Introduction générale

Dans ce mémoire, on étudie quelques théorèmes du point fixe de Banach, Brouwer, Schauder et krasnoselskii et quelques-unes de leurs applications. Etant donnés un ensemble M et une application $T : M \to M$, on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur T et M pour que T ait un point fixe. Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problèmes comme par exemple trouver les zéros d'un polynôme, ou prouver que certaines équations différentielles admettent des solutions sans les déterminer explicitement.

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs, d'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité.
Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach (par exemple, l'identité).

En 1955, et pour la première fois, Krasnoselskii a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractane et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

Ce travail est réparti en trois chapitres :
Le premier chapitre est consacré d'une part, à quelques définitions concernant les cônes et d'autre part, à un résultat principal qui concerne les opérateurs α-concaves ou homogènes.
Quelques résultats de la théorie du point fixe constituent les quatre paragraphes du second chapitre.

Le premier paragraphe du chapitre 3 s'étend aux applications du principe de l'application contractante. On se penche, particulièrement, sur les résultats d'existence pour les inégalités variationnelles définies par des formes bilinéaires sur un espace de Banach et dans lesquelles le principe de l'application contractante est applicable.
Nous abordons dans le deuxième paragraphe du capitre3 quelques applications du théorème du point fixe de Krasnoselskii pour établir l'existence et l'unicité des solutions.

Enfin on étudie le théorème du point fixe pour les opérateurs α-concaves, pour lesquels l'existence et l'unicité des solutions positives des équations du type $x = Ax + x_0$ sont assurées.