans M .

Définition 2.7 :

Soit T une application d'un espace métrique M dans lui-même. On dit que T est une contraction uniformément faiblement stricte si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \varepsilon < d(x, y) < \varepsilon + \delta \implies d(T(x), T(y)) < \varepsilon \quad (4)$$

Remarque :

- Si T est une φ -contraction alors T est une contraction uniformément faiblement stricte. La réciproque n'est pas vraie.

De la définition (2.7) et de la remarque on a un autre type d'extension qu'est le suivant :

c. Extension de Meir Keeler

Ceci consiste à étendre le résultat à des contractions dites uniformément faiblement stricte on a le résultat suivant :

Théorème 2.8 : [12]

Soit M un espace métrique complet, et T une application de M dans M possédant la propriété (4) alors T admet un point fixe unique x . De plus $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(y) \quad \forall y \in M$.

– Si T est une contraction stricte et M un espace compact alors T vérifie (4).

d. Extension de Kirk

Comme extension du principe de l'application contractante, il existe un type de contraction qui a une certaine relation avec les fonctions Fréchet-différentiables.

Définition 2.9 :

Soit T une application de M dans M , T est dite contraction généralisée au sens de Kirk si pour tout $x \in M$ il existe $\alpha(x) < 1$ tel que :

$$d(T(x), T(y)) < \alpha(x)d(x, y), \quad \forall y \in M \quad (5)$$

Théorème 2.10 : [8]

Si D un ensemble faiblement * compact et convexe du conjugué X' d'un espace de Banach X et si $T : D \rightarrow D$ vérifie (5) alors T admet un point fixe dans D .

Proposition 2.11 :

Soit X un espace de Banach, A un ensemble ouvert, borné et convexe de X , et $F : A \rightarrow X$ continument Fréchet-différentiable sur A ; alors F est une contraction généralisée au sens de Kirk sur A si et seulement si pour tout $x_0 \in A$, $\|F'_{x_0}\| < 1$ avec

$$F'_{x_0}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0+tx) - F(x_0)}{t} \text{ uniformément pour tout } x \text{ avec } \|x\| = 1.$$

Citons maintenant des théorèmes qui sont quelque peu analogues aux théorèmes (2.2) et (2.4) mais qui donnent des résultats plus généraux.

Ils vont généraliser le théorème du point fixe de Banach aux applications dite α -contraction et condensées qu'on va définir.

Définition 2.12 :

Soit M un espace métrique, et T une application de M dans M . T est dite α -contraction si pour tout A borné, TA est borné et $\alpha(TA) \leq k(\alpha(A))$ avec $0 \leq k < 1$. (k est indépendant de A) où α est la mesure de non compacité c-à-d :

$$\alpha(A) = \inf\{\varepsilon > 0 / A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \delta(A_i) < \varepsilon\} \quad (\delta \text{ désigne le diamètre de } A_i).$$

Plus généralement, T est dite α -contraction locale si pour tout A borné, il existe

$$n = n(A) : T^n A \text{ est borné et } \alpha(T^n A) \leq k\alpha(A), \quad 0 \leq k < 1 \text{ indépendant de } A.$$

Théorème 2.13 : (Théorème de Darbo) [21]

Soit X un espace de Banach et D un fermé, borné et convexe de X alors toute α -contraction locale continue de D dans D admet un point fixe.

Définition 2.14 :

Soit M un espace métrique et T une application de M dans M . T est dite condensée si pour tout A borné, non compact, TA est borné et $\alpha(TA) \leq \alpha(A)$.

Théorème 2.15 : (Théorème de Sadovski)[14]

Soit D un ensemble convexe, fermé et borné d'un espace de Banach X et $T: D \rightarrow D$ une application condensée et continue alors T admet un point fixe.

Théorème 2.16 :[10]

Soit (M, d) un espace métrique complet et T une application de M dans M telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r \in \mathbb{N}, \exists \delta > 0 / (\forall x, y \in M, D(x, y) < \varepsilon + \delta) \Rightarrow D(T^r x, T^r y) < \varepsilon, \quad (6)$$

où $D(x, y) = d(x, y, Tx, Ty, T^2x, T^2y, \dots) = \max d(T^i x, T^j y)$.

S'il existe une orbite bornée $\langle T^n x \rangle$, alors il existe un point fixe unique $\omega = T\omega$ et toute orbite bornée converge vers ω .

2.1.3 Dépendance continue aux paramètres

C'est souvent le cas dans les applications qu'une contraction dépende d'autres variables. Si cette dépendance est continue, alors le point fixe dépendra continument de ces paramètres. Voici le résultat qui va l'illustrer :

Théorème 2.17 :

Soit (Λ, p) un espace métrique et (M, d) un espace métrique complet. $T: \Lambda \times M \rightarrow M$ une famille de contractions de constante uniforme $k < 1$.

$$\text{i.e. } d(T(\lambda, x), T(\lambda, y)) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in M \text{ et } \lambda \in \Lambda$$

Supposons, en plus que pour tout $x \in M$, l'application $\lambda \mapsto T(\lambda, x)$ est continue de Λ dans M . Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$, $T(\lambda, \cdot)$ possède un unique point fixe $x(\lambda) \in M$ et l'application: $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue de Λ dans M . ($x(\lambda) = T(x(\lambda))$ x est le point fixe de T)

Démonstration

Le principe de l'application contractante s'applique pour tout $\lambda \in \Lambda$ donc l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est bien définie.

La continuité : pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, on a :

$$\begin{aligned}
d(x(\lambda_1), x(\lambda_2)) &= d(T(\lambda_1, x(\lambda_1)), T(\lambda_2, x(\lambda_2))) \\
&\leq d(T(\lambda_1, x(\lambda_1)), T(\lambda_2, x(\lambda_1))) + d(T(\lambda_2, x(\lambda_1)), T(\lambda_2, x(\lambda_2))) \\
&\leq d(T(\lambda_1, x(\lambda_1)), T(\lambda_2, x(\lambda_1))) + kd(x(\lambda_1), x(\lambda_2))
\end{aligned}$$

Alors : $(1-k)d(x(\lambda_1), x(\lambda_2)) \leq d(T(\lambda_1, x(\lambda_1)), T(\lambda_2, x(\lambda_1)))$

T étant continue par rapport à λ , on déduit la continuité de l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$

2.1.4 Les applications lipschitziennes monotones

Dans cette partie, M est un espace de Hilbert dont la norme est donnée par :

$$\|u\|^2 = (u, u) \quad \forall u \in M$$

On dit que T est une application monotone si :

$$\Re(Tu - Tv, u - v) \geq 0 \quad \forall u, v \in M$$

où $\Re(c)$ est la partie réelle du nombre complexe c .

Le résultat suivant est de Zarantonello, il assure l'existence d'un unique point fixe des applications dites perturbations lipschitziennes monotones de l'identité sous l'hypothèse qu'elles soient des contractions.

Théorème 2.18 :

Soit M un espace de Hilbert et $T: M \rightarrow M$ une application monotone telle que pour un certain $\beta > 0$, $\|Tu - Tv\| \leq \beta\|u - v\|$, $\forall u, v \in M$.

Alors pour tout $\omega \in M$, l'équation $u + Tu = \omega$ a une unique solution $u = u(\omega)$ et l'application $\omega \mapsto u(\omega)$ est continue.

Démonstration

Si $\beta < 1$, alors l'application $u \mapsto \omega - T(u)$ est une contraction et le résultat s'obtient du principe de l'application contractante.

Si $\beta \geq 1$: Notons que pour $\lambda \neq 0$, u est une solution de :

$$u = (1-\lambda)u - \lambda T(u) + \lambda\omega \text{ si et seulement si } u \text{ est solution de } u + T(u) = \omega.$$

Posons : $T_\lambda(u) = (1-\lambda)u - \lambda T(u) + \lambda\omega$.

Usant des propriétés du produit scalaire, on obtient :

$$T_\lambda(u) - T_\lambda(v) = (1-\lambda)(u-v) - \lambda(T(u) - T(v))$$

$$\|T_\lambda(u) - T_\lambda(v)\|^2 \leq \lambda^2 \beta^2 \|u-v\|^2 - 2\Re(\lambda(1-\lambda)(T(u) - T(v), u-v)) + (1-\lambda)^2 \|u-v\|^2$$

Si $0 < \lambda < 1$ et puisque T est monotone, on aura : $\|T_\lambda(u) - T_\lambda(v)\|^2 \leq (\lambda^2 \beta^2 + (1-\lambda)^2) \|u-v\|^2$

En choisissant $\lambda = \frac{1}{\beta^2 + 1}$, T_λ serait Lipschitzienne de constante k donnée par :

$$k^2 = \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} < 1 \text{ est donc } T_\lambda \text{ serait une contraction, d'où le résultat.}$$

D'autre part : si u et v sont deux solutions de $u + T(u) = w$ respectivement, pour w_1, w_2 c'est-à-dire : $u + T(u) = w_1$ et $v + T(v) = w_2$

$$\begin{aligned}\|u + T(u) - v - T(v)\|^2 &= \|u - v - (T(u) - T(v))\|^2 \\ &= \|u - v\|^2 + 2\operatorname{Re}(T(u) - T(v), u - v) + \|T(u) - T(v)\|^2 \\ &= \|w_1 - w_2\|^2\end{aligned}$$

T étant monotone, on aura $\|u - v\|^2 + \|T(u) - T(v)\|^2 \leq \|w_1 - w_2\|^2$ d'où la continuité de l'application $\omega \mapsto u(\omega)$

2.1.5 La signification du théorème de point fixe de Banach

L'application de ce théorème nous donne des résultats qui sont d'une importance fondamentale dans l'analyse non linéaire.

Citons quelques un :

- Existence de la solution
- Unicité de la solution
- Stabilité de la solution sous une petite perturbation de l'équation
- Existence de la convergence des méthodes d'approximation
- Stabilité des méthodes d'approximation

Et pour achever ce paragraphe, nous allons montrer que les hypothèses du théorème de point fixe de Banach sont essentielles : si nous en négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.

1) M n'est pas stable par T :

$$Tx = \sqrt{x^2 + 1} \text{ sur } M = [0, 1].$$

Or M est fermé dans \mathbb{R} , et complet car \mathbb{R} est complet. De plus :

$$T'x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1 \Rightarrow \sup_{x \in M} |T'x| < 1 \Rightarrow T \text{ est contractante ; mais } T \text{ n'a pas de point fixe car}$$

$$T([0, 1]) = [1, \sqrt{2}], \text{ i. e. } M \text{ n'est pas stable par } T.$$

2) T n'est pas contractante :

$$Tx = \sqrt{x^2 + 1} \text{ sur } M = [0; \infty[.$$

Or $T: M \rightarrow M$, et M est un fermé de \mathbb{R} (complet) donc M est complet.

$$\text{Mais } \sup_{x \in M} |T'x| = 1 \Rightarrow T \text{ donc } T \text{ n'est pas contractante.}$$

3) M n'est pas complet

$$Tx = \frac{\sin x}{2} \text{ sur } M =]0, \frac{\pi}{4}].$$

Or $T(]0, \frac{\pi}{4}[) =]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0, \frac{\pi}{4}[$, et $\sup_{x \in M} |T'x| = \frac{1}{2} < 1$ donc T est contractante mais M n'est pas fermé dans \mathbb{R} donc il n'est pas complet.

2.2 Théorème du point fixe du type Brouwer - Schauder

Les théorèmes de ce paragraphe expriment que toute application continue d'un ensemble convexe, compact dans lui-même possède un point fixe.

2.2.1 Le théorème du point fixe de type Brouwer [24]

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe.

Il existe plusieurs formes du théorème selon le contexte d'utilisation. La plus simple est parfois donnée sous la forme suivante :

Dans le plan : Toute application T continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe. Il est possible de généraliser à toute dimension finie.

Dans un espace euclidien : Toute application continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.

Il peut encore être un peu plus général :

Convexe compact : Toute application continue T d'un convexe compact K d'un espace euclidien à valeur dans K admet un point fixe.

a. Théorème de Brouwer en dimension un

On note $[a, b]$ le domaine de définition de T . L'application T est continue et à valeurs dans le même segment. Dire que cette application admet un point fixe, revient à dire que son graphe croise celui de l'application définie sur $[a, b]$, qui à x associe x .

Une démonstration n'est pas difficile à établir. Considérons l'application continue

$$Fx = Tx - x$$

Elle est positive en a , négative en b . Le théorème de Bolzano cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires assure que l'application F possède un zéro dans $[a, b]$. ce zéro de F est un point fixe de T .

En dimension deux, un raisonnement intuitif permet de montrer que le résultat est probablement vrai. La démonstration est néanmoins plus délicate :

b. Théorème de Brouwer en dimension deux

Si K , le domaine de définition de T est d'intérieur vide, c'est un segment. Sinon, K est semblable à une boule unité fermée. Le terme semblable signifie qu'il existe un homéomorphisme ϕ de la boule unité vers K . L'équation définissant le point fixe peut encore s'écrire :

Si $h = T \circ \phi$, $h(x) = x$. Autrement dit, on peut supposer que K est la boule unité fermée. On peut de plus choisir la norme de manière quelconque. Si on choisit celle qui associe la valeur absolue de la plus grande coordonnée, cela revient à dire que l'on peut choisir pour compact K , l'ensemble $[-1, 1] \times [-1, 1]$, sans perte de généralité.

Si l'on définit la fonction F comme suit :

$$F : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1]$$

$$x \mapsto F(x) = h(x) - x$$

Cela revient à montrer que la fonction F atteint le vecteur nul sur $[-1,1] \times [-1,1]$.

Si F_k , pour $k=1,2$, sont les deux fonctions coordonnées de F , cela revient à montrer l'existence d'un point x_0 , tel que F_1 et F_2 admettent toutes deux pour zéro la valeur x_0 .

La fonction F_1 est une fonction de $[-1,1] \times [-1,1]$ dans $[-1,1]$. Sur $\{-1\} \times [-1,1]$, elle est positive en revanche sur $\{1\} \times [-1,1]$, elle est négative. Ceci laisse penser que la courbe de niveau 0 est une ligne qui part d'un point $[-1, 1] \times \{1\}$ pour finir sur un point de $[-1, 1] \times \{-1\}$. Le même raisonnement appliqué à F_2 laisse penser que la courbe de niveau 0 est cette fois-ci une ligne qui part d'un point $\{-1\} \times [-1,1]$ pour terminer sur un point de $\{1\} \times [-1,1]$.

Intuitivement, il semble évident que ces deux lignes de niveaux doivent nécessairement se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $T \circ \phi$.

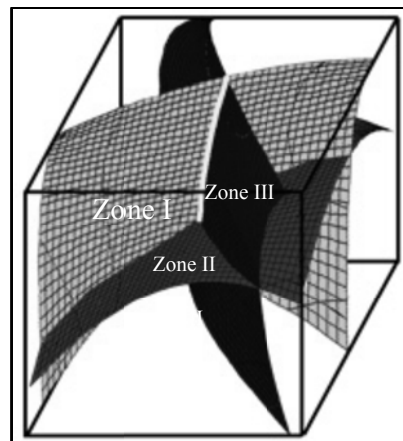
Théorème de Brouwer en dimension finie

L'approche intuitive du paragraphe précédent se généralise à toute dimension finie. Pour s'en persuader, étudions le cas de la dimension 3.

L'objectif est toujours de montrer l'existence d'un zéro de la fonction F , qui maintenant possède trois coordonnées. La première coordonnée est positive sur la face gauche du cube et négative sur la face droite. Il y a tout lieu de penser que la zone des zéros contient une nappe, (zone III) sur la figure de droite. Cette nappe coupe le cube en au moins deux composantes connexes, l'une contenant une portion de la face de droite l'autre celle de gauche.

Si l'axe des y décrit la direction devant-derrrière le même raisonnement laisse penser à l'existence d'une nappe, (zone I) sur la figure, qui coupe encore en au moins deux composantes connexes le cube. L'intersection des deux nappes contient probablement une ligne, en blanc sur la figure, partant de la face du haut pour rejoindre celle du bas.

La troisième composante de F décrit cette fois-ci, une nappe (zone II) sur la figure. Cette nappe semble croiser nécessairement la ligne blanche. Ce point d'intersection est le point fixe recherché.



Remarques:

- Il est important de voir que l'unicité n'est pas assurée par le théorème de Brouwer du fait que chaque point de K est un point fixe de l'application identité.
- Nous allons donner un résultat de Brouwer qu'on aura besoin dans la démonstration du théorème de Schauder :

Définition 2.19:

On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute application continue $T : E \rightarrow E$ possède un point fixe. On note par B_n la boule unité fermée de \mathbb{R}^n . On a le résultat suivant :

Théorème 2.20 :

La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Schauder va généraliser le résultat de Brouwer en dimension infinie :

2.2.2 Théorème du point fixe de type Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le Théorème du Point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.21 : [24]

Soit K un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach X et supposons $T: K \rightarrow K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

Preuve :

Soit $T: K \rightarrow K$ une application continue. Comme K est compact, T est uniformément continue; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on ait $\|T(x) - T(y)\| \leq \varepsilon$ dès que $\|x - y\| \leq \delta$.

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K ; i.e.

$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$. Si on désigne $L := \text{Vect}(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie, et

$K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\psi_j: E \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases}$$

Et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^p \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par :

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^p \psi_k(x)}$$

Pour lesquelles on a $\sum_{j=1}^p \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

On pose alors, pour $x \in K$, $g(x) := \sum_{j=1}^p \varphi_j(x)T(x_j)$. g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$).

Donc, si on prend la restriction $g_{|K^*} : K^* \rightarrow K^*$, (d'après *) g possède un point fixe $y \in K^*$.

De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)T(y) - \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)(T(y) - T(x_j)) \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$, et donc $\|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon$. Donc, on a pour tout j :

$$\begin{aligned} \|f(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^p \|\varphi_j(y)(T(y) - T(x_j))\| \\ &\leq \sum_{j=1}^p \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier m , on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|T(y_m) - y_m\| < 2^{-m}$. Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$. Alors f étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que $T(y^*) = y^*$, i.e. y^* est un point fixe de T sur K .

Remarque :

- De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes précités, en réduisant le problème d'existence à un problème de point fixe citons à titre d'exemple le théorème de Peano (voir [18][24]).

Théorème 2.22 : (Théorème de Peano)

Soit (a, b) un point de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et $F(t, y)$ une fonction continue dans le voisinage de (a, b) alors le problème suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = b \end{cases}$$

admet au moins une solution dans un voisinage de a .

Ici le problème revient à étudier l'existence d'un point fixe de l'opérateur $U: K \rightarrow K$ défini

par :

$$Ux(t) = b + \int_a^t f(s, x(s)) ds$$

où $K = \left\{ x \in \frac{E}{x(t)} \in B'(a, \varepsilon), \varepsilon \text{ est fixé } \forall t \in V(a) \right\}$

et E l'espace des fonctions continues définies dans un certain voisinage de a .

Théorème 2.23 : (Théorème de Rothe)[18]

Soit X un espace normé, et K une partie convexe fermée de X . Alors toute application compacte et continue de K dans X telle que $T(\partial K) \subset K$ admet un point fixe.

Le résultat suivant est une autre conséquence du théorème de Schauder qui donne lieu à de nombreuses applications dans les équations aux dérivées partielles :

Théorème 2.24 :[18]

Soit T un opérateur compact de l'espace de Banach X dans lui-même. Supposons qu'il existe un réel $r > 0$ tel que l'égalité $u = \sigma.Tu$, où $u \in X$ et $\sigma \in [0,1]$, implique $\|u\| < r$; alors T admet un point fixe dans $B(0, r)$.

- Le théorème de Schauder reste vrai dans le cas des espaces localement convexes, nous allons le confirmer par les théorèmes suivants (voir [18][21]) :

Théorème 2.25 : (Théorème de Tychonoff et Singball)

Soit E un e.l.c, et K un compact convexe de E alors toute application continue de K dans K admet un point fixe.

Théorème 2.26 :

Soit E un e.l.c. séparé, et K un fermé et convexe de E ; alors toute application T continue de K dans K telle que $T(K)$ soit continue dans un compact de E admet un point fixe.

Dans la partie qui suit, nous allons étudier l'existence d'un point fixe pour les applications qui s'écrivent sous la forme d'une somme de deux applications et dont voici le résultat principal :

2.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Nous donnons un théorème d'existence du point fixe concernant les applications de la forme $T = U + C$, où C est continue et compacte et U une contraction (voir [9][19][17]).

Théorème 2.27 : (de Krasnoselskii)

Soit X un espace de Banach et D un ensemble non vide de X fermé borné et convexe. U, C deux applications de D dans X telles que :
 U est une contraction (de constante k) C est compact et continue.

$$Ux + Cy \in D, \forall x, y \in D$$

Alors il existe $x \in D$ tel que $Ux + Cx = x$.

Démonstration :

Soit y fixé dans D , comme U est une contraction, l'équation $x = Ux + Cy$ admet une solution unique x dans D .

On définit l'application

$$L: D \rightarrow D \quad , \quad Ly = ULy + Cy \quad (y \in D) \quad (7)$$

$$Ly = x$$

On a $LD \subset D$.

On montre que L est compacte et continue et d'après le théorème de Schauder, on pourra conclure qu'il existe $y \in D$ tel que $Ly = y$, d'où $Uy + Cy = y$.

Soit y_n un point arbitraire de D , alors de (7) :

$$Ly_n = ULy_n + Cy_n$$

$$Ly - Ly_n = ULy - ULy_n + Cy - Cy_n$$

$$\|Ly - Ly_n\| \leq \|ULy - ULy_n\| + \|Cy - Cy_n\|$$

Et puisque U est une contraction on a :

$$\|Ly - Ly_n\| \leq k \|Ly - Ly_n\| + \|Cy - Cy_n\|$$

$$\leq \frac{1}{1-k} \|Cy - Cy_n\| \quad (8)$$

d'où la continuité de L

Il reste à montrer que LD est relativement compact.

En effet, comme CD est relativement compact,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists (1-k)\varepsilon$ -réseau Cy_1, \dots, Cy_n c'est-à-dire les boules $B(Cy_k, (1-k)\varepsilon)$ ($1 \leq k \leq n$) telles

$$\text{que } CD \subset \bigcup_{k=1}^n B(Cy_k, (1-k)\varepsilon)$$

Alors de (8), Ly_1, \dots, Ly_n est un ε -réseau de LD .

Remarques :

- Ce théorème peut être formulé d'une façon plus générale voir ([13][17]) en considérant une seule application $G: D \times Q(D) \rightarrow D$ où Q est un opérateur de D dans un autre espace de Banach Y et tel que :

- i) $G(x, y)$ est une contraction en x pour tout $y \in Q(D)$
- ii) $G(x, y)$ est continue en $y \in Q(D)$ uniformément par rapport à $x \in D$.
- iii) Q est compact et continu.

Sous ces conditions $x \in G(x, Q(x))$ a une solution dans D

- la condition (iii) peut être remplacée par $Ux + Cx \in D$ ($\forall x \in D$) grâce au théorème de Darbo.
- Dans un espace d'Hilbert (iii) peut être aussi remplacée par $Ux + Cx \in D$ ($\forall x \in D$) (voir [23]).

Chapitre 3

Applications

Chapitre 3 : Applications

Dans cette partie, on discutera les résultats d'existence des solutions pour les inégalités variationnelles définies par des formes bilinéaires sur un espace de Banach et pour lesquelles on peut appliquer le principe du point fixe.

Le résultat le plus important est un résultat du type Lax-Milgram. Voir [7], [11].

3.1 Les formes bilinéaires symétriques

Soit E un espace de Banach réel, réflexif dont la norme est $\|\cdot\|$ et une forme $a: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ continue (i.e. $|a(u, v)| \leq c_1 \|u\| \|v\|$) coercive ($a(u, v) \geq c_2 \|u\|^2$) et symétrique ($a(u, v) = a(v, u)$), c_1, c_2 des constantes positives.

a est aussi linéaire par rapport à chacune de ses variables séparément.

E^* l'espace dual de E . Pour $b \in E^*$, on note par $\langle b, u \rangle$ la valeur de la fonctionnelle linéaire et continue b au point u dans la dualité (E^*, E) . La norme dans E^* est notée $\|\cdot\|_*$.

On va introduire la notion de topologie faible. Pour plus de détails, consulter [4], [15],[20] et [22].

Pour $b \in E^*$ fixé, et K un ensemble faiblement fermé, on considère la fonctionnelle :

$$f(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - \langle b, u \rangle \quad (1)$$

Un calcul simple nous donne :

$$f(u) \geq \frac{c_2}{2} \|u\|^2 - \|b\|_* \|u\|$$

$f(u) \rightarrow \infty$ quand $\|u\| \rightarrow \infty$ donc f est coercive et elle est bornée inférieurement sur E . Alors

$$\alpha = \inf_{v \in K} f(v) > -\infty$$

soit une suite $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ minimisante dans K i.e. $f(u_n) \rightarrow \alpha$. Puisque f est coercive, $(u_n)_n$ est bornée, et E est réflexif, alors $(u_n)_n$ possède une sous suite qui converge faiblement vers u .

on notera encore cette sous suite $(u_n)_n$.

$u_n \rightharpoonup u$ (faiblement) $\Leftrightarrow \langle h, u_n \rangle \rightarrow \langle h, u \rangle, \forall h \in E^*$ puisque K est faiblement fermé, $u \in K$.

a est bilinéaire et coercive (non négative) alors :

$$a(u_n, u_n) \geq a(u_n, u) + a(u, u_n) - a(u, u)$$

En effet on a :

$$a(u_n - u, u_n - u) = a(u_n, u_n) - a(u_n, u) - a(u, u_n) + a(u, u) \geq 0$$

(Car a est coercive).

Donc :

$$a(u_n, u_n) \geq a(u_n, u) + a(u, u_n) - a(u, u)$$

Et en passant à la limite inf on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\lim} a(u_n, u_n) &\geq \underline{\lim} a(u_n, u) + \underline{\lim} a(u, u_n) - a(u, u) \\ &\geq a(u, u) + a(u, u) - a(u, u) \end{aligned}$$

$\underline{\lim} a(u_n, u_n) \geq a(u, u)$ (a est faiblement semi-continue inférieurement) donc :

$$\begin{aligned} f(u) &\geq \alpha \geq \underline{\lim} f(u_n) = \frac{1}{2} \underline{\lim} a(u_n, u_n) - \langle b, u \rangle \\ &\geq \frac{1}{2} a(u, u) - \langle b, u \rangle = f(u) \end{aligned}$$

Alors $f(u) = \min_{v \in K} f(v)$

Supposons que K est aussi convexe il serait donc fermé puisque les ensembles convexes sont fermés si et seulement si ils sont faiblement fermés.

Et donc pour tout $v \in K$ et $0 \leq t \leq 1$ on aura : $f(u) \leq f(u + t(v - u))$

Car $u \in K, v \in K, K$ convexe $\Rightarrow tv + (1-t)u = u + (tv - u) \in K$

Calculons $f(u + t(v - u)) - f(u)$ en utilisant les propriétés de a :

$$0 \leq ta(u, v - u) - t\langle b, v - u \rangle + t^2 a(v - u, v - u), 0 \leq t < 1, v \in K$$

En divisant par t et en faisant tendre t vers 0, on aura :

Il existe $u \in K$ tel que $f(u) = \min_{v \in K} f(v)$ (1) ou $a(u, v - u) \geq \langle b, v - u \rangle, \forall v \in K$ (2).

Si $b_1, b_2 \in E^*$ sont donnés et $u_1, u_2 \in K$ sont les solutions de (1) ou (2) alors, en posant :

$Tb_i = u_i, i = 1, 2$, on a :

$$a(u_1, v - u_1) \geq \langle b_1, v - u_1 \rangle, \forall v \in K$$

Et

$$a(u_2, v - u_2) \leq \langle b_2, v - u_2 \rangle, \forall v \in K$$

En sommant, on obtient :

$$c_2 \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq \langle b_1 - b_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \|b_1 - b_2\|_* \|u_1 - u_2\|$$

d'après la coercivité de a et l'inégalité de Cauchy-Schwartz (c_2 la constante de coercivité de a) et donc

$$\|u_1 - u_2\| = \|Tb_1 - Tb_2\| \leq \frac{1}{c_2} \|b_1 - b_2\|_* \quad (3)$$

Alors (1) et (2) possèdent une solution unique pour tout $b \in E^*$. Et on a le théorème suivant :

Théorème 3.1 :

Soit $a: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, symétrique coercive et continue et K un sous ensemble convexe et fermé de E . Alors pour tout $b \in E^*$, l'inégalité variationnelle :

$a(u, v - u) \geq \langle b, v - u \rangle$ (2), $\forall v \in K$ possède une solution unique $u \in K$, et définit une

application solution :

$$T: E^* \rightarrow K$$

$$b \mapsto Tb = u$$

qui est Lipschitzienne de constante $\frac{1}{c_2}$.

Remarque :

- D'après la discussion précédente, on constate que si a satisfait toutes les conditions du théorème (3.1) sauf la symétrie et si l'inégalité (2) possède une solution pour tout $b \in E^*$, alors l'application solution T est bien définie et satisfait la condition de Lipschitz (3); et on a le résultat suivant :

3.2 Les formes bilinéaires continues

Soit $a: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ continue, coercive et bilinéaire, $b \in E^*$ et K un convexe fermé de E .

Problème :

Prouver l'existence de $u \in K$ vérifiant : $a(u, v - u) \geq \langle b, v - u \rangle, \forall v \in K$. Dans le cas où a est symétrique, le théorème (3.1) répond parfaitement à la question. On va voir que le théorème reste vrai pour les formes qui ne sont pas nécessairement, symétriques. Voir [7] et [11].

Unicité de la solution :

Usant des propriétés des formes bilinéaires, on conclut que pour $b \in E^*$, le problème (2)

admet au plus une solution. Et si $b_1, b_2 \in E^*$ et $u_1, u_2 \in K$ existent alors : $\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{c_2} \|b_1 - b_2\|_*$

Existence de la solution :

Posons $a = a_e + a_0$ où $a_e(u, v) := \frac{1}{2}(a(u, v) + a(v, u))$ et $a_0(u, v) := \frac{1}{2}(a(u, v) - a(v, u))$. a_e est une forme bilinéaire, continue, coercive et symétrique et a_0 est une forme bilinéaire et continue. Considérons la famille des problèmes :

$a_e(u, v - u) + ta_0(u, v - u) \geq \langle b, v - u \rangle, \forall v \in K, 0 \leq t \leq 1$ Notons : $a_t = a_e t + a_0$.

Lemme 3.2 :

Soit $t \in [0, \infty)$ tel que le problème :

$a_t(u, v - u) \geq \langle b, v - u \rangle, \forall v \in K$ possède une unique solution pour tout $b \in E^*$.

Alors il existe une constante $c > 0$ qui dépend uniquement des constantes de coercivité et de continuité de a telle que le problème $a_{t+\tau}(u, v - u) \geq \langle b, v - u \rangle, \forall v \in K$ (3) admet une unique solution pour tout $b \in E^*$ et $0 \leq \tau \leq c$.

Preuve :

Pour $w \in K, t \geq 0$, considérons : $a_t(u, v - u) \geq \langle b, v - u \rangle - \tau a_0(w, v - u)$ (4). Posons pour w fixé dans K $b_w := b - \tau a_0(w, \cdot) \in E^*$. Alors il existe un unique $u = Tw$ qui est solution de (4) et :

$$\|Tw_1 - Tw_2\| \leq \frac{1}{c_2} \|b_{w_1} - b_{w_2}\|_*$$

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} \|b_{w_1} - b_{w_2}\|_* &= \sup_{\|u\|=1} \tau |a_0(w_1, u) - a_0(w_2, u)| \\ &\leq \tau c_1 \|w_1 - w_2\| \end{aligned}$$

et donc : $\|Tw_1 - Tw_2\| \leq \tau \frac{c_1}{c_2} \|w_1 - w_2\|$ et $T : K \rightarrow K$ est une contraction si $\tau \frac{c_1}{c_2} < 1$. Alors il

existe une unique solution de (3) si $\tau < \frac{c_2}{c_1}$. On peut donc choisir $c = \frac{c_2}{2c_1}$ par exemple.

On peut appliquer ce lemme pour $t = 0$, $a_0 = a_e$ (car $a_t = a_e + ta_0$) et puisque a_e est symétrique, on obtient : $a_t(u, v - u) \geq \langle d, v - u \rangle \forall v \in K$ (5) possède une solution unique pour tout $d \in E^*$ et $0 \leq t \leq c$. Et encore par lemme précédent, on déduit que (5) possède une solution unique pour $0 \leq t \leq 2c$

En répétant le même raisonnement, on déduit que (5) possède une unique solution pour $t \in [0, \infty)$. Et en particulier pour $t = 1$ le problème (2) possède une solution unique. Et on aura donc le théorème suivant :

Théorème 3.3 :

Soit $a : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, coercive et continue et K un convexe fermé de E . Alors pour tout $b \in E^*$ l'inégalité variationnelle : $a(u, v - u) \geq \langle b, v - u \rangle \forall v \in K$ possède une unique solution. Et cette inégalité définit une application solution :

$$T : E^* \rightarrow K$$

$$b \mapsto Tb = u$$

qui est Lipschitzienne de constante $\frac{1}{c_2}$ (c_2 est la constante de coercivité de a).

Usant de ce résultat, on peut immédiatement, trouver un résultat d'existence de solutions des inégalités variationnelles linéairement perturbées de la forme :

$$a(u, v - u) \geq \langle F(u), v - u \rangle, \forall v \in K \quad (6)$$

où $F : E \rightarrow E^*$ est Lipschitzienne i.e. $\|F(u_1) - F(u_2)\|_* \leq k \|u_1 - u_2\|$ et nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.4 :

Soient a , K et F définis comme précédemment. Alors l'inégalité variationnelle (6) possède une unique solution si $k < c_2$ où k est la constante de Lipschitz de F et c_2 est la constante de coercivité de a .

Preuve :

Il suit du théorème (3.3) que l'inégalité variationnelle (6) est équivalente au problème du point fixe $u = T(F(u))$ puisque: $TF : K \rightarrow K$, K fermé convexe de E donc un espace métrique complet. On peut appliquer le principe de l'application contractante et le théorème (3.3).

Alors pour tout $u_1, u_2 \in K$

$$\|T(F(u_1)) - T(F(u_2))\| \leq \frac{1}{c_2} \|F(u_1) - F(u_2)\|_* \leq \frac{k}{c_2} \|u_1 - u_2\|$$

Donc :

$$\frac{k}{c_2} < 1 \Rightarrow k < c_2.$$

Pour illustrer ce qui a été énoncé, voici les deux exemples suivants

1. Problème d'obstacle

Soit Ω un domaine borné de \square^N et $E = L^2(\Omega)$. Soit $\psi(x) \in E$ donnée et :

$$K := \{u \in E, u(x) \geq \psi(x) \text{ p.p sur } \Omega\}$$

Vérifions les hypothèses du théorème 1 :

K est-il convexe ?

Soient $u_1, u_2 \in K$ et $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in K$?

$$u_1 \in K \Rightarrow u_1(x) \geq \psi(x) \text{ p.p sur } \Omega \Rightarrow \lambda u_1(x) \geq \lambda \psi(x) \quad (1)$$

$$u_2 \in K \Rightarrow u_2(x) \geq \psi(x) \text{ p.p sur } \Omega \Rightarrow (1 - \lambda)u_2(x) \geq (1 - \lambda)\psi(x) \quad (2)$$

De (1) et (2), on obtient : $\lambda u_1(x) + (1 - \lambda)u_2(x) \geq \psi(x)$ p.p sur Ω donc K est convexe.

K est fermé ?

Soit $(u_n)_n \subset K$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$, $u \in K$?

On a : $u_n(x) \geq \psi(x)$ p.p sur $\Omega \forall n$, et $\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ donc il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ de u_n telle que $u_{n_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u(x)$ p.p sur Ω . Voir [4]. Et

$$u_{n_k}(x) \geq \psi(x) \text{ p.p sur } \Omega \forall k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = u(x) \geq \psi(x) \text{ p.p sur } \Omega$$

Donc $u \in K$ ce qui implique que K est fermé.

Soit $a : E \times E \rightarrow \square$ définie par : $a(u, v) := \int_{\Omega} uv dx = \langle u, v \rangle$

$$\|u\|^2 = a(u, u) \text{ où } \|\cdot\| \text{ est la norme dans } E$$

$$a \text{ est continue. En effet : } |a(u, v)| \leq \int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\| \|v\|$$

$$a \text{ est coercive. En effet : } a(u, u) = \|u\|^2$$

a est symétrique et bilinéaire (évident).

Soit $b \in E$ (car $E = L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^* = E^*$). Définissons $f : E \rightarrow \square$ telle que

$$f(u) := \frac{1}{2} a(u, u) - \langle b, u \rangle = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \langle b, u \rangle$$

Toutes les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées donc : il existe un unique $u \in K$ tel que : $f(u) = \min_{v \in K} f(v)$ c'est-à-dire u est solution de l'inégalité variationnelle :

$a(u, v-u) \geq \langle b, v-u \rangle, \forall v \in K$ donc $\int_{\Omega} (u-b)(v-u) dx \geq 0, \forall v \in K$ (*) admet une unique solution.

2. Problème à valeur sur le bord du second ordre

Dans cette partie, on aborde une équation différentielle du second ordre à valeur sur le bord sur l'intervalle $(0, \infty)$ qu'on peut résoudre par la méthode décrite précédemment. On verra un exemple où la forme quadratique n'est pas symétrique.

– Soit $E = H_0^1(0, \infty)$

la norme dans E est donnée par :

$$\|u\|^2 := \int_0^{\infty} u^2 dx + \int_0^{\infty} (u')^2 dx = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2$$

soit a une forme quadratique donnée par :

$$a(u, v) = \int_0^{\infty} u'v' dx + \int_0^{\infty} uv' dx + \int_0^{\infty} uv dx, \forall v \in E$$

– a est continue : en effet

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \|u\| \|v\| \end{aligned}$$

– a est coercive : en effet $a(u, u) = \int_0^{\infty} u'^2 + \int_0^{\infty} uu' + \int_0^{\infty} u^2 = \|u\|^2 + \int_0^{\infty} uu'$

$$\int_0^{\infty} uu' \leq \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (u^2 + u'^2) = \frac{1}{2} \|u\|^2 \quad (a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ d'après l'inégalité de Young})$$

$$\text{donc } a(u, u) \geq \|u\|^2 - \frac{1}{2} \|u\|^2 = \frac{1}{2} \|u\|^2$$

donc a est coercive et sa constante de coercivité c'est $\frac{1}{2}$.

– a bilinéaire.

– a est non symétrique.

Notre convexe fermé et tout l'espace E . D'après le théorème (3.3), l'inégalité variationnelle $a(u, v-u) \geq \langle b, v-u \rangle, \forall v \in E$ et $b \in L^2(0, \infty) \subset E^*$ admet une unique solution dans E .

Et puisqu'il s'agit de tout l'espace E , l'équation $a(u, v) = \langle b, v \rangle, \forall v \in E$ admet une solution unique d'après le lemme de Lax-Milgram i.e. il existe un unique $u \in E$ tel que :

$$a(u, v) = \int_0^{\infty} u'v' dx + \int_0^{\infty} uv' dx + \int_0^{\infty} uv dx = \int_0^{\infty} bvd x \quad \forall v \in E \quad (*)$$

Puisque $C_0^{\infty}(0, \infty)$ est dense dans E , on peut interpréter (*) dans un sens distributionnel, on obtient :

$$-\partial^2 u(v) - \partial u(v) + \int_0^{\infty} uv = \int_0^{\infty} bv, \forall v \in C_0^{\infty}(0, \infty) \text{ et donc : } -\partial^2 u - \partial u + u = b$$

admet une unique solution $u \in E$ pour tout $b \in L^2(0, \infty)$.

$\partial^2 u$ et ∂u sont respectivement la seconde et la première dérivée distributionnelles de u .

La partie qui suit est consacrée à appliquer le théorème du point fixe en considérant des itérées.

3.3 Approche numérique du théorème du point fixe

Dans ce qui suit, on étudie une application du théorème du point fixe en faisant appel à une méthode itérative convergente.

Soit $f : S \rightarrow \mathbb{K}^n, n \in \mathbb{N}$ \mathbb{K} compact

$x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ On impose les conditions suivantes sur S et f :

S est un ensemble fermé de \mathbb{K}^n .

f est une application contractante sur S :

$$\exists 0 \leq \theta \leq 1 \text{ tel que } \forall x, y \in S, \|f(x) - f(y)\| \leq \theta \|x - y\|,$$

$\|\cdot\|$ est une norme quelconque dans \mathbb{K}^n S est stable par f : $f(S) \subset S$.

Théorème 3.5 :

Soit S une partie fermée de \mathbb{K}^n , et f une application définie sur S et à valeur dans S , contractante sur S , telle que $x \in S \rightarrow f(x) \in S$. Alors

f admet un unique point fixe x^* dans S .

Ce point fixe est calculable comme limite de la suite des approximations successives $(x_l)_{l \geq 0}$:

$$\begin{cases} x_0 \in S \text{ quelconque} \\ x_{l+1} = f(x_l), l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

pour tout indice $l \in \mathbb{N}^*$, on a les inégalités de majoration d'erreur suivantes :

$$\begin{cases} \|x_l - x^*\| \leq \frac{\theta^l}{1 - \theta} \|x_1 - x_0\| \\ \|x_l - x^*\| \leq \frac{1}{1 - \theta} \|x_l - x_{l+1}\| \end{cases}$$

Remarque :

- Ce théorème reste vrai dans le cadre général d'un espace vectoriel quelconque (de dimension infinie) à condition qu'il soit complet pour la norme en question.

Voici un exemple où est mis en œuvre le procédé itératif précédent :

Exemple : calcul de la racine carrée d'un nombre positif

Soit $c \in \mathbb{R}^{**}$ un nombre positif. le théorème du point fixe précédent va nous permettre de développer une méthode de calcul de \sqrt{c} et justifier sa convergence. Pour $c \in \mathbb{R}^{**}$ soit

$f(x) := \frac{1}{2} \left(x + \frac{c}{x} \right)$. Calculons sa dérivée première : $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{c}{2x^2} = \frac{1}{2} \frac{x^2 - c}{x^2}$ et seconde :

$f''(x) = \frac{c}{x^3}$. On déduit que f' s'annule au seul point \sqrt{c} , que $f'(x)$ est négative sur

$]0, \sqrt{c}[$, positive sur $]\sqrt{c}, \infty[$, avec décroissance de f sur $]0, \sqrt{c}[$ puis croissance sur

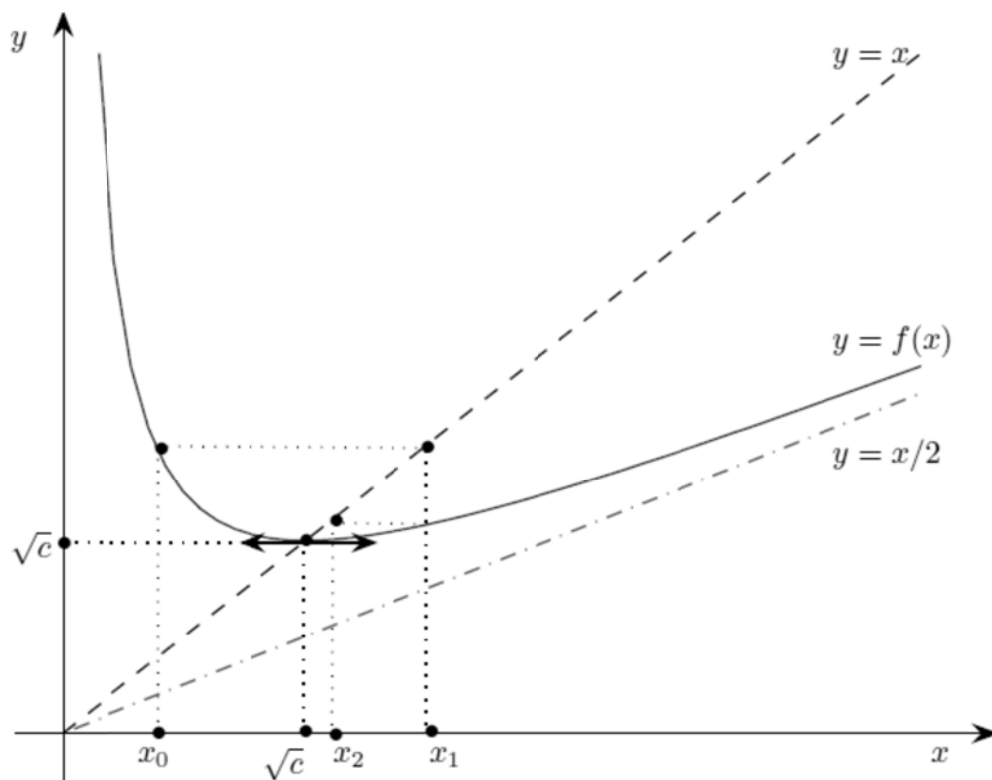
$]\sqrt{c}, \infty[$. Par ailleurs on remarque que \sqrt{c} est point fixe de f : $f(\sqrt{c}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{c} + \frac{c}{\sqrt{c}} \right) = \sqrt{c}$.

Sur $I :=]\sqrt{c}, \infty[$ la dérivée vérifie $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$; il en découle que f est

contractante sur l'intervalle $]\sqrt{c}, \infty[$ de constante $\theta = \frac{1}{2}$. En effet $\forall x_1, x_2 \in I$ on a

$|f(x_1) - f(x_2)| = |(x_1 - x_2) f'(\xi)|$ avec $\xi \in]x_1, x_2[$ selon le théorème des accroissements

finis. D'où l'inégalité : $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2| \forall x_1, x_2 \in I$.



D'après le graphe de f on a l'inclusion $f([0, \infty)) \subset I$. On peut donc appliquer le théorème du point fixe sur l'intervalle fermé I : il existe un unique point fixe sur I pour f (c'est \sqrt{c}) qu'on peut déterminer par :

$$y_l \text{ quelconque } \in I, y_{l+1} = f(y_l) = \frac{1}{2} \left(y_l + \frac{c}{y_l} \right), l \geq 1$$

De plus pour $l \geq 2$ on a l'inégalité :

$$|y_l - \sqrt{c}| \leq \frac{(0.5)^{l-1}}{1-0.5} |y_2 - y_1| = (0.5)^{l-2} |y_2 - y_1|$$

Par ailleurs si on prend x_0 quelconque dans $]0, \infty)$ alors les termes $x_{l+1} = f(x_l)$ pour $l \geq 0$ restent dans I et la suite $(x_l)_{l \geq 0}$ converge vers \sqrt{c} d'après ce qui précède et l'inégalité de majoration d'erreur s'écrit alors, toujours pour $l \geq 2$, $|x_l - \sqrt{c}| \leq 0.5^{l-2} |x_2 - x_1|$. Par exemple pour $c = 2$ on a, en partant de $x_0 = 1$:

$$x_1 = 1.5$$

$$x_2 = 1.4166 \dots$$

$$x_3 = 1.414215686274 \dots$$

$$x_4 = 1.414213562374 \dots$$

$$x_5 = 1.414213562373 \dots$$

On constate que la convergence vers $\sqrt{2} = 1.4142135623731 \dots$ est très rapide et on vérifie bien l'inégalité de majoration d'erreur donnée plus haut :

$$|x_5 - \sqrt{2}| \leq 10^{-3} \leq 0.5^3 |x_2 - x_1| \leq 0.01$$

Remarque :

- La touche $\sqrt{\quad}$ d'une calculatrice utilise ce même procédé itératif convergent pour déterminer la racine carrée d'un nombre positif quelque soit le point de départ dans \mathbb{R}^{*+} .

Le théorème du point fixe de Krasnoselskii est très sollicité dans les problèmes à valeurs sur le bord, il assure l'existence et l'unicité des solutions positives comme nous allons le constater dans l'application suivante :

3.4 Application du théorème de Krasnoselskii

On se propose d'étudier le problème à valeur sur le bord de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -u'' + m^2 u = \lambda f(t, u) + g(t, u), & 0 < t < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Où m est une constante positive.

$\lambda > 0$ est un paramètre, $f : (0, 1) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ et $g : (0, 1) \times [0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ sont continues.

On va prouver l'existence d'une solution positive du problème (1) sous certaines hypothèses sur f et g et pour un paramètre λ suffisamment petit. L'approche est basée sur le théorème du point fixe de krasnoselskii. On considère le problème dans l'espace de Banach $E = C[0,1]$

muni de la norme : $\|u\| = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)|$.

Soit $G(t,s)$ la fonction de Green pour le problème à valeur sur le bord de Neumann :

$$\begin{cases} -u'' + m^2 u = 0, & 0 < t < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Alors :

$$G(t,s) = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \varphi(s)\varphi(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \varphi(t)\varphi(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{où } \rho = \frac{1}{2}m(e^m - e^{-m}), \varphi(t) = \frac{1}{2}(e^{mt} + e^{-mt})$$

$\varphi(t)$ est croissante sur $[0,1]$ et $G(s,t) \leq G(s,s), 0 \leq s, t \leq 1$.

Nous énonçons les deux lemmes suivants qui nous seront utiles :

Lemme 3.6 :

Soit $G(t,s)$ la fonction de Green associée au problème (2).

Supposons que $0 < \theta < \frac{1}{2}$, alors : $G(t,s) \geq M_\theta G(s,s), \theta \leq t \leq 1-\theta, 0 \leq s \leq 1$

$$\text{où } M_\theta = \frac{e^{m\theta} + e^{-m\theta}}{e^m + e^{-m}}$$

$$G(t,s) \geq C\varphi(t)\varphi(1-t)G(t_0,s), \quad t, t_0, s \in [0,1]$$

$$\text{où } C = \frac{1}{\varphi^2(1)}$$

Lemme 3.7 :

Soit $y \in C((0,1), [0, \infty))$, $0 < \int_0^1 y(s) ds < \infty$ alors le problème à valeur sur le bord de Neumann :

$$\begin{cases} -\omega'' + m^2 \omega = y(t), & 0 < t < 1 \\ \omega'(0) = \omega'(1) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

admet une solution unique ω et il existe une constante C_y telle que :

$$C \|\omega\| \varphi(t)\varphi(1-t) \leq \omega(t) \leq C_y \varphi(t)\varphi(1-t) \text{ avec } C_y = \frac{1}{\rho} \int_0^1 y(s) ds.$$

Remarque :

- On déduit du lemme (3.7) que si $y(t) \equiv M$ alors $C_y = C_M = \frac{M}{\rho}$.

On impose les hypothèses suivantes :

(H₁) $f(t, u) \leq p(t)q(u)$ où $p : (0, 1) \rightarrow [0, +\infty)$ et $q : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ sont continues.

(H₂) $|g(t, u)| \leq M$, $M > 0$ est une constante.

(H₃) $0 < \int_0^1 G(s, s) p(s) ds < +\infty$.

(H₄) $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(t, u)}{u} = +\infty$ uniformément sur tout sous intervalle compact de $[0, 1]$.

Soit $C^+[0, 1] = \{u \in [0, 1], u(t) \geq 0, 0 \leq t \leq 1\}$, et $K = \left\{u \in C^+[0, 1], \min_{\theta \leq t \leq 1-\theta} u(t) \geq M_\theta \|u\|\right\}$.

On vérifie, aisément, que $C^+[0, 1]$ et K sont deux cônes de E .

Soit $v(t)$ la solution du problème à valeur sur le bord :

$$\begin{cases} -v'' + m^2 v = M, & 0 < t < 1 \\ v'(0) = v'(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

D'après le lemme (3.7) $v(t) \leq C_M \varphi(t) \varphi(1-t) = \frac{M}{\rho} \varphi(t) \varphi(1-t)$.

Posons :

$$[y(t)]^* = \begin{cases} y(t), & y(t) \geq 0 \\ 0 & y(t) < 0 \end{cases} \quad 0 < t < 1$$

et $F(\lambda, t, u) = \lambda f(t, [u-v]^*) + g(t, [u-v]^*) + M$, $0 \leq t \leq 1$.

Considérons le problème à valeur sur le bord :

$$\begin{cases} -u'' + m^2 u = F(\lambda, t, u) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Il n'est pas difficile de prouver que $u = u_0 - v$ est une solution positive du problème (1) si et seulement si u_0 est une solution positive du problème (5), v est la solution du problème (4) et $u_0(t) > v(t)$, $0 < t < 1$.

Définissons l'opérateur $T_\lambda : C^+[0, 1] \rightarrow C^+[0, 1]$ par $(T_\lambda u)(t) = \int_0^1 G(t, s) F(\lambda, s, u(s)) ds$.

Lemme 3.8 :

Supposons que les hypothèses (H₁)–(H₃) sont vérifiées. Alors : $T_\lambda : K \rightarrow K$ est complètement continu (i.e. continu et compact).

Le théorème du point fixe de krasnoselskii dans un cône va jouer un rôle important pour prouver le résultat cherché.

Théorème 3.9 : [9]

Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ un cône. Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts de E avec $0 \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.

Soit $T : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ un opérateur complètement continu tel que :

A) $\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$, et $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$

B) $\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$, et $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$.

Alors T possède un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

On enchaîne avec le résultat principal qu'est :

Théorème 3.10 :

Supposons que (H₁)–(H₄) sont satisfaites. Alors le problème (1) admet au moins une solution positive $u \in (C^2(0,1) \cap C[0,1])$ si $0 < \lambda \leq \left[\max_{0 \leq \tau \leq r} q(\tau) \int_0^1 G(s,s) p(s) ds \right]^{-1}$ où

$$r = \max \left\{ 1 + 2M \int_0^1 G(s,s) ds, \frac{M}{\rho C} \right\}$$

Démonstration :

D'après le lemme (3.8), T_λ est complètement continu.

Soit $\Omega_1 = \{u \in C[0,1], \|u\| < r\}$.

Pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$, $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} (T_\lambda u)(t) &= \int_0^1 G(t,s) F(\lambda, s, u(s)) \\ &= \int_0^1 G(t,s) \left(\lambda f\left(s, [u(s) - x(s)]^*\right) + g\left(s, [u(s) - x(s)]^*\right) + M \right) ds \\ &\leq \int_0^1 G(t,s) \lambda p(s) q\left([u(s) - x(s)]^*\right) ds + 2M \int_0^1 G(s,s) ds \\ &\leq \lambda \max_{0 \leq \tau \leq r} q(\tau) \int_0^1 p(s) G(s,s) ds + 2M \int_0^1 G(s,s) ds \\ &\leq 1 + 2M \int_0^1 G(s,s) ds \leq r = \|u\| \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\|T_\lambda u\| \leq \|u\|$ pour $u \in K \cap \partial\Omega_1$. Par ailleurs, choisissons N assez grand tel

$$\text{que : } \frac{1}{2} \lambda M_\theta N C \varphi^2(\theta) \int_\theta^{1-\theta} G(s,s) ds \geq 1$$

D'après (H₄), il existe une constante $B > 0$ telle que :

$$\frac{f(s,u)}{u} > N$$

pour $(s,u) \in [\theta, 1-\theta] \times [B, \infty)$.

Posons :

$$\Omega_2 = \{u \in C[0,1], \|u\| < R\}$$

$$\text{où } R = \max \left\{ 2r, \frac{2M}{\rho C}, \frac{2B}{C\varphi^2(\theta)} \right\}$$

Pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$, $s \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} u(s) - v(s) &\geq u(s) - C_M \varphi(s) \varphi(1-s) \geq u(s) - \frac{M}{\rho} \varphi(s) \varphi(1-s) \\ &\geq u(s) - \frac{M}{\rho CR} C \|u\| \varphi(s) \varphi(1-s) \\ &\geq u(s) - \frac{1}{2} u(s) \\ &\geq \frac{1}{2} u(s) \geq 0 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \min_{\theta \leq s \leq 1-\theta} (u(s) - v(s)) &\geq \min_{\theta \leq s \leq 1-\theta} \frac{1}{2} u(s) \geq \min_{\theta \leq s \leq 1-\theta} \frac{C}{2} \|u\| \varphi(s) \varphi(1-s) \\ &\geq \frac{CR}{2} \varphi^2(\theta) \geq B \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [\theta, 1-\theta]$,

$$\begin{aligned} (T_\lambda u)(t) &= \int_0^1 G(t,s) F(\lambda, s, u(s)) \\ &= \int_0^1 G(t,s) \left(\lambda f\left(s, [u(s) - v(s)]^*\right) + g\left(s, [u(s) - v(s)]^*\right) + M \right) ds \\ &\geq \int_\theta^{1-\theta} G(t,s) \lambda f\left(s, [u(s) - v(s)]^*\right) ds \\ &\geq \lambda M_\theta \int_\theta^{1-\theta} G(s,s) N(u(s) - v(s)) ds \\ &\geq \lambda M_\theta \int_\theta^{1-\theta} G(s,s) N \frac{u(s)}{2} ds \\ &\geq \lambda M_\theta \int_\theta^{1-\theta} G(s,s) \frac{NC}{2} \|u\| \varphi(s) \varphi(1-s) ds \\ &\geq \frac{1}{2} \lambda M_\theta NC \varphi^2(\theta) \int_\theta^{1-\theta} G(s,s) \|u\| ds \geq \|u\| \end{aligned}$$

ceci implique que $\|T_\lambda u\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$. En appliquant (B) du théorème (3.9), on déduit que T_λ possède un point fixe u_0 avec $r \leq \|u_0\| \leq R$. Du lemme (3.6), on a :

$$\begin{aligned}
u_0(t) &\geq C \|u_0\| \varphi(t) \varphi(1-t) \\
&\geq Cr \varphi(t) \varphi(1-t) \\
&\geq \frac{C\rho r}{M} \frac{M}{\rho} \varphi(t) \varphi(1-t) \\
&\geq \frac{M}{\rho} \varphi(t) \varphi(1-t) = v(t).
\end{aligned}$$

Et $u(t) = u_0(t) - v(t)$, $u(t) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ est une solution positive du problème (1).

La partie suivante est destinée à étudier les équations opérateurs du type $x = Ax + x_0$ et où on fait appel à la théorie du point fixe. Une attention particulière est portée sur les opérateurs concaves, pour lesquels on obtient des résultats d'existence et d'unicité.

3.5 Théorème du point fixe pour les opérateurs généraux α -concaves

On se propose d'étudier l'existence et l'unicité des solutions pour les deux problèmes à valeurs sur le bord suivants (voir [19] [25] [26]) :

$$(P_{\pm}) \begin{cases} \pm u''(t) + m^2 u(t) = f(t, u(t)) + g(t), & 0 < t < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Où m est une constante positive, $f : [0,1] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ et $g : [0,1] \rightarrow [0, \infty)$ sont continues.

Soit E un espace de Banach réel, P un cône dans E et θ l'élément nul de P .

Soit donnée $h > \theta$, on définit $P_h = \{x \in P / \exists \lambda(x), \mu(x) > 0 \text{ telles que } \lambda(x)h \leq x \leq \mu(x)h\}$.

Le théorème suivant est un théorème du point fixe pour des opérateurs généraux α -concaves (qu'on va définir). Il nous sera très utile pour établir l'existence et l'unicité des solutions pour (P_-) et (P_+) . (Voir résultat principal dans préliminaires).

Théorème 3.11 :

Supposons que le cône P est normal et que A satisfait les conditions suivantes :

(B₁) $A : P_h \rightarrow P_h$ est croissant dans P_h .

(B₂) $\forall x \in P_h$ et $t \in (0,1)$, il existe $\alpha(t) \in (0,1)$ tel que $A(tx) \geq t^{\alpha(t)} Ax$. A est alors dit opérateur général α -concave.

(B₃) il existe une constante $l \geq 0$ telle que $x_0 \in [\theta, lh]$

Alors l'équation $x = Ax + x_0$ admet une solution unique dans P_h .

On applique le théorème 1 pour déduire l'existence et l'unicité des solutions positives pour (P_-) et (P_+) dans P_h . On impose les hypothèses suivantes :

(H₁) $f(t, x)$ est croissante en x pour t fixé et $g \not\equiv 0$.

(H₂) Pour tout $\gamma \in (0,1)$ et $x \geq 0$, il existe $\varphi(\gamma) \in (\gamma, 1]$ tel que $f(t, \gamma x) \geq \varphi(\gamma) f(t, x)$, pour $t \in [0,1]$.

(H₃) pour tout $t \in [0,1]$, $f(t, a) > 0$ où $a = \frac{1}{4}(e^m + e^{-m} + 2)$.

Dans ce qui suit $E = C[0,1]$ est l'espace de Banach dont la norme est : $\|u\| = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)|$ et

$P = \{x \in C([0,1]) / x(t) \geq 0, t \in [0,1]\}$ P est un cône normal de constante de normalité égale à 1.

Etudions le problème (P_-) :

Soit $G(t, s)$ la fonction de Green pour le problème à valeur sur le bord :

$$\begin{cases} -u''(t) + m^2 u(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Alors

$$G(t, s) = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \psi(s)\psi(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \psi(t)\psi(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

où $\rho = \frac{1}{2}m(e^m - e^{-m})$ et $\psi(t) = \frac{1}{2}(e^{mt} + e^{-mt})$

Le théorème suivant va affirmer que sous les hypothèses (H₁)–(H₃) les conditions (B₁), (B₂) et (B₃) sont vérifiées.

Théorème 3.12 :

Sous les hypothèses (H₁)–(H₃) le problème (P_-) admet une solution positive unique u^* dans P_h où $h(t) = \psi(t)\psi(1-t)$, $t \in [0,1]$. Et nous avons la remarque suivante qui est très importante :

Remarque :

- Soit $b = \frac{1}{2}m(e^m + e^{-m})$. Alors il est facile de vérifier que $a = \min\{h(t), t \in [0,1]\}$ et $b = \max\{h(t), t \in [0,1]\}$ (a donnée dans (H₃)).

Exemple 1 :

Considérons le problème à valeur sur le bord :

$$(1) \begin{cases} -u''(t) + (\ln 2)^2 u(t) = u^\beta(t) + q(t) + t^2 & 0 < t < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

où $\beta \in (0,1)$, $q: [0,1] \rightarrow [0, \infty)$ continue.

On doit vérifier les hypothèses (H₁)–(H₃) pour appliquer le théorème (3.12) et déduire que le problème (1) admet une unique solution positive dans P_h .

On a :

$$m = \ln 2$$

$$f(t, x) = x^\beta + q(t) \text{ et } g(t) = t^2$$

$$a = \frac{1}{4}(e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} + 2) = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{9}{8} \Rightarrow a = \frac{9}{8}$$

$$b = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \Rightarrow b = \frac{10}{8}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2}(e^{t \ln 2} + e^{-t \ln 2})$$

$$\psi(1-t) = \frac{1}{2}(e^{(1-t) \ln 2} + e^{-(1-t) \ln 2})$$

$$h(t) = \psi(t)\psi(1-t) = \frac{1}{4}(e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} + 2^{1-2t} + 2^{2t-1})$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 + \frac{1}{2} + 2^{1-2t} + 2^{2t-1}\right)$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{1}{4}(2^{1-2t} + 2^{2t-1}), \quad t \in [0, 1]$$

Pour t fixé, il est clair que $f(t, x)$ est croissante en x et $g \not\equiv 0$.

$$f(t, a) = f\left(t, \frac{9}{8}\right) = \left(\frac{9}{8}\right)^\beta + q(t) > 0$$

Posons $\varphi(\gamma) = \gamma^\beta$, $\beta \in (0, 1)$

$$f(t, \gamma x) = (\gamma x)^\beta + q(t) = \gamma^\beta x^\beta + q(t) \geq \gamma^\beta (x^\beta + q(t)) \geq \varphi(\gamma) f(t, x)$$

Ainsi le théorème (3.12) est applicable et le problème (P_-) admet une unique solution positive dans P_h .

Etudions le problème (P_+) avec $m \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

Soit $G(t, s)$ la fonction de Green pour le problème :

$$\begin{cases} u''(t) + m^2 u(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Alors

$$G(t, s) = \frac{1}{m \sin m} \begin{cases} \cos ms \cos m(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \cos mt \cos m(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Le théorème suivant va assurer l'existence et l'unicité de la solution de P_+ dans P_h .

Théorème 3.13 :

Supposons que (H₁) et (H₂) sont satisfaites et $f(t, \cos^2 m) > 0$ pour $t \in [0, 1]$. Alors le problème P_+ admet une unique solution positive dans P_h avec

$$h(t) = \cos m(1-t) \cos mt, \quad t \in [0, 1].$$

Exemple 2 :

Considérons le problème à valeur sur le bord :

$$(2) \begin{cases} u''(t) + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 u(t) = u^{\frac{1}{3}}(t) + q(t) + t^3, & 0 < t < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

où $q: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ est continue.

$$\text{On a : } m = \frac{\pi}{3} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } h(t) = \cos \frac{\pi}{3} t \cos \frac{\pi}{3} (1-t), \quad t \in [0, 1]$$

$$f(t, x) = x^{\frac{1}{3}} + q(t), \quad g(t) = t^3.$$

Pour t fixé, il est évident que $f(t, x)$ soit croissante pour $x \geq 0$ et $g \not\equiv 0$

$$\begin{aligned} f\left(t, \cos^2 \frac{\pi}{3}\right) &= \left(\cos^2 \frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + q(t) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + q(t) > 0 \end{aligned}$$

Posons : $\varphi(\gamma) = \gamma^{\frac{1}{3}} + q(t) = \gamma^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + q(t)$, $\gamma \in (0, 1)$ alors :

$$\begin{aligned} f(t, \gamma x) &= (\gamma x)^{\frac{1}{3}} + q(t) = \gamma^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + q(t) \\ &\geq \gamma^{\frac{1}{3}} \left(x^{\frac{1}{3}} + q(t)\right) \geq \varphi(\gamma) f(t, x) \end{aligned}$$

Toutes les conditions du théorème (3.13) sont vérifiées, par conséquent le problème 2 possède une unique solution positive dans P_h .

Conclusion

Conclusion

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution pour les équations d'opérateurs non linéaires.

De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach et Schauder, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe. Mais celui de Brouwer est particulièrement célèbre.

Le théorème de Banach ne s'appuie pas sur les propriétés topologiques du domaine de définition mais sur le fait que la fonction étudiée soit contractante.

Le résultat de Brouwer est l'un des théorèmes-clef caractérisant la topologie d'un espace euclidien. Il intervient pour établir des résultats fins sur les équations différentielles ; il est présent dans la géométrie différentielle. Il apparait dans diverses branches, comme la théorie des jeux.

Ce théorème est généralisé en 1930 aux espaces de Banach. Cette généralisation est due à Schauder. Ce théorème affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique, mais qui nous permet de résoudre plusieurs problèmes.

Mais en 1955, Krasnoselskii a joint les deux résultats de Banach et Schauder afin d'en tirer son théorème qui affirme sous certaines conditions sur l'espace de Banach, l'application de la forme : $Ux + Cx$

Où U est contractante et C compact admet un point fixe.

De cette théorie découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche.

Références

- [1] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications, Springer
- [2] C. Bessaga, On the converse of the Banach fixed point principle, *colloq. Math.*7 (1959) 41-43
- [3] D.W. Boyd and J.S.W. Wong, On nonlinear contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 20 (1969) 458-464
- [4] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle théorie et application* , Dunod, Paris, 1999
- [5] M. Edelstein, An extension of Banach's contraction principle, *Proc. Amer. Math. Soc.* 12 (1961) 7-10.
- [6] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations on second order*, Springer Verlag, Berlin1983
- [7] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities*, Acad. Press, New York 1980
- [8] W.A. Kirk, Mappings of generalized contractive type, *J. Math. Anal. Appl.* 32 (1970) 567-572
- [9] M.A. Krasnoselskii, *Positive solutions of operator equations*, Noordhoff, Groningen 1964
- [10] S. Leader, Two convergence principals with applications to fixed points in metric spaces, *Non linear Analysis* 6 (1982) 531-538
- [11] J. L. Lions and G. Stampacchia, *Variational inequalities*, *Comm. Pure Appl. Math.* 20 (1967) 493-51
- [12] A. Meir and E. Keeler, A theorem on contractive mappings, *J. Math. Anal. Appl.* 28 (1969) 326-329
- [13] W.R. Melvin, Some extensions of Krasnoselskii fixed point theorem, *J. Diff. Eq.* 11 (1972) 335-348
- [14] H. Robert and Jr. Martin, *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, *Pure and applied Mathematics*, John Wiley and Sons, New York 1976
- [15] H. L. Royden, *Real Analysis*, 3rd ed., Macmillan Publishing Co., New York 1988
- [16] L. Schwartz, *Analyse-topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris 1970
- [17] V.M. Sehgal and S.P. Singh, On a fixed point theorem of Krasnoselskii for locally convex-spaces, *Pacific J. Math.* 62 (1976) 561-567

- [18] D.R. Smart, Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974
- [19] Y.P. Sun, Y. Sun, Positive solutions for singular semi positive Neumann boundary value problems, Electronic journal of differential equations (2004) 133
- [20] A. Taylor, Introduction to Functional Analysis, Wiley and Sons, New York 1972
- [21] I. Vasile-Istratescu, Introduction into theory of fixed points, E. Academie, Bucarest 1973
- [22] K. Yosida, Functional Analysis, 6th ed., Springer, New York 1995
- [23] P.P. Zabreiko, R.N. Kachurovskii and M.A.O. Krasnoselskii, On a fixed point principal for operators in Hilbert spaces, Funk. Anal. Prilozenia 1 , 2 (1967) 168-169
- [24] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985
- [25] C.B. Zhai, X.M. Cao, Fixed point theorems for singular, Comp. Maths. App 59 (2010)
- [26] C.B. Zhai, C. Yang, C.M. Guo, Positive solutions of operator equations on ordered Banach spaces and applications, Comp. Maths. App 56 (2008)