

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique  
Université Abou-bekr Belkaïd - Tlemcen  
Faculté des Sciences de l'Ingénieur  
Département d'Électronique

## THESE DE MAGISTER EN ELECTRONIQUE

Option :       SIGNALS ET SYSTEMES

Thème :

**CARACTÉRISATION PAR LA MÉTHODE DES  
ÉLÉMENTS FINIS DES PHÉNOMÈNES DE GUIDAGE ET  
DE DIFFRACTION D'ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES  
DANS LES DIÉLECTRIQUES : GUIDE IMAGE**

Présentée par :

**M. DJEMAI ABDERREZAK**

Soutenue en Juin 2000 devant la commission d'examen :

*Messieurs*

<b>F. BEREKSI REGUIG</b>	<i>Président</i>	<i>M.C Université de Tlemcen</i>
<b>M. FEHAM</b>	<i>Directeur de Thèse</i>	<i>M.C Université de Tlemcen</i>
<b>F.T BENDIMERAD</b>	<i>Examineur</i>	<i>M.C Université de Tlemcen</i>
<b>N. BOUKLI HACENE</b>	<i>Examineur</i>	<i>C.C Université de Tlemcen</i>

## REMERCIEMENTS



Le présent travail a été effectué au Laboratoire d'Electronique Micro-ondes et Applications (LEMA) à l'Institut d'Électronique de l'Université Abou-bekr Belkaïd-Tlemcen.

Je suis très honoré que Monsieur F. BEREKSI REGUIG Maître de conférence à l'Université Abou-bekr Belkaïd-Tlemcen ait accepté de présider le jury de ma thèse.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur M. FEHAM d'avoir dirigé mon travail et de m'avoir initié à la recherche.

Je remercie Monsieur F.T BENDIMERAD Maître de conférence à l'Université Abou-bekr Belkaïd-Tlemcen qui m'a fait l'honneur de participer à ce jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur N. BOUKLI HACENE chargé de cours de l'Université de Tlemcen d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Que l'ensemble de mes camarades enseignants et chercheurs du Laboratoire trouvent ici l'expression de mes sentiments amicaux pour les encouragements et la sympathie que j'ai trouvé auprès d'eux.

J'associe enfin mes remerciements à tous ceux qui de près ou de loin m'ont aidé et soutenu.

## SOMMAIRE



### CHAPITRE I : PRESENTATION SUCCINCTE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS (MEF)

<b>I-1/ INTRODUCTION.....</b>	<b>3</b>
<b>I-2/ METHODE DES ÉLÉMENTS FINIS.....</b>	<b>3</b>
I-2-1) ÉTUDE DES APPROXIMATIONS .....	3
I-2-1-1) APPROXIMATION NODALE.....	3
I-2-1-2) APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS .....	4
I-2-2) NOTION D'ELEMENT DE REFERENCE .....	8
I-2-3) ELEMENT TRIANGULAIRE DE LAGRANGE .....	9
I-2-3-1) COORDONNEES BARYCENTRIQUES.....	10
I-2-3-2) CALCUL DES FONCTIONS D'INTERPOLATION SUR L'ELEMENT TRIANGULAIRE ..	11
I-2-3-3) CALCUL DES FONCTIONS D'INTERPOLATION ET DE LEURS DERIVEES PREMIERES.....	12
<b>I-3/ APPROXIMATION PAR DES POLYNÔMES DE NEDELEC .....</b>	<b>13</b>
I-3-1) CALCUL DES FONCTIONS DE BASE DE L'ELEMENT TRIANGULAIRE MIXTE...	13
<b>I-4/ METHODOLOGIE POUR ÉLÉMENTS FINIS .....</b>	<b>15</b>
<b>I-5/ DESCRIPTION DU LOGICIEL.....</b>	<b>16</b>

### CHAPITRE II : CARACTERISATION DES GUIDES DIELECTRIQUES PAR LA MEF

#### II-A/ PARAMETRES CARACTERISTIQUES DES GUIDES

<b>DIELECTRIQUES HOMOGENES BLINDES.....</b>	<b>17</b>
II-A-1/ INTRODUCTION.....	17
II-A-2/ DEFINITION : GUIDE D'ONDES.....	18
II-A-3/ CLASSIFICATION DES LIGNES ET GUIDES D'ONDES.....	18

II-A-4/ EQUATIONS DE PROPAGATION DES ONDES GUIDEES.....	20
II-A-4-1) PRINCIPES GENERAUX.....	20
II-A-4-2) DETERMINATION DES COMPOSANTES TRANSVERSALES EN $x$ et $y$ .....	23
II-A-4-3) DETERMINATION DES COMPOSANTES TRANSVERSALES EN $r$ et $\theta$ .....	24
II-A-4-4) cas particulier des ondes T.E.M.....	25
II-A-4-5) EQUATION DE PROPAGATION DES COMPOSANTES LONGITUDINALES.....	25
II-A-5) LES DIFFERENTS TYPES D'ONDES DE PROPAGATION GUIDEE.....	26
II-A-5-1) ONDES TE OU TM POUR $K_C^2 > 0$ .....	27
II-A-5-2) ONDES TE OU TM POUR $K_C^2 < 0$ .....	28
II-A-5-3) MODES HYBRIDES.....	28
II-A-6/ DEFINITIONS.....	29
II-A-6-1) DIAGRAMME DE DISPERSION.....	29
II-A-6-2) FRÉQUENCE ET LONGUEUR D'ONDES DE COUPURE.....	30
II-A-6-3) CHAMPS DANS LE GUIDE A LA FRÉQUENCE DE COUPURE.....	30
II-A-6-4) MODE EN DESSOUS DE LA COUPURE : MODE EVANESCENT.....	30
II-A-6-5) MODE AU DESSUS DE LA COUPURE.....	31
II-A-6-6) LONGUEUR D'ONDE DE GUIDE.....	31
II-A-6-7) VITESSES DE PHASE ET DE GROUPE.....	31
II-A-6-8) IMPEDANCE D'ONDE.....	32
II-A-6-9) BANDES DE FRÉQUENCE, MODE DOMINANT, MODES SUPERIEURS.....	32
II-A-6-10) MODES DEGENERES.....	33
II-A-7/ LES GUIDES D'ONDES RECTANGULAIRES HOMOGENES.....	33
II-A-7-1) DÉTERMINATION DES MODES TE.....	33
II-A-7-2) DÉTERMINATION DES MODES TM.....	37
II-A-8/ LES GUIDES D'ONDES CYLINDRIQUES HOMOGENES.....	39
II-A-8-1) DEFINITION DE LA GEOMETRIE.....	39
II-A-8-2) RESOLUTION DE L'EQUATION D'ONDE.....	39
II-A-8-3) DÉTERMINATION DES ONDES TE.....	41
II-A-8-4) DÉTERMINATION DES ONDES TM.....	42

**II-B/ FORMULATION DU PROBLEME D'ONDES GUIDEES DANS LES****GUIDES DIELECTRIQUES BLINDES PAR LA METHODE DES****ÉLÉMENTS FINIS.....44**

II-B-1) INTRODUCTION.....44

II-B-2) GUIDES D'ONDES HOMOGENES.....45

II-B-2-1) INTRODUCTION.....45

II-B-2-2) FORMULATION DU PROBLEME PAR LA METHODE DES ÉLÉMENTS FINIS.....45

II-B-3) GUIDES D'ONDES INHOMOGENES.....49

II-B-3-1) INTRODUCTION.....49

II-B-3-2) FORMULATION DU PROBLEME PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....49

**II-C/ APPLICATIONS.....56**

II-C-1) GUIDE D'ONDES RECTANGULAIRE VIDE.....56

II-c-1-1) Calcul théoriques des fréquences de coupure.....57

II-c-1-2) Maillage.....57

II-c-1-3) présentation des résultats.....58

II-c-1-4) Diagramme de dispersion.....59

II-c-1-5) Cartographie du champ.....60

II-C-2) LIGNE COAXIALE.....65

II-c-2-1) Maillage.....65

II-c-2-1) Présentation des résultats.....66

II-C-3) LIGNE MICRORUBAN.....67

II-c-3-1) Maillage.....68

II-c-3-2) présentation des résultats.....69

II-C-4) LIGNE MICRORUBAN A FENTE.....70

II-c-4-1) Maillage.....70

II-c-4-2) Présentation des résultats.....72

**II-D/ CONCLUSION.....73**

## CHAPITRE III : CARACTERISATION DE LA DIFFRACTION DES ONDES PAR DES GUIDES DIELECTRIQUES OUVERTS : GUIDE IMAGE

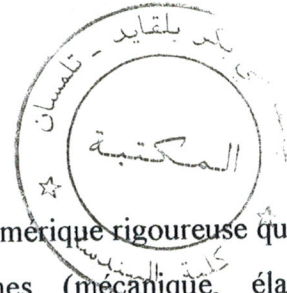
<b>III-A/ INTRODUCTION .....</b>	<b>75</b>
<b>III-B/ METHODES APPROXIMATIVES D'ANALYSE .....</b>	<b>75</b>
<b>DU GUIDE IMAGE .....</b>	<b>75</b>
<b>III-B-1) CARACTERISTIQUES FONDAMENTALES .....</b>	<b>75</b>
III-B-1-1) GEOMETRIE DU GUIDE IMAGE DIELECTRIQUE .....	75
III-B-1-2) MODES DE PROPAGATION.....	76
<b>III-B-2) MÉTHODES D'ANALYSE .....</b>	<b>77</b>
III-B-2-1) METHODE DE MARCATILI .....	77
III-B-2-2) METHODE DE LA CONSTANTE DIELECTRIQUE EFFECTIVE .....	80
III-B-2-3) DISCUSSION.....	83
<b>III-B-3) CARACTERISATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE .....</b>	<b>86</b>
III-B-3-1) EXPRESSION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE.....	86
III-B-3-2) DISTRIBUTION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE.....	88
<b>III-B-4) CONCEPTION DU GUIDE IMAGE .....</b>	<b>90</b>
III-B-4-1) CHOIX DU RUBAN DIELECTRIQUE.....	90
III-B-4-2) LIMITATIONS PRATIQUES .....	90
<b>III-B-5) RAYONNEMENT .....</b>	<b>91</b>
III-B-5-1) BLINDAGE METALLIQUE.....	91
III-B-5-2) BLINDAGE DIELECTRIQUE .....	91
<b>III-B-6) CONCLUSION .....</b>	<b>94</b>
<b>III-C/ METHODE NUMERIQUE DE CARACTERISATION DE LA</b>	
<b>DIFFRACTION D'ONDES PAR DES GUIDES IMAGES.....</b>	<b>95</b>
III-C-1) CONDITIONS AUX LIMITES D'ABSORPTIONS .....	95
III-C-2) APPLICATIONS ET RESULTATS .....	114
III-C-2-1) ANALYSE D'UN GUIDE IMAGE OUVERT.....	114
III-C-2-2) ANALYSE DE LA DIFFRACTION D'UN GUIDE IMAGE COUVERT .....	128
III-C-3) CONCLUSION .....	140





## INTRODUCTION

## Introduction



La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique rigoureuse qui a fait preuve d'efficacité et de précision dans divers domaines (mécanique, élasticité, électromagnétisme,...). Son application permet de traiter des milieux homogènes ou inhomogènes, isotropes ou anisotropes et de géométrie quelconque.

Dans le domaine de l'électromagnétisme, cette méthode a été essentiellement appliquée à l'étude des guides d'ondes, des fibres optiques, des cavités métalliques et des lignes de transmission.

Le but recherché à travers ce travail consiste à développer un modèle numérique général, à base de la méthode des éléments finis, pour la détermination des caractéristiques électromagnétiques (la fréquence de coupure, la constante de propagation et la distribution du champ électromagnétique) des modes susceptibles d'être guidés (TE, TM et HEM) dans des guides diélectriques homogènes et inhomogènes blindés ainsi que la caractérisation du champ diffracté par des guides diélectriques ouverts, en particulier le guide image. Ce dispositif est employé dans la bande des longueurs d'ondes millimétriques où la présence des conducteurs engendrent des perturbations et des pertes importantes. Dans un premier temps nous analysons la diffraction d'ondes provoquée par ce guide diélectrique isolé et puis on le protège par d'autres couches de diélectriques afin de réduire le champ rayonné.

La formulation de ces problèmes électromagnétiques est développée dans le cadre du logiciel " QFEM " [11] ; logiciel portable et facile à manipuler.

Le premier chapitre de ce travail est consacré à l'exposé de la méthode des éléments finis.

Dans le second chapitre, on présente l'étude de la propagation dans les guides diélectriques blindés ainsi que l'application de la méthode MEF à deux dimensions à la caractérisation électromagnétique des modes excités. Afin de vérifier les résultats de cette technique, on aborde en particulier l'analyse des paramètres caractéristiques de quelques types de guides (guide d'onde rectangulaire, ligne microruban, ligne coaxiale, ...).



Le troisième chapitre est réservé à l'étude du guide image diélectrique par des méthodes analytiques approximatives ainsi que l'application de la MEF à deux dimensions pour la caractérisation du champ diffracté de ces guides ouverts.

Cette étude est menée en délimitant le domaine d'étude par des conditions aux limites d'absorption (ABC et PMA) : formalisme mathématique nouveau décrivant la décroissance du champ électromagnétique à une distance donnée de la source rayonnante.

**CHAPITRE I**

**PRESENTATION SUCCINTE  
DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS  
(MEF)**

## I-1/ INTRODUCTION

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre les équations aux dérivées partielles décrivant le comportement des systèmes physiques. C'est une méthode numérique permettant la discrétisation d'un problème à l'aide d'une formulation variationnelle pour obtenir finalement des systèmes algébriques auxquels on peut appliquer différentes techniques numériques de résolution. Ces systèmes sont généralement de grande taille, ainsi seule une bonne utilisation informatique permet de les stocker sur ordinateur et de les résoudre avec un temps de calcul raisonnable. La bibliothèque " QFEM " [11] présente un grand intérêt dans ce domaine. Son utilisation nécessite la connaissance de ses normes.

Ce premier chapitre est consacré à l'exposé de la méthode des éléments finis et à la description du logiciel utilisé dans notre étude.

## I-2/ METHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

C'est une méthode d'approximation permettant de remplacer un système inconnu (de dimensions infinies) par un système discret (de dimensions finies) équivalent. Autrement dit, elle consiste à transformer les équations aux dérivées partielles en un système discret. Elle fait appel aux domaines suivants :

- Science de l'ingénieur pour exprimer les équations aux dérivées partielles ;
- Méthodes numériques pour exprimer et résoudre le système discret ;
- Programmation informatique pour l'exécution des calculs sur ordinateur.

Deux types d'approximation peuvent être envisagés :

- L'approximation nodale.
- L'approximation par éléments finis.

### I-2-1) ÉTUDE DES APPROXIMATIONS [1]

#### I-2-1-1) APPROXIMATION NODALE

Soit un système physique décrit par  $U_{ex}(x)$  dite fonction exacte,  $x$  appartenant à  $\mathcal{R}^n$ . Cette fonction n'est connue qu'en  $m$  points  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathcal{R}^n$ , appelés nœuds.

Nous voulons donc trouver une expression analytique représentant ce phénomène.

Soit alors  $U(x)$  la fonction approchée de  $U_{ex}(x)$ , telle que la fonction erreur  $e(x) = U(x) - U_{ex}(x)$  soit assez faible. Pour cela on choisit des fonctions  $U(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$  dépendant de  $m$  paramètres  $a_i$  ( $a_i$  paramètres généraux d'approximation) et on fait coïncider  $U_{ex}(x)$  avec  $U(x)$  en  $m$  points  $x_1, x_2, \dots, x_m$  ;

Soit  $U_{ex}(x_i) = U(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m)$  pour  $i = 1$  à  $m$ .

La fonction approchée  $U(x)$  est le plus souvent linéaire en  $a_i$ , soit :

$$U(x, a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m a_i p_i(x) \quad (I-1)$$

- Les  $p_i(x)$  sont des fonctions de base connues, linéairement indépendantes des  $a_i$  et linéairement indépendantes entre elles.
- Les paramètres  $a_i$  sont les paramètres généraux de l'approximation. Ils n'ont généralement pas de sens physique. Pour leur donner un sens, on les choisit comme étant les valeurs de la fonction  $U_{ex}$  sur les nœuds  $x_i$  ; c'est à dire :

$$\begin{aligned} U(x_1) &= U_{ex}(x_1) = u_1 \\ &\vdots \\ U(x_m) &= U_{ex}(x_m) = u_m \end{aligned}$$

La fonction  $U(x)$  s'écrit alors :

$$U(x) = \sum_{i=1}^m N_i(x) u_i = \langle N_1(x) N_2(x) \dots N_m(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (I-2)$$

Les  $u_i$  sont les variables nodales ou paramètres nodaux.

Les  $N_i(x)$  sont les fonctions d'interpolation.

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases} \quad (I-3)$$

### I-2-1-2) APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS

L'approximation par éléments finis est une approximation nodale par sous-domaine. Les limites de la méthode d'approximation nodale apparaissent lorsque le nombre de nœuds (et par suite les paramètres  $a_i$ ) devient important ou lorsque le domaine géométrique à

étudier  $V$  devient complexe et aussi lorsque la fonction  $U(x)$  doit satisfaire des conditions aux limites sur les frontières de  $V$ .

Cette méthode consiste à diviser le domaine  $V$  en sous-domaines simples  $V^e$  et à approximer la fonction  $U_{ex}(x)$  par une fonction  $U^e(x)$  différente sur chaque sous-domaine.

#### a) PRINCIPE DE L'APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS

L'approximation par éléments finis nécessite d'entreprendre la suite d'opérations suivantes :

- Faire une partition du domaine  $V$  en sous-domaines  $V^e$ .
- Approximer la fonction  $U_{ex}(x)$  par une fonction  $U^e(x)$  sur chaque sous-domaine  $V^e$ .
- Ces fonctions ainsi définies, doivent satisfaire les conditions de continuité entre les différents sous- domaines.

#### b) DEFINITIONS GENERALES

- Les sous-domaines  $V^e$  sont appelés des éléments.
- Les points où  $U_{ex}(x) = U^e(x)$  sont les nœuds d'interpolation ou points nodaux.
- Les coordonnées de ces nœuds sont les coordonnées nodales.
- Les valeurs  $u_i = U^e(x_i) = U_{ex}(x_i)$  sont les variables nodales.
- Les points qui permettent de définir la géométrie de l'élément  $V^e$  sont les nœuds géométriques.

c) **REGLES GENERALES DE PARTITION DU DOMAINE  $V$  EN ÉLÉMENTS  $V^e$  OU MAILLAGE**

Des conditions strictes doivent être respectées pour faire le maillage d'un domaine  $V$  en éléments  $V^e$  :

- il ne doit y avoir aucun recouvrement de deux éléments.

Exemple :

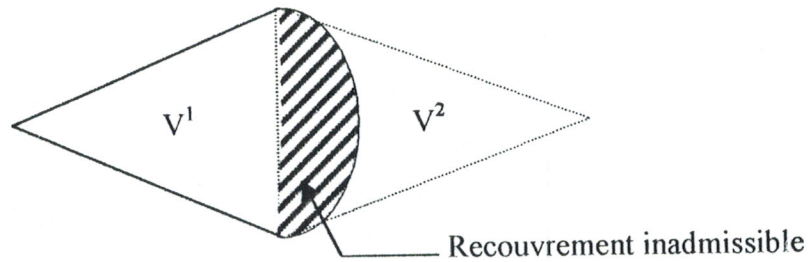


Figure I-1 : recouvrement de deux éléments

- l'ensemble de tous les éléments  $V^e$  doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine  $V$ , en particulier il ne doit pas y avoir de trous entre éléments. Par contre, on peut tolérer une erreur de discrétisation géométrique quand le domaine  $V$  est constitué par des courbes ou des surfaces complexes.

Exemple :

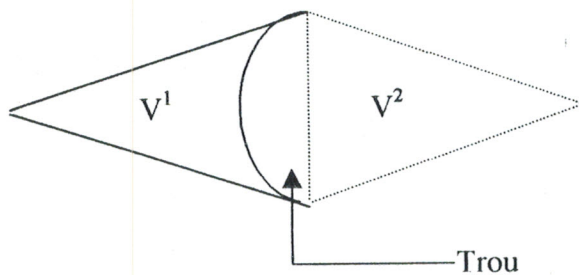


Figure I-2 : trou entre deux éléments

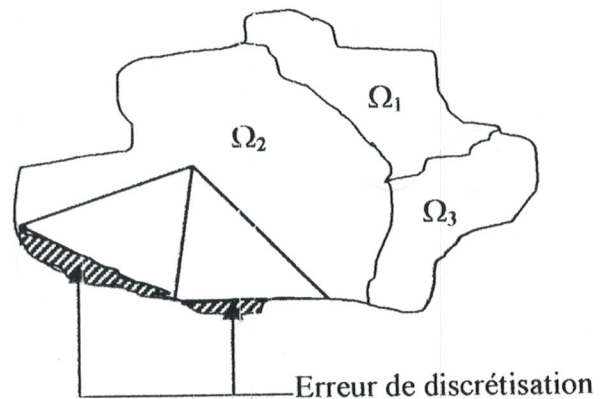


Figure I-3 : erreur de discrétisation géométrique



Cette erreur peut être réduite, soit en diminuant la taille des éléments et en augmentant leur nombre, soit en utilisant des éléments de formes complexes.

Un élément  $V^e$  doit être contenu dans un seul milieu  $\Omega_j$ .

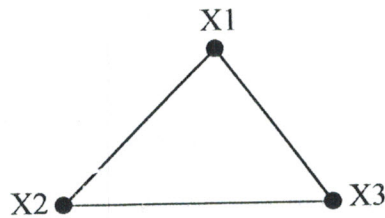
#### d) ÉLÉMENTS DE MAILLAGE

Les formes d'éléments les plus utilisées sont :

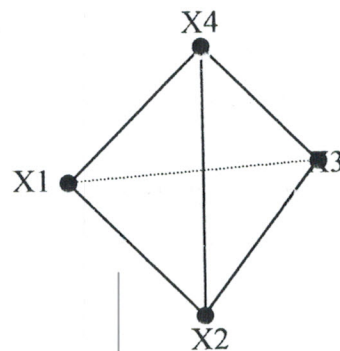
- pour un domaine à une dimension : l'élément linéaire défini par deux nœuds géométriques.



- pour un domaine à deux dimensions : l'élément triangulaire défini par trois nœuds géométriques.



- pour un domaine à trois dimensions : l'élément tétraédrique défini par quatre nœuds.



**Remarque :** Dans notre étude on traitera des domaines à deux dimensions avec un maillage en éléments triangulaires.

## I-2-2) NOTION D'ELEMENT DE REFERENCE

- On appelle 'élément réel', l'élément  $V^e$  du maillage dans le repère des coordonnées associé à l'étude du problème.
- On appelle 'élément de référence', l'élément du maillage dans le repère des coordonnées locales ou barycentriques.

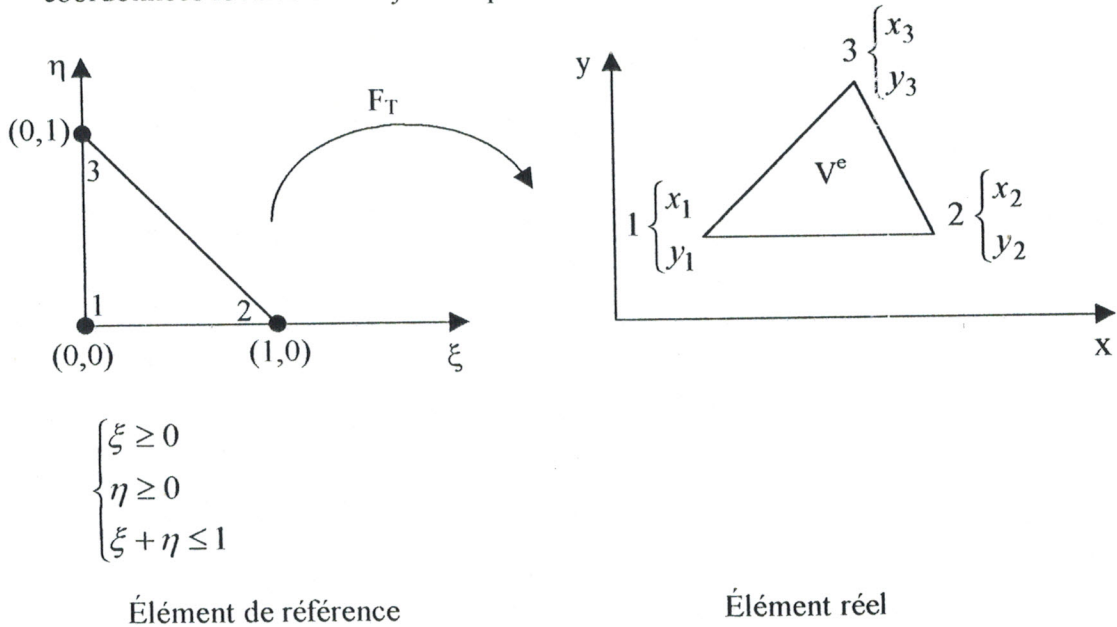


Figure I-4 : Transformation géométrique

Tout point de l'élément de référence est repéré dans ces coordonnées locales  $(\xi, \eta)$  ou dans ces coordonnées barycentriques  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

Les coordonnées barycentriques sont liées aux coordonnées locales par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_2 = \xi \\ \lambda_3 = \eta \end{cases} \quad (\text{I-4})$$

Généralement, le calcul des polynômes d'interpolation  $N(x)$  est difficile à mener sur l'élément réel. On préfère souvent mener le calcul de ces polynômes sur l'élément de référence. On définit ainsi une fonction de transformation géométrique  $F_T$  de l'élément de référence à l'élément réel. Elle transforme tout point de coordonnées barycentriques  $\lambda$ ,  $\lambda \in [0,1]^l$ , ( $l$  étant le nombre de nœuds géométriques au sommet de cet élément), de



l'élément de référence en un point de coordonnées  $X$ , ( $X \in \mathfrak{R}^n$ ,  $n$  étant la dimension de l'espace étudié) de l'élément réel.

$$\text{Soit : } X(\lambda) = \langle \bar{N}(\lambda) \rangle \{X\} \quad (\text{I-5})$$

Où  $\{X\} = {}^t(X_1, X_2, \dots, X_l)$  et les  $X_i$  sont les coordonnées des  $l$  nœuds de l'élément.

De même, en utilisant cette transformation géométrique  $F_T$ , l'approximation  $U(x)$  de l'équation (I-2) devient :

$$U(X(\lambda)) = \langle N_1(\lambda) N_2(\lambda) \dots N_m(\lambda) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix}$$

Ce qui peut également s'écrire :

$$U(X(\lambda)) = U(\lambda) = \langle N(\lambda) \rangle \{u\} \quad (\text{I-6})$$

$\{u\} = {}^t(u_1, u_2, \dots, u_m)$ ;  $m$  étant le nombre de nœuds d'interpolation sur l'élément de référence. Les  $u_i$  sont les valeurs aux nœuds de la fonction  $U$ .

Les fonctions  $\bar{N}(\lambda)$  sont appelées les fonctions de transformation géométrique.

Les fonctions  $N(\lambda)$  sont les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence.

### I-2-3) ELEMENT TRIANGULAIRE DE LAGRANGE

Parmi les éléments bidimensionnels susceptibles d'être choisis pour la partition du domaine, l'élément triangulaire est le plus souvent utilisé. Il permet une approximation de la fonction inconnue  $U_{ex}(x)$ .

L'élément triangulaire noté  $K$  est défini par trois nœuds géométriques appelés aussi sommets numérotés dans le sens direct.

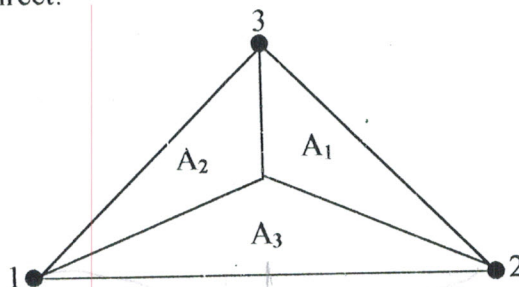


Figure I-5 : Représentation des coordonnées barycentriques d'un triangle

### I-2-3-1) COORDONNEES BARYCENTRIQUES

Le calcul de la fonction  $U(x, y)$  (ou de son interpolée) étant difficile sur un point  $(x, y)$  de l'élément réel ; on introduit alors les coordonnées barycentriques notées  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  définies comme suit :

$$\begin{cases} \lambda_1 = A_1/A \\ \lambda_2 = A_2/A \\ \lambda_3 = A_3/A \end{cases} \quad (\text{I-7})$$

où  $A$  représente l'air du triangle  $K$ .

$A_i$  représente l'air du triangle limité par les points de coordonnées  $(x, y)$ ,  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  et  $(x_{i+2}, y_{i+2})$ ,  $(i+1)$  et  $(i+2)$  sont à calculer modulo 3.

Les coordonnées barycentriques sont liées aux coordonnées cartésiennes par le système suivant :

$$\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases} \quad (\text{I-8})$$

Ce système peut s'écrire également :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = [M_k] \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix}; \quad [M_k] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \det[M_k] &= x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \\ &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \\ &= 2A = \Delta K \end{aligned}$$

Avec  $\Delta K = 2 \times$  l'aire du triangle  $K$

**Remarque :**

La notion des coordonnées barycentriques découle de celle de l'élément de référence. Un élément de référence est un élément simple facilitant le calcul de la fonction approchée  $U(x, y)$ . Il est défini dans un espace de référence et peut être transformé en chaque élément réel du domaine  $V$  à étudier grâce à une transformation géométrique  $F_T$ , traduisant un changement de coordonnées cartésiennes en coordonnées barycentriques.

### I-2-3-2) CALCUL DES FONCTIONS D'INTERPOLATION SUR L'ELEMENT TRIANGULAIRE

Par définition, l'interpolée de la fonction inconnue  $U_{ex}(x, y)$  sur l'élément de maillage  $K$ , notée  $\Pi_k U_{ex}(x, y)$  est définie par :

$$\Pi_k U_{ex}(x, y) = \sum_{i=1}^m N_i(x, y) U_{ex}(x_i, y_i) \quad (I-9)$$

$m$  est le nombre de nœuds d'interpolation sur l'élément  $K$

Les fonctions d'interpolation  $N_i(x, y)$  sont des polynômes de Lagrange de degré  $k$  ( $k \geq 1$ ), linéairement indépendants, constituant une base de l'espace vectoriel  $P_k$  des polynômes de degré  $k$  sur le triangle  $K$ . La dimension de  $P_k$  qui est aussi le nombre de polynômes d'interpolation  $N_i$  sur  $K$  est donnée par :  $d = (k+1)(k+2)/2$ . Il faut donc considérer  $d$  nœuds d'interpolation sur  $K$ .

Chaque nœud est représenté alors par un triplet d'entiers  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  tel que :

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = k \\ 0 \leq \mu_i \leq k \\ \lambda_i = \mu_i / k \end{cases} \quad \text{où } (1 \leq i \leq 3) \quad (I-10)$$

Pour des polynômes de Lagrange de degré 1 ( $k = 1$ ), on aura 3 nœuds d'interpolation confondus avec les sommets du triangle.

Les coordonnées barycentriques des 3 sommets sont présentées sur le tableau suivant :

Numéro du nœud	1	2	3
$\lambda_1$	1	0	0
$\lambda_2$	0	1	0
$\lambda_3$	0	0	1

Ainsi l'interpolée de  $U_{ex}(x, y)$  s'exprime par :

$$\Pi_k U_{ex}(x, y) = \sum_{\mu} N_{\mu}(x, y) U(x_{\mu}, y_{\mu}) \quad (I-11)$$

si  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  désigne un nœud du triangle  $K$  auquel on associe le polynôme de Lagrange  $N_\mu$  alors :

$$N_\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (\text{I-12})$$

Ce polynôme peut être exprimé en fonction des coordonnées barycentriques  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  comme suit :

$$\begin{cases} N_\mu(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \prod_{i=1}^3 Q_{\mu_i}(\lambda_i) \\ Q_{\mu_i}(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_i = 0 \\ \frac{1}{\mu_i!} \prod_{j=0}^{\mu_i-1} (k\lambda_i - j) & \text{si } \mu_i \geq 1 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{I-13})$$

### I-2-3-3) CALCUL DES FONCTIONS D'INTERPOLATION ET DE LEURS DERIVEES PREMIERES

#### a) FONCTIONS D'INTERPOLATION

Les polynômes de Lagrange  $N_\mu$  d'ordre 1, sont calculés sur les trois nœuds d'interpolation numérotés successivement 1, 2 et 3 de l'élément  $K$ . On obtient les résultats suivants :

Numéro du nœud	1	2	3
$N_\mu(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$

#### b) DERIVEES PREMIERES DU POLYNOME DE LAGRANGE

Elles sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial x} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \lambda_m} \cdot \frac{\partial \lambda_m}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \lambda_m} \cdot \frac{\partial \lambda_m}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{I-14})$$

$$\text{et } \begin{cases} \frac{\partial \lambda_m}{\partial x} = (y_{m+1} - y_{m+2}) / \Delta k \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial y} = (x_{m+2} - x_{m+1}) / \Delta k \end{cases}$$

avec  $m = 1, 2$  ou  $3$ ,  $(m+1)$  et  $(m+2)$  sont à calculer modulo 3.

$\Delta k$  est égal à deux fois l'aire de l'élément triangulaire  $K$ .

### I-3/ APPROXIMATION PAR DES POLYNÔMES DE NEDELEC [2]

Les degrés de liberté de l'approximation par élément mixte utilisés ont été définis par J-C. NEDELEC, et permettent d'assurer la continuité de la composante tangentielle des fonctions vectorielles au passage d'un élément à un autre.

Chaque élément fini mixte est défini par le triplet  $(K, P, A)$  où :

$K$  : un élément triangulaire.

$P$  : un espace vectoriel de polynômes de degrés  $r = 1$ .

$A$  : L'ensemble des degrés de liberté défini sur  $K$ .

Pour  $r = 1$ , on définit  $d = (r + 1)(r + 2) = 6$  degrés de liberté sur  $K$ .



#### I-3-1) CALCUL DES FONCTIONS DE BASE DE L'ELEMENT TRIANGULAIRE MIXTE

Comme pour l'élément de LAGRANGE, il est intéressant de calculer les fonctions de base de l'approximation sur un élément de référence que sur un élément réel.

Les fonctions de base relatives à l'élément réel, s'obtiennent en explicitant les coordonnées barycentriques en fonction des coordonnées des sommets de  $K$  grâce à une transformation géométrique  $F_T$ .

Une approximation par l'élément mixte de degré  $r = 1$  nécessite deux degrés de liberté par arête. Nous sommes donc amenés à déterminer deux fonctions de base sur chacune d'elles.

##### a) Degré de liberté

Les degrés de liberté s'expriment sur une arête  $a_l$  par :

$$a_{a_l, i}(\vec{p}) = \int_{a_l} (\vec{P} \cdot \vec{\tau}) \psi_j da_l \quad (I-15)$$

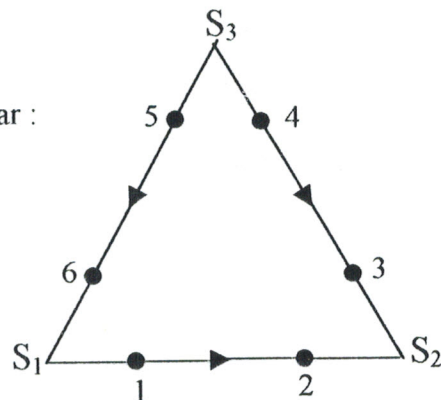


Figure I-6 : 6 degrés de liberté sur un triangle

Où :

$a_l$  : désigne le numéro de l'arête ( $1 \leq l \leq 3$ ).

$j$  : numéro du degré de liberté sur l'arête ( $1 \leq j \leq 2$ ).

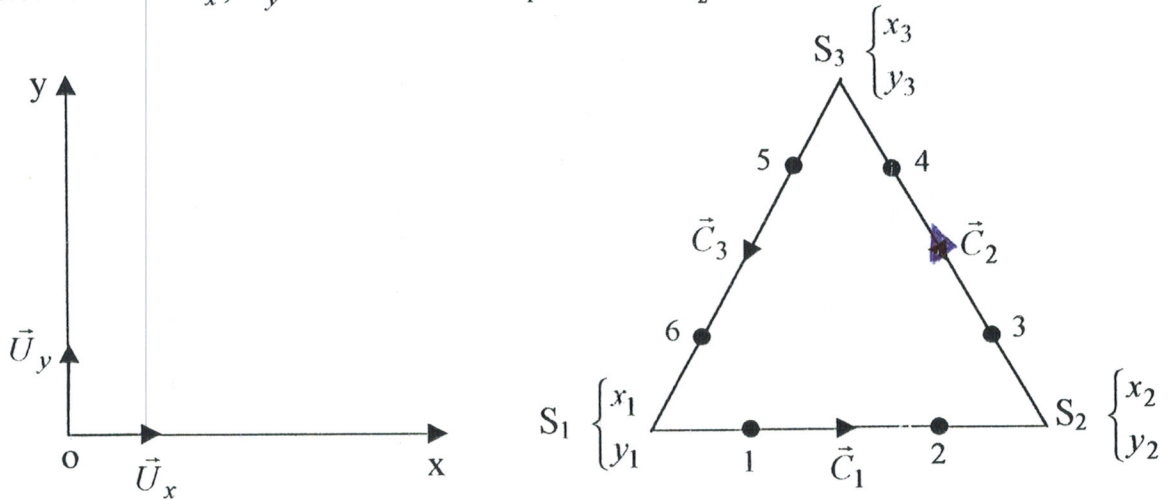
$$\vec{P} = \sum_{i=1}^3 \vec{P}_i \cdot N_i : \text{approximation du type LAGRANGE.}$$

$\psi_j$  est une fonction de base pour une approximation de type LAGRANGE.

$\vec{\tau}$  est un vecteur unitaire porté par l'arête  $a_l$ .

### b) Élément triangulaire mixte

Soit un triangle de sommets  $S_1, S_2$  et  $S_3$  placé dans un repère orthonormé  $(o, x, y)$  de vecteur unitaire  $\vec{U}_x, \vec{U}_y$  et la normale à ce plan notée  $\vec{U}_z$ .



Les degrés de liberté sont numérotés dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, comme l'indique la figure ci-dessus.

Les vecteurs  $\vec{C}_l$  portés par les arrêtes  $a_l$  sont respectivement :

$$\vec{C}_1 = \overrightarrow{S_1 S_2} \longrightarrow \text{arrête 1}$$

$$\vec{C}_2 = \overrightarrow{S_2 S_3} \longrightarrow \text{arrête 2}$$

$$\vec{C}_3 = \overrightarrow{S_3 S_1} \longrightarrow \text{arrête 3}$$

### c) Fonction de base

Soient

$\delta_l$  : est un signe affecté à l'arrête  $a_l$  défini comme suit :

$$\delta_l = \begin{cases} +1 & \text{si le du premier sommet de l'arrête } \langle \text{numéro du second} \\ -1 & \text{si le du premier sommet de l'arrête } \rangle \text{ numéro du second} \end{cases}$$

- $\lambda_i, i \in \{1, 2, 3\}$  représente les coordonnées barycentriques d'un point du triangle  $K$  obtenus grâce au système.
- $\Delta K = \pm 2 \times \text{l'aire du triangle } K$ . (I-16)

Compte tenu de ces relations, les fonctions de base  $\vec{N}_{a_l, i}$  associées l'arrête  $a_l$ , numérotées en respectant l'orientation des arrêtes, s'expriment par les relations suivantes :

$$\vec{N}_{a1,1} = 2\delta_l \frac{\|\vec{C}_l\|}{\Delta K} \left[ 2(\vec{U}_z \wedge \vec{C}_{l+2}) \lambda_l + 2(\vec{U}_z \wedge \vec{C}_{l+1}) \lambda_{l+1} \right] \quad (I-17)$$

$$\vec{N}_{a1,2} = -2\delta_l \frac{\|\vec{C}_l\|}{\Delta K} \left[ 2(\vec{U}_z \wedge \vec{C}_{l+2}) \lambda_l + 2(\vec{U}_z \wedge \vec{C}_{l+1}) \lambda_{l+1} \right] \quad (I-18)$$

**Remarque :**

La fonction de base  $\vec{N}_{a1,i}$  est un vecteur à deux composantes l'une suivant l'axe (ox) et l'autre suivant l'axe (oy).

**I-4/ METHODOLOGIE POUR ÉLÉMENTS FINIS [3]**

La méthodologie générale à suivre pour traiter tout problème par la méthode des éléments finis consiste à exécuter chacun des points suivants :

- Mettre en équation le problème à résoudre.
- Diviser le domaine d'étude en milieux homogènes  $V_i$ .
- Mailler le domaine à étudier en éléments triangulaires.
- Choisir les polynômes d'interpolation sur le triangle.
- Numérotter globalement les nœuds d'interpolation.
- Numérotter globalement les éléments.
- Discrétiser les équations différentielles à résoudre sur chaque élément du maillage et calculer la matrice élémentaire qui en résulte.
- Assembler toutes les matrices élémentaires en une matrice globale.
- Introduire les conditions aux limites à imposer sur les frontières du domaine d'étude.
- Résoudre numériquement le système final de la forme :

$$([k] - \lambda[M])\{u\} = 0 \quad \text{pour les problèmes à valeurs et vecteurs propres.}$$

$$[M] = \sum [M^e] \quad \text{sur tous les éléments}$$

$$[k] = \sum [k^e] \quad \text{sur tous les éléments}$$

$[k]$  et  $[M]$  sont les matrices globales ou assemblées.

$[k^e]$  et  $[M^e]$  sont les matrices élémentaires.

$\lambda$  : valeur propre et  $\{u\}$  : vecteur propre.

## I-5/ DESCRIPTION DU LOGICIEL

Toutes les étapes citées dans la méthodologie pour élément finis à savoir : maillage, discrétisation, la prise en compte des conditions aux limites, l'assemblage des matrices élémentaires et la résolution, sont traduites par un logiciel général ' QFEM ' écrit en langage " FORTRAN 90 " .

Le logiciel permet de remplir deux fonctions essentielles. L'une est consacrée à l'analyse électromagnétique des structures guidantes métalliques dans le but de calculer la constante de propagation, les fréquences de coupure et la distribution du champ électromagnétique des modes qui peuvent se propager dans le guide d'ondes. La deuxième fonction est destinée à la caractérisation de la diffraction dans les structures diélectriques ouvertes en utilisant les conditions aux limites d'absorption en vue de caractériser le champ rayonné (ou diffracté).

Pour accomplir ces deux fonctions importantes pour l'analyse, on utilise la méthode des éléments finis ( MEF) qui est une méthode numérique adaptée à la résolution des équations aux dérivées partielles telle que l'équation de propagation .

La procédure générale de la résolution par la méthode MEF est composée de cinq étapes essentielles. Ces étapes peuvent être résumées comme suit :

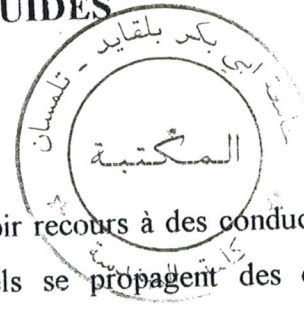
- 1- Préprocessing : Elle consiste à subdiviser la structure à étudier en éléments finis ( généralement des triangles qui sont utilisables à cause de la bonne convergence vers la solution exacte) ; d'où le maillage.
- 2- Construction des matrices élémentaires : c'est la détermination de la fonction d'interpolation sur chaque élément.
- 3- Assemblage des matrices élémentaires : c'est la sommation de la contribution de chaque élément afin d'obtenir un système global.
- 4- Résolution du système d'équations linéaires obtenu .
- 5- Postprocessing : Il concerne la visualisation et le tracé des diagrammes de dispersion des modes et la cartographie de leurs champ électromagnétique.



## **CHAPITRE II**

# **CARACTERISATION DES GUIDES DIELECTRIQUES BLINDES PAR LA MEF**

## II-A/ PARAMETRES CARACTERISTIQUES DES GUIDES DIELECTRIQUES HOMOGENES BLINDES



### II-A-1/ INTRODUCTION

Si l'on veut canaliser une onde hyperfréquence, on doit avoir recours à des conducteurs creux (vides) ou remplis de diélectriques, à l'intérieur desquels se propagent des ondes électromagnétiques par réflexion sur les parois internes.

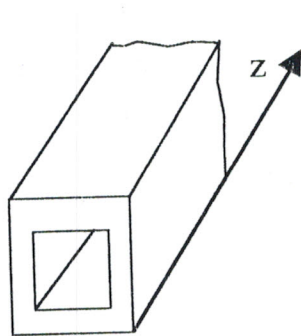
Un ensemble de conducteurs métalliques dont la section transversale reste invariante quand on effectue une translation le long de l'un de ses axes, forme un guide d'ondes.

Les guides diélectriques blindés sont des composants hyperfréquences nécessaires pour la réalisation de certains dispositifs micro-ondes. Ils sont utilisés comme éléments de connexion entre étages de circuits, ou comme des éléments constitutifs de circuits plus ou moins complexes. Leur application nécessite la connaissance de leur comportement électromagnétique associé à chaque mode susceptible d'être excité. Ainsi chaque mode est caractérisé par trois paramètres principaux :

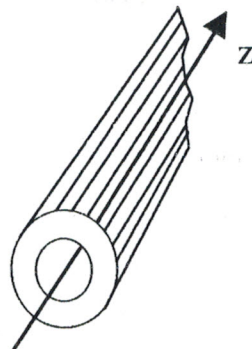
- La constante de propagation  $\gamma$ ,
- La fréquence de coupure  $f_c$ ,
- La distribution de son champ électromagnétique.

Lorsque la structure du guide contient plusieurs diélectriques (milieu inhomogène), l'étude théorique devient complexe et nous proposons l'exploitation de la MEF pour analyser ces guides d'ondes.

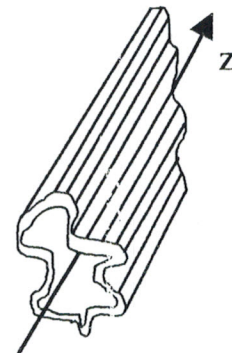
Les schémas de la figure suivante en donnent quelques exemples de guides d'ondes.



(a) : Guide rectangulaire



(b) : Guide cylindrique



(c) : guide de forme quelconque

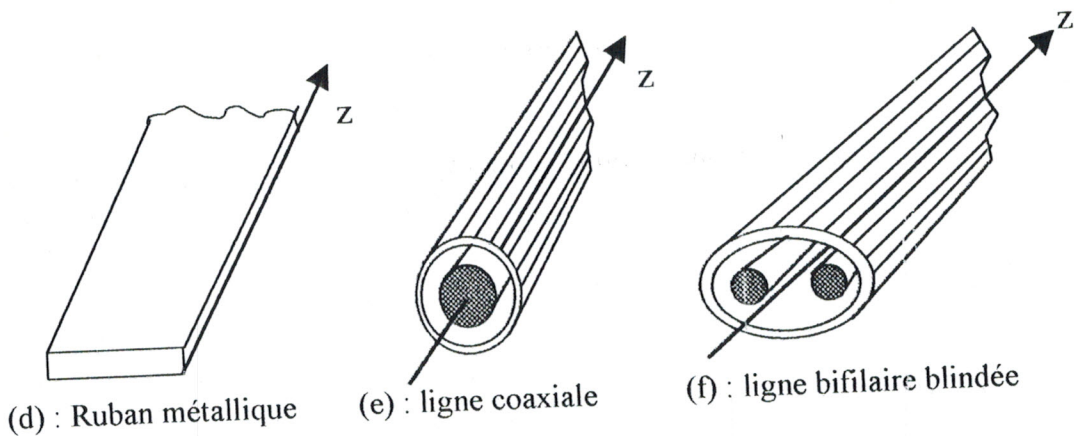


Figure II-1 : Divers types de guides d'ondes

### II-A-2/ DEFINITION : GUIDE D'ONDES

La propagation dans un guide d'ondes est généralement assurée par des réflexions multiples, soit sur des parois en métal (guides d'ondes métalliques : tuyau en métal), soit sur des surfaces séparant des milieux diélectriques de propriétés différentes : guide diélectrique, fibre optique.

### II-A-3/ CLASSIFICATION DES LIGNES ET GUIDES D'ONDES [4]

Il existe un grand nombre de structures permettant la transmission de signaux électriques. Ces structures peuvent être :

- ouvertes (possibilité de rayonnement) ou fermées (champs entièrement contenus à l'intérieur d'une enveloppe conductrice) ;
- homogènes (un seul milieu de propagation ne variant pas dans le plan transverse) ou inhomogènes (plusieurs milieux de nature différente ou un milieu variant de façon continue dans le plan transverse) ;
- démunies de tout conducteur métallique ou dotée d'un ou plusieurs conducteurs.

Ces trois critères délimitent 10 catégories, représentées dans le tableau suivant :

Type de la structure		pas de conducteur	un conducteur	deux conducteurs
Ouvverte	Homogène	Ondes dans l'espace libre	Ligne unifilaire	Ligne symétrique à ruban Ligne bifilaire
	Inhomogène	Guides diélectriques Fibres optiques Ondes dans un milieu inhomogène	Ligne de Goubau	Ligne microruban Ligne à fente Ligne coplanaire Ligne bifilaire isolée
Fermée	Homogène	Impossible	Guides d'ondes métalliques	Ligne coaxiale
	Inhomogène	Impossible	Guides d'ondes métalliques chargés	Ligne coaxiale chargée

Tableau II-1 : Classification des lignes et des guides d'ondes

Les sections droites des lignes et guides d'ondes sont représentées schématiquement sur la figure (II-2).

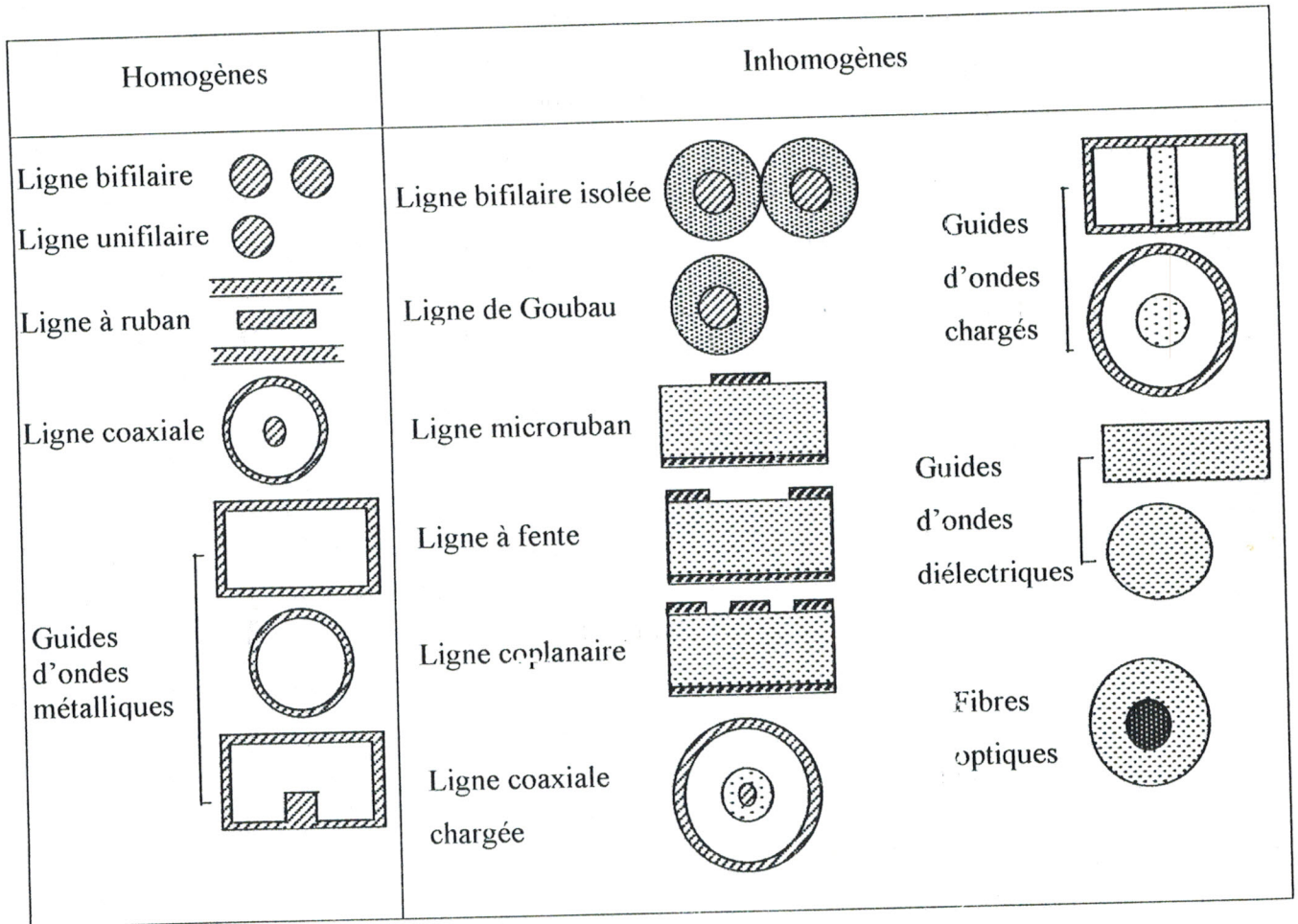


Figure II-2 : Sections des principales lignes de transmission et guides d'ondes

### II-A-4/ EQUATIONS DE PROPAGATION DES ONDES GUIDEES

#### II-A-4-1) PRINCIPES GENERAUX

Dans un milieu diélectrique de permittivité  $\epsilon$ , de perméabilité  $\mu$  et de conductivité  $\sigma = 0$ , les équations de Maxwell s'écrivent, en régime sinusoïdal [5] :

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (\text{équation de Maxwell - Faraday}) \quad (\text{II-1})$$

$$\vec{\text{rot}}\vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \quad (\text{équation de Maxwell - Ampère}) \quad (\text{II-2})$$

$$\text{div}\vec{E} = 0 \text{ et } \text{div}\vec{H} = 0 \quad (\text{équations complémentaires}) \quad (\text{II-3})$$

En partant des équations de Maxwell, on démontre [6] que l'équation de propagation des champs est de la forme :

$$\Delta(\vec{E} \text{ ou } \vec{H}) + \omega^2 \epsilon\mu(\vec{E} \text{ ou } \vec{H}) = 0 \quad (\text{II-4})$$

Soit un système de coordonnées curvilignes orthonormées désignées par  $q_1, q_2, q_3$ . La solution de cette équation de propagation, pour une onde se propageant le long d'un guide dirigé selon la coordonnée  $q_3$ , est de la forme :

$$\vec{e}(q_1, q_2, q_3, t) = \vec{E}(q_1, q_2) e^{-\gamma q_3} e^{j\omega t} \quad (\text{II-5})$$

$$\vec{h}(q_1, q_2, q_3, t) = \vec{H}(q_1, q_2) e^{-\gamma q_3} e^{j\omega t} \quad (\text{II-6})$$

$\vec{e}$  et  $\vec{h}$  sont les valeurs instantanées complexes des champs ;

$\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont leurs amplitudes complexes dans un plan transversal, perpendiculaire à l'axe longitudinal de la propagation.

$\gamma$  est le paramètre caractéristique de la propagation guidée.

On choisira le système de coordonnées le mieux adapté à la géométrie du cas considéré.

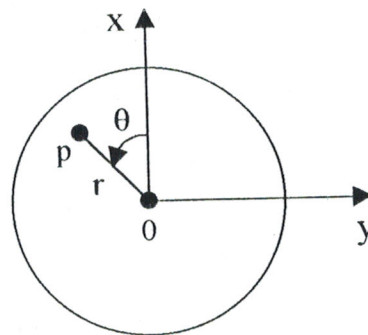


Figure II-3 : Coordonnées cartésiennes et cylindriques  
(L'axe Oz est perpendiculaire au plan de la figure)

Les deux systèmes les plus utilisés (Figure II-3) sont :

- Les coordonnées cartésiennes où :

$$\begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = y \\ q_3 = z \end{cases}$$

- Les coordonnées cylindriques où :

$$\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \\ q_3 = z \end{cases}$$



L'étude de la propagation guidée consiste à déterminer :

- a) Le paramètre de la propagation  $\gamma$  qui, selon les cas, pourra être :

- imaginaire si la propagation est sans pertes, soit  $\gamma = j\beta$
- réel s'il n'y a pas propagation, soit  $\gamma = \alpha$
- complexe si la propagation est avec pertes, soit  $\gamma = \alpha + j\beta$

où  $\alpha$  : constante d'atténuation.

$\beta$  : constante de propagation.

- b) Les deux fonctions vectorielles  $\vec{E}(q_1, q_2)$  et  $\vec{H}(q_1, q_2)$  qui mettent en jeu les six composantes scalaires des champs :

- Les composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$
- Les composantes transversales  $(E_x, E_y)$  et  $(H_x, H_y)$  décrites dans le système de coordonnées cartésiennes.

En fait, il suffira de déterminer les expressions des deux composantes longitudinales, compatibles avec les conditions aux limites, pour que le problème soit résolu.

En effet, nous allons montrer que l'on peut déduire toutes les composantes transversales des deux composantes longitudinales grâce aux équations de Maxwell (II-1) et (II-2) ; c'est pourquoi  $E_z$  et  $H_z$  sont appelées « fonctions génératrices ».

Nous ferons cette démonstration en utilisant d'abord les coordonnées cartésiennes et puis les coordonnées cylindriques.

**II-A-4-2) DETERMINATION DES COMPOSANTES TRANSVERSALES EN x ET y**

En coordonnées cartésiennes, en remarquant que  $\frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$  et en sous-entendant, les

facteurs  $e^{-\gamma z}$  et  $e^{j\omega t}$ , les équations de Maxwell s'écrivent, sous forme différentielle :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega\mu H_x \quad (II-7)$$

$$-\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \quad (II-8)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (II-9)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\varepsilon E_x \quad (II-10)$$

$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y \quad (II-11)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z \quad (II-12)$$

L'élimination de  $H_y$  entre (II-8) et (II-10) et de  $H_x$  entre (II-7) et (II-11) permet d'obtenir  $E_x$  et  $E_y$  en fonction de  $E_z$  et  $H_z$ . De même, l'élimination de  $E_y$  entre (II-7) et (II-11) et de  $E_x$  entre (II-8) et (II-10) permet d'obtenir  $H_x$  et  $H_y$  en fonction de  $E_z$  et  $H_z$ . En posant :

$$\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu = k_c^2 \quad (II-13)$$

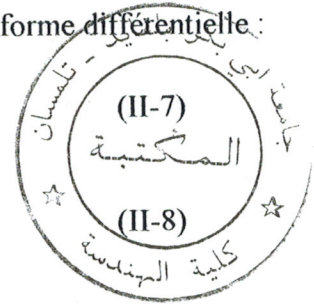
Nous obtenons :

$$k_c^2 E_x = -\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (II-14)$$

$$k_c^2 E_y = -\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (II-15)$$

$$k_c^2 H_x = j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (II-16)$$

$$k_c^2 H_y = -j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (II-17)$$





Remarquons tout de suite que les composantes transversales ne peuvent être calculées en fonction des composantes longitudinales que si  $k_c^2 \neq 0$ .

### II-A-4-3) DETERMINATION DES COMPOSANTES TRANSVERSALES EN $r$ ET $\theta$

Dans un guide d'ondes présentant une symétrie révolution, il est judicieux d'utiliser les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

Comme les champs doivent se reproduire identiques à eux-mêmes chaque fois que  $\theta$  augmente de  $2\pi$ , nous pouvons supposer qu'ils dépendent de  $\theta$  par une fonction  $e^{-jm\theta}$  où  $m$  est un entier ; donc  $\frac{\partial}{\partial \theta} = -jm$ .

Nous rappelons, par ailleurs que les champs varient selon  $z$  en  $e^{-\gamma z}$  ; donc  $\frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$ .

Ecrivons maintenant les composantes des équations de Maxwell (II-1) et (II-2) compte tenu de ces résultats et en sous-entendant de plus le terme  $(e^{-\gamma z} e^{j\omega t})$ .

$$-\frac{jm}{r} H_z + \gamma H_\theta = j\omega \epsilon E_r \quad (II-18)$$

$$-\gamma H_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} = j\omega \epsilon E_\theta \quad (II-19)$$

$$\frac{1}{r} H_\theta + \frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \frac{jm}{r} H_r = j\omega \epsilon E_z \quad (II-20)$$

$$-\frac{jm}{r} E_z + \gamma E_\theta = -j\omega \mu H_r \quad (II-21)$$

$$-\gamma E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega \mu H_\theta \quad (II-22)$$

$$\frac{1}{r} E_\theta + \frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \frac{jm}{r} E_r = -j\omega \mu H_z \quad (II-23)$$

L'élimination de  $H_\theta$  entre (II-18) et (II-22) et de  $H_r$  entre (II-19) et (II-21) permet d'obtenir  $E_r$  et  $E_\theta$  en fonction de  $E_z$  et  $H_z$ . De même, l'élimination de  $E_\theta$  entre (II-19) et (II-21) et de  $E_r$  entre (II-18) et (II-22) permet d'obtenir  $H_r$  et  $H_\theta$  en fonction de  $E_z$  et  $H_z$ .

En posant :  $\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu = k_c^2$ , il vient :

$$k_c^2 E_r = -\frac{\omega \mu m}{r} H_z - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (\text{II-24})$$

$$k_c^2 E_\theta = j \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} + j \frac{\gamma m}{r} E_z \quad (\text{II-25})$$

$$k_c^2 H_r = -\gamma \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{\omega \epsilon m}{r} E_z \quad (\text{II-26})$$

$$k_c^2 H_\theta = j \frac{\gamma m}{r} H_z - j \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (\text{II-27})$$

#### II-A-4-4) CAS PARTICULIER DES ONDES T.E.M

D'après les relations (II-14) à (II-17) ou (II-24) à (II-27), nous voyons que les composantes transversales ne peuvent être calculées en fonction des composantes longitudinales que si  $k_c^2 \neq 0$ .

Par contre, si  $k_c^2 = 0$ , ces relations ne peuvent être satisfaites que si  $E_z$  et  $H_z$  sont nulles. Cela se produit dans des guides tels que la ligne bifilaire ou coaxiale où les champs sont purement transversaux ; ce qui correspond à des modes de propagation du type T.E.M (Transverse Electric et Magnétique).

C'est d'ailleurs en raison de cette propriété que l'étude de ces types de lignes a pu être effectuée à partir du concept de tension et de courant pour lesquels on peut alors trouver en H.F une signification physique.

Notons enfin que puisque  $k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu = 0$ , la vitesse de propagation sur une ligne T.E.M

sans perte ( $\alpha=0$ ) :  $c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$  est la même qu'en espace libre.

#### II-A-4-5) EQUATION DE PROPAGATION DES COMPOANTES LONGITUDINALES

Considérons la relation (II-4). Le laplacien peut être mis sous la forme :

$\Delta = \Delta_t + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Comme  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \gamma^2$  et  $k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu$ , nous pouvons écrire les équations de

propagation des composantes longitudinales :

$$\Delta_t E_z + k_c^2 E_z = 0 \quad (\text{II-28})$$

$$\Delta_t H_z + k_c^2 H_z = 0 \quad (\text{II-29})$$

Ces équations nous permettent, compte tenu des conditions aux limites imposées, de calculer  $E_z$  et  $H_z$  en tout point du diélectrique du guide.

### II-A-5) LES DIFFERENTS TYPES D'ONDES DE PROPAGATION GUIDEE

L'étude que nous venons de faire nous montre que le régime le plus général pouvant exister dans un guide d'ondes est formé des six composantes des champs  $(E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$ .

Ce régime peut toujours être considéré comme résultant de la superposition de deux ondes :

- une onde pour laquelle  $E_z = 0$ , dite onde Transverse Electrique TE (ou onde H).
- une onde pour laquelle  $H_z = 0$ , dite onde Transverse Magnétique TM (ou onde E).

Pour les ondes TE, la fonction génératrice  $H_z$  dont découle les quatre autres composantes est déterminée à partir de :  $\Delta_t H_z + k_c^2 H_z = 0$  en tenant compte de la condition imposée à  $H_z$  sur les parois métalliques du guide (les parois du guide étant parallèle à l'axe des  $z$ ) :  $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$  (condition de Neumann).

Pour les ondes TM, la fonction génératrice  $E_z$  est déterminée à partir de :  $\Delta_t E_z + k_c^2 E_z = 0$  en tenant compte de la condition imposée à  $E_z$  sur les parois du guide (les parois du guide étant parallèle à l'axe des  $z$ ) :  $E_z = 0$  (condition de Dirichlet).

On démontre que ces équations n'admettent de solutions, compte tenu des conditions aux limites imposées, que pour une suite de valeurs discrètes de  $k_c$ , notée  $k_{cp}$ , appelées valeurs propres.

Les ondes correspondantes à ces valeurs de  $k_c$  sont appelées « modes de propagation ».

D'après la formule (II-13), le paramètre de propagation  $\gamma$  est donnée par :

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \epsilon \mu} \quad (\text{II-30})$$

Dans cette relation  $\omega^2 \epsilon \mu$  est positive tandis que  $k_c^2$  est une constante qui peut être positive ou

négative. Nous allons donc distinguer les deux cas.

**II-A-5-1) ONDES TE OU TM POUR  $k_c^2 > 0$**

Ce cas se produit pour des guides dits à section « simplement connexes » constitués par un conducteur creux à l'intérieur duquel il n'y a que du diélectrique.

a) si  $k_c^2 > \omega^2 \epsilon \mu$ , c'est à dire si  $f < k_c / 2\pi \sqrt{\epsilon \mu}$ ,  $\gamma^2$  est positif ( d'après (II-30)), donc  $\gamma = \alpha$  est réel.

Par conséquent :

- en onde TM :  $e_z = E_z(x, y, \theta) e^{-\alpha z} e^{j\omega t}$  (II-31)

- en onde TE :  $h_z = H_z(x, y, \theta) e^{-\alpha z} e^{j\omega t}$  (II-32)

C'est une onde dont l'amplitude diminue exponentiellement et pour laquelle on ne peut mettre en évidence ni périodicité dans l'espace ni vitesse de propagation puisque le terme de phase ne dépend que du temps. Une telle onde est appelée onde évanescente. Au sens classique que l'on donne à la propagation, on peut dire qu'il n'y a pas de propagation.

b) si  $k_c^2 < \omega^2 \epsilon \mu$ , c'est à dire si  $f > k_c / 2\pi \sqrt{\epsilon \mu}$ ,  $\gamma^2$  est négatif, donc  $\gamma = j\beta$  est imaginaire et par conséquent :

- en onde TM :  $e_z = E_z(x, y, \theta) e^{j(\omega t - \beta z)}$  (II-33)

- en onde TE :  $h_z = H_z(x, y, \theta) e^{j(\omega t - \beta z)}$  (II-34)

Ces expressions caractérisent une onde qui se propage sans affaiblissement le long de l'axe des z. Si, de plus, on tient compte des pertes dans le diélectrique et dans les parois, la propagation se fait avec un affaiblissement.

Un tel phénomène est représenté par un paramètre de propagation complexe  $\gamma = \alpha + j\beta$  et les expressions des champs doivent être multipliées par un terme en  $e^{-\alpha z}$ .

Où  $\alpha$  : constante d'atténuation selon oz.

$\beta$  : constante de propagation longitudinale.

**II-A-5-2) ONDES TE OU TM POUR  $K_C^2 < 0$**

Ce cas se produit uniquement pour des guides à structure périodique. Pour la plupart de ces structures, la périodicité résulte d'une simple translation, comme cela est représenté schématiquement sur le guide d'ondes chargé de la figure suivante :

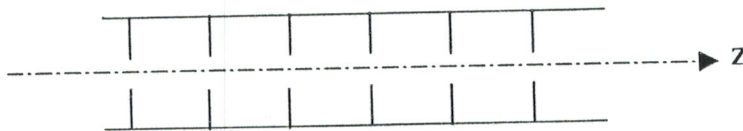


Figure II-4 : Représentation schématique d'un guide d'ondes chargé

Pour de tels guides,  $k_c^2$  est négative ; comme  $\omega^2 \epsilon \mu$  est positive, il en résulte que  $\gamma^2 = k_c^2 - \omega^2 \epsilon \mu$  est négative et donc que  $\gamma = j\beta$ . Il y a donc une propagation sans affaiblissement qui est régie par les mêmes relations (II-33) et (II-34).

**II-A-5-3) MODES HYBRIDES**

Lorsque la structure comporte au moins deux milieux homogènes distincts et les composantes longitudinales du champ électrique ( $E_z$ ) et magnétique ( $H_z$ ) ne sont pas nulles, les modes de propagation sont des modes hybrides ( $E_z \neq 0, H_z \neq 0$ ).

Remarque :

Dans un guide d'ondes rempli d'un milieu homogène, toutes les solutions possibles peuvent être décomposées en modes TE et TM indépendants. Il n'existe pas dans ce cas de mode hybride.

Donc, on peut conclure qu'il existe quatre catégories de modes, présentées dans le tableau (II-2).

$E_z$	$H_z$	signification	symbole	autre dénomination
= 0	= 0	Transverse ElectroMagnétique	TEM	
= 0	≠ 0	Transverse Electric	TE	H
≠ 0	= 0	Transverse Magnétique	TM	E
≠ 0	≠ 0	Hybride	HEM	EH ou HE

Tableau II-2 : Les quatre types de modes de propagation

II-A-6/ DEFINITIONS

II-A-6-1) DIAGRAMME DE DISPERSION

Dans un guide d'ondes sans pertes, l'exposant de propagation prend la forme

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{k_c^2 - (\omega/c)^2}$$

où  $k$  : nombre d'onde dans le milieu  $\epsilon, \mu$ .

$k_c$  : nombre d'onde transverse.

$c$  : vitesse de propagation.

Le diagramme représentant  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de la fréquence est appelé diagramme de dispersion. Un exemple de diagramme de dispersion d'un guide d'ondes rectangulaire particulier est présenté sur la figure (II-5).

Il faut noter qu'il existe une infinité de courbes, correspondant à toutes les solutions possibles pour  $k_c$ .

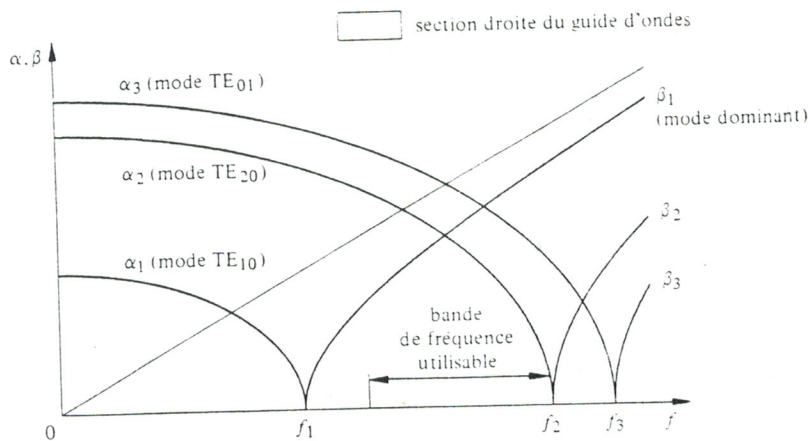


Figure II-5: Diagramme de dispersion d'un guide d'ondes rectangulaire ayant un rapport largeur sur hauteur de 2,25



### II-A-6-2) FREQUENCE ET LONGUEUR D'ONDES DE COUPURE

Pour chaque mode, il existe une fréquence particulière pour laquelle l'exposant de propagation s'annule ( $\gamma = 0$ ), appelée fréquence de coupure  $f_c$ . Sa valeur est donnée par :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{k_c \cdot c}{2\pi} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\lambda_c} \quad (\text{II-36})$$

$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$  est la longueur d'onde de coupure.

### II-A-6-3) CHAMPS DANS LE GUIDE A LA FREQUENCE DE COUPURE

Lorsque  $\gamma$  est nul (à la coupure  $f = f_c$ ), on constate que l'un des deux champs transverses est nul.

Pour un mode TE, il s'agit du champ magnétique transverse  $\vec{H}_t$  ((II-16) et (II-17)), tandis que c'est le champ électrique transverse  $\vec{E}_t$  qui disparaît à la coupure d'un mode TM ((II-14) et (II-15)). Il en résulte que, dans les deux cas, la puissance moyenne transmise ou transportée dans le guide est nulle.

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{2} \Re \iint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{u}_z dS \\ &= \frac{1}{2} \Re \iint_S (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) \cdot \vec{u}_z dS = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-37})$$

$$\text{car } \vec{E}_t = 0 \text{ ou } \vec{H}_t = 0$$

Donc le guide ne permet pas de transmettre un signal à la coupure.

### II-A-6-4) MODE EN DESSOUS DE LA COUPURE : MODE EVANESCENT

Quand, pour un mode donné,  $f < f_c$  ce qui implique  $k < k_c$ , le terme sous la racine de (II-35) est positif et l'exposant de propagation est alors purement réel ( $\gamma = \alpha$ ). On a dans ce cas un affaiblissement de l'onde, sans propagation.

$$\alpha = \sqrt{k_c^2 - (\omega/c)^2} \quad (\text{II-38})$$

Un mode en dessous de la coupure est appelé mode évanescent.

**II-A-6-5) MODE AU DESSUS DE LA COUPURE**

Quand, pour un mode donné,  $f > f_c$  c'est à dire  $k > k_c$ , le terme sous la racine de (II-35) est négatif, de sorte que l'exposant de propagation est purement imaginaire ( $\gamma = j\beta$ ) : le signal peut alors se propager sans affaiblissement dans le guide.

$$j\beta = \sqrt{k_c^2 - k^2} = j\sqrt{k^2 - k_c^2} \tag{II-39}$$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{(\omega/c)^2 - k_c^2}$$

**II-A-6-6) LONGUEUR D'ONDE DE GUIDE**

Une onde qui se propage dans un guide d'ondes présente une périodicité dans le sens longitudinal (ici l'axe oz), dont la période est la longueur d'onde de guide  $\lambda_g$ .

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (k_c/k)^2}} \tag{II-40}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

où  $\lambda = 2\pi/k$  est la longueur d'onde dans le milieu  $\epsilon, \mu$ .

Remarque : La longueur d'onde de guide  $\lambda_g$  est toujours plus grande que la longueur d'onde  $\lambda$  dans le milieu.

**II-A-6-7) VITESSES DE PHASE ET DE GROUPE**

Les vitesses de propagation, respectivement de phase et de groupe, sont définies par les relations suivantes :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{(\omega/c)^2 - k_c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (k_c \cdot c/\omega)^2}} \tag{II-41}$$

$$v_g = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{(\omega/c)^2 - k_c^2}}{\omega/c^2} = c \cdot \sqrt{1 - (k_c \cdot c/\omega)^2} \tag{II-42}$$

On remarque que  $v_\varphi \cdot v_g = c^2$ . Les deux vitesses sont des fonctions de la fréquence, le guide



d'ondes est dispersif, c'est à dire que des signaux de fréquences différentes se propagent à des vitesses différentes.

### II-A-6-8) IMPEDANCE D'ONDE

Pour un mode au dessus de la coupure, l'impédance d'onde est réelle, correspondant à un transfert de puissance active.

S'il s'agit d'un mode TE, elle est donnée par :

$$Z_{TE} = \frac{|\vec{E}_t|}{|\vec{H}_t|} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\lambda_g}{\lambda} \quad (\text{II-43})$$

Pour un mode TM, elle vaut :

$$Z_{TM} = \frac{|\vec{E}_t|}{|\vec{H}_t|} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_g} \quad (\text{II-44})$$

### II-A-6-9) BANDES DE FREQUENCE, MODE DOMINANT, MODES SUPERIEURS

Dans le diagramme de dispersion d'un guide d'ondes on distingue, du point de vue des utilisations pratiques, quatre bandes de fréquence (Figure II-5) :

- $f < f_{c1}$ , aucun mode ne peut se propager, et les champs décroissent avec la distance. Un tel guide peut être employé comme affaiblisseur, ou comme structure de blindage.
- $f_{c1} < f < 1.25f_{c1}$ , un seul mode, le mode dominant peut se propager. Il présente toutefois une grande dispersion, de sorte que cette bande de fréquence n'est en général pas employée pour transmettre l'information.
- $1.25f_{c1} < f < f_{c2}$ , un seul mode, le mode dominant peut se propager. La dispersion est généralement acceptable dans cette bande, si la longueur de guide utilisée n'est pas excessive. C'est le fonctionnement monomodal.
- $f > f_{c2}$ , plusieurs modes, le mode dominant et un ou plusieurs modes supérieurs, peuvent se propager dans cette bande. C'est le cas du fonctionnement multimodal.

**II-A-6-10) MODES DEGENERES**

Dans certains guides d'ondes, il existe plusieurs modes qui ont la même longueur d'onde de coupure  $\lambda_c$ , et des structures de champs différentes. On les appelle modes dégénérés.

**II-A-7/ LES GUIDES D'ONDES RECTANGULAIRES HOMOGENES**

Le calcul de la solution générale de la propagation dans des guides d'ondes rectangulaires homogènes se ramène à la détermination des modes TE et TM pouvant exister dans ce guide.

**II-A-7-1) DETERMINATION DES MODES TE**

Dans ce cas,  $E_z(x, y) = 0$  et il faut trouver une fonction génératrice  $H_z(x, y)$  qui soit solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z = 0 \tag{II-45}$$

et qui satisfait la condition aux limites de Neumann ( $\partial H_z / \partial n = 0$ ) sur les parois du guide (Figure II-6).

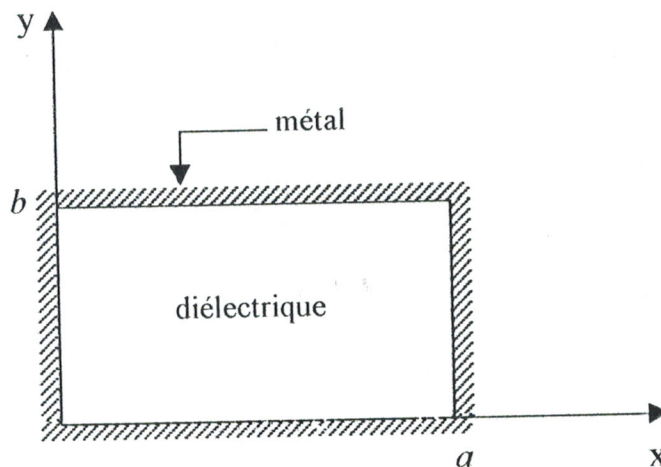


Figure II-6 : section transversale d'un guide d'ondes rectangulaire

**a) RECHERCHE DE LA SOLUTION DE L'EQUATION (II-45)**

Pour résoudre l'équation de helmholtz (II-45), on fait usage de la méthode de séparation des variables en coordonnées cartésiennes.

Elle consiste à écrire :  $H_z(x, y) = F(x).G(y)$  (II-46)

L'équation (II-45) devient alors :

$$G \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + F \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + k_c^2 F G = 0$$

En divisant par  $F G$ , nous obtenons :

$$\frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + k_c^2 = 0$$

soit aussi :

$$\frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - k_c^2 \tag{II-48}$$

Le premier membre est fonction de  $x$  et le deuxième membre est fonction de  $y$ . Ils ne peuvent être égaux qu'à une même constante qui devra être de même degré et de même signe que  $-k_c^2$ .

Posons donc :

$$\frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -k_x^2 \tag{II-49}$$

Il vient :

$$-\frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - k_c^2 = -k_x^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = k_x^2 - k_c^2$$

Posons :

$$\frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -k_y^2 \tag{II-50}$$

Avec :

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \tag{II-51}$$

Dans ces conditions, la solution de (II-45) est de la forme :

$$H_z(x, y) = (A \sin k_x x + B \cos k_x x)(C \sin k_y y + D \cos k_y y) \tag{II-52}$$

**b) CONDITIONS AUX LIMITES SUR LE CONDUCTEUR PARFAIT**

Sur un conducteur parfait, défini comme un court-circuit électrique (C.C.E) on a :

$$\begin{cases} \vec{n} \times \vec{E} = \vec{0} \\ \vec{n} \cdot \vec{H} = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \vec{n} \perp \text{C.C.E}$$

Par analogie, on définit le court-circuit magnétique (C.C.M) par :

$$\begin{cases} \vec{n} \times \vec{H} = \vec{0} \\ \vec{n} \cdot \vec{E} = 0 \end{cases}$$



Sachant que  $H_z$  est parallèle aux parois métalliques du guide, on calcule  $E_x$  et  $E_y$  pour appliquer les conditions aux limites sur le C.C.E.

**c) DÉTERMINATION DES CONSTANTES**

Les constantes  $A, B, C$  et  $D$  sont déterminées à partir des conditions aux limites.

D'après l'expression (II-15) :

$$E_y \text{ est } \propto \frac{\partial H_z}{\partial x} \propto \frac{\partial F}{\partial x} = k_x A \cos k_x x - k_x B \sin k_x x$$

Le symbole  $\propto$  indique "proportionnel".

$$- \text{ en } x=0; E_y=0 \Rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} Ak_x = 0 \\ \text{et} \\ k_x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow A=0$$

$$- \text{ en } x=a; E_y=0 \Rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -k_x B \sin k_x a = 0 \\ \text{et} \\ B \neq 0 \text{ car } H_z \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_x \cdot a = m\pi \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}; \quad m \text{ entier} \quad \text{(II-53)}$$

D'après l'expression (II-14) :

$$E_x \text{ est } \propto \frac{\partial H_z}{\partial y} \propto \frac{\partial G}{\partial y} = k_y C \cos k_y y - k_y D \sin k_y y$$

$$- \text{ en } y=0; E_x=0 \Rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} C k_y = 0 \\ \text{et} \\ k_y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow C=0$$

$$- \text{ en } y=b; E_x=0 \Rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -k_y D \sin k_y b = 0 \\ \text{et} \\ D \neq 0 \text{ car } H_z \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_y \cdot b = n\pi \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}; \quad n \text{ entier} \quad (\text{II-54})$$

Par conséquent, la fonction génératrice  $H_z(x, y)$  est donnée par :

$$H_z(x, y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (\text{II-55})$$

$$\text{et} \quad \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k_c^2 \quad (\text{II-56})$$

$m$  et  $n$  sont deux entiers positifs quelconques.

#### d) EXPRESSIONS DES COMPOSANTES TRANSVERSALES DU CHAMP

Les composantes transversales du champ sont ensuite obtenues au moyen des formules (II-14), (II-15), (II-16), (II-17) qui se simplifient du fait que  $E_z = 0$ .

$$E_x(x, y) = H_0 \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{II-57})$$

$$E_y(x, y) = -H_0 \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{II-58})$$

$$H_x(x, y) = H_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{II-59})$$

$$H_y(x, y) = H_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{II-60})$$

Nous voyons bien que l'introduction des conditions aux limites amène à un couple d'entier  $(m, n)$ , donc à un certain nombre de modes  $TE_{mn}$  pouvant se propager dans le guide d'ondes.

#### e) FRÉQUENCE DE COUPURE DES MODES $TE_{mn}$

$$\text{On a :} \quad k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\text{et} \quad k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Ce qui implique : 
$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \tag{II-61}$$

D'après (II-36), la fréquence de coupure  $f_c$  vaut :

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \tag{II-62}$$

**f) CLASSEMENT DES MODES  $TE_{mn}$**

Pour classer ces modes, on calcule leurs fréquences de coupure  $f_c$  ou leurs longueurs d'onde  $\lambda_c$ , pour différents couples  $(m, n)$ .

Le premier mode est le mode qui a la plus petite fréquence de coupure  $f_c$  (c'est à dire la plus grande longueur d'onde de coupure  $\lambda_c$ ).

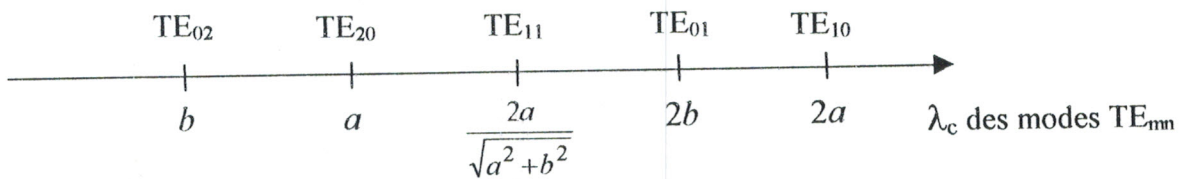


Figure II-7 : Classement des modes  $TE_{mn}$  dans le guide d'ondes rectangulaire  
Tel que  $a > b$

**II-A-7-2) DETERMINATION DES MODES TM**

Les composantes du champ des modes TM ( pour lesquelles  $H_z(x, y) = 0$  ) seront obtenues de la même manière, en recherchant par la méthode de séparation des variables une fonction génératrice  $E_z(x, y)$  vérifiant l'équation :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0 \tag{II-63}$$

et les conditions aux limites de Dirichlet  $E_z = 0$  sur les parois du guide (Figure II-6).

Soit :

$$E_z = 0 \text{ sur les plans } x = 0 \text{ et } x = a.$$

$E_z = 0$  sur les plans  $y = 0$  et  $y = b$ .

$$E_z(x, y) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (\text{II-64})$$

En portant cette expression de  $E_z$  dans les formules (II-14), (II-15), (II-16), (II-17), et en tenant compte de  $H_z = 0$ , on obtient les composantes transversales du champ des ondes TM.

$$E_x(x, y) = -E_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{II-65})$$

$$E_y(x, y) = -E_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{II-66})$$

$$H_x(x, y) = E_0 \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{II-67})$$

$$H_y(x, y) = -E_0 \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{II-68})$$

Nous avons vu que :  $k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

Comme  $k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$ , il en résulte que la longueur d'onde et la fréquence de coupure des modes

TM<sub>mn</sub> sont données respectivement par :

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (\text{II-69})$$

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (\text{II-70})$$

Remarques :

- Le classement des modes TM<sub>mn</sub> se fait de la même manière que celui des modes TE<sub>mn</sub>.
- Dans tous les calculs effectués dans les paragraphes (II-A-7-1) et (II-A-7-2), les termes exponentiels  $e^{-\gamma z}$  et  $e^{j\omega t}$  qui affectent tous les champs ont été sous entendu.

- $(E_0, H_0)$  sont des constantes arbitraires dont la valeur ne pourrait être fixée qu'en connaissant la puissance transportée par le guide d'onde.

## II-A-8/ LES GUIDES D'ONDES CYLINDRIQUES HOMOGENES

### II-A-8-1) DEFINITION DE LA GEOMETRIE

On considère un guide d'ondes dont la section droite est un cercle de rayon  $a$  représenté sur la figure (II-8).

Par suite de la symétrie circulaire, le système de coordonnées cylindriques circulaires  $(r, \theta, z)$  est le mieux adapté pour étudier cette structure.

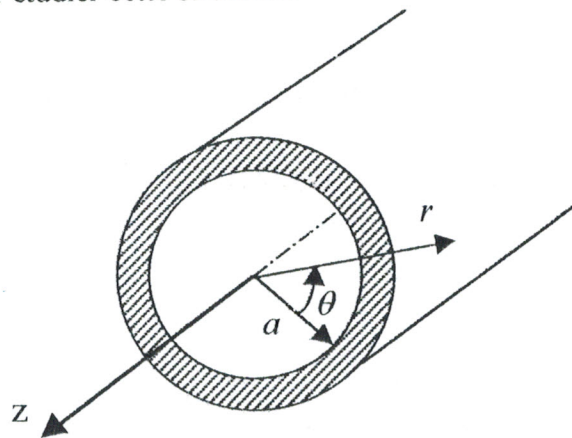


Figure II-8 : Guide d'ondes cylindrique

### II-A-8-2) RESOLUTION DE L'EQUATION D'ONDE

L'équation à résoudre dans le plan transverse est :

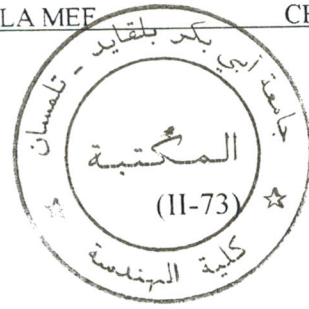
$$\Delta_t \Psi + k_c^2 \Psi = 0 \quad (\text{II-71})$$

avec  $\Psi = \begin{cases} E_z & \text{pour un mode TM} \\ H_z & \text{pour un mode TE} \end{cases}$

Nous utiliserons les coordonnées cylindriques selon lesquelles le  $\Delta_t$  de la relation (II-71) a pour expression :

$$\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (\text{II-72})$$





L'équation (II-71) devient :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + k_c^2 \Psi = 0$$

La méthode de séparation des variables est applicable.

On pose :  $\Psi(r, \theta) = R(r) \cdot T(\theta)$

(II-74)

conformément à ce qui a été expliqué au paragraphe (II-A-4-3) concernant la détermination des composantes transversales en  $r$  et  $\theta$ , la fonction angulaire  $T(\theta)$  est prise de la forme  $e^{-jm\theta}$  et nous cherchons donc pour  $\Psi(r, \theta) = E_z$  ou  $H_z$  des solutions de la forme :

$$\Psi(r, \theta) = R(r)e^{-jm\theta}$$

La relation (II-73) nous donne donc :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left( k_c^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0$$

(II-75)

et admet pour solution :  $R(r) = AJ_m(k_c \cdot r) + By_m(k_c \cdot r)$ .

Les constantes  $A$  et  $B$  sont déterminées à partir des conditions aux limites.

$J_m$  et  $y_m$  sont les fonctions de Bessel d'ordre  $m$ , respectivement de 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> espèce.

Notons que  $\Psi$  doit garder une valeur finie sur l'axe du guide ( $r = 0$ ).

Comme  $y_m(x) \rightarrow \infty$  quand  $x \rightarrow 0$  (Fig. II-9), la constante  $B$  doit être nulle et la solution pour

$\Psi$  doit être de la forme :

$$\Psi(r, \theta) = AJ_m(k_c \cdot r)e^{-jm\theta}$$

(II-76)

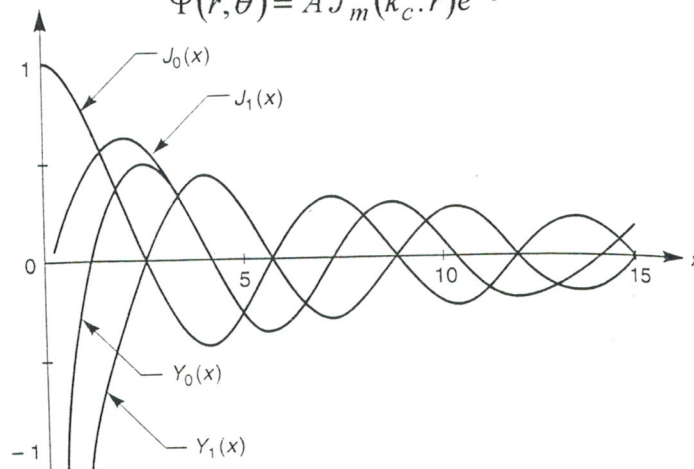


Figure II-9 : courbes de variation des fonctions de Bessel  $J_0(x), J_1(x), y_0(x)$  et  $y_1(x)$

**II-A-8-3) DETERMINATION DES ONDES TE**

Dans ce cas,  $E_z = 0$  et d'après (II-76) :

$$H_z = H_0 J_m(k_c \cdot r) e^{-jm\theta} \tag{II-77}$$

La condition aux limites de Neumann sur la paroi du guide impose que :

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0 \text{ pour } r = a$$

soit  $J'_m(k_c \cdot a) = 0$

La fonction  $J'_m(x)$  représente la première dérivée de la fonction de Bessel d'ordre  $m$ . Cette fonction s'annule pour  $k_c \cdot a = x'_{mn}$  où  $x'_{mn}$  est le  $n^{\text{ème}}$  zéro (ou racine) de cette fonction. Ainsi à chaque racine de  $J'_m$  correspond un mode de propagation appelé  $TE_{mn}$ .

Le tableau (II-3) donne les valeurs discrètes  $x'_{mn}$  de ces racines. Pour ces modes  $TE_{mn}$  :

$$k_c = \frac{x'_{mn}}{a} \tag{II-78}$$

$n$  est le numéro des zéros de  $J'_m$ , donc  $n \neq 0$ .

n \ m	1	2	3
0	3,832	7,016	10,174
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,706	9,970
3	4,201	8,015	11,346

Tableau II-3 : valeurs discrètes de  $x'_{mn}$

En portant la fonction génératrice  $H_z$  donnée par la relation (II-77) dans les relations (II-24) à (II-27) qui se simplifient du fait que  $E_z = 0$ , nous obtenons les composantes transversales :

$$E_r = -H_0 \frac{\omega \mu m}{k_c^2 r} J_m(k_c \cdot r) e^{-jm\theta} \tag{II-79}$$

$$E_{\theta} = jH_0 \frac{\omega \mu}{k_c} J'_m(k_c \cdot r) e^{-jm\theta} \tag{II-80}$$

$$H_r = -H_0 \frac{\gamma}{k_c} J'_m(k_c \cdot r) e^{-jm\theta} \tag{II-81}$$

$$H_{\theta} = jH_0 \frac{\gamma m}{k_c^2 r} J_m(k_c \cdot r) e^{-jm\theta} \tag{II-82}$$

**II-A-8-4) DETERMINATION DES ONDES TM**

Dans ce cas,  $H_z = 0$  et d'après (II-76) :

$$E_z = E_0 J_m(k_c \cdot r) e^{-jm\theta} \tag{II-83}$$

La condition aux limites de Dirichlet sur la paroi du guide impose que :

$E_z = 0$  pour  $r = a$ , soit  $J_m(k_c \cdot a) = 0$ . La figure (II-9) montre que la fonction  $J_m(x)$  s'annule pour une suite de valeurs de  $x$  qui sont les racines de  $J_m$ . A chacune de ces racines correspond un mode de propagation.

Le mode correspondant à la  $n^{\text{ème}}$  racine d'une fonction d'ordre  $m$  est appelé mode  $TM_{mn}$ .

Le tableau (II-4) donne les valeurs discrètes  $x_{mn}$  de ces racines. Pour ces modes  $TM_{mn}$  :

$$k_c = \frac{x_{mn}}{a} \tag{II-84}$$

m \ n	1	2	3
0	2,405	5,52	8,654
1	3,832	7,016	10,174
2	5,136	8,417	11,620
3	6,380	9,761	13,015

Tableau II-4 : valeurs discrètes de  $x_{mn}$

En portant la fonction génératrice  $E_z$  donnée par la relation (II-83) dans les relations

(II-24) à (II-27) et en tenant compte de  $H_z = 0$ , nous obtenons les composantes transversales :

$$E_r = -E_0 \frac{\gamma}{k_c} J'_m(k_c \cdot r) e^{-jm\theta} \quad (\text{II-85})$$

$$E_\theta = jE_0 \frac{\gamma m}{k_c^2 r} J_m(k_c \cdot r) e^{-jm\theta} \quad (\text{II-86})$$

$$H_r = E_0 \frac{\omega \varepsilon m}{k_c^2 r} J_m(k_c \cdot r) e^{-jm\theta} \quad (\text{II-87})$$

$$H_\theta = -jE_0 \frac{\omega \varepsilon}{k_c} J'_m(k_c \cdot r) e^{-jm\theta} \quad (\text{II-88})$$

Remarque : les termes  $e^{-\gamma z}$  et  $e^{j\omega t}$ , qui affectent tous les champs ont été sous-entendu.

## II-B/ FORMULATION DU PROBLEME D'ONDES GUIDEES DANS LES GUIDES DIELECTRIQUES BLINDES PAR LA METHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

### II-B-1) INTRODUCTION

Les problèmes de propagation guidée en général et la classe des problèmes transverses en particulier, représentent le premier groupe des phénomènes électromagnétiques à des fréquences micro-ondes analysés par la méthode des éléments finis (MEF).

Les exemples typiques des problèmes transverses incluent la caractérisation de la structure modale des guides d'ondes métalliques homogènes et inhomogènes de coupe transversale arbitraire ; y compris les guides optiques.

Les problèmes de cette classe nécessitent le traitement d'un problème à valeurs et vecteurs propres dont la résolution permet de déterminer la constante de propagation le long du guide d'ondes et la distribution du champ électromagnétique dans le plan transverse par rapport à la direction de propagation ; d'où l'utilisation de la technique des éléments finis à deux dimensions.

La seconde classe des problèmes de propagation guidée comprend l'analyse et la caractérisation des composants, et diffère du point de vue mathématique de la première classe du fait qu'elle nécessite la solution d'un problème déterministe en trouvant la distribution du champ dû à une excitation particulière.

Deux formulations sont présentées ; la première est valable pour les guides d'ondes homogènes de coupe transversale arbitraire. Elle est basée sur le fait que pour les structures guidantes homogènes, les modes  $TE_z (E_z = 0)$  et  $TM_z (H_z = 0)$  peuvent être considérés séparément.

Alors que la deuxième formulation est plus générale puisqu'elle traite les modes hybrides (superposition des modes  $TE_z$  et  $TM_z$ ) des structures inhomogènes.

**II-B-2) GUIDES D'ONDES HOMOGENES**

**II-B-2-1) INTRODUCTION**

Les premières applications de la MEF à des problèmes de propagation concernent les guides d'ondes métalliques homogènes [7] et inhomogènes [8,9] employant les composantes longitudinales des champs électrique et magnétique comme inconnues.

Plus tard, la méthode a été appliquée pour l'analyse des structures ouvertes telles que les guides diélectriques et les lignes microrubans par la combinaison des éléments finis avec la méthode intégrale ou avec les conditions aux limites d'absorption (ABC, PMA, ...).

**II-B-2-2) FORMULATION DU PROBLEME PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Pour les guides d'ondes homogènes fermés, de section transversale arbitraire uniforme le long de la direction de propagation Oz (Figure II-10), il est nécessaire de résoudre le problème à valeurs et vecteurs propres suivant :

$$\nabla_t^2 \Phi + k_t^2 \Phi = 0 \tag{II-89}$$

défini dans la région  $\Omega$  représentant la section transversale du guide d'ondes. En particulier, pour le cas du mode  $TM_z$  ( $H_z = 0$ ),  $\Phi(x, y) = E_z(x, y)$  et la solution doit satisfaire les conditions aux limites de Dirichlet  $\Phi = 0$  sur les parois métalliques (C.C.E) et les conditions de Neumann  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  sur les murs magnétiques (C.C.M). Pour le cas du mode  $TE_z$  ( $E_z = 0$ ),  $\Phi(x, y) = H_z(x, y)$  et les conditions aux limites précédentes sur les murs parfaitement conducteurs (C.C.E) et magnétiques (C.C.M) sont interchangées.

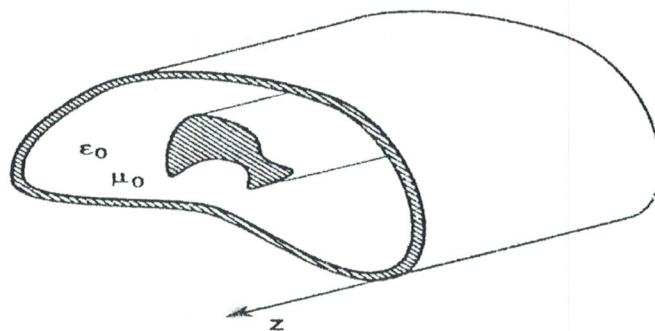


Figure II-10 : Guide d'ondes homogène

La solution de l'équation (II-89) peut être recherchée par différentes approches (Formulation variationnelle [10], Méthode des résidus pondérés [11], Notion de distribution [12]). Nous présentons ici la formulation du problème avec la méthode des résidus pondérés .

**II-B-2-2-1) METHODE DES RESIDUS PONDERES (WRM)**

Puisque la dérivation de la fonctionnelle appropriée à des problèmes électromagnétiques pratiques de composition de matériaux complexes peut être très longue, la méthode des résidus pondérés utilisant la formulation de GALERKIN fournit un outil utile et plus flexible pour la solution numérique des problèmes à valeurs limites. On applique ici cette approche pour résoudre l'équation de Helmholtz (II-89).

Pour décrire cette procédure, supposons que l'équation de Helmholtz doit être résolu dans le domaine géométrique  $\Omega$  en appliquant les conditions aux limites de Dirichlet  $\Phi = \Phi_0$  sur  $\Gamma_D$  et de Neumann  $\partial\Phi/\partial n = 0$  sur  $\Gamma_N$ , où  $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ .

Introduisons arbitrairement les fonctions de pondérations  $w, w_D, w_N$  définies dans  $\Omega$ , le problème à valeurs limites peut s'écrire :

$$\iint_{\Omega} w [\nabla_t^2 \Phi + k_t^2 \Phi] d\Omega + \int_{\Gamma_D} w_D (\Phi - \Phi_0) d\Gamma + \int_{\Gamma_N} w_N (\nabla_t \Phi \cdot \vec{n}) d\Gamma = 0 \quad (II-90)$$

En appliquant le théorème de GREEN à la première intégrale de l'équation (II-90), il est possible de réduire l'ordre des dérivées de l'équation précédente :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \nabla_t w \cdot \nabla_t \Phi d\Omega - \iint_{\Omega} k_t^2 w \Phi d\Omega - \int_{\Gamma} w (\nabla_t \Phi \cdot \vec{n}) d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_D} w_D (\Phi - \Phi_0) d\Gamma - \int_{\Gamma_N} w_N (\nabla_t \Phi \cdot \vec{n}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (II-91)$$

Choisissons  $\Phi$  telle que la condition de Dirichlet  $\Phi = \Phi_0$  sur  $\Gamma_D$  est satisfaite et les fonctions de pondération  $w$  et  $w_N$  pour que  $w_N = -w$  en  $\Gamma_N$ ,  $w = 0$  en  $\Gamma_D$ . Le problème à valeurs limites (II-91) se réduit à :

$$\iint_{\Omega} \nabla_t w \cdot \nabla_t \Phi d\Omega - \iint_{\Omega} k_t^2 w \Phi d\Omega = 0 \quad (II-92)$$

Si la fonction  $\bar{\Phi}$  est l'approximation de la solution exacte  $\Phi$ , alors le terme du côté droit de

l'équation (II-92) n'est pas égal exactement à zéro mais il est égal à une certaine quantité appelée Résidu.

L'application de la méthode des éléments finis pour résoudre le système (II-92) consiste à remplir les cinq étapes suivantes :

- 1- Subdivision de la région  $\Omega$  en éléments non chevauchés (maillage) .
- 2- Approximation de la fonction inconnue sur chaque élément : sur chaque élément (e) , la solution est recherchée parmi les fonctions approximées  $\bar{\Phi}^{(e)}$  de la forme :

$$\bar{\Phi}^{(e)}(x,y) = \sum_{j=1}^{N^{(e)}} \bar{\Phi}_j^{(e)} \alpha_j^{(e)}(x,y) \tag{II-93}$$

où  $\bar{\Phi}_j^{(e)}$  et  $\alpha_j^{(e)}(x,y)$  ( $j = 1, N^{(e)}$ ) représentent respectivement les coefficients inconnus et la série de fonctions de base différentiables ;  $N^{(e)}$  étant le nombre total d'éléments du maillage de la structure étudiée.

- 3- Définition des fonctions de pondération en exprimant le résidu sur chaque élément .

Une série de fonctions de pondération  $w_i^{(e)}$  ( $i = 1, N^{(e)}$ ) est définie sur chaque élément et sera introduite dans l'équation de Helmholtz (II-92).

Selon la formulation de Galerkin, les fonctions de pondération sont choisies comme étant des fonctions de base c'est à dire :  $w_i^{(e)} = \alpha_i^{(e)}$  ( $i = 1, N^{(e)}$ ) .

Avec ce choix, le résidu  $R_i^{(e)}$  relative à la  $i^{\text{ème}}$  fonction de pondération sur l'élément (e) est exprimé par :

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \nabla_t \alpha_i^{(e)} \cdot \nabla_t \bar{\Phi}^{(e)} d\Omega - \iint_{\Delta^{(e)}} k_t^2 \alpha_i^{(e)} \bar{\Phi}^{(e)} d\Omega = R_i^{(e)} \quad i = 1, N^{(e)} \tag{II-94}$$

ce qui s'écrit sous la forme matricielle :

$$[S^{(e)}] [\bar{\Phi}^{(e)}] - k_t^2 [T^{(e)}] [\bar{\Phi}^{(e)}] = [R^{(e)}] \tag{II-95}$$

Les composantes des matrices élémentaires locales  $[S^{(e)}]$  et  $[T^{(e)}]$  sont définies par :

$$S_{ij}^{(e)} = \iint_{\Delta_e} \nabla_t \alpha_i^{(e)} \nabla_t \alpha_j^{(e)} dS \tag{II-96}$$



$$T_{ij}^{(e)} = \iint_{\Delta_e} \alpha_i^{(e)} \alpha_j^{(e)} dS \tag{II-97}$$

$\Delta_e$  est l'aire de l'élément  $(e)$  ;  $\alpha_i^{(e)}$  représente la  $i^{\text{ème}}$  fonction de base définie sur l'élément  $(e)$ .

Le vecteur  $[R^{(e)}]$  contient les valeurs des résidus  $[R_i^{(e)}]$  ( $i = 1, N^{(e)}$ ).

Notons que si le sommet  $j$  de l'élément est relié aux conditions aux limites de Dirichlet  $\Gamma_D$ , alors le coefficient  $\overline{\Phi}_j^{(e)}$  est connu, c'est à dire,  $\overline{\Phi}_j^{(e)} = \Phi_0$  et les fonctions de pondération ne devraient être centrées en  $j$  ( ceci est compatible avec la condition  $w = 0$  en  $\Gamma_D$  ).

Par conséquent, si un élément a  $N_D$  nœuds situés sur  $\Gamma_D$ , les matrices  $[S^{(e)}]$  et  $[T^{(e)}]$  sont de l'ordre  $(N^{(e)} - N_D)$ .

4- Sommation des contributions de tout les éléments : les matrices élémentaires

locales  $[S^{(e)}]$  et  $[T^{(e)}]$  sont assemblées respectivement en des matrices globales  $[S]$  et  $[T]$ . Ceci correspond à la sommation de tout les résidus provenant de toutes les fonctions de pondération centrées sur les mêmes nœuds seulement en couvrant tout les éléments .

5- Annulation du résidu et la résolution du problème généralisé à valeurs limites :

L'étape final est la résolution du problème généralisé représenté par l'équation :

$$[S][\Phi] - k_t^2 [T][\Phi] = 0 \tag{II-98}$$

Les valeurs propres calculées représentent les fréquences de coupure  $k_t$  des modes dans la structure homogène, à partir desquelles, on utilise la relation de dispersion suivante :

$$\gamma^2 = k_z^2 = k^2 - k_t^2 \tag{II-99}$$

avec  $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = k_0 \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$\alpha$  et  $\beta$  représentent respectivement la constante d'atténuation et la constante de propagation longitudinale (selon Oz).

Donc, il est facile de calculer les constantes d'atténuation et de propagation des modes évanescents et propageants à la fréquence normalisée  $k_0$  .



**II-B-3) GUIDES D'ONDES INHOMOGENES**

**II-B-3-1) INTRODUCTION**

La caractérisation des structures guidantes inhomogènes (Figure II-11) nécessite une formulation mathématique incluant plus qu'une composante du champ dans l'analyse. De plus, l'utilisation des fonctions de base nodales classiques pour approximer l'une des composantes longitudinales des deux champs électrique ou magnétique est rendue difficile par le problème des modes parasites (spurious modes). Ces modes sont des solutions qui n'ont pas un sens physique. La raison essentielle de l'apparition des modes parasites découle du fait que ces modes ne satisfont pas les équations de la divergence [13].

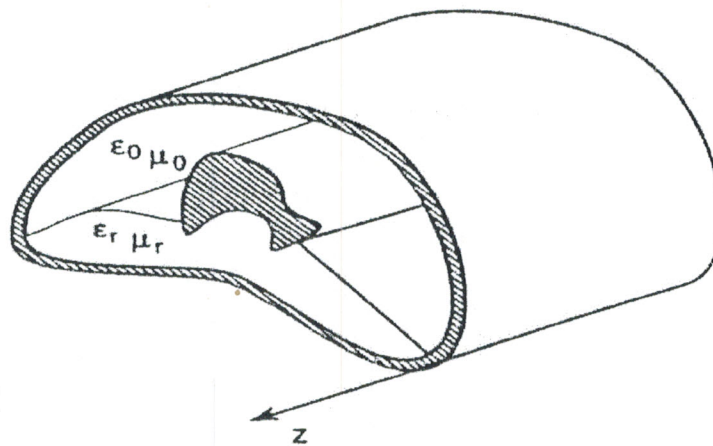


Figure II-11 : Guide d'ondes inhomogène

**II-B-3-2) FORMULATION DU PROBLEME PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Afin d'analyser la propagation des ondes électromagnétiques dans un guide d'ondes inhomogène, la méthode des éléments finis utilisant la méthode des résidus pondérés est utilisée pour résoudre l'équation vectorielle de Helmholtz. Les modes parasites sont évités par l'utilisation des éléments mixtes vectoriels et nodaux pour approximer respectivement les composantes transverse et longitudinal du champ électromagnétique sur la section transversale du guide d'ondes [14].

Pour développer la formulation mathématique adéquate, considérons les équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\bar{\epsilon}\vec{E} \end{cases} \quad (\text{II-100})$$

avec  $\bar{\epsilon} = \epsilon + \sigma/j\omega$  où  $\epsilon$  et  $\sigma$  représentent respectivement la permittivité et la conductivité des matériaux diélectriques.

A partir de la première équation du système précédent, il est possible d'obtenir :

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_r} \nabla \times \vec{E} \quad (\text{II-101})$$

En remplaçant l'expression de  $\vec{H}$  dans la deuxième équation du système (II-100), on obtient l'équation vectorielle de Helmholtz suivante :

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) = k_0^2 \bar{\epsilon}_r \vec{E} \quad (\text{II-102})$$

où  $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$  et  $\bar{\epsilon}_r = \bar{\epsilon} / \epsilon_0$

Supposons que toutes les composantes du champ dépendent de la coordonnée  $z$  par une fonction  $e^{-\gamma z}$ , avec  $\gamma = \alpha + j\beta$ , représentant la constante de propagation complexe. Décomposons le champ électrique  $\vec{E}$  en une partie transverse ( $\vec{E}_t$ ) et une composante longitudinale ( $E_z$ ).

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) e^{-\gamma z} = [\vec{E}_t(x, y) + E_z(x, y) \vec{u}_z] e^{-\gamma z} \quad (\text{II-103})$$

L'équation vectorielle de Helmholtz (II-102) est divisée en parties transverse et longitudinale (Annexe A) :

$$\nabla_t \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times E_t \right) - \gamma \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t E_z + \gamma E_t) = k_0^2 \bar{\epsilon}_r E_t \quad (\text{II-104})$$

$$\nabla_t \times \left[ \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t E_z + \gamma E_t) \times \vec{u}_z \right] = k_0^2 \bar{\epsilon}_r E_z \vec{u}_z \quad (\text{II-105})$$

Si cette formulation est employée pour calculer la constante de propagation  $\gamma$  quand la fréquence d'opération ( $k_0^2$ ) est fixée, un système à valeurs et vecteurs propres généralisé est obtenu.

Cependant, puisque dans un tel système, les valeurs propres  $\gamma$  apparaissent en puissances

d'ordre 1 et 2, il est commode d'introduire des variables auxiliaires :

$$\vec{e}_t = \gamma \vec{E}_t \quad (\text{II-106})$$

$$e_z = E_z \quad (\text{II-107})$$

Employons ce changement de variable, les équations (II-104) et (II-105) deviennent :

$$\nabla_t \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \vec{e}_t \right) - \gamma^2 \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t e_z + \vec{e}_t) = k_0^2 \bar{\epsilon}_r \vec{e}_t \quad (\text{II-108})$$

$$\gamma^2 \nabla_t \times \left[ \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t e_z + \vec{e}_t) \times \vec{u}_z \right] = \gamma^2 k_0^2 \bar{\epsilon}_r e_z \vec{u}_z \quad (\text{II-109})$$

et doivent être résolues avec l'application des conditions aux limites suivantes :

$$- \vec{n} \times \vec{e}_t = 0, \quad e_z = 0 \quad (\text{II-110})$$

sur le matériau parfaitement conducteur (C.C.E).

$$- (\nabla_t e_z + \vec{e}_t) \cdot \vec{n} = 0, \quad \nabla_t \times \vec{e}_t = 0 \quad (\text{II-111})$$

sur les murs magnétiques (C.C.M).

Pour appliquer la procédure des résidus pondérés, deux séries de fonctions de base et deux séries de fonctions de pondération correspondantes doivent être définies. Puisque la formulation de Galerkin est adoptée, chaque série des fonctions de pondération est égale à la série des fonctions de base correspondante.

Sur un élément de maillage (e), les fonctions de base vectorielles (polynômes de Nedelec de degré 1)  $\lambda_i^{(e)}$  sont définies en fonction des fonctions de base nodales (polynômes de Lagrange de degré 1)  $\alpha_j^{(e)}$  par [11] :

$$\begin{cases} \lambda_1 = l_1 (\alpha_1 \nabla \alpha_2 - \alpha_2 \nabla \alpha_1) \\ \lambda_2 = l_2 (\alpha_2 \nabla \alpha_3 - \alpha_3 \nabla \alpha_2) \\ \lambda_3 = l_3 (\alpha_3 \nabla \alpha_1 - \alpha_1 \nabla \alpha_3) \end{cases} \quad (\text{II-112})$$

où  $l_i$  est la longueur du côté i de l'élément triangulaire.

Ces fonctions de base vectorielles sont utilisées pour exprimer l'approximation  $\vec{e}_t^{(e)}$  de la partie transverse exacte  $\vec{e}_t$  du champ électrique sur l'élément (e) :

$$\vec{e}_t^{(e)}(x, y) = \sum_{j=1}^3 \vec{e}_{tj}^{(e)} \lambda_j^{(e)}(x, y) \quad (\text{II-113})$$

Alors que l'approximation  $e_z^{(e)}$  de la composante longitudinale exacte du champ électrique sur l'élément (e) est exprimée en termes de fonctions de base nodales  $\alpha_j^{(e)}$  :

$$e_z^{(e)}(x, y) = \sum_{j=1}^3 e_{zj}^{(e)} \alpha_j^{(e)}(x, y) \quad (\text{II-114})$$

Par conséquent, les fonctions de base vectorielles et nodales sont utilisées pour pondérer respectivement les équations transverse et longitudinale (II-108) et (II-109).

soient :

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta^{(e)}} \lambda_i^{(e)}(x, y) \cdot \left( \nabla_t \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \bar{e}_t \right) \right) dS - \frac{\gamma^2}{\mu_r} \iint_{\Delta^{(e)}} \lambda_i^{(e)}(x, y) \cdot (\nabla_t e_z + \bar{e}_t) dS \\ - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \iint_{\Delta^{(e)}} \lambda_i^{(e)}(x, y) \cdot \bar{e}_t dS = R_i^{(e)} \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{II-115})$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 \iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_i^{(e)}(x, y) \bar{u}_z \cdot \nabla_t \times \left[ \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t e_z + \bar{e}_t) \times \bar{u}_z \right] dS \\ - \gamma^2 k_0^2 \bar{\epsilon}_r \iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_i^{(e)}(x, y) \bar{u}_z \cdot e_z \bar{u}_z dS = R_i^{(e)} \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{II-116})$$

L'ordre des dérivées partielles du côté gauche des intégrales peut être réduit en exploitant à la fois, la formule de l'intégration vectorielle par parties :

$$\iint_{\Omega} A \cdot (\nabla \times B) d\Omega = \iint_{\Omega} (\nabla \times A) \cdot B d\Omega - \int_{\Gamma} (A \times B) \cdot \bar{n} d\Gamma \quad (\text{II-117})$$

où  $\Gamma = \partial\Omega$

et la forme vectorielle du théorème de Green :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} A \cdot (\nabla \times \nabla \times B) d\Omega = \iint_{\Omega} (\nabla \times A) \cdot (\nabla \times B) d\Omega \\ - \int_{\Gamma} (A \times \nabla \times B) \cdot \bar{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II-118})$$

L'introduction de l'équation (II-117) dans (II-116) et (II-118) dans (II-115) donne après arrangement des termes, les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\mu_r} \iint_{\Delta^{(e)}} (\nabla_t \times \lambda_i^{(e)}) \cdot (\nabla_t \times \bar{e}_t) dS - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \iint_{\Delta^{(e)}} \lambda_i^{(e)} \cdot \bar{e}_t dS \\
 & - \frac{1}{\mu_r} \int_{\Gamma^{(e)}} (\lambda_i^{(e)} \times \nabla_t \times \bar{e}_t) \cdot \bar{n} d\Gamma - \frac{\gamma^2}{\mu_r} \int_{\Delta^{(e)}} \lambda_i^{(e)} \cdot \nabla_t e_z dS \\
 & - \frac{\gamma^2}{\mu_r} \iint_{\Delta^{(e)}} \lambda_i^{(e)} \cdot \bar{e}_t dS = R_i^{(e)} \quad i = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{II-119}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\gamma^2}{\mu_r} \iint_{\Delta^{(e)}} (\nabla_t \times \alpha_i^{(e)} \bar{u}_z) \cdot [(\nabla_t e_z + \bar{e}_t) \times \bar{u}_z] dS - \frac{\gamma^2}{\mu_r} \int_{\Gamma^{(e)}} \alpha_i^{(e)} \bar{u}_z \times [(\nabla_t e_z + \bar{e}_t) \times \bar{u}_z] d\Gamma \\
 & - \gamma^2 k_0^2 \bar{\epsilon}_r \iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_i^{(e)} \bar{u}_z \cdot e_z \bar{u}_z dS = R_i^{(e)} \quad i = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{II-120}$$

Introduisons les développements en élément fini du champ inconnu sur l'élément (e) (les équations (II-113) et (II-114) dans (II-119) et (II-120)) et annulant les résidus, on obtient la matrice suivante :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_r} [S_t^{(e)}] - k_0^2 \bar{\epsilon}_r [T_t^{(e)}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z^{(e)} \\ \bar{e}_t^{(e)} \end{bmatrix} \\
 & = \gamma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_r} [S_z^{(e)}] - k_0^2 \bar{\epsilon}_r [T_z^{(e)}] & \frac{1}{\mu_r} [G^{(e)}]^T \\ \frac{1}{\mu_r} [G^{(e)}] & \frac{1}{\mu_r} [T_t^{(e)}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z^{(e)} \\ \bar{e}_t^{(e)} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{II-121}$$

où les composantes des matrices élémentaires locales sont données par :

$$S_{zij}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} \nabla_t \alpha_i^{(e)} \cdot \nabla_t \alpha_j^{(e)} dS \tag{II-122}$$

$$T_{zij}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_i^{(e)} \cdot \alpha_j^{(e)} dS \tag{II-123}$$

$$S_{ij}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} (\nabla_t \times \lambda_i^{(e)}) \cdot (\nabla_t \times \lambda_j^{(e)}) dS \tag{II-124}$$

$$T_{ij}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} \lambda_i^{(e)} \cdot \lambda_j^{(e)} dS \quad (\text{II-125})$$

$$G_{ij}^{(e)} = \iint_{\Delta^{(e)}} \lambda_i^{(e)} \cdot \nabla_t \alpha_j^{(e)} dS \quad (\text{II-126})$$

L'assemblage de tout les éléments et l'annulation des résidus donne le problème à valeurs et vecteurs propres généralisé final à résoudre par les techniques numériques adéquates :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [S_t] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{E}_z] \\ [\bar{E}_t] \end{bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} [S_z] & [G]^T \\ [G] & [T_t] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [e_z] \\ [\bar{e}_t] \end{bmatrix} \quad (\text{II-127})$$

Une fois, la fréquence d'opération normalisée  $k_0$  est fixée, l'équation (II-127) nous permet de calculer la constante de propagation  $\beta$  et la constante d'atténuation  $\alpha$  des modes caractéristiques des structures guidantes. Le tracé de  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de la fréquence donne le diagramme de dispersion.

Comme nous avons montré auparavant, les éléments mixtes vectoriels et nodaux sont utilisés pour approximer la composante longitudinale  $e_z$  du champ électrique avec les fonctions de base nodales d'ordre 1 et la composante transverse  $\bar{e}_t$  avec les fonctions de base vectorielles d'ordre 1.

Les deux espèces des éléments sont décrits dans [11] où les matrices élémentaires appropriées

$$[S_t^{(e)}], [S_z^{(e)}], [T_t^{(e)}] \text{ et } [T_z^{(e)}] \text{ sont aussi données.}$$

La matrice élémentaire  $[G^{(e)}]$  peut être calculée comme suit :

Le gradient  $\nabla_t \alpha_j^{(e)}$  qui apparaît dans l'équation (II-126) est exprimé par :

$$\nabla_t \alpha_j^{(e)} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{j+2} - y_{j+1} \\ x_{j+1} - x_{j+2} \end{bmatrix} \quad (\text{II-128})$$

où  $A$  est l'aire de l'élément,  $(x_i, y_i)$  représentent les coordonnées des sommets de

l'élément (e), avec  $j = 1, 2$  ou  $3$  et  $(j+1), (j+2)$  sont à calculer modulo 3.

Des manipulations algébriques supplémentaires conduisent à trouver les composantes de la matrice  $[G^{(e)}]$  sur l'élément (e) (Annexe B).

Une fois, les matrices locales calculées, on construit les matrices globales par assemblage :

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [S_t] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} [S_z] & [G]^T \\ [G] & [T_t] \end{bmatrix} \quad (\text{II-129})$$

On résout ensuite le problème à valeurs et vecteurs propres généralisé  $[A][x] = \gamma^2 [B][x]$  par des techniques numériques adéquates afin de trouver les valeurs possibles de la constante de propagation complexe  $\gamma$ , correspondantes à des fréquences normalisées  $k_0^2$ .

Connaissant le champ transverse  $\vec{e}_t$  sur les côtés d'un élément, on peut calculer ses composantes  $e_x$  et  $e_y$  en tout point de cet élément [15].

En conséquence, on peut tracer la cartographie du champ électromagnétique des modes.



## II-C/ APPLICATIONS

Dans ce paragraphe, nous allons valider le logiciel de calcul développé par son application à diverses structures guidantes telles que :

- Un guide d'ondes rectangulaire.
- Une ligne coaxiale.
- Une ligne microruban.
- Une ligne à fente.

Ce calcul sera mené par la méthode des éléments finis, afin de déterminer les caractéristiques de ces structures guidantes telles que :

- Les fréquences de coupure.
- La constante de propagation.
- La distribution du champ électromagnétique.

Ces caractéristiques électromagnétiques permettent de déterminer le diagramme de dispersion ainsi que le tracé de la cartographie des champs électromagnétiques.

### II-C-1) GUIDE D'ONDES RECTANGULAIRE VIDE ( $\epsilon_r = 1, \mu_r = 1$ )

La section droite du guide est représentée sur la figure (II-12).

Les dimensions imposées sont :  $a=18.35$  mm pour la largeur et  $b=9.175$  mm pour la hauteur.

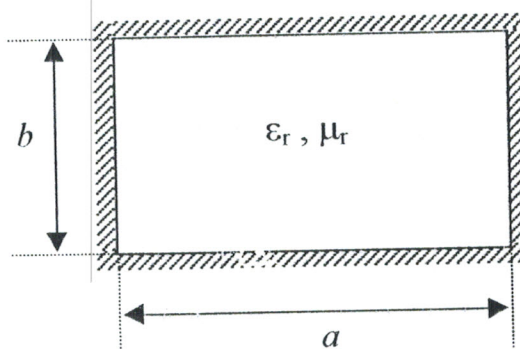
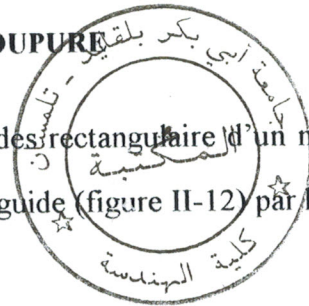


Figure II-12 : Guide d'ondes rectangulaire vide

**II-C-1-1) CALCUL THEORIQUES DES FREQUENCES DE COUPURE**



La fréquence de coupure notée  $f_c$  pour un guide d'ondes rectangulaire d'un mode noté  $TE_{mn}$  ou  $TM_{mn}$  est donnée en fonction des dimensions  $a$  et  $b$  du guide (figure II-12) par la formule suivante :

$$f_c(TE_{mn}, TM_{mn}) = \frac{c_0}{2\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

où  $c_0 = 2.998 \cdot 10^8$  m/s : représente la vitesse de la lumière dans le vide.

$m$  et  $n$  étant respectivement le nombre d'extremums du champ suivant  $ox$  et  $oy$ .

Le mode fondamental d'un guide d'ondes rectangulaire est le mode  $TE_{10}$  pour ( $a > b$ ) et  $TE_{01}$  pour ( $a < b$ ).

Pour notre cas  $a > b$ , alors le mode fondamental est le  $TE_{10}$ .

**II-C-1-2) MAILLAGE**

La figure (II-13) montre le maillage de la structure étudiée.

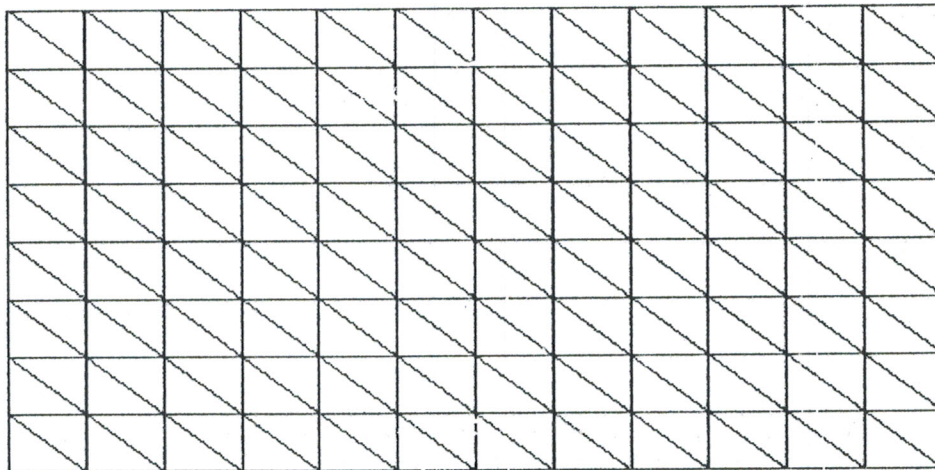


Figure II-13 : maillage de la structure (192 éléments et 117 nœuds)

## II-C-1-3) PRESENTATION DES RESULTATS

Modes \ Méthodes	Méthode exacte $f_c$ (GHZ)	Méthode M.E.F $f_c$ (GHZ)	$\Delta f/f$ (%)
TE <sub>10</sub> (1)	8.1689	8.2860	1.43
TE <sub>01</sub> (2)	16.3378	16.1163	1.35
TE <sub>20</sub> (3)	16.3378	16.1579	1.10
TE <sub>11</sub> (4)	18.2663	18.1331	0.72
TM <sub>11</sub> (5)	18.2663	18.3641	0.53
TE <sub>21</sub> (6)	23.1052	23.1956	0.39
TM <sub>21</sub> (7)	23.1052	23.5964	2.12
TE <sub>30</sub> (8)	24.5068	24.3525	0.62
TE <sub>31</sub> (9)	29.4535	29.5269	0.25

Tableau II-5 : Les fréquences de coupure des neufs premiers modes du guide d'ondes rectangulaire

Le tableau (II-5) présente l'erreur relative entre les résultats obtenus par la méthode exacte et ceux de la méthode des éléments finis. Cette erreur dû au maillage, reste acceptable sur une bande de fréquence de 30 GHz.

L'identification des modes est accomplie par le tracé de la cartographie (isovaleurs, surface 3D) des composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$  des modes.

Le type du mode TEM, TE<sub>mn</sub>, TM<sub>mn</sub> ou HEM est obtenu par l'analyse des valeurs des composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$  selon le tableau suivant :

Mode \ Composante	$E_z$	$H_z$
TEM	= 0	= 0
$TE_{mn}$	= 0	$\neq 0$
$TM_{mn}$	$\neq 0$	= 0
$HEM_{mn}$	$\neq 0$	$\neq 0$

Tableau II-6 : Identification des modes

**II-C-1-4) DIAGRAMME DE DISPERSION**

Le phénomène de dispersion se traduit par le fait que deux ondes ayant des fréquences différentes se propagent avec des vitesses de phases différentes (la vitesse dépend de la fréquence).

Le diagramme de dispersion donne la variation de la constante de propagation complexe  $\gamma = \alpha + j\beta$  en fonction de la fréquence  $f$ .

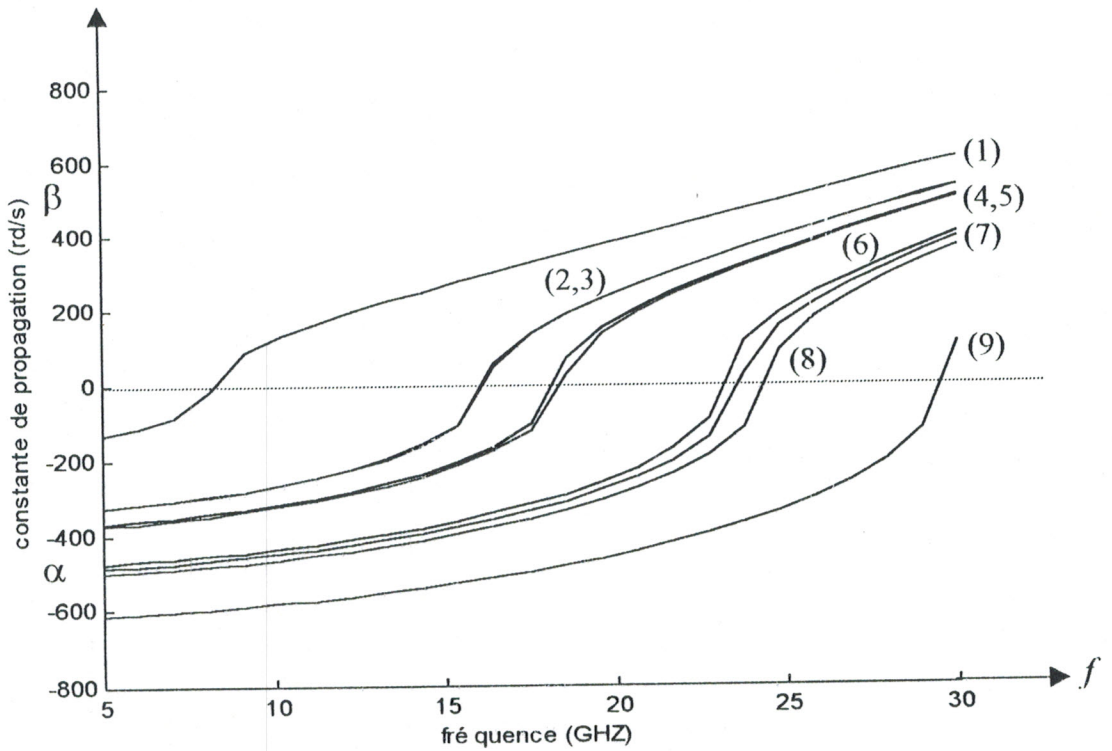
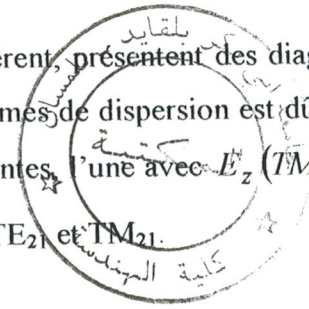


Figure II-14 : diagramme de dispersion des modes dans le guide d'ondes rectangulaire

Nous remarquons que les deux modes dégénérés  $TE_{01}$  et  $TE_{20}$ , de même type, ont des diagrammes de dispersion confondus.

Par contre, les modes dégénérés  $TE_{11}$  et  $TM_{11}$ , de type différent, présentent des diagrammes de dispersion légèrement séparés. Ce décalage dans les diagrammes de dispersion est dû au fait que l'on utilise un même maillage pour deux formulations différentes, l'une avec  $E_z (TM)$  et l'autre  $H_z (TE)$ . Le même phénomène est observé pour les modes  $TE_{21}$  et  $TM_{21}$ .



**II-C-1-5) CARTOGRAPHIE DU CHAMP**

Le tracé des cartes des champs nous renseigne sur la nature des modes.

Les figures (II-15) à (II-19) montrent la répartition du champ de la composante longitudinale ( $E_z$  ou  $H_z$ ) pour les cinq premiers modes.

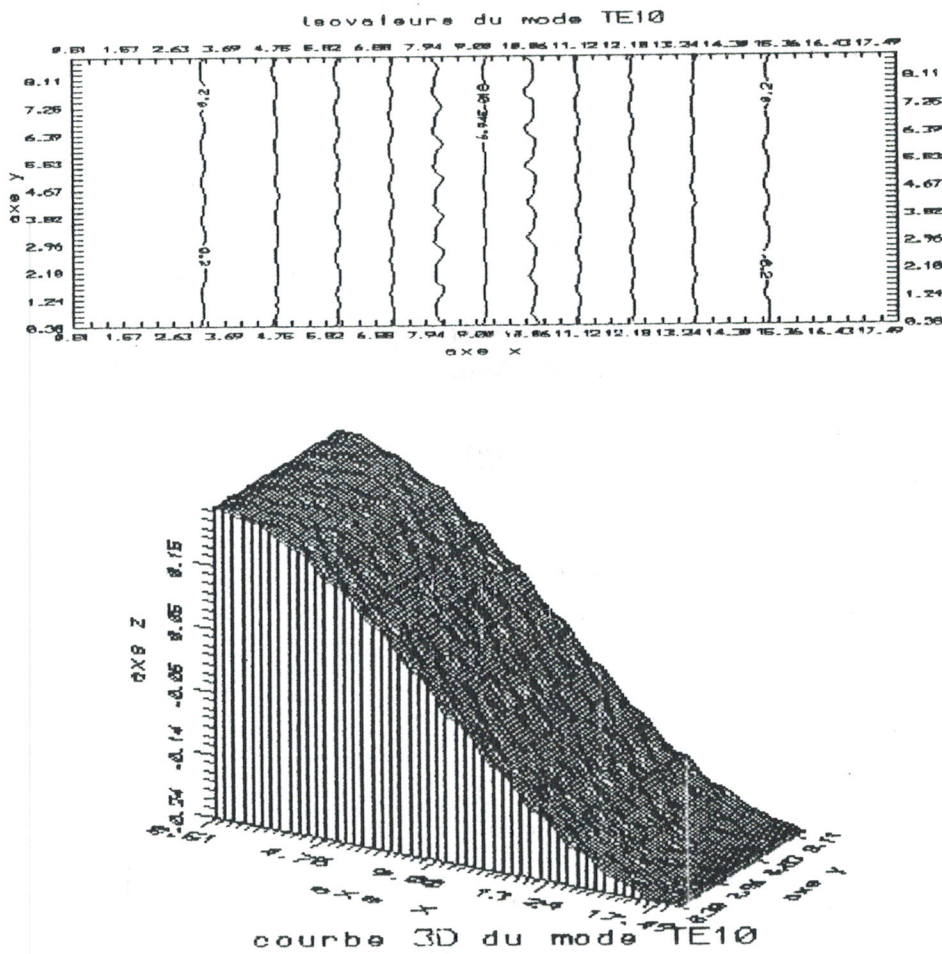


Figure II-15 : Cartographie du champ magnétique  $H_z$  du mode  $TE_{10}$

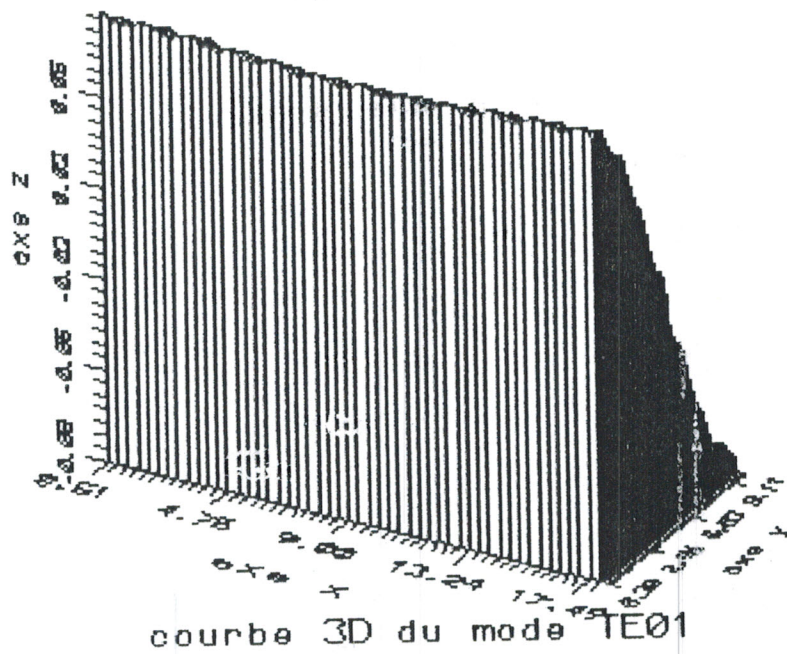
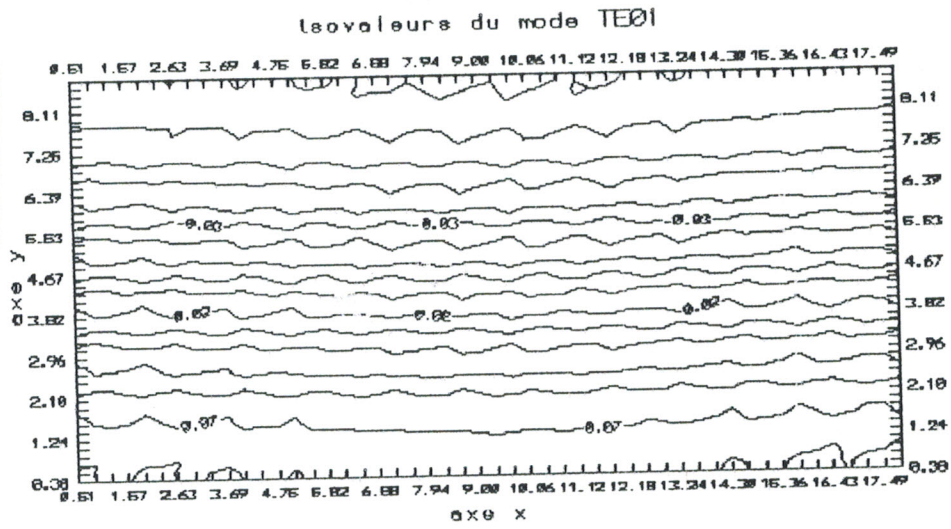


Figure II-16 : Cartographie du champ magnétique Hz du mode TE01

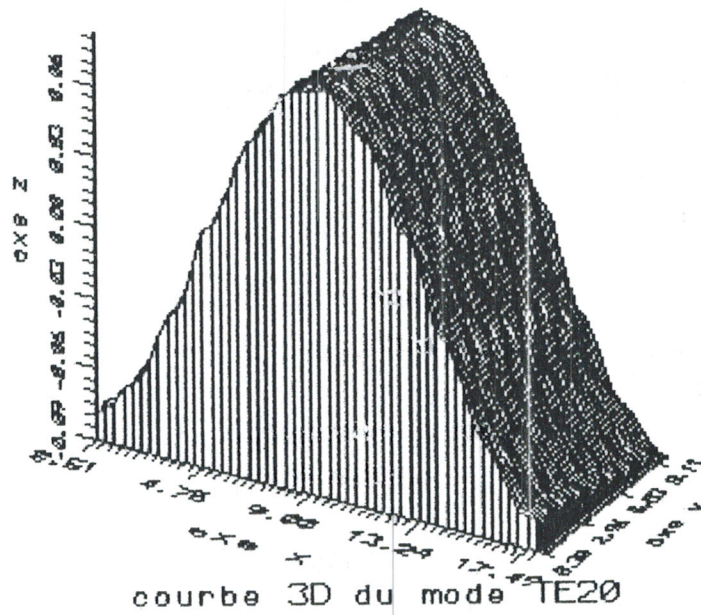
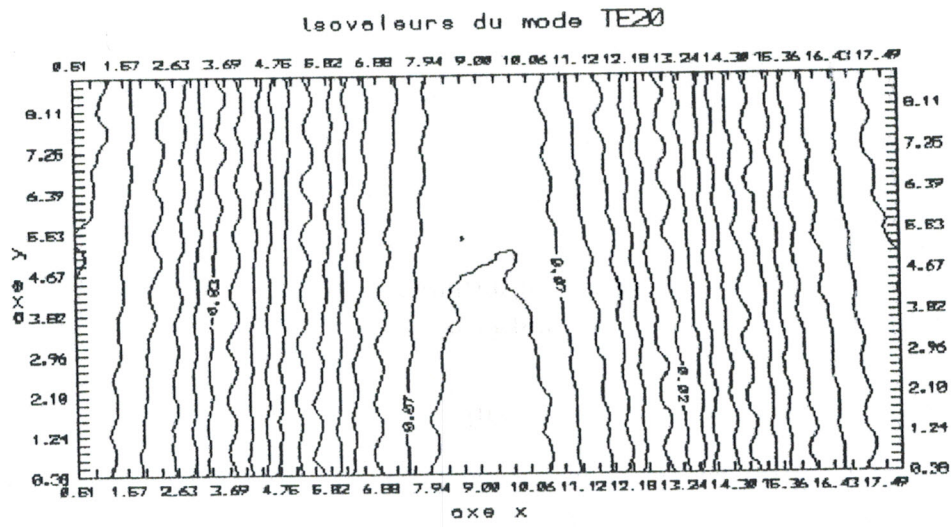


Figure II-17 : Cartographie du champ magnétique Hz du mode TE<sub>20</sub>

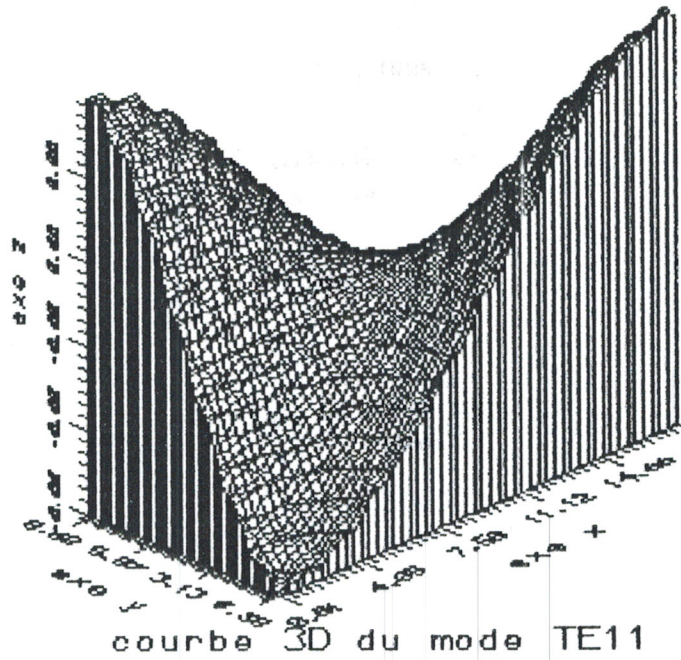
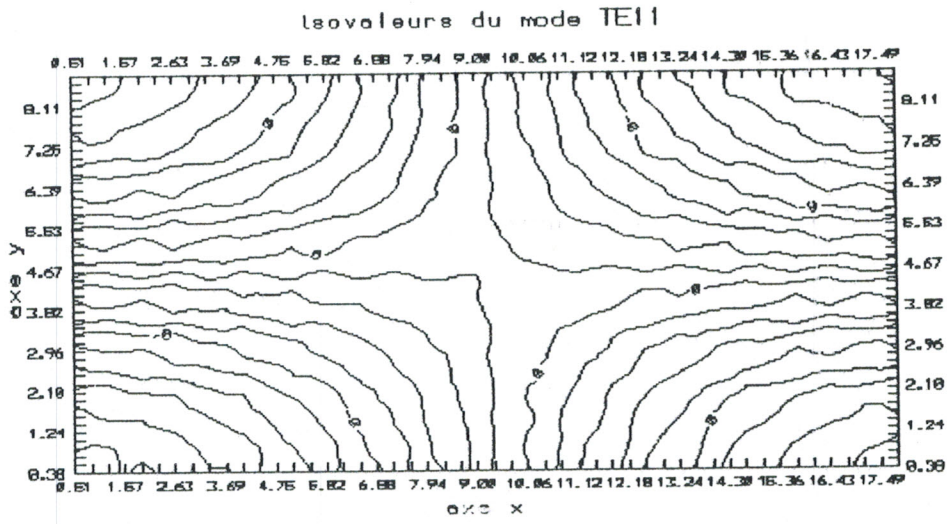


Figure II-18 : Cartographie du champ magnétique  $H_z$  du mode TE11



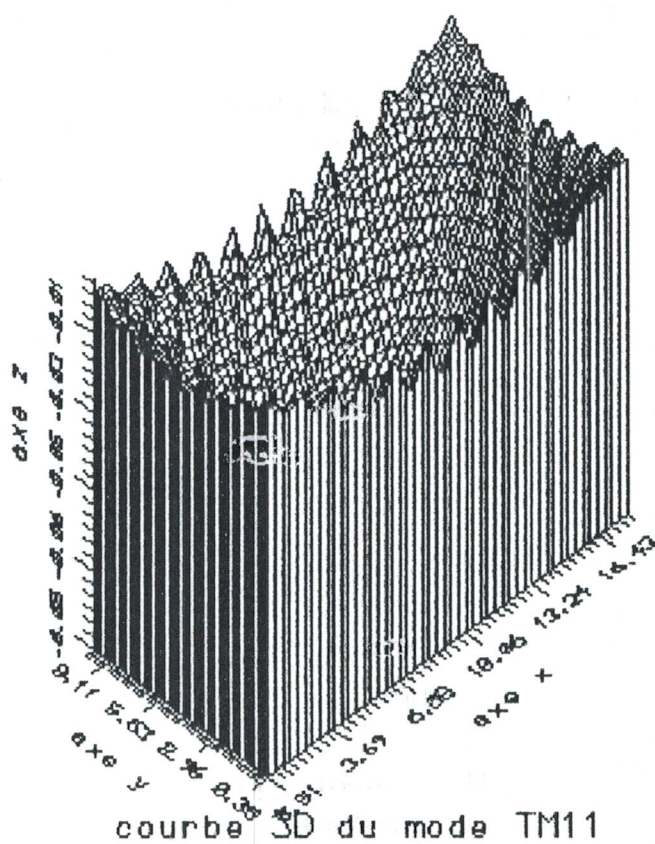
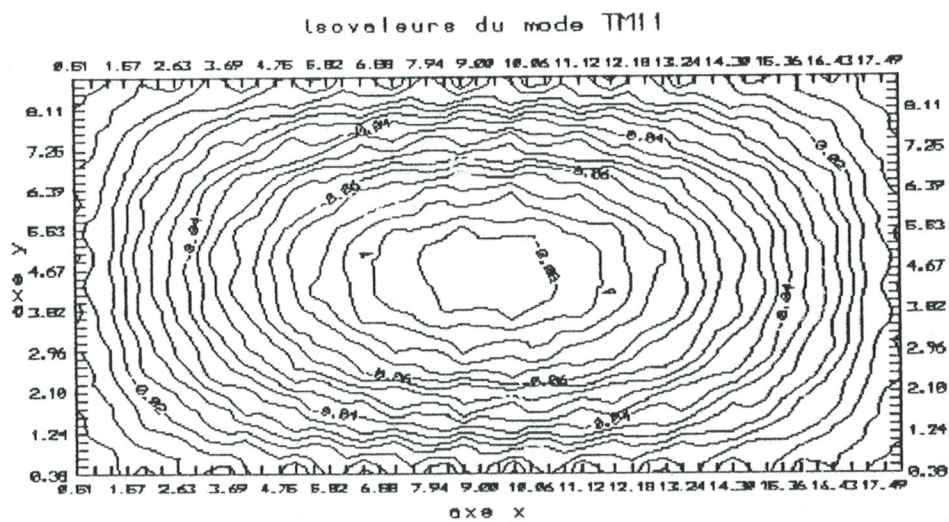


Figure II-19 : Cartographie du champ électrique  $E_z$  du mode TM11

## II-C-2) LIGNE COAXIALE :

On appelle ligne coaxiale un assemblage comportant un conducteur cylindrique circulaire de rayon  $a$  placé à l'intérieur d'un tube conducteur de rayon interne  $b$ , l'espace situé entre les deux conducteurs étant rempli de matière isolante (diélectrique) de permittivité relative  $\epsilon_r$ .

Dans ce type de ligne à deux conducteurs, le mode fondamental est TEM. Les modes supérieurs sont constitués des modes TE et TM.

La section droite de la ligne est représentée sur la figure (II-20). Les dimensions imposées sont :  $a = 1 \text{ mm}$  et  $b = 2 \text{ mm}$ .

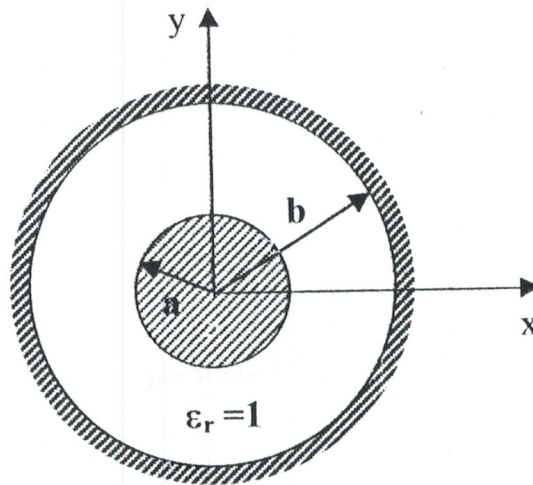


Figure II-20 : Ligne coaxiale

### II-C-2-1) MAILLAGE

Suite à la symétrie de la structure par rapport à ses axes  $ox$  et  $oy$ , l'étude se fera sur son quart dont le maillage est donné par la figure (II-21).

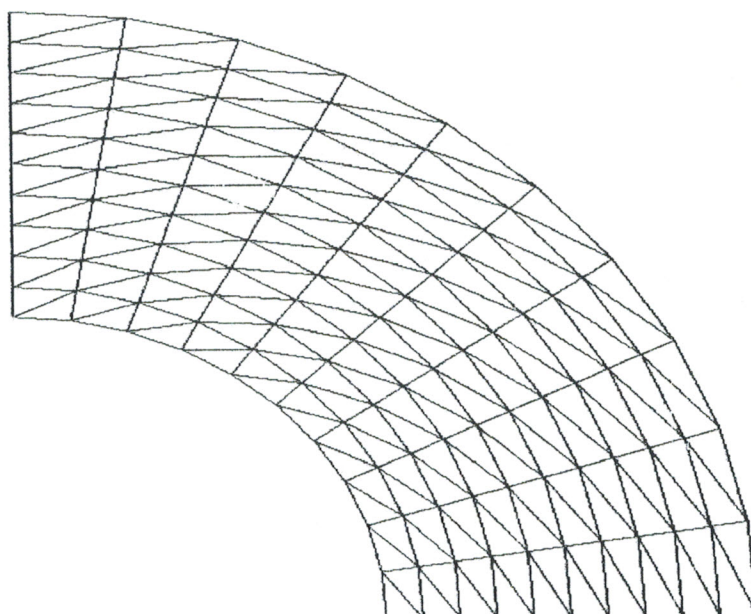


Figure II-21 : Maillage de la ligne coaxiale (200 éléments et 121 nœuds)

### II-C-2-1) PRESENTATION DES RESULTATS

A partir de la méthode des éléments finis, on aboutit aux fréquences de coupure des cinq premiers modes (tableau II-7).

Mode	$f_c$ (GHZ)	Nature de mode
1	0	TEM
2	64.037	1 <sup>er</sup> mode TE
3	124.57	2 <sup>ème</sup> mode TE
4	150.2625	1 <sup>er</sup> mode TM
5	165.376	2 <sup>ème</sup> mode TM

Tableau II-7 : Fréquences de coupure des cinq premiers modes propageant dans la ligne coaxiale

Le diagramme de dispersion des modes dans cette structure guidante pour une gamme de fréquence variant de 50 à 200 GHz est représenté sur la figure (II-22) suivante :

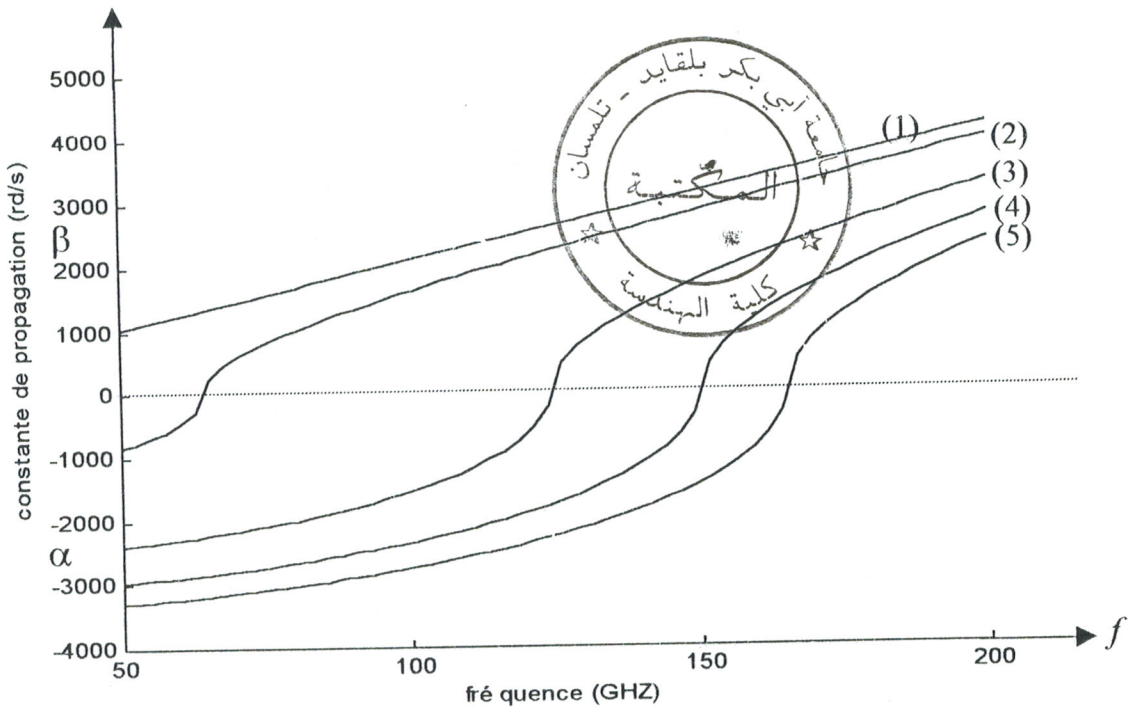


Figure II-22 : Diagramme de dispersion des modes dans la ligne coaxiale

### II-C-3) LIGNE MICRORUBAN

La ligne microruban est constituée d'un ruban métallique déposé sur une plaque diélectrique entièrement métallisée sur l'autre face (plan de masse) (Figure II-23).

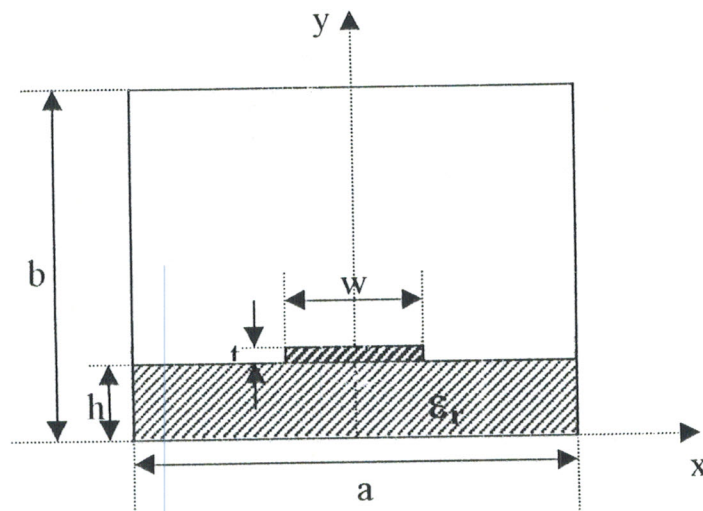


Figure II-23 : Section droite de la ligne microruban

Le substrat diélectrique est caractérisé par sa permittivité relative  $\epsilon_r$  et son épaisseur  $h$  tandis que le ruban est caractérisé par son épaisseur  $t$  et sa largeur  $w$ .

Les caractéristiques de la ligne microruban sont :

$a = 12.7 \text{ mm}$  ;  $b = 6.35 \text{ mm}$  ;  $h = w = 1.27 \text{ mm}$  ;  $t = 0.127 \text{ mm}$  ;  $\epsilon_r = 8.875$ .

### II-C-3-1) MAILLAGE

La structure de la figure (II-23) présente une symétrie suivant l'axe  $oy$ , donc l'étude se fera sur la moitié de la structure dont le maillage est donné sur la figure (II-24).

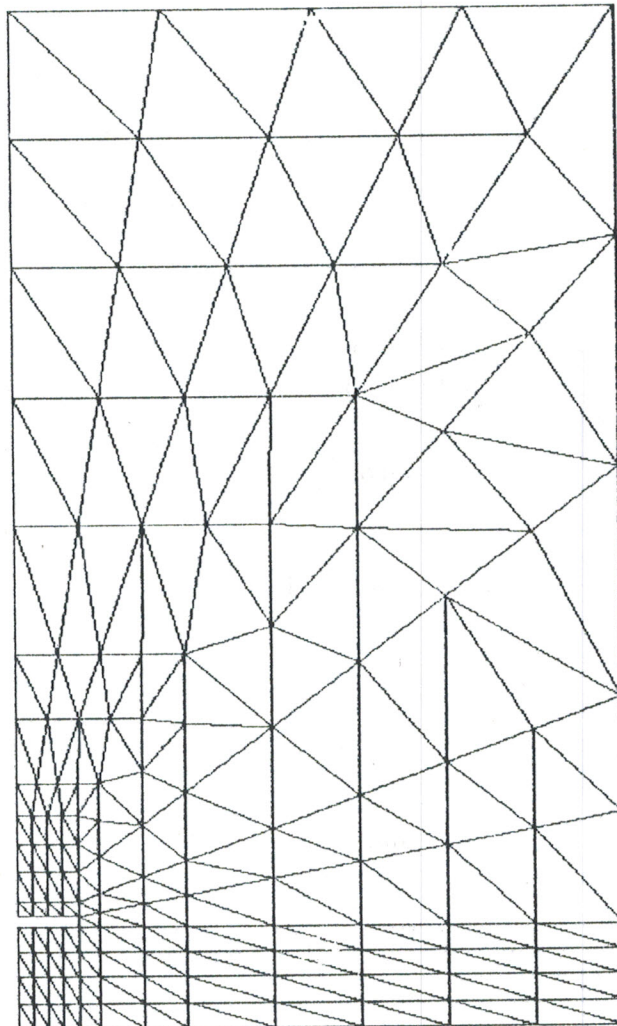


Figure II-24 : Maillage de la ligne microruban (272 éléments et 162 nœuds)

II-C-3-2) PRESENTATION DES RESULTATS

Les fréquences de coupure des cinq premiers modes propageant le long de la ligne microruban obtenues par la méthode des éléments finis sont les suivantes :

Mode	$f_c (GHZ)$
1	0
2	10.8967
3	15.1447
4	17.1398
5	20.683

Tableau II-8 : Fréquences de coupure des cinq premiers modes propageant dans la ligne microruban

La ligne microruban est caractérisée par son diagramme de dispersion présenté sur la figure (II-25).

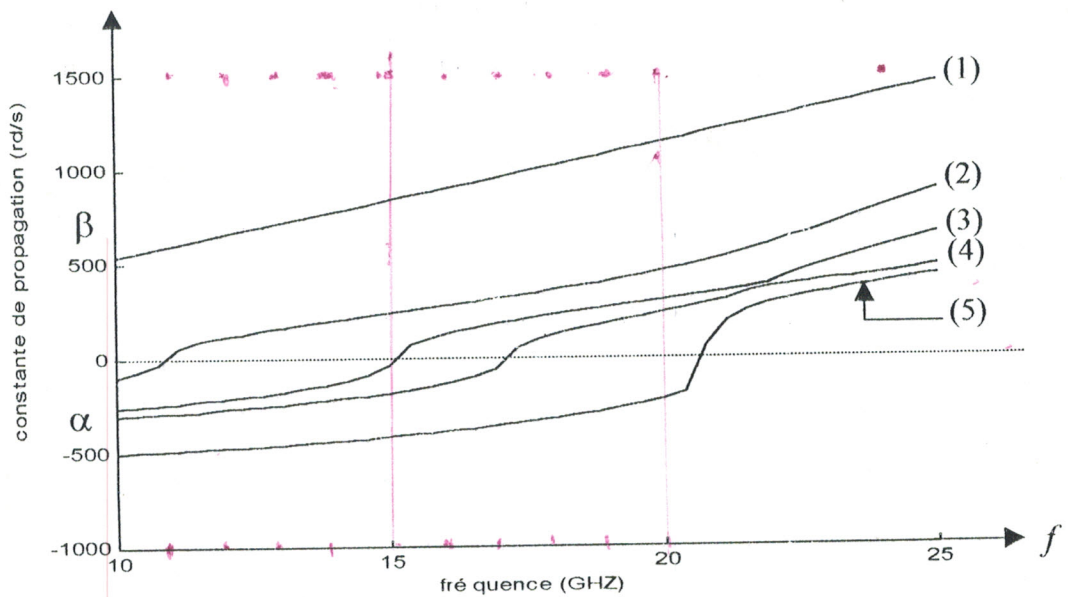


Figure II-25 : Diagramme de dispersion des modes dans une ligne microruban

### II-C-4) LIGNE MICRORUBAN A FENTE

Soit la ligne microruban d'épaisseur  $t$  donnée sur la figure (II-26).

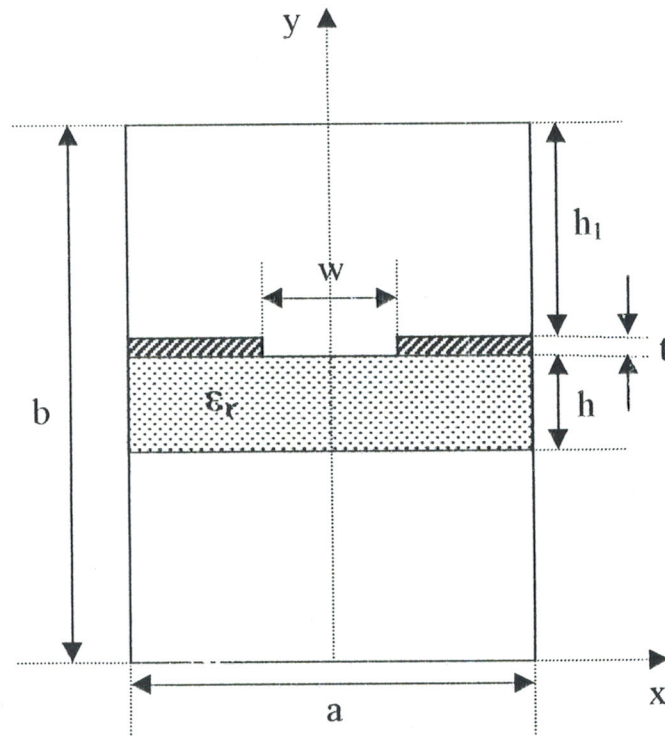


Figure II-26 : Ligne microruban à fente

Les dimensions géométriques imposées sont :

$$a = 3.556 \text{ mm}; b = 7.112 \text{ mm}; w = 1.1 \text{ mm}; h = 0.254 \text{ mm}; t = 0.0254 \text{ mm}; h_1 = 3.5306 \text{ mm}.$$

#### II-C-4-1) MAILLAGE

La structure de la figure (II-26) présente une symétrie selon l'axe  $oy$ , alors l'étude se fera sur la moitié de la structure. Le maillage est illustré sur la figure (II-27).

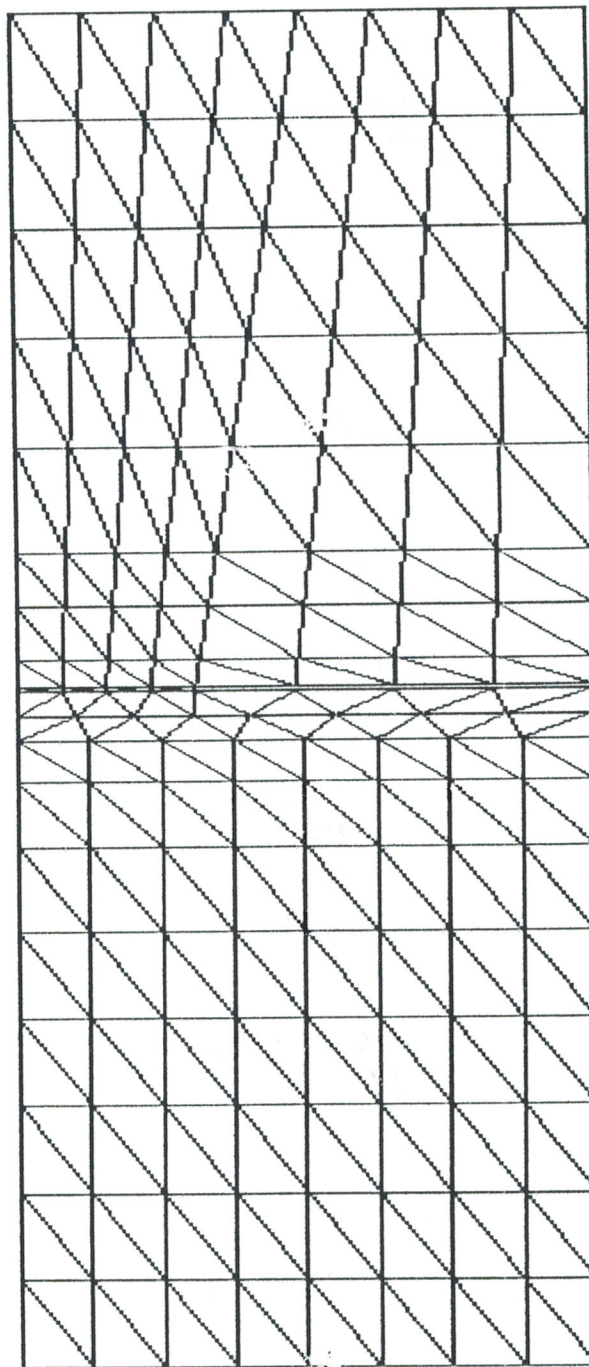


Figure II-27 : Maillage de la moitié de la ligne microruban à fente  
(296 éléments et 180 nœuds)



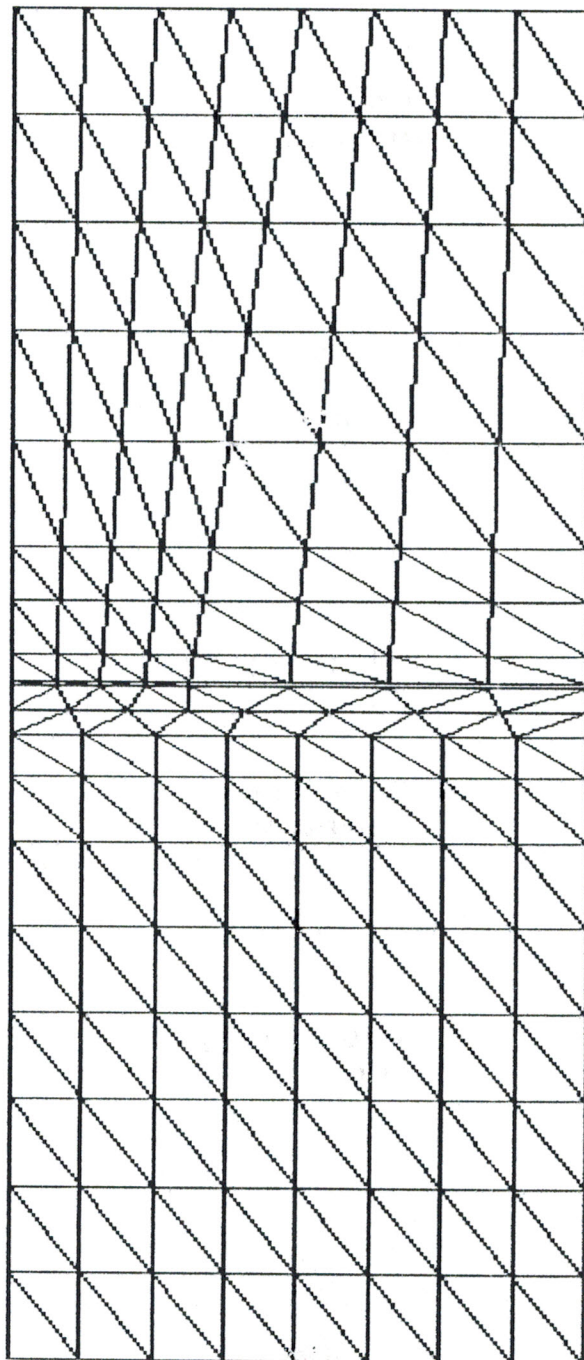


Figure II-27 : Maillage de la moitié de la ligne microruban à fente  
(296 éléments et 180 nœuds)

## II-C-4-2) PRESENTATION DES RESULTATS

Les fréquences de coupure des sept premiers modes sont données sur le tableau (II-9).

Modes \ Méthodes	$f_c$ (GHZ) [16]	$f_c$ (GHZ) MEF	$\Delta f/f$ (%)
1	15.561	14.879	4.4
2	42.123	42.108	0.0
3	49.699	48.961	1.5
4	82.397	81.453	1.1
5	84.029	83.503	0.6
6	84.370	84.704	0.4
7	91.281	87.951	3.7

Tableau II-9 : Fréquences de coupure des sept premiers modes propageant dans la ligne microruban à fente

Le tableau (II-9) présente les différentes variations entre les résultats de la référence [16] et ceux obtenus par la méthode des éléments finis.

Le diagramme de dispersion des modes de cette ligne microruban est présenté sur la figure suivante :

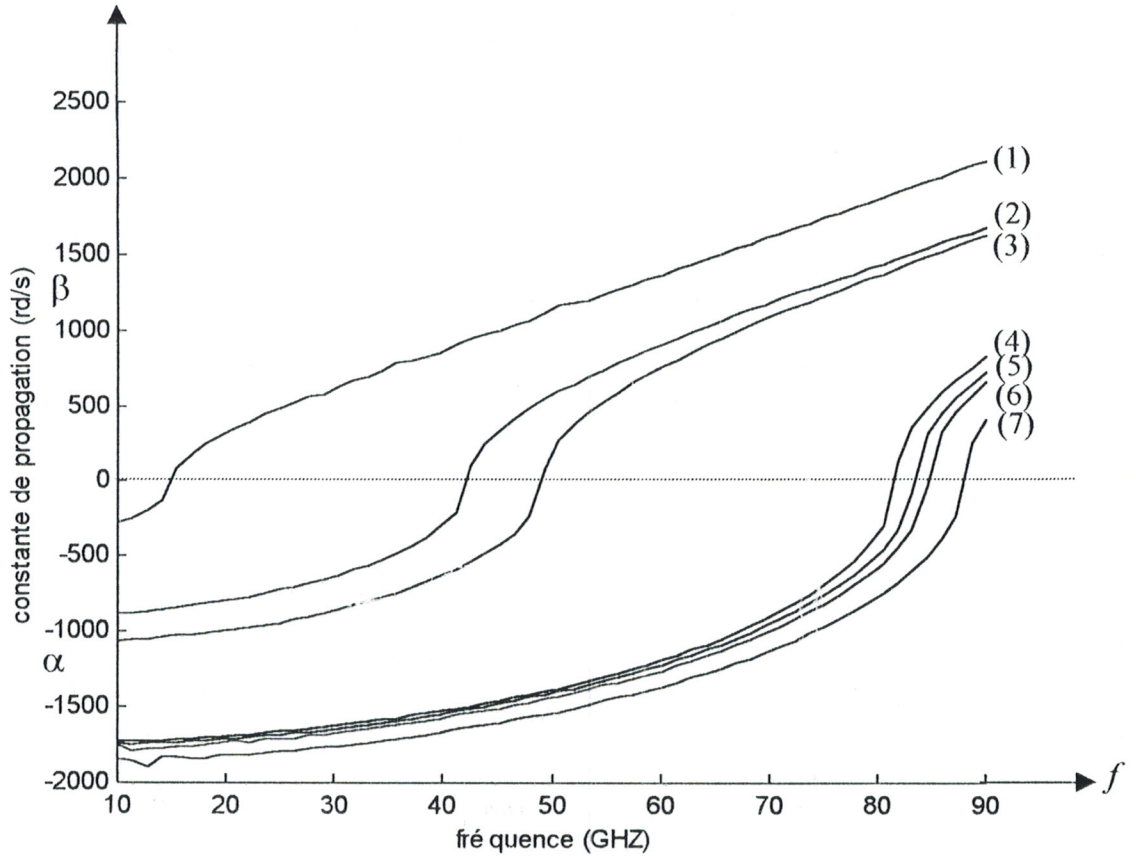


Figure II-28 : Diagramme de dispersion des modes dans la ligne microruban à fente

## II-D/ CONCLUSION

Nous venons de montrer que nous disposons d'un outil efficace, à base de la méthode des éléments finis, capable d'analyser toute configuration de lignes de transmission. Les résultats de cette étude concernent les fréquences de coupure, les constantes de propagation (affaiblissement et vitesse de phase), la cartographie du champ électromagnétique et l'identification des modes susceptibles d'être excités dans ces structures.

Cette analyse concerne toute fois les guides blindés par un conducteur métallique parfait. Si l'on retire cette couverture métallique, la structure devient ouverte et rayonne son champ électromagnétique dans l'espace environnant. Ce phénomène est étudié en détail dans le chapitre suivant en analysant le comportement d'un guide ouvert irradié par une onde.

## **CHAPITRE III**

# **CARACTERISATION DE LA DIFFRACTION DES ONDES PAR DES GUIDES DIELECTRIQUES OUVERTS : GUIDE IMAGE**

### III-A/ INTRODUCTION

Les ondes électromagnétiques peuvent être guidées dans des diélectriques par réflexion totale sur des interfaces diélectrique-conducteur parfait tels que les guides métalliques, ou par réflexion partielle sur des interfaces diélectrique-diélectrique (figure III-1) tels que la fibre optique, le guide image, ...

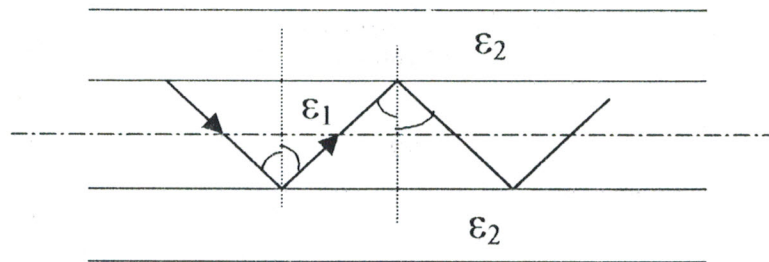


Figure III-1 : propagation dans un guide diélectrique (fibre optique)

On s'intéresse dans cette étude aux guides diélectriques ouverts, et en particulier au guide image qui remplace les lignes conventionnelles (lignes coaxiales) dans les circuits millimétriques où la présence des conducteurs métalliques est déconseillée à cause de leurs pertes excessives.

Dans ces guides diélectriques inhomogènes, l'onde électromagnétique se propage dans le diélectrique et dans l'air. Nous présentons dans ce chapitre des méthodes approximatives d'analyse de ces guides et par la suite nous élaborons un modèle numérique général (MEF) d'étude de la diffraction des ondes (TE et TM) par ces structures.

### III-B/ METHODES APPROXIMATIVES D'ANALYSE DU GUIDE IMAGE

#### III-B-1) CARACTERISTIQUES FONDAMENTALES [17], [18]

##### III-B-1-1) GEOMETRIE DU GUIDE IMAGE DIELECTRIQUE

Le guide image diélectrique est une structure formée par un ruban diélectrique placé sur un plan métallique comme indiqué sur la figure (III-2). Le diélectrique, de constantes diélectriques relatives ( $\epsilon_r, \mu_r = 1$ ), est en général entouré d'air ( $\epsilon_r = 1$ ).

Physiquement, le ruban diélectrique est supporté par le plan métallique dont la présence rend identique la propagation des ondes électromagnétiques dans ce guide image de dimension ( $2a \times b$ ) à celle dans un guide rectangulaire isolé de même permittivité et de

dimension ( $2a \times 2b$ ). Ce plan métallique joue donc le rôle d'un miroir. D'où le nom "guide image".

Le guide image diélectrique étant une structure ouverte, il est caractérisé par un champ exponentiellement décroissant à partir de l'interface diélectrique - air et par un facteur de propagation  $e^{-jk_z z}$  dans la direction longitudinale du guide ;  $k_z$  étant la constante de propagation longitudinale.

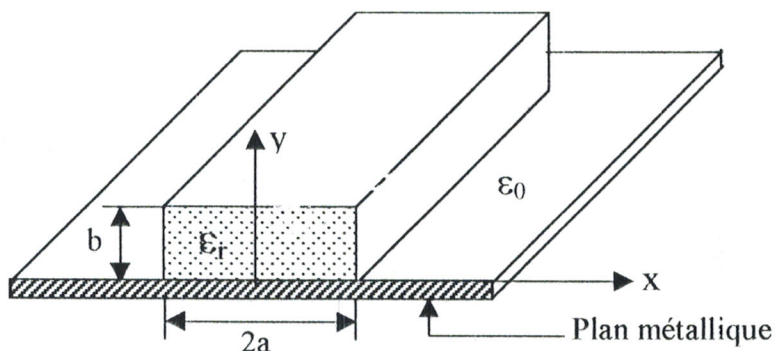


Figure III-2 : Guide image diélectrique

**III-B-1-2) MODES DE PROPAGATION**

Un guide image peut supporter une série de modes guidés  $E_y^{m,n}, E_x^{m,n}, TE^{m,n}, TM^{m,n}$  et des modes non guidés qui ont un spectre continu.

Les modes guidés  $E_y^{m,n}$  dans un guide image sont hybrides, c'est à dire qu'ils ont six composantes du champ électromagnétique. Cependant ces modes sont caractérisés par un champ électrique  $E_y$  et un champ magnétique  $H_x$  dominants ; les autres composantes sont beaucoup plus faibles par rapport à  $H_x$  et  $E_y$ .

Les numéros modaux dans les directions  $x$  et  $y$ , désignés respectivement par  $m$  et  $n$ , indiquent le nombre de demi-périodes (extrémum) de variation du champ à l'intérieur du guide image.

### III-B-2) MÉTHODES D'ANALYSE

Le guide image a fait l'objet de nombreuses études [11], [18,19] qui ont, mis en œuvre un certain nombre de méthodes d'analyse tant numériques (très performantes permettant de connaître avec précision les caractéristiques du guide) qu'analytiques (bien qu'approximatives ou approchées, sont en mesure de déterminer de façon rapide et fiable les paramètres pratiques du guide image).

Parmi les méthodes analytiques pour la conception et l'étude du guide image diélectrique, on note en particulier celles proposées successivement par E.A.J. MARCATILI [18] et R.M. KNOX et P.P. TOULIOS [19].

#### III-B-2-1) METHODE DE MARCATILI [18]

##### III-B-2-1-1) PRINCIPE

MARCATILI suppose qu'une grande partie de l'énergie du mode guidé est concentrée dans la tige diélectrique alors que le champ décroît exponentiellement à l'extérieur du guide. Dans certaines régions, ce champ est si faible que l'on peut le négliger.

Se basant sur de telles hypothèses, il a étudié les caractéristiques de la propagation des modes guidés.

##### III-B-2-1-2) CARACTERISTIQUES DE PROPAGATION

Conformément à ce qui a été expliqué auparavant, la méthode de MARCATILI a été proposée pour l'étude des modes guidés dans un guide diélectrique rectangulaire isolé de permittivité  $\epsilon_r$  et de dimensions  $(2a \times 2b)$  comme le montre la figure (III-3).

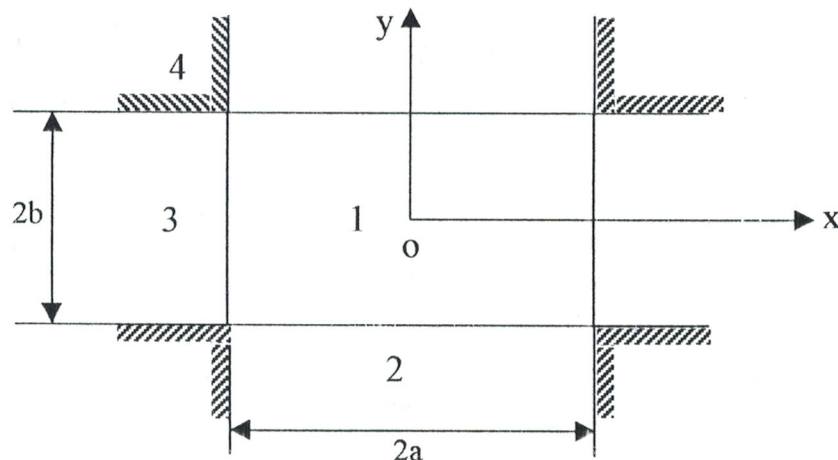


Figure III-3 : section droite du guide diélectrique



Pour faciliter l'étude de ce guide, MARCATILI a posé les hypothèses suivantes : dans une section droite du guide, les champs électromagnétiques des modes guidés sont fortement concentrés à l'intérieur du guide diélectrique (zone 1) alors que dans les zones 2 et 3, il y a une décroissance exponentielle du champ lorsqu'on s'éloigne de l'interface diélectrique - air.

Il n'y a pas de propagation des ondes dans les zones 4 (hachurées), les champs électrique et magnétique y sont supposés négligeables.

Ainsi, en tenant compte des hypothèses précédentes, on peut écrire les expressions du champ électromagnétique dans chaque zone par simple analogie avec des guides plans [20]. Pour les modes  $E_y^{m,n}$ , on a alors :

$$\text{Zone 1 : } E_{y1} = E_0 \cos k_x x \cos k_y y \quad |x| < a, |y| < b \quad \text{(III-1)}$$

$$\text{Zone 2 : } E_{y2} = E_0 \cos k_x x \cos k_y b e^{-k_{y0} (|y|-b)} \quad |x| < a, |y| > b \quad \text{(III-2)}$$

$$\text{Zone 3 : } E_{y3} = E_0 \cos k_x a \cos k_y y e^{-k_{x0} (|x|-a)} \quad |x| > a, |y| < b \quad \text{(III-3)}$$

$$\text{Zone 4 : } E_{y4} = 0 \quad |x| > a, |y| > b \quad \text{(III-4)}$$

Où la dépendance  $\exp(j\omega t - jk_z z)$  est sous entendue.

$\omega$  : représente la fréquence angulaire.

$k_x, k_y$  : sont respectivement les constantes de propagation suivant les directions  $x$  et  $y$  à l'intérieur du guide.

$k_{x0}, k_{y0}$  : sont respectivement les constantes de propagation suivant les directions  $x$  et  $y$  à l'extérieur du guide (dans l'air).

A partir de l'expression de  $E_y$ , les autres composantes peuvent être déterminées par utilisation des relations suivantes [20] :

• Zone 1 :

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{k_x^2 + k_z^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} \\ E_z = \frac{1}{k_x^2 + k_z^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} \\ H_x = \frac{-\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r k_z}{k_x^2 + k_z^2} E_y \\ H_y = 0 \\ H_z = \frac{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r}{k_x^2 + k_z^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \quad \text{(III-5)}$$

• Zone 2 et 3 :

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{-k_{x0}^2 + k_z^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} \\ E_z = \frac{1}{-k_{x0}^2 + k_z^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} \\ H_x = \frac{-\omega \varepsilon_0 k_z}{-k_{x0}^2 + k_z^2} E_y \\ H_y = 0 \\ H_z = \frac{j\omega \varepsilon_0}{-k_{x0}^2 + k_z^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \quad \text{(III-6)}$$

avec :

$$\begin{cases} k_0^2 \varepsilon_r - k_y^2 = k_0^2 + k_{y0}^2 = k_z^2 + k_x^2 \\ k_0^2 \varepsilon_r - k_x^2 = k_0^2 + k_{x0}^2 = k_z^2 + k_y^2 \end{cases} \quad \text{(III-7)}$$

et  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$c_0$  : représente la vitesse de la lumière dans le vide.

En raccordant les composantes tangentielles sur les interfaces  $x = \pm a$  et  $y = \pm b$  (conditions de continuité), on obtient les équations de dispersion suivantes :

$$\begin{cases} k_x a = \frac{m\pi}{2} - \text{Arc tan g} \left( \frac{k_x}{k_{x0}} \right) \\ k_y b = \frac{n\pi}{2} - \text{Arc tan g} \left( \frac{k_y}{k_{y0} \varepsilon_r} \right) \end{cases} \quad \text{(III-8)}$$

avec  $m, n = 1, 2, 3, \dots$

La résolution des équations (III-7 et III-8) nous permet de déterminer alors la constante de propagation longitudinale  $k_z$  puisque :

$$k_z = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_r - k_x^2 - k_y^2} \quad \text{(III-9)}$$

et par suite les expressions du champ électromagnétique données par les relations (III-5) et (III-6).

### III-B-2-2) METHODE DE LA CONSTANTE DIELECTRIQUE EFFECTIVE (C.D.E) [19], [21], [22]

#### III-B-2-2-1) PRINCIPE

La méthode proposée par MARCATILI est imprécise aux basses fréquences à proximité de la coupure pour un mode guidé. Cette imprécision est due au fait qu'une partie de l'énergie du mode guidé est négligée dans l'analyse.

Pour remédier à cette imprécision, KNOX et TOULIOS ont étendu la théorie de MARCATILI en prenant en compte les champs dans les zones hachurées (Figure III-3).

#### III-B-2-2-2) NOTION DE LA CONSTANTE DIELECTRIQUE EFFECTIVE $\epsilon_{re}$

KNOX et TOULIOS ont introduit le concept de la Constante Diélectrique Effective (C.D.E).

La méthode de CDE consiste à transformer le guide image à traiter en deux guides plans (l'un suivant  $x$ , l'autre suivant  $y$ ), selon la figure (III-4). Ces deux guides plans sont dépendants l'un de l'autre par la constante diélectrique effective  $\epsilon_{re}$ .

En effet, les équations de dispersion (III-8) obtenues par MARCATILI correspondent à celles des modes TE et TM dans les guides plans [20] et elles sont indépendantes l'une de l'autre.

L'idée de KNOX et TOULIOS est de faire apparaître une modification de sorte que les deux équations (III-8) soient couplées.

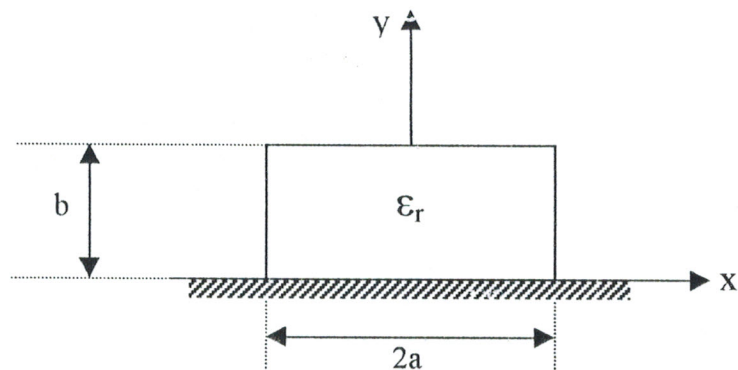
Pour ce faire, au lieu de résoudre directement les deux équations indépendantes, ils introduisent une constante diélectrique effective  $\epsilon_{re}$  définie par :

$$\epsilon_{re} k_0^2 = k_0^2 \epsilon_r - k_y^2 = k_z^2 \quad \text{guide plan}$$

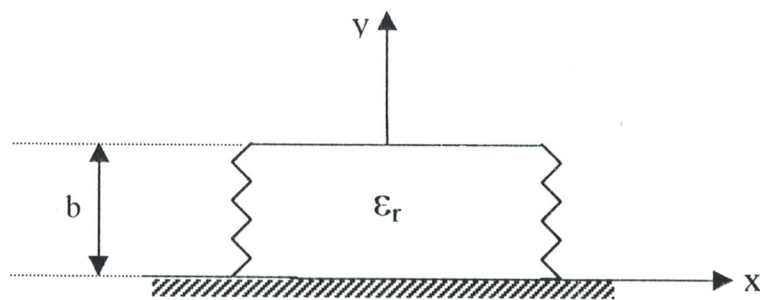
$$\text{où} \quad \epsilon_{re} = \epsilon_r - \left( \frac{k_y}{k_0} \right)^2 \quad \text{(III-10)}$$

#### III-B-2-2-3) DETERMINATION DES CONSTANTES DE PROPAGATION

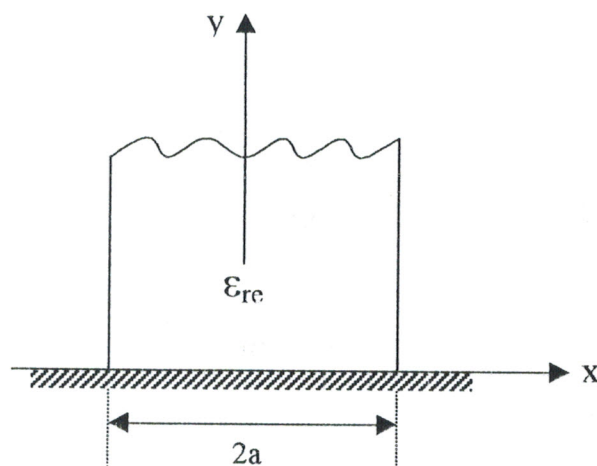
Ayant introduit la constante  $\epsilon_{re}$ , le guide image à étudier (Fig. III-4.a) est décomposé en deux guides plans (Fig. III-4.b et Fig. III-4.c).



(a) : guide image à étudier



(b) : guide plan en x (longueur suivant  $x \rightarrow \infty$ )



(c) : guide plan en y (longueur suivant  $y \rightarrow \infty$ )

Figure III-4 : principe de la méthode de CDE

D'autre part, d'après la théorie des images [23], les guides plans dans la figure (III-4) peuvent être représenté par les formes indiquées sur la figure (III-5) sans que les caractéristiques de propagation soient modifiées.

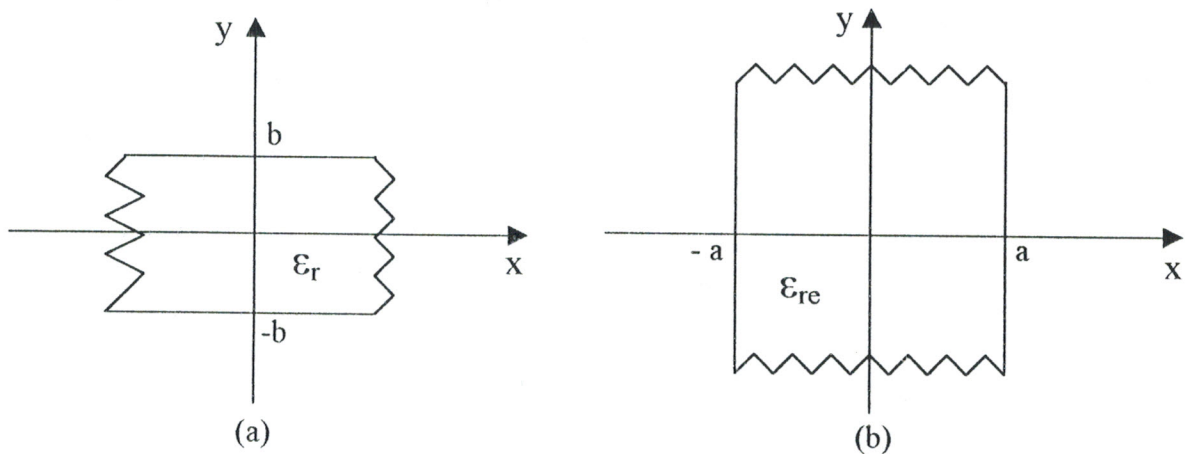


Figure III-5 : guides plans équivalents des guides de la figure (III-4)

▪ DÉTERMINATION DE  $k_y$  :

La constante de propagation suivant  $y$  peut être déterminée à partir de celle du guide plan de la figure (III-5.a) où l'on considère la propagation des modes TM pour lesquels les champs sont indépendants de  $x$ .

L'expression de  $k_y$  est donnée par la formule suivante :

$$k_y b = \frac{n\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{k_y}{k_{y0} \epsilon_r} \right) \quad (\text{III-11})$$

avec :

$$k_{y0} = \sqrt{(\epsilon_r - 1)k_0^2 - k_y^2} \quad (\text{III-12})$$

▪ DÉTERMINATION DE  $k_x$  :

La constante de propagation suivant la direction  $x$  peut être déterminée à partir de celle du guide plan de la figure (III-5.b). Cette fois on considère les modes TE pour lesquels les champs sont indépendants de  $y$ .

$$k_x a = \frac{m\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{k_x}{k_{x0}} \right) \quad (\text{III-13})$$

avec :

$$k_{x0} = \sqrt{(\epsilon_{re} - 1)k_0^2 - k_x^2} \quad (\text{III-14})$$

▪ DÉTERMINATION DE  $k_z$  :

Les constantes de propagation suivant  $x$  et  $y$  étant connues, on déduit la constante de propagation suivant  $z$  à partir de la relation (III-15).

$$k_z = \sqrt{k_0^2 \epsilon_r - k_x^2 - k_y^2} \tag{III-15}$$

ou

$$k_z = \sqrt{k_0^2 \epsilon_{re} - k_x^2}$$

avec :

$$\epsilon_{re} = \epsilon_r - \left(\frac{k_y}{k_0}\right)^2$$



III-B-2-3) DISCUSSION

Les équations de dispersion obtenues à l'aide de ces techniques ont été résolues dans le cadre du logiciel MATLAB et les courbes de dispersion sont présentées sur la figure (III-6).

En les comparant, on remarque effectivement que les deux méthodes concordent bien pour les fréquences au-dessus de la coupure. Par contre, lorsque la fréquence diminue, des écarts apparaissent.

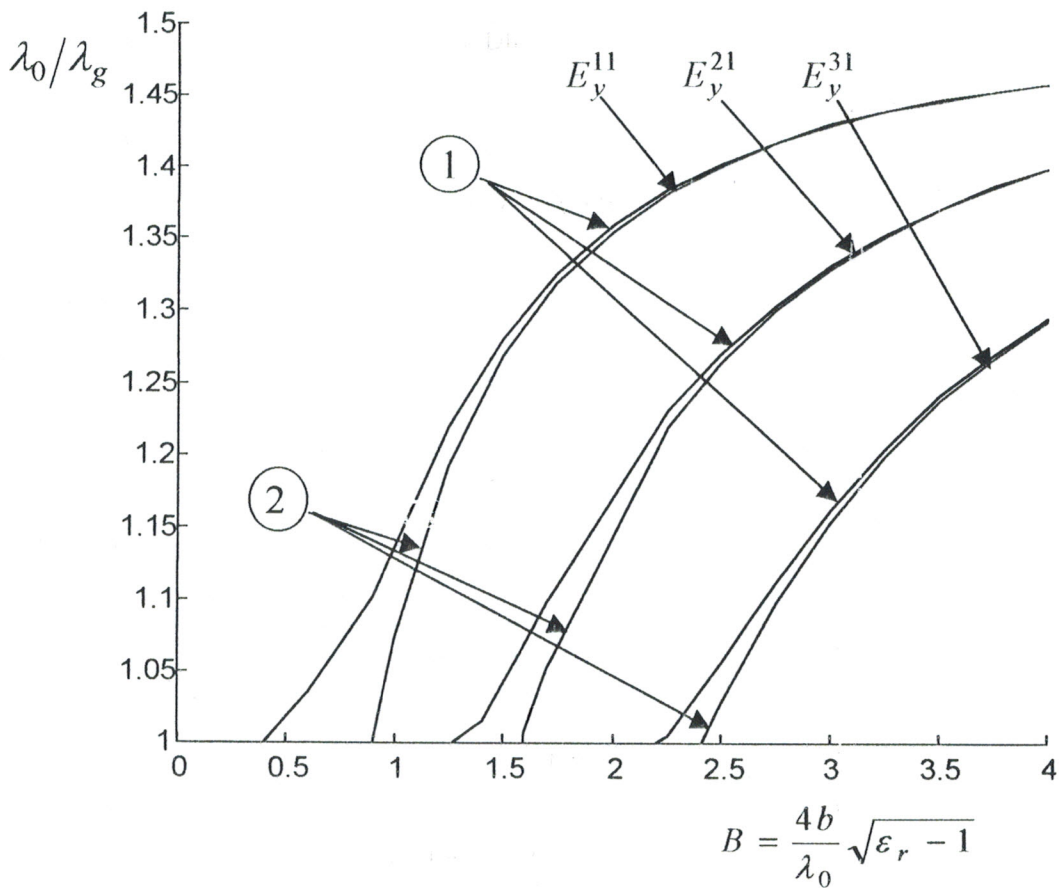
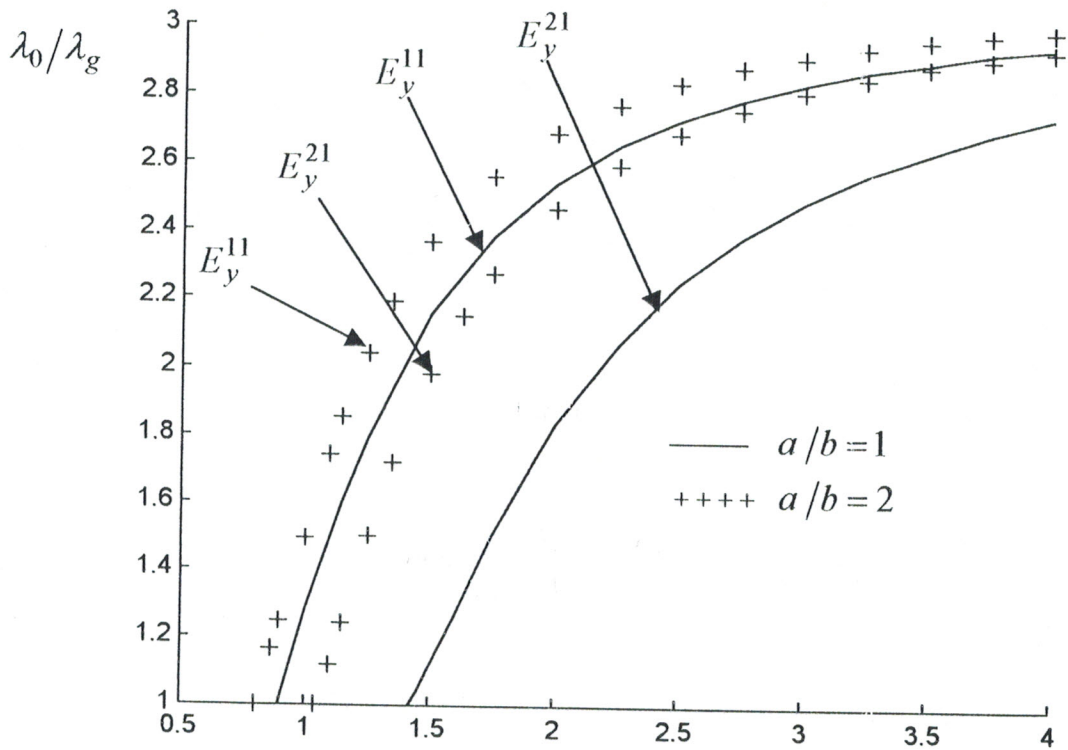


Figure III-6 : Courbes de dispersion du guide diélectrique ( $\epsilon_r = 2,25$ ,  $a/b = 1$ ) obtenues par utilisation de méthodes de : (1) CDE ; (2) MARCATILI

La méthode CDE , appliquée aux guides images diélectriques de différentes constantes diélectriques  $\epsilon_r$  et de différents rapports  $r \left( r = \frac{a}{b} \right)$ , donne les résultats illustrés sur les figures (III-7) et (III-8).



$$B = \frac{4b}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_r - 1}$$

Figure III-7 : Courbes de dispersion du guide image en Alumine ( $\epsilon_r = 9,6$ ) obtenues par utilisation de la méthode de CDE pour différents

rapports  $\frac{a}{b}$ .

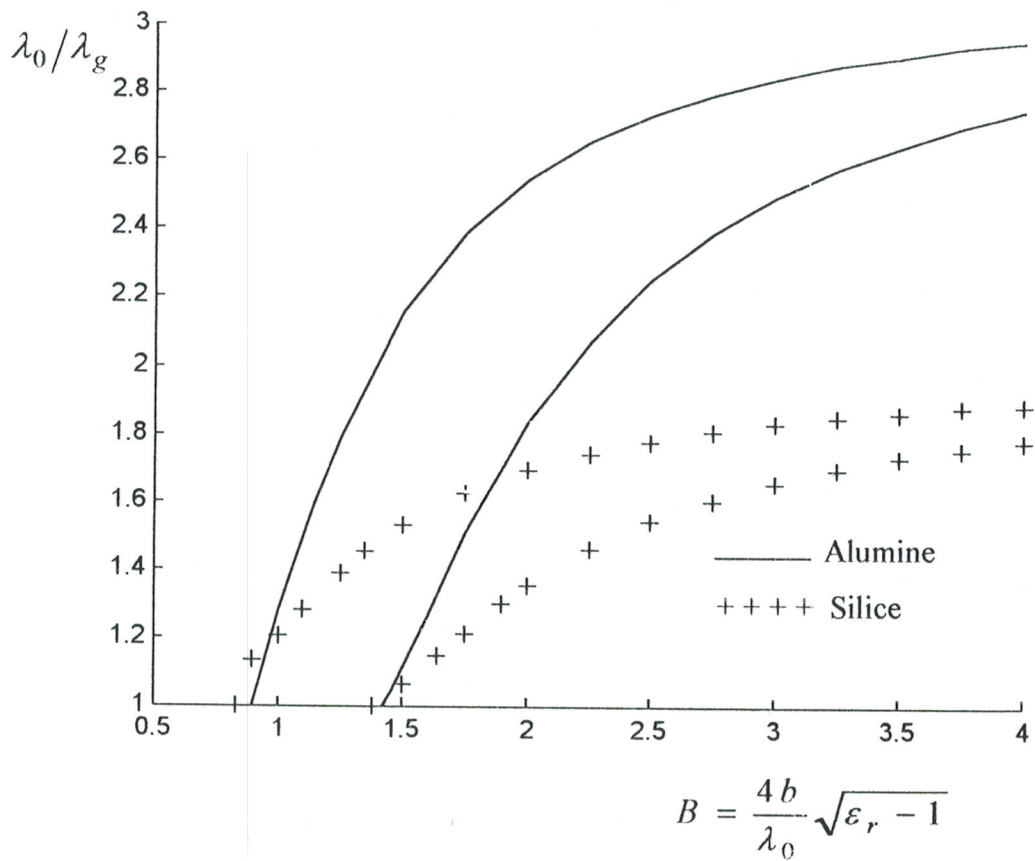


Figure III-8 : Courbes de dispersion du guide image ( $a/b = 1$ ) en :  
 (a) Alumine ( $\epsilon_r = 9,6$ ) ; (b) Silice ( $\epsilon_r = 3,83$ )  
 obtenues par la méthode de CDE



On remarque que :

- Lorsque le rapport  $r = \frac{a}{b}$  augmente (figure III-7), la séparation entre les modes décroît .

Autrement dit , la bande utile d'opération monomode ( $E_y^{11}$ ) est réduite.

- L'augmentation de la constante diélectrique  $\epsilon_r$  a la même conséquence que celle du rapport  $r$  (Fig. III-8).

### III-B-3) CARACTERISATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Les modes guidés dans le guide image sont caractérisés par un diagramme de dispersion et une distribution du champ électromagnétique.

Dans ce paragraphe, nous présentons la méthode de calcul du champ électromagnétique d'un guide image entouré d'air (figure III-9). Le domaine d'étude étant divisé en quatre zones, nous développons les expressions des composantes des champs électrique et magnétique dans chacune de ces zones.

#### III-B-3-1) EXPRESSION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

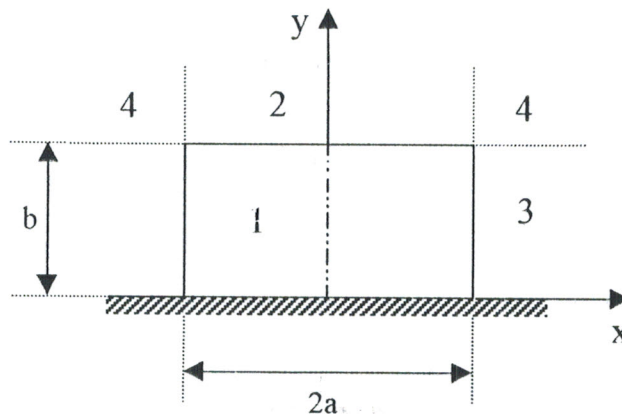


Figure III-9 : guide image diélectrique

Pour développer les expressions du champ électromagnétique dans chaque zone, nous considérons l'équation de Helmholtz ( III-16 ) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) E_z = 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) H_z = 0 \end{cases} \quad (\text{III-16})$$

Les solutions de ce système nous permettent de déterminer les composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$ .

Partant de celles-ci, nous pouvons déduire les composantes transversales par l'application des relations suivantes [20] :

$$\begin{cases} (k^2 - k_z^2) \vec{E}_t = jk \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} (\vec{u}_z \times \nabla_t H_z) - jk_z \nabla_t E_z \\ (k^2 - k_z^2) \vec{H}_t = -jk \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu}} (\vec{u}_z \times \nabla_t E_z) + jk_z \nabla_t H_z \end{cases} \quad (\text{III-17})$$

soit :

$$E_x = \frac{j}{(k^2 - k_z^2)} \left[ -k_z \frac{\partial H_z}{\partial y} - k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \quad (\text{III-18})$$

$$E_y = \frac{j}{(k^2 - k_z^2)} \left[ k_z \frac{\partial H_z}{\partial x} - k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \right] \quad (\text{III-19})$$

$$H_x = \frac{j}{(k^2 - k_z^2)} \left[ \frac{k}{Z} \frac{\partial E_z}{\partial y} + k_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \quad (\text{III-20})$$

$$H_y = \frac{j}{(k^2 - k_z^2)} \left[ -\frac{k}{Z} \frac{\partial E_z}{\partial x} + k_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \quad (\text{III-21})$$

avec :

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad : \text{impédance de l'onde.}$$

$$k = k_0 \sqrt{\varepsilon_r}$$

Pour le guide image que nous traitons, nous supposons une décroissance exponentielle du champ dans les zones 2, 3 et 4. Ainsi en utilisant la méthode de séparation des variables, on obtient les solutions suivantes pour le champ électromagnétique :

$$\text{Zone 1: } \begin{cases} E_{z1} = E_0 \cos k_x x \sin k_y y \\ H_{z1} = H_0 \sin k_x x \cos k_y y \end{cases} \quad (\text{III-22})$$

$$\text{Zone 2: } \begin{cases} E_{z2} = E_0 \cos k_x x \sin k_y b e^{-k_{y0}(y-b)} \\ H_{z2} = H_0 \sin k_x x \cos k_y b e^{-k_{y0}(y-b)} \end{cases} \quad (\text{III-23})$$

$$\text{Zone 3: } \begin{cases} E_{z3} = E_0 \cos k_x a \sin k_y y e^{-k_{x0}(|x|-a)} \\ H_{z3} = H_0 \sin k_x a \cos k_y y e^{-k_{x0}(|x|-a)} \end{cases} \quad (\text{III-24})$$

Quant à la zone 4, les expressions de  $E_z$  et  $H_z$  sont obtenues approximativement par la continuité du champ sur les interfaces des zones (2-4) et (3-4). On a alors :

$$\text{Zone 4: } \begin{cases} E_{z4} = E_0 \cos k_x a \sin k_y b e^{-k_{x0}(|x|-a)-k_{y0}(y-b)} \\ H_{z4} = H_0 \sin k_x a \cos k_y b e^{-k_{x0}(|x|-a)-k_{y0}(y-b)} \end{cases} \quad (\text{III-25})$$

Les composantes transversales peuvent être déterminées par l'application des relations (III-18), (III-19), (III-20) et (III-21).

### III-B-3-2) DISTRIBUTION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Partant des expressions précédemment obtenues, il nous est possible de déduire les variations ainsi que le tracé des lignes des champs électrique et magnétique associés au guide image diélectrique.

Les lignes de champ électromagnétique du mode fondamental  $E_y^{11}$  du guide image en alumine ( $2a \times b = 2 \times 1 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_r = 9,6$ ) et celles du guide en réxolite ( $2a \times b = 1,5 \times 0,75 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_r = 2,54$ ) sont représentées sur la figure (III-10).

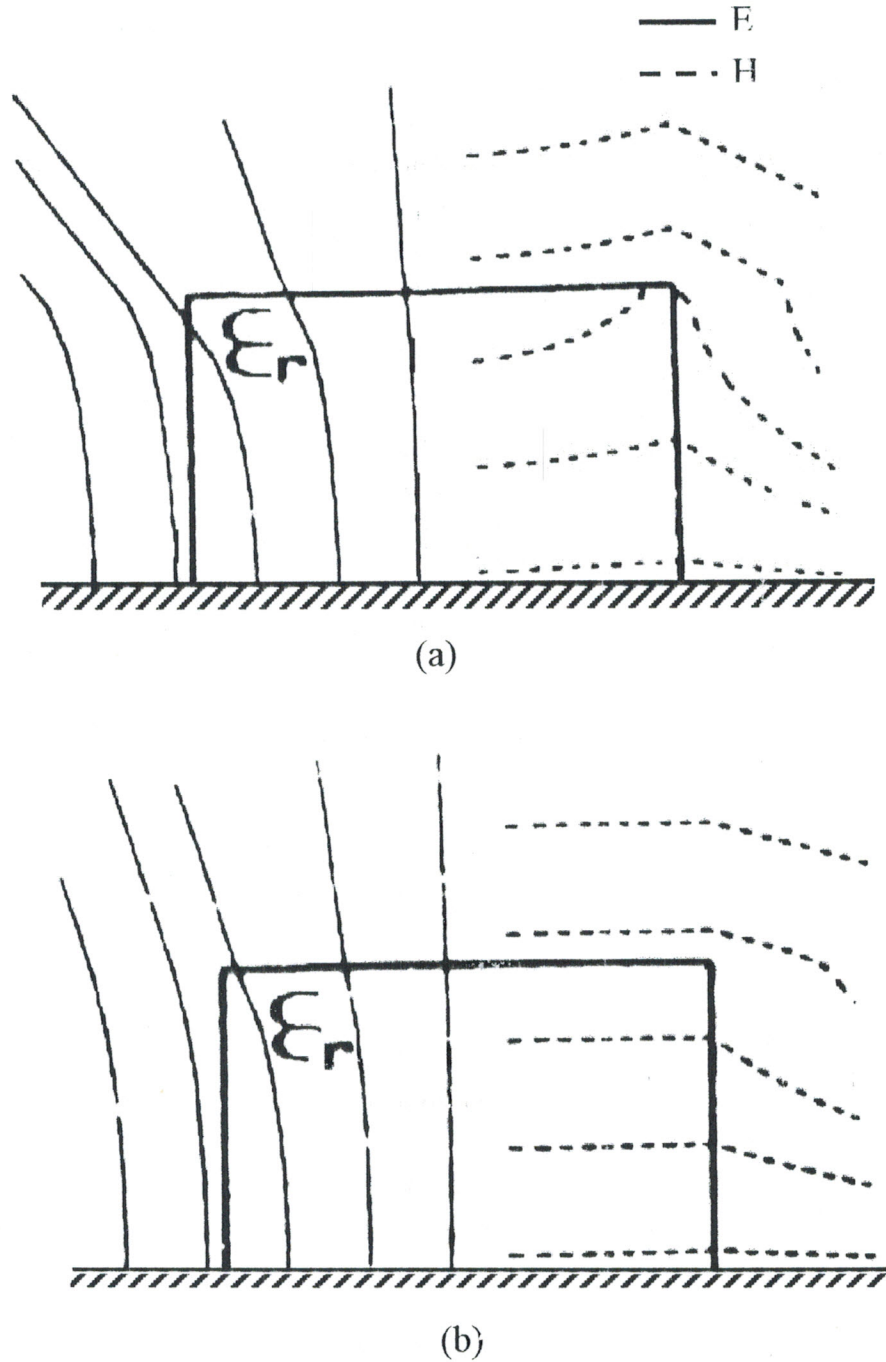


Figure III-10 : lignes de champ du mode  $E_y^{11}$  du guide image

(a) : en alumine à la fréquence  $f = 35 \text{ GHz}$

(b) : en réxolite à la fréquence  $f = 94 \text{ GHz}$

### III-B-4) CONCEPTION DU GUIDE IMAGE

Nous abordons maintenant les problèmes pratiques qui sont importants pour la conception et la réalisation des circuits millimétriques utilisant des guides images diélectriques.

#### III-B-4-1) CHOIX DU RUBAN DIELECTRIQUE

Le ruban diélectrique constitue l'essentiel du guide image. C'est lui qui détermine la performance de celui-ci. Ainsi le choix du matériau diélectrique et les dimensions du ruban diélectrique sont de première importance.

Pour la conception du guide image, il est important d'utiliser des matériaux diélectriques à faible pertes, solides, faciles à traiter.

Les dimensions ( $2a \times b$ ) et la permittivité ( $\epsilon_r$ ) du ruban diélectrique détermine le degré du confinement du champ et le mode de fonctionnement ( monomode ou multimode ) du guide image.

En pratique, elles peuvent être choisies telles que le guide fonctionne en monomode et que l'énergie du mode guidé soit bien confinée dans le diélectrique.

En particulier, le rapport  $r = \frac{a}{b} = 1$  permet au guide image de fonctionner sur la bande monomodale la plus large.

#### III-B-4-2) LIMITATIONS PRATIQUES

Il y a des problèmes pratiques associés à la fabrication du guide image. Par exemple, il est très difficile d'assurer un bon contact entre le ruban diélectrique et le plan métallique. Ceci est lié aux tolérances mécaniques du montage.

Un autre problème est lié aux matériaux adhésifs utilisés pour coller le ruban diélectrique sur le plan métallique. En effet, la plupart des matériaux adhésifs disponibles ont des pertes élevées aux fréquences millimétriques.

**III-B-5) RAYONNEMENT**

Pour des applications à des fréquences élevées, les pertes par rayonnement dans le guide image ouvert sont importantes. Ainsi il faut prendre des précautions pour éviter ou réduire un rayonnement excessif en utilisant [24] :

- soit un substrat diélectrique de grande permittivité
- soit faire usage d'un substrat de faible épaisseur.

Si ces deux précautions ne suffisent pas, il devient nécessaire de blinder le guide dans un boîtier métallique ou d'ajouter une couche diélectrique (enveloppe diélectrique) sur le diélectrique du guide image de manière à éviter la transmission des ondes à l'interface diélectrique- air de l'enveloppe.

**III-B-5-1) BLINDAGE METALLIQUE**

Le blindage métallique est un sérieux handicap dans les circuits intégrés micro-ondes ( C.I.M ) car il peut modifier la répartition des champs ( perturbation électromagnétique ).

**III-B-5-2) BLINDAGE DIELECTRIQUE ( ENVELOPPE DIELECTRIQUE )**

Dans ce cas, pour diminuer le rayonnement du guide image ouvert, on couvre le diélectrique du guide ( $\epsilon_{r1}$ ) par une enveloppe constituée par un autre diélectrique ( $\epsilon_{r2}$ ) de façon à piéger le signal propageant à l'intérieur du diélectrique ( Figure III-11).

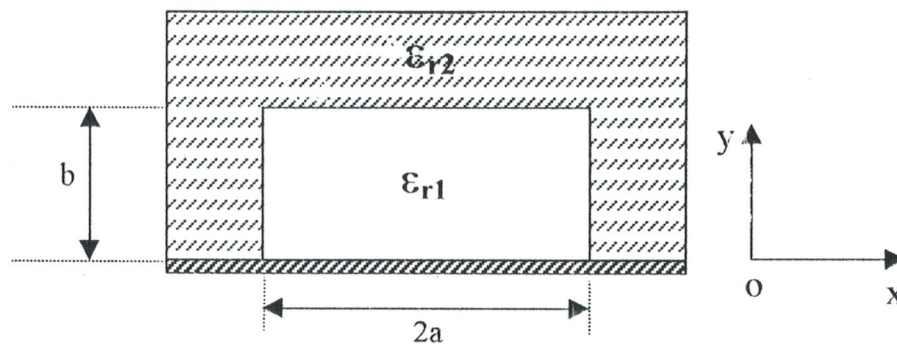


Figure III-11 : diélectrique ( $\epsilon_{r2}$ ) entourant la bande diélectrique ( $\epsilon_{r1}$ ) du guide image

III-B-5-2-1) REFLEXION SUR UNE INTERFACE PLANE ENTRE DEUX DIELECTRIQUES

Considérons deux milieux diélectriques de permittivités  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ , séparés par une surface plane  $\Sigma$  (Fig. III-12).

Soient  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles que font les directions de propagation des ondes dans chacun de ces milieux, par rapport à la normale à  $\Sigma$ .

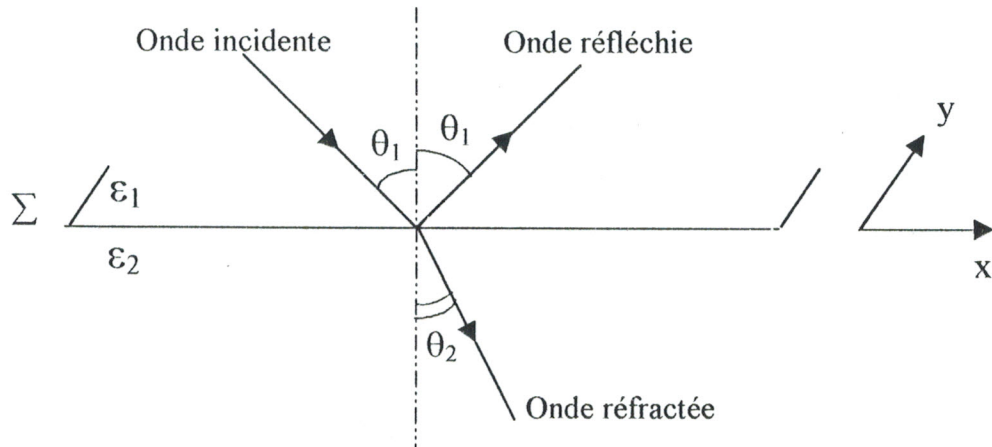


Figure III-12 : réflexion et réfraction à l'interface de deux milieux diélectriques

Le coefficient de réflexion du champ  $\vec{E}$  est donné respectivement par [5] :

$$R^{TE} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2} \quad \text{dans le cas TE} \quad (III-26)$$

$$R^{TM} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_2 - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_1}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_2 + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_1} \quad \text{dans le cas TM} \quad (III-27)$$

D'après la loi de Descartes :

$$\sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_1 = \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_2 \quad (III-28)$$

Si  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ , cela implique que  $\theta_1 < \theta_2$ . Les limites de variation de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (Figure III-12) sont donc :

$$0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1L} \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$$

L'angle  $\theta_{1L}$  est donnée par :

$$\sin \theta_{1L} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (III-29)$$

Si  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ,  $R_{TE} = R_{TM} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} > 0$  (III-30)

Si  $\theta_1 = \theta_{1L}$  et  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $R_{TE} = +1$  et  $R_{TM} = -1$

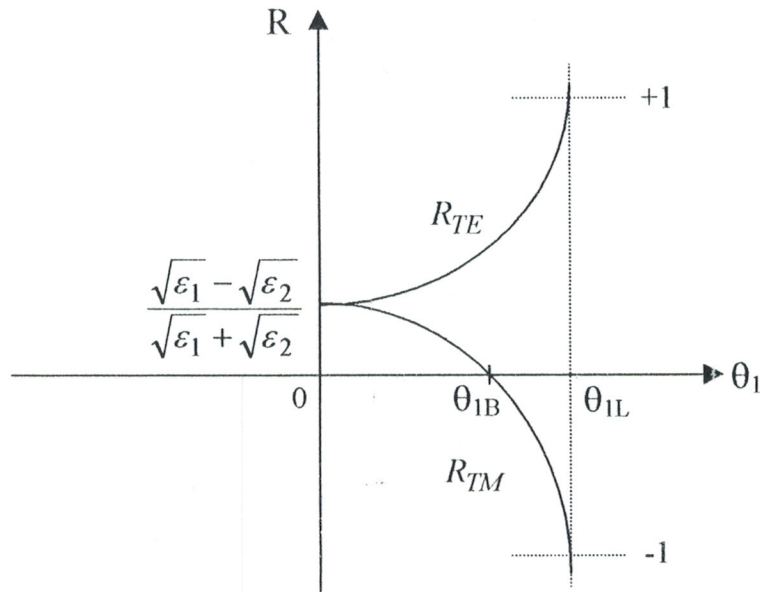


Figure III-13 : Variations de  $R_{TE}$  et  $R_{TM}$  pour  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1L}$

La figure (III-13) montre les variations de  $R_{TE}$  et  $R_{TM}$  quand  $\theta_1$  varie entre 0 et  $\theta_{1L}$ .

Nous notons qu'il y a une valeur de  $\theta_1$  pour laquelle  $R_{TM} = 0$  : c'est l'incidence

Brewsterienne correspondante à  $\theta_{1B} = \text{Arctg} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$ .

D'autre part, pour l'angle  $\theta_{1L} = \text{Arcsin} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$ , il y a réflexion totale dans les cas des modes TE et TM.

**III-B-5-2-2) MODES DE PROPAGATION**

La propagation en guides diélectriques (Figure III-11) se fait par modes TE et TM séparés, ou par modes TE et TM combinés, appelés modes hybrides et notés HE si le mode TE est prépondérant ou EH si le mode TM est prépondérant.



### III-B-6) CONCLUSION

Nous avons étudié par des méthodes approximatives les caractéristiques de propagation et la distribution du champ électromagnétique des guides images diélectriques en vue d'éliminer ou de réduire le rayonnement des guides diélectriques ouverts sans utiliser le blindage métallique qui est un sérieux handicap dans les circuits intégrés micro-ondes (C.I.M).

Nous présentons dans le paragraphe suivant une analyse rigoureuse de ces guides ouverts par la combinaison de la méthode des éléments finis avec des conditions aux limites d'absorption (ABC, PMA, PML).

### III-C/ METHODE NUMERIQUE DE CARACTERISATION DE LA DIFFRACTION D'ONDES PAR DES GUIDES IMAGES

#### III-C-1) CONDITIONS AUX LIMITES D'ABSORPTIONS

Les problèmes de diffraction et des antennes observés lors de l'analyse de structures ouvertes, peuvent être résolus par l'emploi de la méthode des éléments finis et des conditions aux limites d'absorption en terminant le domaine d'étude par une surface fictive  $\Gamma$  (ABC) ou par une couche parfaitement absorbante (PMA). Cette méthode est dite hybride car elle associe la méthode des éléments finis à un formalisme mathématique (ABC, PMA, PML) décrivant la décroissance du champ électromagnétique à l'extérieur du guide [25], [26].

Nous développons dans ce paragraphe la théorie mathématique relative à ces frontières fictives pour étudier en particulier la diffraction provoquée par un guide image en polarisation E (TM) et H (TE). Le résultat de cette étude consiste à visualiser la cartographie du champ électromagnétique diffracté à l'intérieur et à l'extérieur du guide image ouvert. Nous proposons ensuite d'analyser le comportement électromagnétique de ce même guide couvert de plusieurs couches diélectriques.

#### III-C-1-1) THEORIE DES ABC (Absorbing Boundary Conditions)

##### III-C-1-1-1) DEFINITION

Considérons une structure en coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  propageant des ondes électromagnétiques dans la direction Oz (figure III-14).

La théorie des ABC fait allusion à la nécessité que toutes les ondes fuyant le diélectrique doivent être complètement absorbées à une surface fictive  $\Gamma$ .

La dérivation analytique des conditions aux limites d'absorption commence à partir du développement asymptotique du champ électromagnétique rayonné.

Il a été montré que la solution sortante de l'équation de Helmholtz à deux dimensions (section droite  $(r, \theta)$ ) peut être représentée par le développement [27] :

$$u(r, \theta) = H_0^{(2)}(kr) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i(\theta)}{r^i} + H_1^{(2)}(kr) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g_i(\theta)}{r^i} \quad (\text{III-31})$$

$k$  : constante de propagation radiale.

$H_0^{(2)}$  : la fonction de Hankel d'ordre zéro et de 2<sup>ème</sup> espèce.

$H_1^{(2)}$  : la fonction de Hankel d'ordre 1 et de 2<sup>ème</sup> espèce.

$f_i(\theta)$  et  $g_i(\theta)$  sont les fonctions de développement inconnues de coordonnée  $\theta$  seulement .

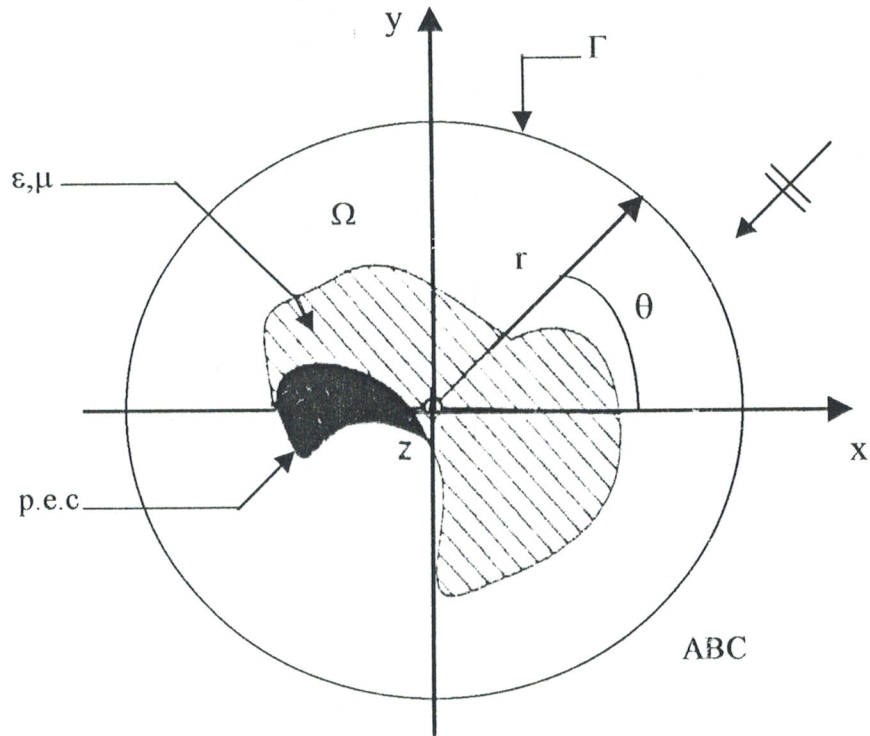


Figure III-14 : une section transversale arbitraire d'un Cylindre inhomogène entourée par une frontière circulaire fictive  $\Gamma$

Pour dériver le développement précédent (la dépendance en fonction du temps est supposée), on introduit l'approximation asymptotique des fonctions de Hankel [28]. La solution est donc exprimée par :

$$u(r, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-(jkr - \pi/2)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F_i(\theta)}{r^i} \tag{III-32}$$

Bayliss et Turkel [29] ont commencé à partir de cette expression par développer la suite des opérateurs différentiels en ordre croissant :

$$B_0 = 1 \tag{III-33}$$

$$B_1 = \frac{\partial}{\partial r} + jk + \frac{1}{2r} \tag{III-34}$$

$$B_m = \left( \frac{\partial}{\partial r} + jk + \frac{4m-3}{2r} \right) B_{m-1} \tag{III-35}$$

Ces opérateurs appliqués au champ électromagnétique sortant à un contour fictif circulaire  $\Gamma$ , donne lieu à des conditions aux limites d'absorption de grande précision pour la solution du problème dans la région fermée par  $\Gamma$  (Figure III-14).

En fait, pour une fonction  $u_m$  de la forme :

$$u_m = e^{-jkr} \frac{F_i(\theta)}{r^{i+1/2}} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{III-36})$$

il est facile de voir que  $B_m u_m = 0$ . Pour une fonction  $u$  de la forme (III-32), on trouve

(Annexe C) :

$$B_m u = O\left[\frac{1}{r^{2m+1/2}}\right] \quad (\text{III-37})$$

ce résultat signifie qu'au niveau de la surface circulaire fictive  $\Gamma$  ( $r = r_1$ ) délimitant le domaine d'étude, la fonction  $u$  respecte la condition aux limites :

$$B_m u|_{r=r_1} \cong 0 \quad (\text{III-38})$$

La solution numérique  $u$  correspond aux  $m$  premiers termes du développement en série (III-32) afin que le champ calculé à l'intérieur de  $\Gamma$ , ait le même comportement asymptotique que la solution analytique exacte.

Dans la suite, la condition aux limites d'absorption de 2<sup>ème</sup> ordre  $B_2 u = 0$  peut être utilisée pour résoudre les problèmes de diffraction et des antennes.

A partir de la relation de récurrence (III-35), l'opérateur du second ordre  $B_2$  s'écrit :

$$B_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(2jk + \frac{3}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{3jk}{r} + \frac{5}{4r^2} - k^2 \quad (\text{III-39})$$

La présence de la dérivée seconde par rapport à  $r$  rend l'application encombrante car elle nécessite l'utilisation des fonctions de base dérivables au moins deux fois par rapport à  $r$ , pour développer le champ  $u$ .

Il est donc commode de l'éliminer en revenant à l'équation de helmholtz décrite dans le système de coordonnées cylindriques, où il est possible d'obtenir :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - k^2 \quad (\text{III-40})$$

En remplaçant l'expression de l'opérateur  $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$  (III-40) dans l'équation (III-39), on obtient :

avec :

$$\begin{cases} u^t = E_z^t & p = p(x, y) = \mu_r, \quad q = q(x, y) = \varepsilon_r \quad \text{cas des modes } TM_z & (III - 43) \\ u^t = H_z^t & p = p(x, y) = \varepsilon_r, \quad q = q(x, y) = \mu_r \quad \text{cas des modes } TE_z & (III - 44) \end{cases}$$

$\nabla_t$  est l'opérateur  $\nabla$  associé à la section transversale  $(r, \theta)$ .

$$k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c_0} ; \quad c_0 \text{ est la vitesse de la lumière dans le vide.}$$

$$\omega = 2\pi f ; \quad f \text{ est la fréquence.}$$

$$u^t = u^i + u^s$$

$u^i$  est l'onde incidente.

$u^s$  est l'onde diffractée.

En général, il y a aussi des conditions de Dirichlet sur  $\Gamma_D$  (une surface C.C.E ou PEC (conducteur électrique parfait) dans le cas d'une polarisation  $TM_z$  ou une surface C.C.M ou PMC (conducteur magnétique parfait) dans le cas d'une polarisation  $TE_z$ ), à laquelle  $u^t = 0$ , et des conditions de Neumann sur  $\Gamma_N$  (une surface PMC dans le cas d'une polarisation  $TM_z$  ou une surface PEC dans le cas d'une polarisation  $TE_z$ ), à laquelle  $\frac{\partial u^t}{\partial n} = 0$ .

Finalement, l'opérateur d'absorption du second ordre  $B_2$  ( $B_2 u^t = 0$ ), de Bayliss et Turkel est employé pour écrire les conditions aux limites vérifiées par le champ total  $u^t$  sur la frontière circulaire  $\Gamma$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u^t}{\partial n} \right|_{r=r_1} &= \left. \frac{\partial u^t}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \left. \left( \frac{\partial u^i}{\partial r} + \frac{\partial u^s}{\partial r} \right) \right|_{r=r_1} \\ &= \left. \frac{\partial u^i}{\partial r} \right|_{r=r_1} - a(r_1) u^s + b(r_1) \frac{1}{r_1^2} \left. \frac{\partial^2 u^s}{\partial \theta^2} \right|_{r=r_1} \end{aligned} \quad (III-45)$$

La formulation par la méthode des éléments finis de l'équation de Helmholtz (III-42) ; permet d'écrire :

$$\iint_{\Omega} \nabla_t w \cdot \frac{1}{p} \nabla_t u^t d\Omega - \iint_{\Omega} k_0^2 q w u^t d\Omega + \int_{\Gamma} w \frac{\partial u^t}{\partial n} d\gamma + \int_{\Gamma_D} w u^t d\gamma + \int_{\Gamma_N} w \frac{\partial u^t}{\partial n} d\gamma = 0 \quad (\text{III-46})$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} w \frac{\partial u^t}{\partial n} d\gamma &= \oint_{\Gamma} w \frac{\partial u^i}{\partial r} d\gamma + \oint_{\Gamma} w \frac{\partial u^s}{\partial r} d\gamma \\ &= \oint_{\Gamma} w \frac{\partial u^i}{\partial r} d\gamma - \oint_{\Gamma} w \left[ a(r_1) u^s - \frac{b(r_1)}{r_1^2} \frac{\partial^2 u^s}{\partial \theta^2} \right] d\gamma \end{aligned} \quad (\text{III-47})$$

où  $w$  est une fonction test arbitraire.

Généralement, la fonction  $u^t$  doit satisfaire la condition aux limites de Dirichlet  $u^t = 0$  sur

$\Gamma_D$  et la condition de Neumann  $\frac{\partial u^t}{\partial n} = 0$  sur  $\Gamma_N$ .

Sous ces hypothèses, l'introduction de l'équation (III-47) dans (III-46), donne :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{1}{p} \nabla_t w \cdot \nabla_t u^t d\Omega - \iint_{\Omega} k_0^2 q w u^t d\Omega \\ - \oint_{\Gamma} w \frac{\partial u^i}{\partial r} d\gamma + \oint_{\Gamma} w \left[ a(r_1) u^s - \frac{b(r_1)}{r_1^2} \frac{\partial^2 u^s}{\partial \theta^2} \right] d\gamma = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-48})$$

Rappelons aussi la relation  $u^t = u^i + u^s$  et intégrons par parties pour éliminer la dérivée seconde en  $\phi$ , on obtient l'équation finale à résoudre :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{1}{p} \nabla_t w \cdot \nabla_t u^s d\Omega - \iint_{\Omega} k_0^2 q w u^s d\Omega + \oint_{\Gamma} \left[ w a(r_1) u^s + b(r_1) \frac{\partial w}{\partial \gamma} \frac{\partial u^s}{\partial \gamma} \right] d\gamma \\ = - \iint_{\Omega} \frac{1}{p} \nabla_t w \cdot \nabla_t u^i d\Omega + \iint_{\Omega} k_0^2 q w u^i d\Omega + \oint_{\Gamma} w \frac{\partial u^i}{\partial r} d\gamma \end{aligned} \quad (\text{III-49})$$

L'équation (III-49) dite équation intégrodifférentielle, est discrétisée par la méthode des éléments finis.

$\left[ F^{(e)} \right]$  est un vecteur colonne  $3 \times 1$ , représentant les sources surfaciques et volumétriques équivalentes. Il est à noter que les sources représentées par les deux premiers termes dans le côté droit de l'équation (III-52), donnent une contribution non nulle lorsque  $p$  et  $q$  ne sont pas tous les deux égaux à 1, c'est à dire, lorsque l'élément (e) appartient au matériau diélectrique ou magnétique rayonnant. Dans l'espace libre, la source vérifie :

$$\iint_{\Omega} \nabla_{\Gamma} w \cdot \nabla_{\Gamma} u^i d\Omega - \iint_{\Omega} k_0^2 w u^i d\Omega = 0 .$$

Le dernier terme dans le côté droit de l'équation (III-52) prend en compte les courants surfaciques sur le contour fictif  $\Gamma$ .

L'expression donnée pour le vecteur  $\left[ F^{(e)} \right]$  a été dérivée par une approximation linéaire du champ incident d'onde plane sur l'élément géométrique (e) utilisant les mêmes fonctions de base que celles utilisées pour développer le champ diffracté inconnu :

$$E^i(x, y) = \sum_{j=1}^3 E_j^i \alpha_j(x, y) \tag{III-53}$$

De cette manière, on peut facilement exprimer la première et la seconde intégrales dans le côté droit de l'équation (III-49) par les matrices élémentaires usuelles respectives  $\left[ S^{(e)} \right]$  et  $\left[ T^{(e)} \right]$ .

Le vecteur  $\left[ E'^i(e) \right]$  prend en compte les contributions provenant de l'intégrale ligne du côté droit de l'équation (III-49). Ses composantes sont non nulles seulement pour les éléments ayant un côté le long de  $\Gamma$ , et se calculent de différentes manières.

Supposons que l'élément (e) a un coté local  $k$  qui connecte les sommets locaux  $k$  et  $(k+1)$  (modulo 3), appartenant à  $\Gamma$ . utilisant les éléments triangulaires du 1<sup>er</sup> ordre de Lagrange, l'élément vecteur  $\left[ E'^i(e) \right]$  a des composantes non nulles de la forme :

$$E_k'^i(e) = jkr_1 \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} w_k \cos(\theta - \theta^i) e^{jkr_1 \cos(\theta - \theta^i)} d\theta \tag{III-54}$$

$$E_{k+1}'^i(e) = jkr_1 \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} w_{k+1} \cos(\theta - \theta^i) e^{jkr_1 \cos(\theta - \theta^i)} d\theta \tag{III-55}$$

où  $w_k$  est la fonction de pondération centrée sur le nœud local  $k$ , repéré sur le contour  $\Gamma$  par un angle  $\theta_k$ .

Si le maillage est suffisamment fin pour que le côté  $k$  du triangle peut être considéré égal à l'arc de  $\Gamma$  situé entre l'angle  $\theta = \theta_k$  à  $\theta = \theta_{k+1}$ , les composantes de  $[E^{(e)}]$  peuvent être calculées numériquement en utilisant :

$$E_k^{(e)} = jkr_1 \Delta\theta^{(e)} \int_0^1 (1-t) \cos(\theta_k - \theta^i + t\Delta\theta^{(e)}) e^{jkr_1 \cos(\theta_k - \theta^i + t\Delta\theta^{(e)})} dt \quad (\text{III-56})$$

$$E_{k+1}^{(e)} = jkr_1 \Delta\theta^{(e)} \int_0^1 t \cos(\theta_k - \theta^i + t\Delta\theta^{(e)}) e^{jkr_1 \cos(\theta_k - \theta^i + t\Delta\theta^{(e)})} dt \quad (\text{III-57})$$

avec  $\Delta\theta^{(e)} = \theta_{k+1} - \theta_k$

Les deux autres termes dans le côté gauche de l'équation (III-51) impliquant les matrices  $[A^{(k)}]$  et  $[B^{(k)}]$  viennent des conditions aux limites d'absorption analytiques (ABC) et sont présents seulement quand l'élément (e) a un côté  $k$  de longueur  $L^{(k)}$  appartenant à la frontière fictive  $\Gamma$ .

Les termes des matrices  $[A^{(k)}]$  et  $[B^{(k)}]$  sont constants et peuvent être calculés comme suit :

$$A_{ij}^{(k)} = \int_{\Gamma_k} \alpha_i \alpha_j d\gamma \quad (\text{III-58})$$

$$B_{ij}^{(k)} = \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \gamma} d\gamma \quad (\text{III-59})$$

Les matrices  $[A^{(k)}]$  et  $[B^{(k)}]$  obtenues par application des ABC de Bayliss et Turkel de second ordre utilisant des éléments polynomiaux de l'ordre 1 jusqu'à 4 ont été publiées dans l'article [30]. Pour le cas des éléments d'ordre 1, elles sont décrites par:

$$[A^{(1)}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [A^{(2)}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, [A^{(3)}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[B^{(1)}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [B^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, [B^{(3)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



L'assemblage du système local (III-51) en un système global est accompli en effectuant le passage de la numérotation locale à la numérotation globale des nœuds [11].

Le système d'équations global obtenu est creux puisque les ABC sont décrites par des matrices creuses  $[A^{(k)}]$  et  $[B^{(k)}]$ .

Par conséquent, le système complexe final est résolu par des techniques numériques adéquates [11]. Notons enfin que les coefficients  $a(r_1)$  et  $b(r_1)$  dans l'équation (III-51) sont complexes.

### III-C-1-2) CONCEPT DE LA COUCHE ABSORBANTE PMA (Perfectly Matched anisotropic Absorber)

#### III-C-1-2-1) DEFINITION

Les conditions aux limites d'absorption (ABC) sont assez simples à appliquer et elles ont l'avantage de conserver les matrices creuses du système (III-51) lors de la résolution par la MEF.

Cependant, leur efficacité est affectée du fait qu'elles doivent s'appliquer à une frontière circulaire fictive. Cette limitation est particulièrement désavantageuse lorsque le dispositif rayonnant a une forme mince et par conséquent, le domaine de calcul limité par le contour circulaire fictif  $\Gamma$  contient une grande région de l'espace libre alors que l'application de la MEF intensive n'est pas vraiment nécessaire.

Cet inconvénient peut être surmonté en terminant le domaine d'étude par un matériau absorbant artificiel appelé PMA ; matériau à pertes absorbant parfaitement des ondes planes incidentes polarisées arbitrairement à n'importe quelle fréquence et pour n'importe quel angle d'incidence.

La forme générale des équations de Maxwell dans un milieu avec pertes caractérisé par des tenseurs diagonaux complexes est :

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega [\mu] \vec{H} - [\sigma_M] \vec{H} = -j\omega [\bar{\mu}] \vec{H} \quad (\text{III-60})$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega [\varepsilon] \vec{E} + [\sigma_E] \vec{E} = j\omega [\bar{\varepsilon}] \vec{E} \quad (\text{III-61})$$

$$\text{où } [\bar{\mu}] = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_r^x + \frac{\sigma_M^x}{j\omega\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_r^y + \frac{\sigma_M^y}{j\omega\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_r^z + \frac{\sigma_M^z}{j\omega\mu_0} \end{bmatrix} \quad (\text{III-62})$$

$$[\bar{\varepsilon}] = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_r^x + \frac{\sigma_E^x}{j\omega\varepsilon_0} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r^y + \frac{\sigma_E^y}{j\omega\varepsilon_0} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r^z + \frac{\sigma_E^z}{j\omega\varepsilon_0} \end{bmatrix} \quad (\text{III-63})$$

Pour égaler l'impédance intrinsèque du milieu anisotrope à celle de l'espace libre, la condition (III-64) doit être vérifiée :

$$\sqrt{\frac{[\bar{\mu}]}{[\bar{\varepsilon}]}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \frac{[\bar{\varepsilon}]}{\varepsilon_0} = \frac{[\bar{\mu}]}{\mu_0} \quad (\text{III-64})$$

Par conséquent, les tenseurs  $[\bar{\varepsilon}]$  et  $[\bar{\mu}]$  peuvent être écrits comme suit :

$$[\bar{\mu}] = \mu_0 [A] = \mu_0 \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (\text{III-65})$$

$$[\bar{\varepsilon}] = \varepsilon_0 [A] = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

La relation de dispersion pour un tel milieu est ellipsoïde [31] :

$$\frac{k_x^2}{bc} + \frac{k_y^2}{ac} + \frac{k_z^2}{ab} = k_0^2 \quad (\text{III-66})$$

dont les solutions sont de la forme :

$$k_x = k_0 \sqrt{bc} \sin \phi \cos \theta \quad (\text{III-67})$$

$$k_y = k_0 \sqrt{ac} \sin \phi \sin \theta \quad (\text{III-68})$$

$$k_z = k_0 \sqrt{ab} \cos \phi \quad (\text{III-69})$$

$\theta$  : angle dans le plan  $(x, y)$  (figure III-15)

$\phi$  : angle dans le plan  $(x, z)$

Il est clair alors que les composantes cartésiennes  $(k_x, k_y, k_z)$  du vecteur de propagation  $k$ , peuvent être contrôlées par un choix approprié des paramètres  $a, b$  et  $c$ .

Pour comprendre comment cette propriété est exploitée pour concevoir l'interface de réflexion, considérons l'interface planaire représentée sur la figure (III-15), entre l'espace libre et l'absorbant anisotrope décrit précédemment ; l'interface coïncide avec le plan  $x = 0$

$\left(\phi = \frac{\pi}{2}\right)$  et une onde plane venant de l'espace libre avec un angle d'incidence  $\theta_i$ .

La relation de dispersion dans un tel milieu anisotrope se réduit alors à :

$$k_x = k_0 \sqrt{bc} \cos \theta \tag{III-70}$$

$$k_y = k_0 \sqrt{ac} \sin \theta \tag{III-71}$$

$$k_z = 0 \tag{III-72}$$

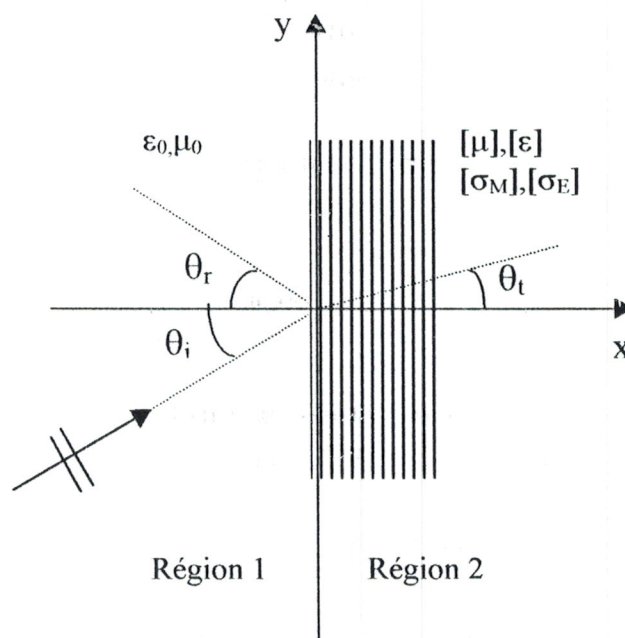


Figure III-15 : Onde plane en incidence oblique avec le milieu anisotrope

L'onde plane polarisée arbitrairement arrivant à l'interface de l'absorbant peut être décomposée en une combinaison linéaire de modes  $TE_z$  et  $TM_z$ .

En traitant chaque polarisation séparément, il est facile de généraliser la loi de Snell :

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \quad (\text{III-73})$$

$$\sqrt{ac} \sin \theta_t = \sin \theta_i \quad (\text{III-74})$$

et les expressions des coefficients de réflexion respectives :

$$R^{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{c}{b}} \cos \theta_t}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{c}{b}} \cos \theta_t} \quad (\text{III-75})$$

$$R^{TM} = \frac{\sqrt{\frac{c}{b}} \cos \theta_t - \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{c}{b}} \cos \theta_t} \quad (\text{III-76})$$

En analysant ces deux relations, on peut voir que la condition  $\sqrt{ac} = 1$  simplifie la condition de phase (III-74) et en imposant  $b = c$ , l'interface devient non réflecteur pour toute fréquence, quelque soit l'angle d'incidence et la polarisation. En d'autres termes, si les tenseurs caractérisant le matériau dans la région 2 de la figure (III-15) sont :

$$[\bar{\mu}] = \mu_0 [A] = \mu_0 \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}, \quad [\bar{\varepsilon}] = \varepsilon_0 [A] = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \quad (\text{III-77})$$

l'interface plane à  $x = 0$  devient une interface similaire à l'espace libre.

De plus, si  $a = \alpha - j\beta$ , les ondes transmises sont affaiblies dans l'absorbant anisotrope sous la forme :

$$E_t(x, z) = E_0 e^{-k_0 \beta \cos \theta_i x} e^{-jk_0 (\sin \theta_t y + \alpha \cos \theta_t x)} \quad (\text{III-78})$$

dans le cas de la polarisation  $TM_z$ .

$$H_t(x, z) = H_0 e^{-k_0 \beta \cos \theta_i x} e^{-jk_0 (\sin \theta_t y + \alpha \cos \theta_t x)} \quad (\text{III-79})$$

dans le cas de la polarisation  $TE_z$ .

Il est à noter que la production d'une interface sans réflexion entre l'espace libre et le PMA le long d'un plan  $y = cste$  est aussi facile en utilisant des tenseurs sous forme :

$$[\bar{\mu}] = \mu_0 [A] = \mu_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}, \quad [\bar{\varepsilon}] = \varepsilon_0 [A] = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \quad (\text{III-80})$$

Quand le matériau PMA est utilisé pour absorber les ondes rayonnées, deux problèmes surviennent :

- Le premier est lié au fait que le PMA ne peut avoir une épaisseur infinie et doit être tronqué.
- Le second est le fait que l'interface ne pouvant être un plan étendu infiniment, l'absorbant doit envelopper le dispositif rayonnant, en forme d'une boîte .

Quant au premier point, le PMA est d'habitude pris suffisamment épais et terminé par un plan parfaitement conducteur. Le champ réfléchi par la terminaison PEC, revenant vers la structure rayonnante est fortement affaibli et n'affecte pas considérablement les résultats, lorsque le PMA est assez épais.

Les formules pour l'évaluation du coefficient de réflexion d'une couche de PMA d'épaisseur finie entouré d'un PEC sont parfaitement décrites dans l'article [31].

Le second problème est un peu plus délicat et doit être traité soigneusement durant la phase de l'application pour réaliser un bon absorbant.

L'approche commune est de garder la réflexion aussi faible que possible à partir des bords du PMA en choisissant convenablement ses propriétés.

En développant l'analyse liée au PMA, on montre que le tenseur  $[A]$  pour le bord de la région, doit être égal à la matrice produit des tenseurs de deux côtés adjacents (Figure III-16).

Par conséquent, le tenseur  $[A^{xy}]$  caractérisant le PMA sur un bord entre les interfaces planes (espace libre – PMA) en  $x = cste$  et  $y = cste$  est donné par :  $[A^{xy}] = [A^x] \cdot [A^y]$ .

Où  $[A^x]$  et  $[A^y]$  sont les tenseurs caractérisant le PMA sur les interfaces respectives  $x = cste$  et  $y = cste$ .

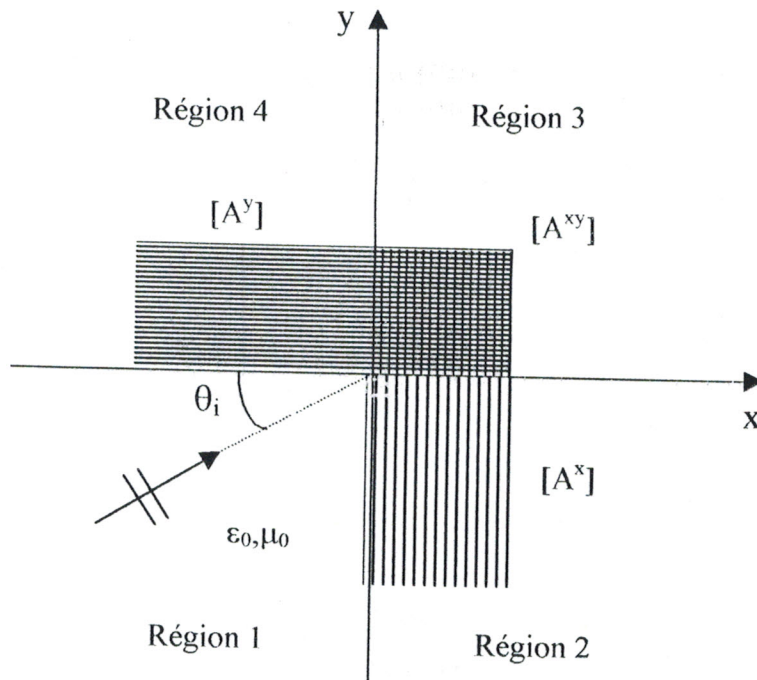


Figure III-16 : Modèle des bords de la région de PMA

### III-C-1-2-2) FORMULATION DU PROBLEME DE RAYONNEMENT PAR PMA

Considérons maintenant la formulation par éléments finis lorsque le PMA est employé pour limiter le domaine d'étude d'une structure ouverte.

A titre d'exemple, considérons la configuration classique d'un guide d'ondes plat parallèle, alimenté par le mode  $TE_{10}$  et ouvert à une extrémité.

Dans ce cas, la région géométrique  $\Omega$  de calcul s'étend partiellement à l'intérieur du guide d'ondes et partiellement dans l'espace libre (Figure III-17). Une telle structure peut être analysée en ne considérant que la moitié de la section  $\Omega$  ( $y > 0$  ou  $y < 0$ ).

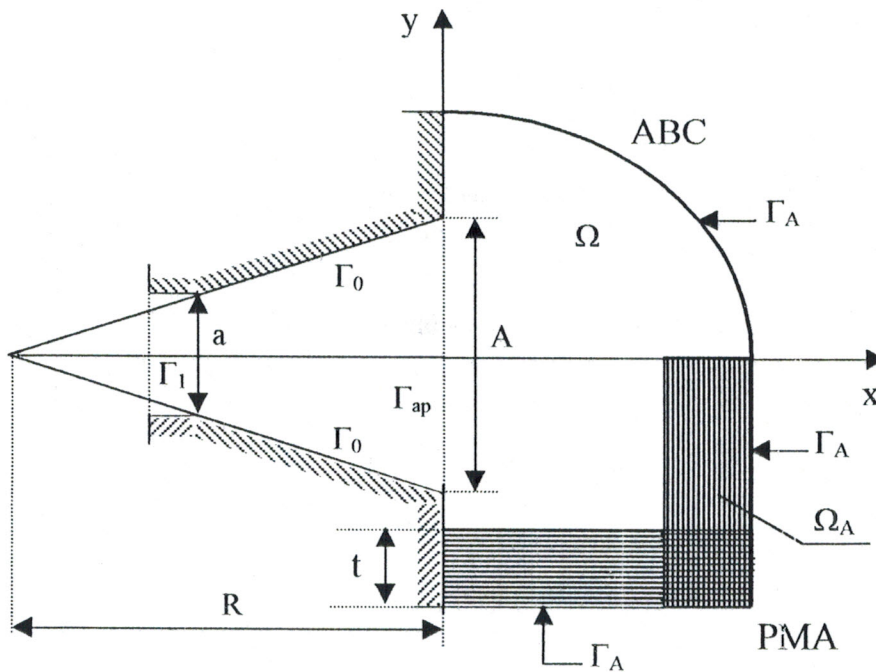


Figure III-17 : Région de calcul pour l'analyse d'un guide d'ondes plat parallèle ouvert à une extrémité

Nous montrons sur la figure (III-17) la possibilité d'exploiter l'une des techniques d'ABC ou de PMA pour délimiter le domaine d'étude.

La frontière de ce domaine est composée du plan d'entrée du guide ( $\Gamma_1$ ), la surface parfaitement conductrice des murs du guide d'ondes ( $\Gamma_0$ ) et la surface fictive ( $\Gamma_A$ ) qui doit être capable d'absorber les ondes allant vers l'extérieur.

Si les ABC sont utilisées pour délimiter le domaine  $\Omega$ , alors la frontière  $\Gamma_A$  devrait être choisie comme un arc de cercle dont le centre se trouve au milieu de l'ouverture du guide d'ondes.

D'autre part, quand le concept de PMA est utilisé,  $\Gamma_A$  est choisie comme un demi-carré (ou demi-rectangle) dont ses côtés sont calculés à partir de l'ouverture du guide (Figure III-17).

En utilisant cette seconde approche,  $\Gamma_A$  est considéré comme un absorbant anisotrope (PMA) d'épaisseur  $t$ , enveloppé par une surface parfaitement conductrice  $\Gamma_A$ .

Le problème de rayonnement du guide peut être alors formulé par un problème à valeur limite selon la méthode habituelle : l'équation de Helmholtz en composante longitudinale  $E_z$  du champ électrique doit être résolue dans la région  $\Omega$  en appliquant les conditions aux limites

homogènes de Dirichlet sur les murs parfaitement conducteurs  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_A$ , et les conditions de continuité appropriées du champ tangentiel sur l'accès d'entrée  $\Gamma_1$ .

A partir des équations de Maxwell développées dans le milieu anisotrope PMA (domaine  $\Omega_A$ ), on trouve l'équation :

$$\nabla \times \left( [A]^{-1} \cdot \nabla \times \vec{F} \right) - k_0^2 [A] \vec{F} = 0 \quad (\text{III-81})$$

Ces mêmes équations écrites dans le diélectrique rayonnant et l'espace libre avoisinant (domaine  $(\Omega - \Omega_A)$ ) donnent :

$$\nabla \times \left( \frac{1}{p} \nabla \times \vec{F} \right) - k_0^2 q \vec{F} = 0 \quad (\text{III-82})$$

$\vec{F}$  est une fonction vectorielle représentant le champ électrique  $\vec{E}$  ou le champ magnétique  $\vec{H}$ .

Cette fonction  $\vec{F}$  vérifie en plus les conditions aux limites du type Dirichlet sur les PEC ou les PMC.

Dans le cas d'une polarisation E (TM) ou H (TE), la fonction  $\vec{F}$  se réduit à la composante longitudinale (vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ ) notée  $u^t$  représentant  $E_z$  ou  $H_z$ . Ainsi, une forme générale de l'équation de Helmholtz est déduite des équations (III-81) et (III-82), traduite par :

$$\nabla \times \left( [D]^{-1} (\nabla \times u^t \vec{u}_z) \right) - k_0^2 [G] u^t \vec{u}_z = 0 \quad (\text{III-83})$$

$$\text{avec } \begin{cases} [D]^{-1} = [A]^{-1} \text{ et } [G] = [A] & \text{dans le PMA (domaine } \Omega_A) \\ [D]^{-1} = \left[ \frac{1}{p} \right] \text{ et } [G] = [q] & \text{dans le diélectrique et l'espace libre} \\ & \text{qui l'entoure (domaine } (\Omega - \Omega_A)) \end{cases}$$

Sachant que  $u^t$  est le champ total regroupant le champ incident  $u^i$  et le champ diffracté  $u^s$ , l'équation (III-84) formulée par la méthode des éléments finis devient :

Soit  $w$  une fonction test continue et dérivable :



$$\left\{ \begin{aligned} \iint_{\Omega_A} a \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u^s}{\partial y} d\Omega + \iint_{\Omega_A} b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u^s}{\partial x} d\Omega - \iint_{\Omega_A} k_0^2 c w u^s d\Omega \\ = - \iint_{\Omega_A} \nabla_t w \cdot \nabla_t u^i d\Omega + \iint_{\Omega_A} k_0^2 w u^i d\Omega \end{aligned} \right. \quad (III-84)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \iint_{\Omega-\Omega_A} \frac{1}{p} \nabla_t w \cdot \nabla_t u^s d\Omega - \iint_{\Omega-\Omega_A} k_0^2 q w u^s d\Omega \\ = - \iint_{\Omega-\Omega_A} \frac{1}{p} \nabla_t w \cdot \nabla_t u^i d\Omega + \iint_{\Omega-\Omega_A} k_0^2 q w u^i d\Omega \end{aligned} \right. \quad (III-85)$$

Il est à noter que les coefficients  $p$  et  $q$  dans les termes du côté droit de l'équation (III-84) sont égaux à 1 car seul le champ diffracté ( $u^s$ ) dans le PMA doit être affaibli.

### III-C-1-2-3) DISCRETISATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

L'application de l'algorithme exposé dans la section précédente est assez simple et la plupart des éléments nécessaires ont été déjà discuté dans le [11]. Le calcul des coefficients des matrices du système (III-85) est traité dans le chapitre II.

Par conséquent, nous avons besoin d'exposer ici seulement la construction et l'assemblage des matrices du système (III-84) traduisant la solution de l'équation de Helmholtz dans le matériau anisotrope utilisé pour réaliser le PMA.

L'équation (III-84) est ensuite discrétisée en introduisant une approximation par la MEF du champ et en choisissant des fonctions de pondération égales aux fonctions de base sur l'élément fini. Pour des éléments triangulaires de 1<sup>er</sup> ordre, on trouve la forme matricielle suivante :

$$b [S_x^{(e)}] [E^s(e)] + a [S_y^{(e)}] [E^s(e)] - k_0^2 c [T^{(e)}] [E^s(e)] = 0 \quad (III-86)$$

où  $E^s(e)$  est un vecteur colonne  $3 \times 1$  des valeurs nodales du champ.

Les composantes des matrices locales  $[S_x^{(e)}]$  et  $[S_y^{(e)}]$  sont données par [11] :

$$S_x^{(e)}_{ij} = \iint_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial \alpha_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j^{(e)}}{\partial x} dS \quad (III-87)$$

$$S_y^{(e)}_{ij} = \iint_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial \alpha_i^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j^{(e)}}{\partial y} dS \quad (III-88)$$

La stratégie de l'assemblage de l'équation matricielle locale (III-86) en un système d'équations global suit les règles usuelles, la seule différence maintenant est que les matrices locales  $[S_x^{(e)}]$  et  $[S_y^{(e)}]$  doivent être multipliées par les coefficients  $a, b$  et  $c$  caractérisant l'absorbant PMA avant d'être assemblées en une matrice élément fini globale.



### III-C-2) APPLICATIONS ET RESULTATS

#### III-C-2-1) ANALYSE D'UN GUIDE IMAGE OUVERT

Ce travail consiste à caractériser la diffraction des ondes planes  $TE_z$  ( $E_z = 0$ ) ou  $TM_z$  ( $H_z = 0$ ) d'une ligne constituée d'un barreau diélectrique d'Alumine ( $\epsilon_r = 9,6$ ) posé sur un plan métallique (guide image ouvert).

Le but de cette étude est le calcul du champ diffracté et le champ total par la méthode des éléments finis en utilisant les deux types de conditions aux limites d'absorption :

- Les conditions aux limites d'absorption analytiques ABC.
- Les conditions aux limites d'absorption basées sur le concept du PMA.

##### III-C-2-1-1) ANALYSE PAR LES ABC

La section droite du guide étudié est représentée sur la figure (III-18).  
 Les dimensions imposées sont :  $a = 0.3\text{ mm}$  pour la demi-largeur du barreau,  $b = 0.3\text{ mm}$  pour sa hauteur,  $r = 1\text{ mm}$  pour le rayon du contour circulaire fictif  $\Gamma$ .

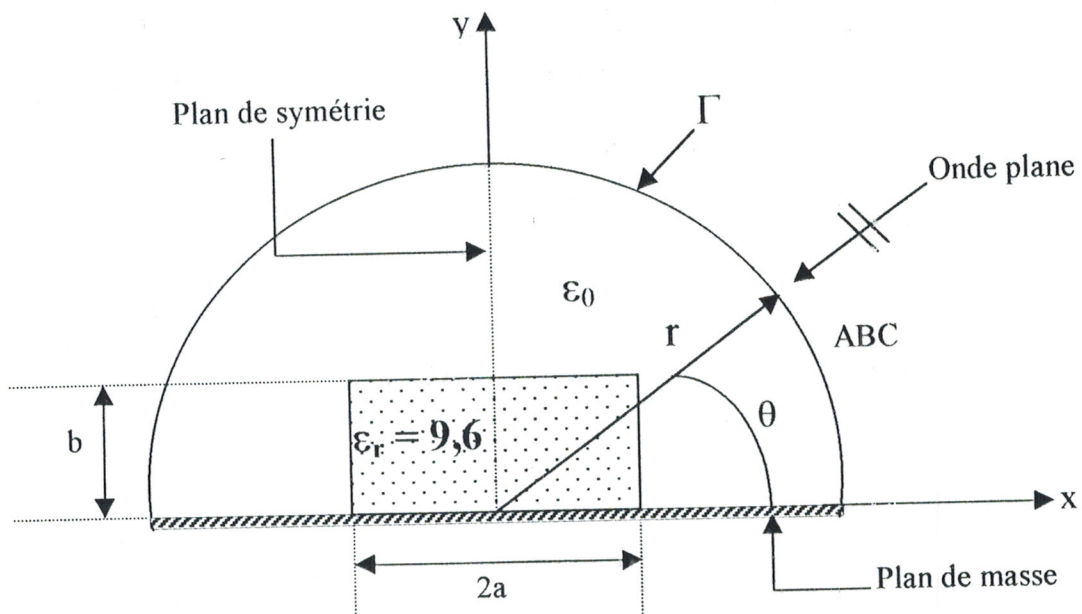


Figure III-18 : guide image ouvert entouré par une frontière fictive  $\Gamma$

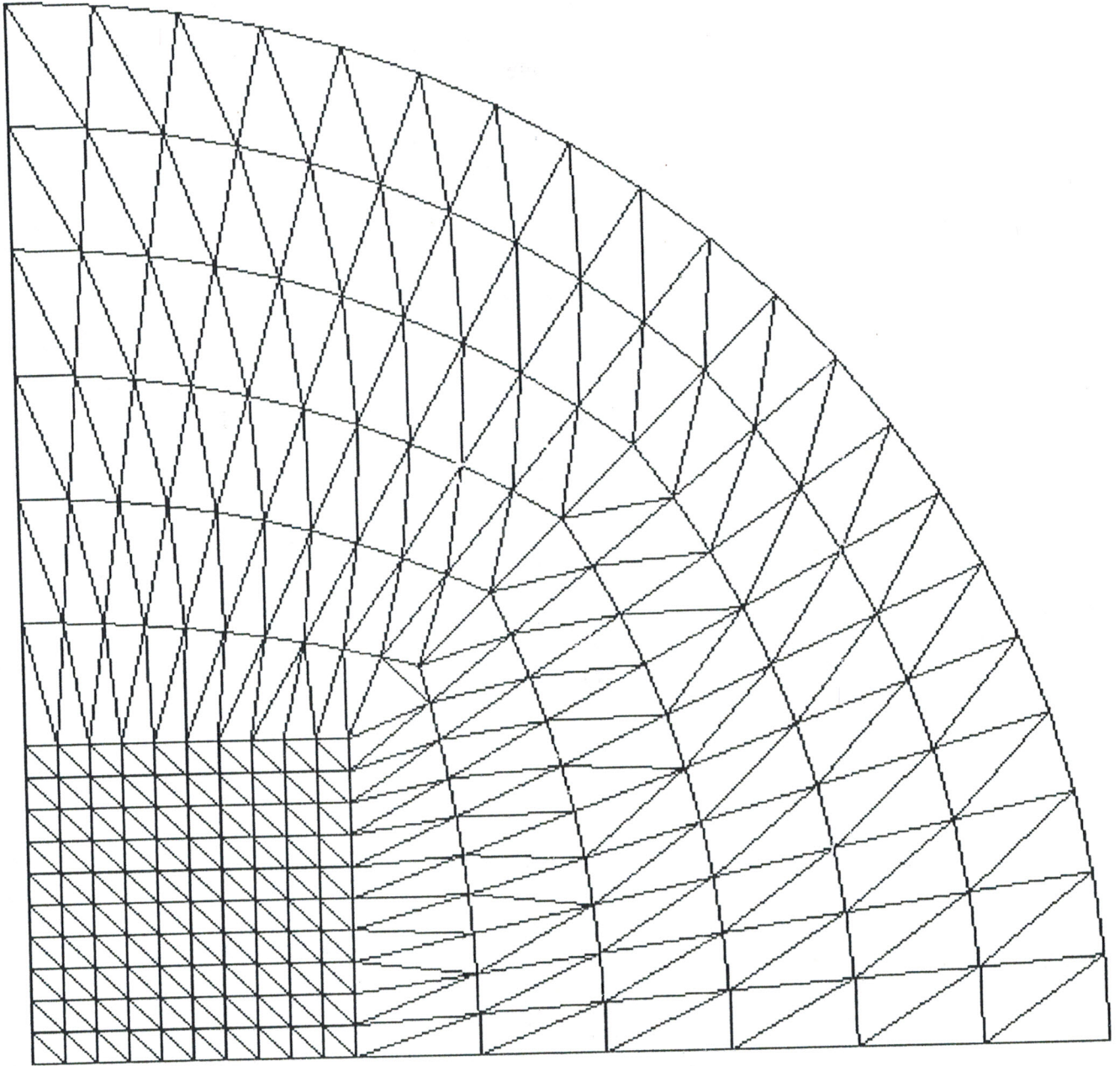


Figure III-20 : maillage final de la structure étudiée par ABC  
(440 éléments et 247 nœuds)

III-C-2-1-2) ANALYSE PAR LE CONCEPT DU PMA

La section droite du guide image étudié est représentée sur la figure (III-21).  
 Les dimensions imposées sont :  $a = 0.3\text{ mm}$  pour la demi-largeur du barreau,  $b = 0.3\text{ mm}$  pour sa hauteur,  $L = 3\text{ mm}$  pour la largeur du boîtier,  $h = 1.5\text{ mm}$  pour sa hauteur et  $t = 0.375\text{ mm}$  pour l'épaisseur de la couche absorbante PMA.

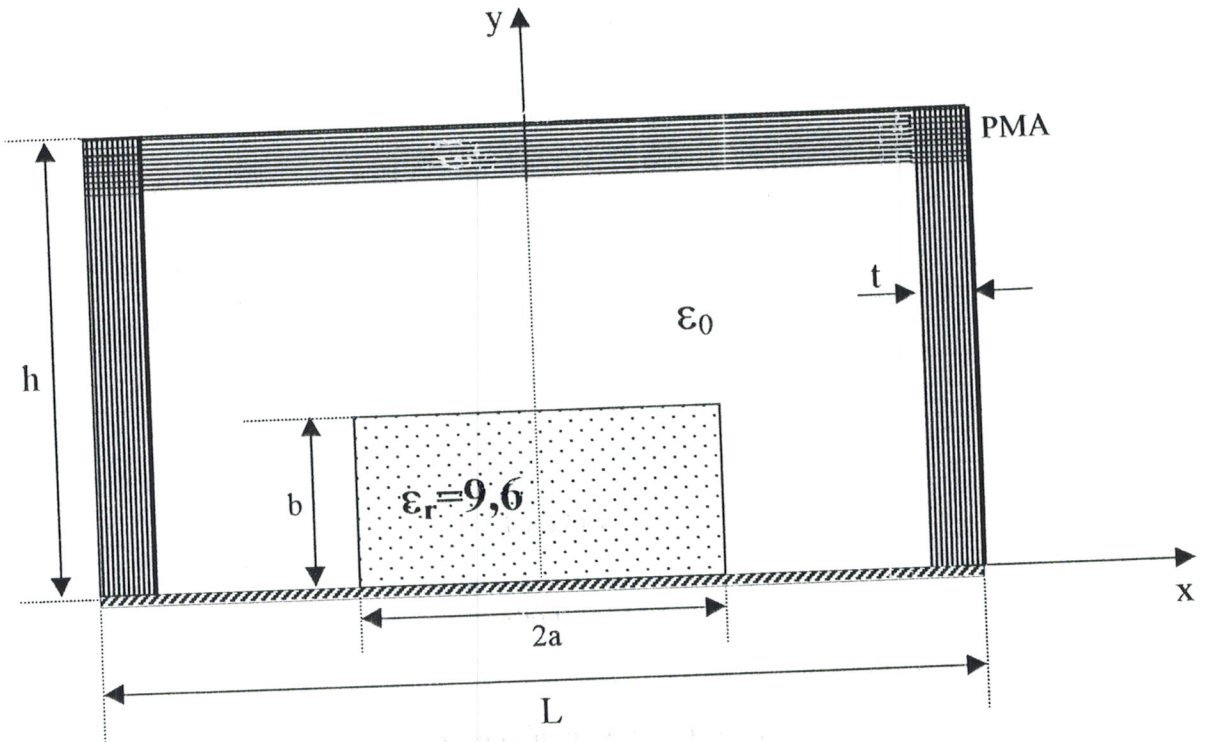


Figure III-21 : Guide image ouvert limité par le PMA

Le domaine d'étude peut être également réduit à une demi-section à cause de la symétrie géométrique.

La figure (III-22) montre le maillage initial, composé de six blocks quadrilatéraux.

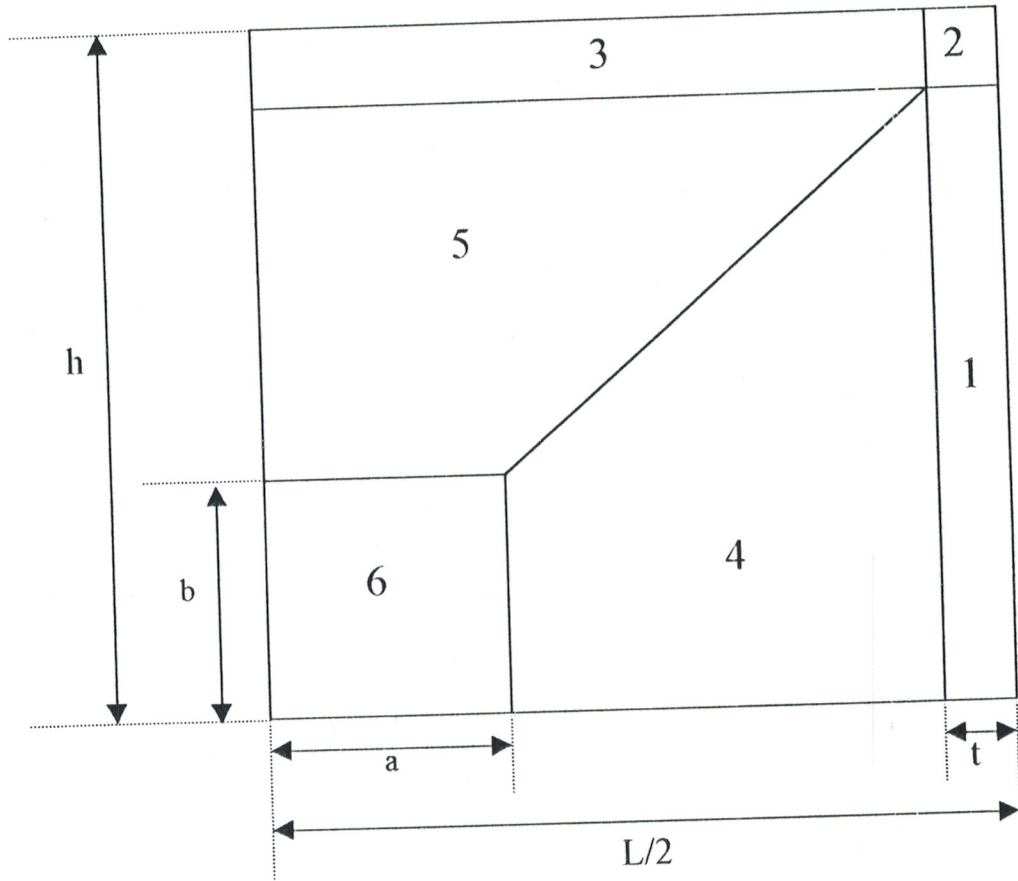


Figure III-22 : maillage initial de la structure étudiée par le PMA

La figure (III-23) montre le maillage final obtenu à partir du précédent (maillage automatique).

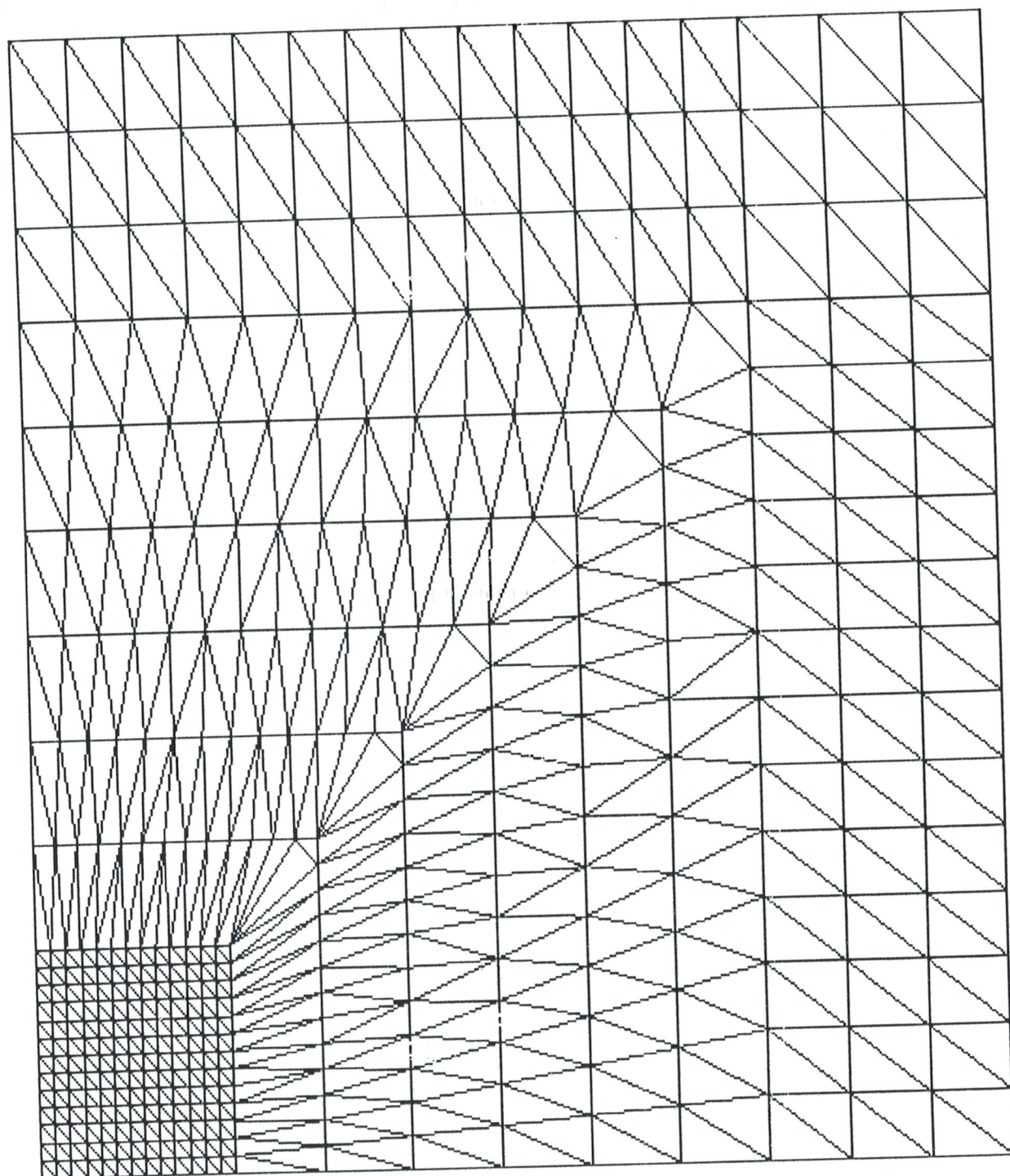


Figure III-23 : maillage final de la structure étudiée par le PMA  
(824 éléments et 451 nœuds)

Dans les deux cas de techniques, utilisées pour le traitement du problème, le plan de symétrie est soit de type mur magnétique (PMC) ou de type mur électrique (PEC).

Les figures (III-24) à (III-31) montrent la répartition du champ diffracté des composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$  pour les deux types de conditions aux limites d'absorption utilisés.

Les figures (III-32) à (III-39) montrent la répartition du champ total des composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$  pour les deux types de conditions aux limites.

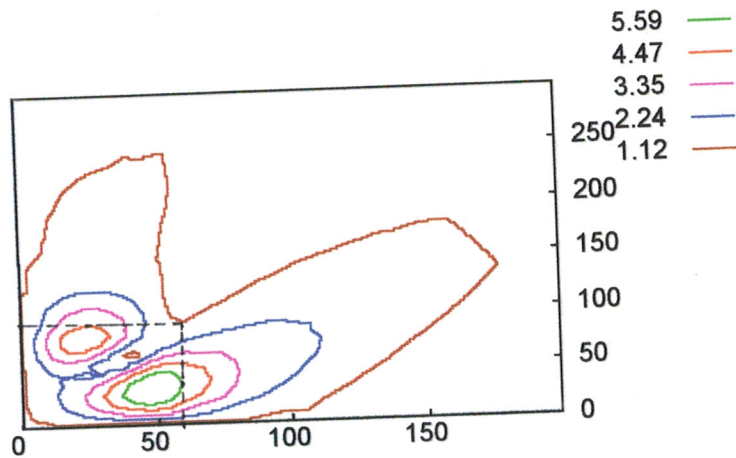


Figure III-24 : Champ électrique  $E_z$  diffracté obtenu par la technique des ABC

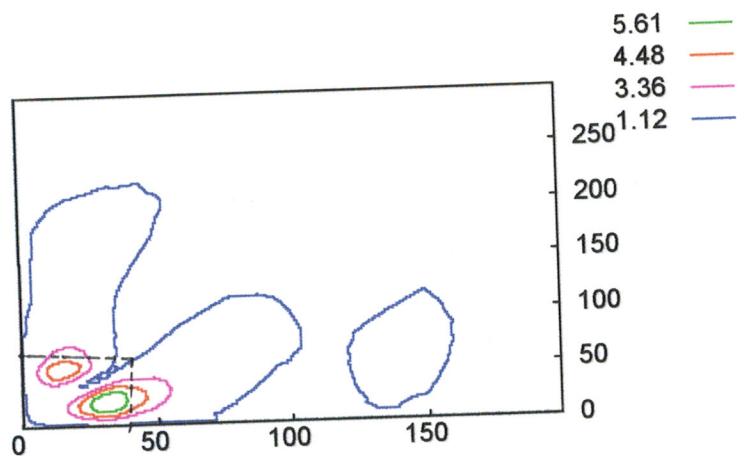


Figure III-25 : Champ électrique  $E_z$  diffracté obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur électrique : PEC



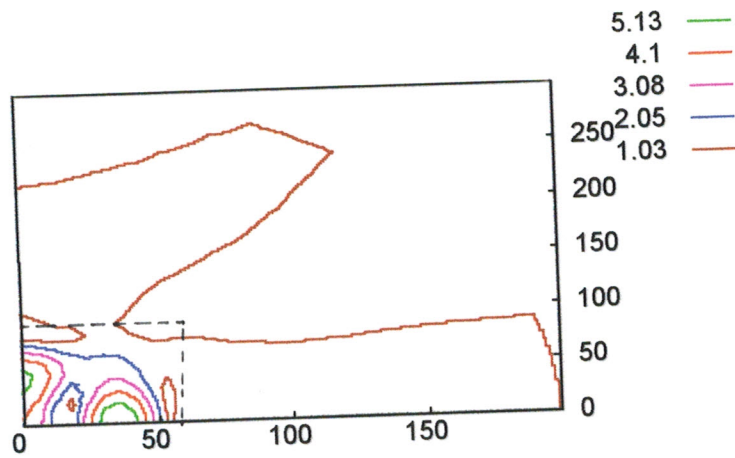


Figure III-26 : Champ magnétique  $H_z$  diffracté obtenu par la technique des ABC

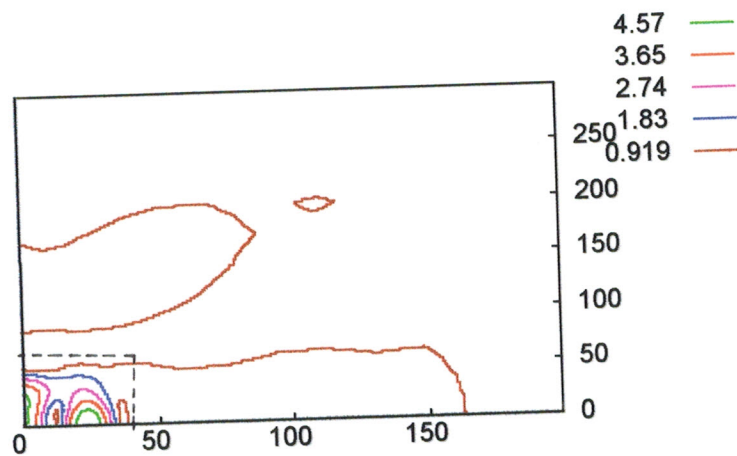


Figure III-27 : Champ magnétique  $H_z$  diffracté obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur électrique : PEC

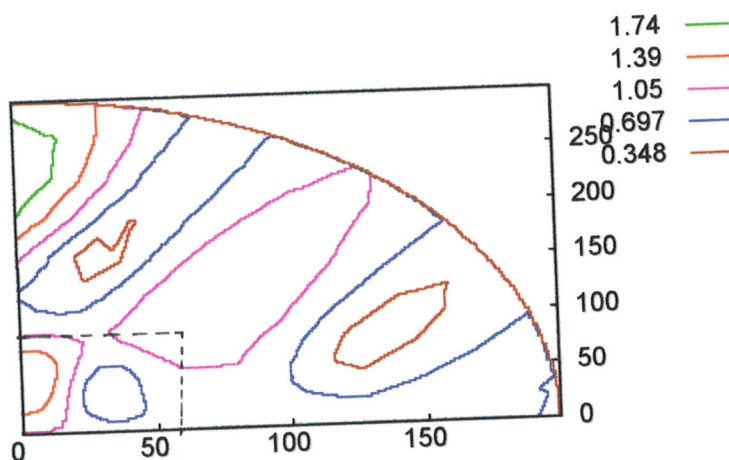


Figure III-28 : Champ électrique  $E_z$  diffracté obtenu par la technique des ABC

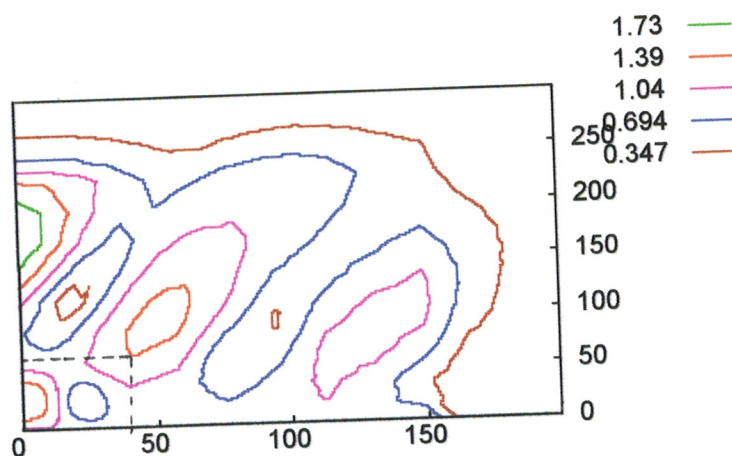


Figure III-29 : Champ électrique  $E_z$  diffracté obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur magnétique : PMC

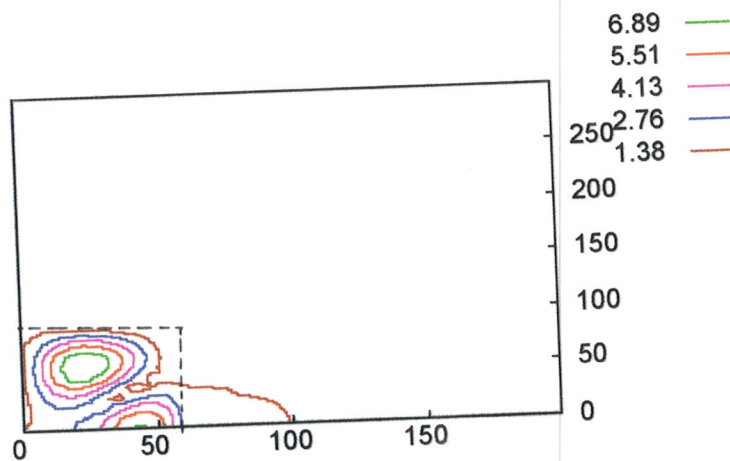


Figure III-30 : Champ magnétique  $H_z$  diffracté obtenu par la technique des ABC

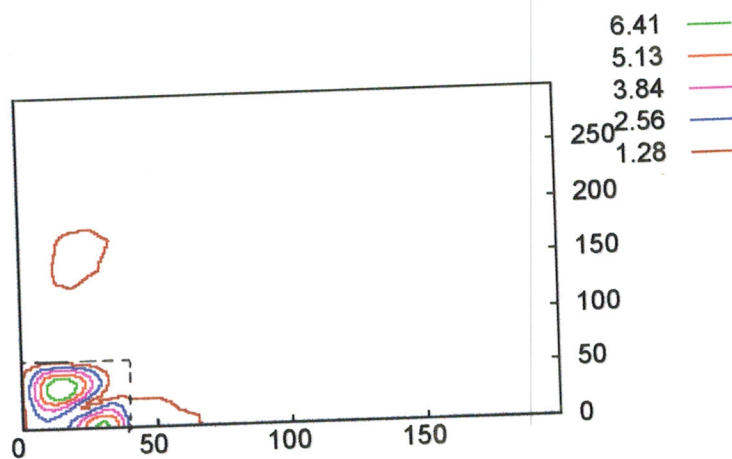


Figure III-31 : Champ magnétique  $H_z$  diffracté obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur magnétique : PMC

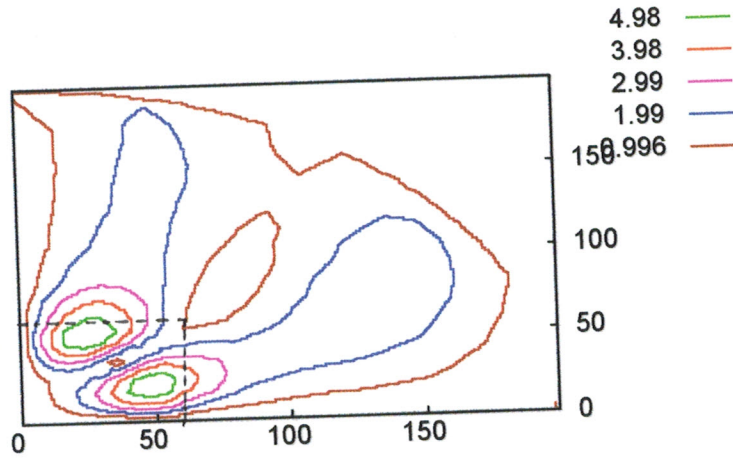


Figure III-32 : Champ électrique  $E_z$  total obtenu par la technique des ABC

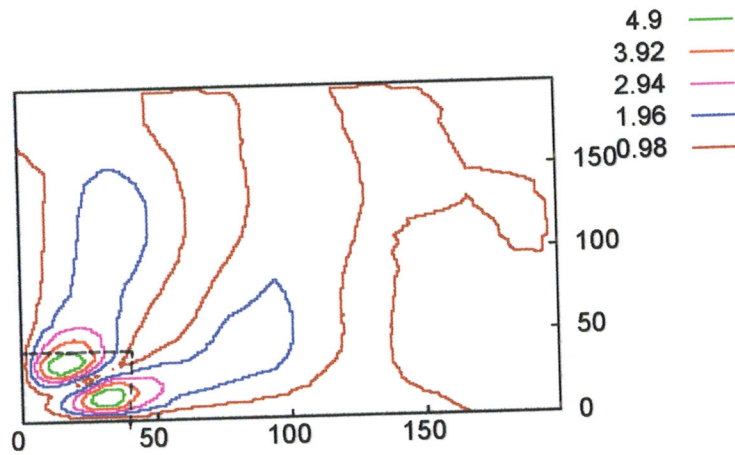


Figure III-33 : Champ électrique  $E_z$  total obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur électrique : PEC

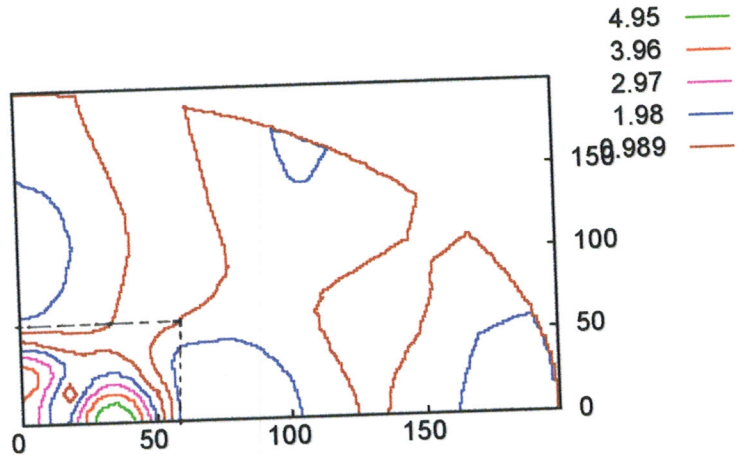


Figure III-34 : Champ magnétique  $H_z$  total obtenu par la technique des ABC

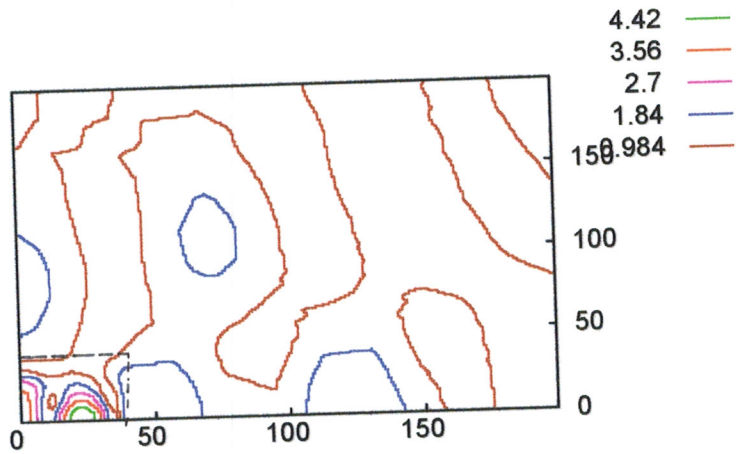


Figure III-35 : Champ magnétique  $H_z$  total obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur électrique : PEC

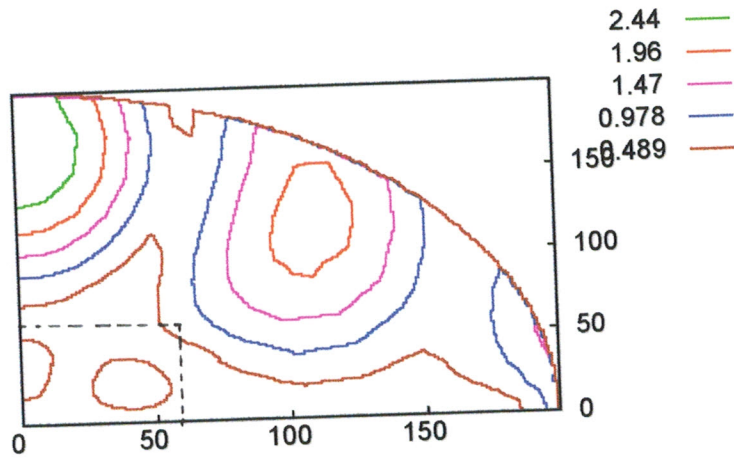


Figure III-36 : Champ électrique  $E_z$  total obtenu par la technique des ABC

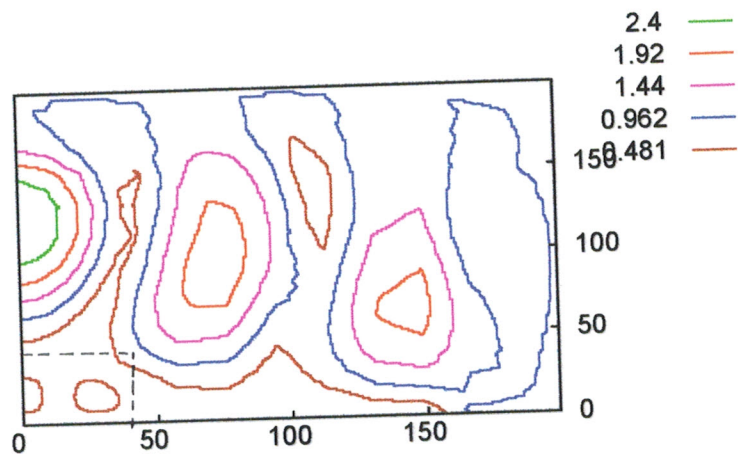


Figure III-37 : Champ électrique  $E_z$  total obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur magnétique : PMC

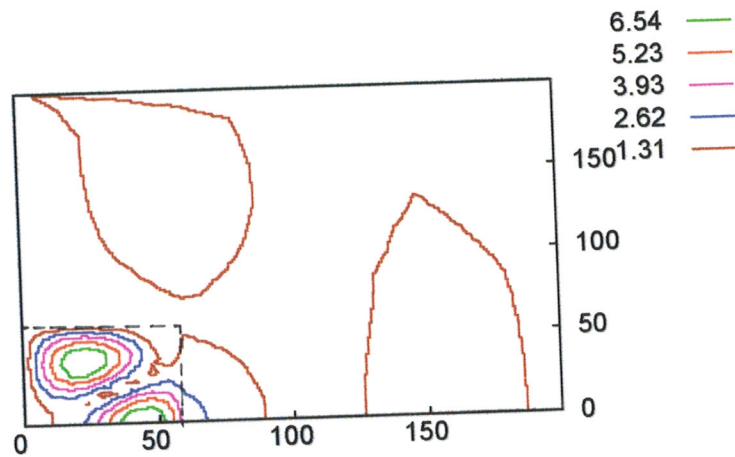


Figure III-38 : Champ magnétique  $H_z$  total obtenu par la technique des ABC

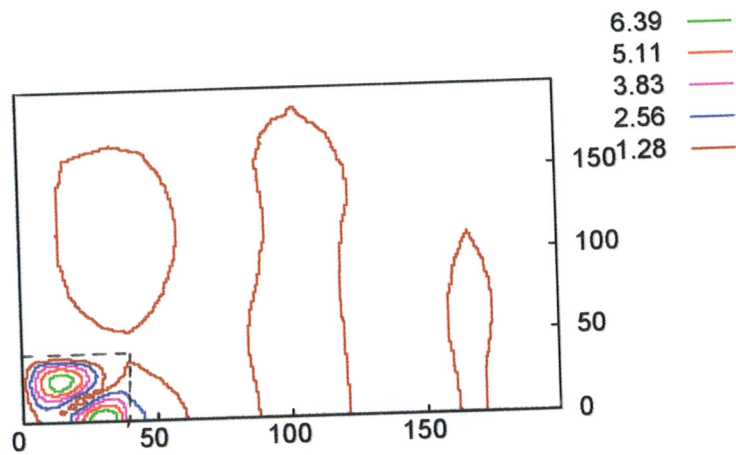


Figure III-39 : Champ magnétique  $H_z$  total obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur magnétique : PMC

**III-C-2-2) ANALYSE DE LA DIFFRACTION D'UN GUIDE IMAGE COUVERT D'UNE COUCHE DIELECTRIQUE**

Cette partie consiste à analyser le comportement de la diffraction électromagnétique du même guide image étudié dans la section précédente, protégé par une enveloppe diélectrique.

**III-C-2-2-1) ANALYSE PAR LES ABC**

La section droite de la structure étudiée est représentée sur la figure (III- 40). Les dimensions du guide sont les mêmes que celles imposées dans le paragraphe B-2-1-1),  $h_1 = 0.3mm$  pour l'épaisseur de l'enveloppe diélectrique ( $\epsilon_{r2} = 4$ ).

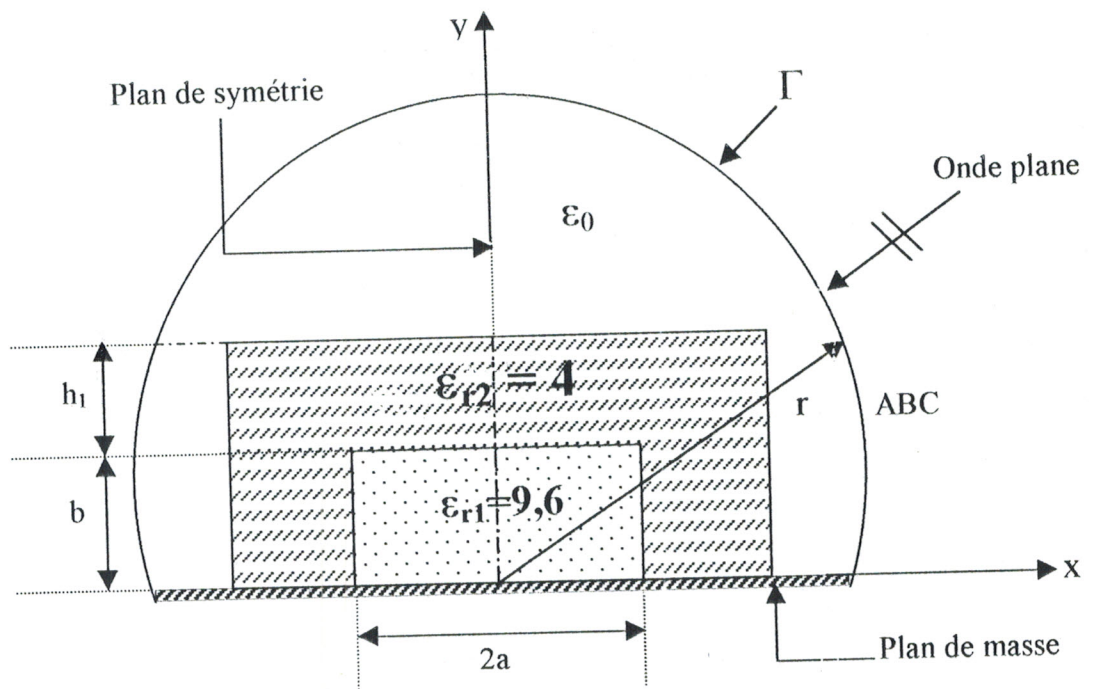


Figure III-40 : guide image couvert entouré par une frontière fictive  $\Gamma$

A cause de la géométrie symétrique, l'analyse se fera sur la moitié de la structure.



La figure (III- 41) montre la subdivision du domaine d'étude en éléments finis (maillage).

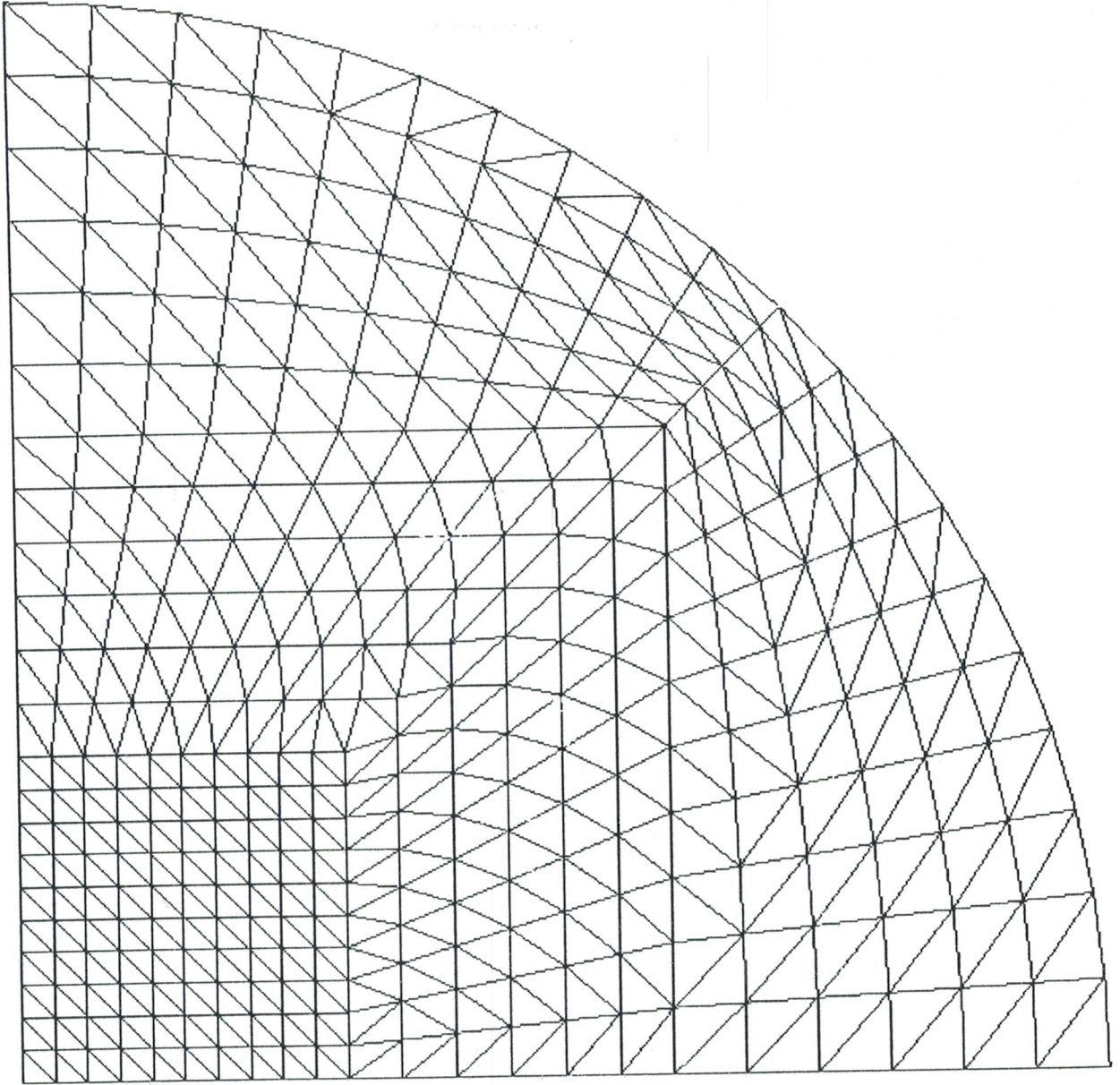


Figure III- 41 : maillage de la demi-structure étudiée par ABC  
(680 éléments et 373 nœuds)

III-C-2-2-2) ANALYSE PAR LE CONCEPT DU PMA

La section droite de la structure étudiée est représentée sur la figure (III- 42).

On garde les mêmes dimensions de la section (III-C-2-1-2),  $h_1 = 0.3 \text{ mm}$  pour l'épaisseur de la couverture diélectrique du guide.

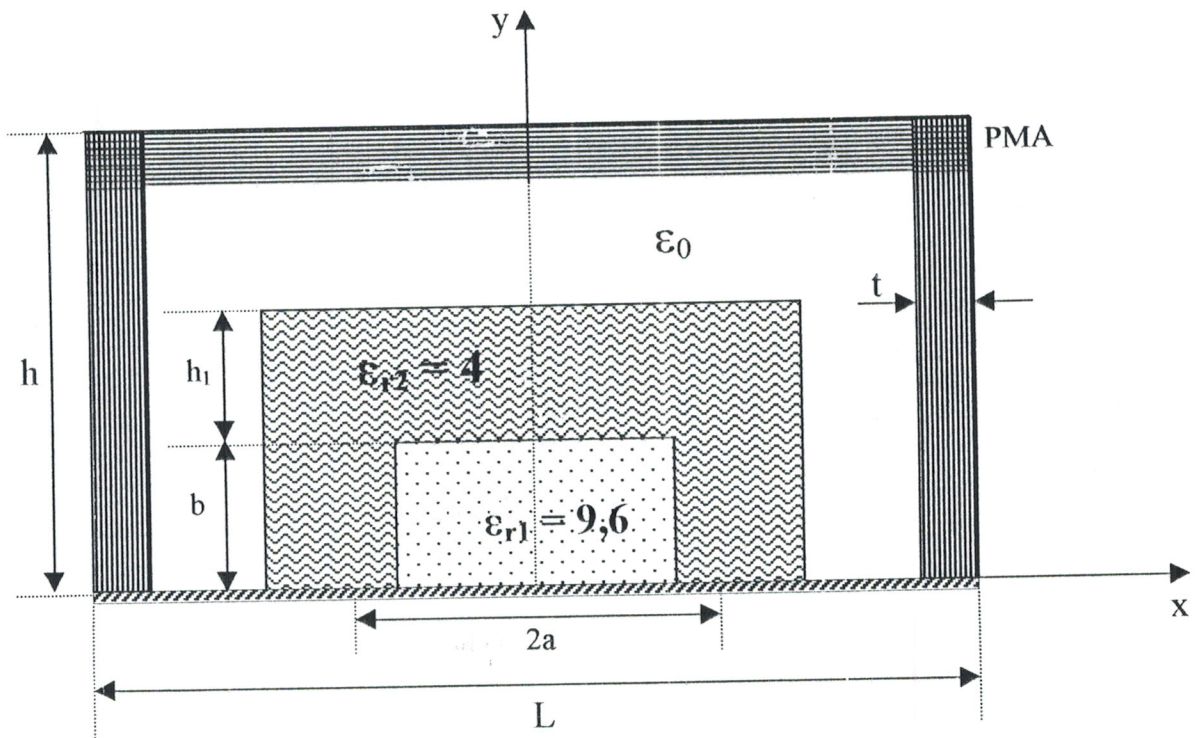


Figure III-42 : Guide image couvert limité par le PMA

La figure (II- 43) présente le maillage final de la demi-structure étudiée (figure III-42).

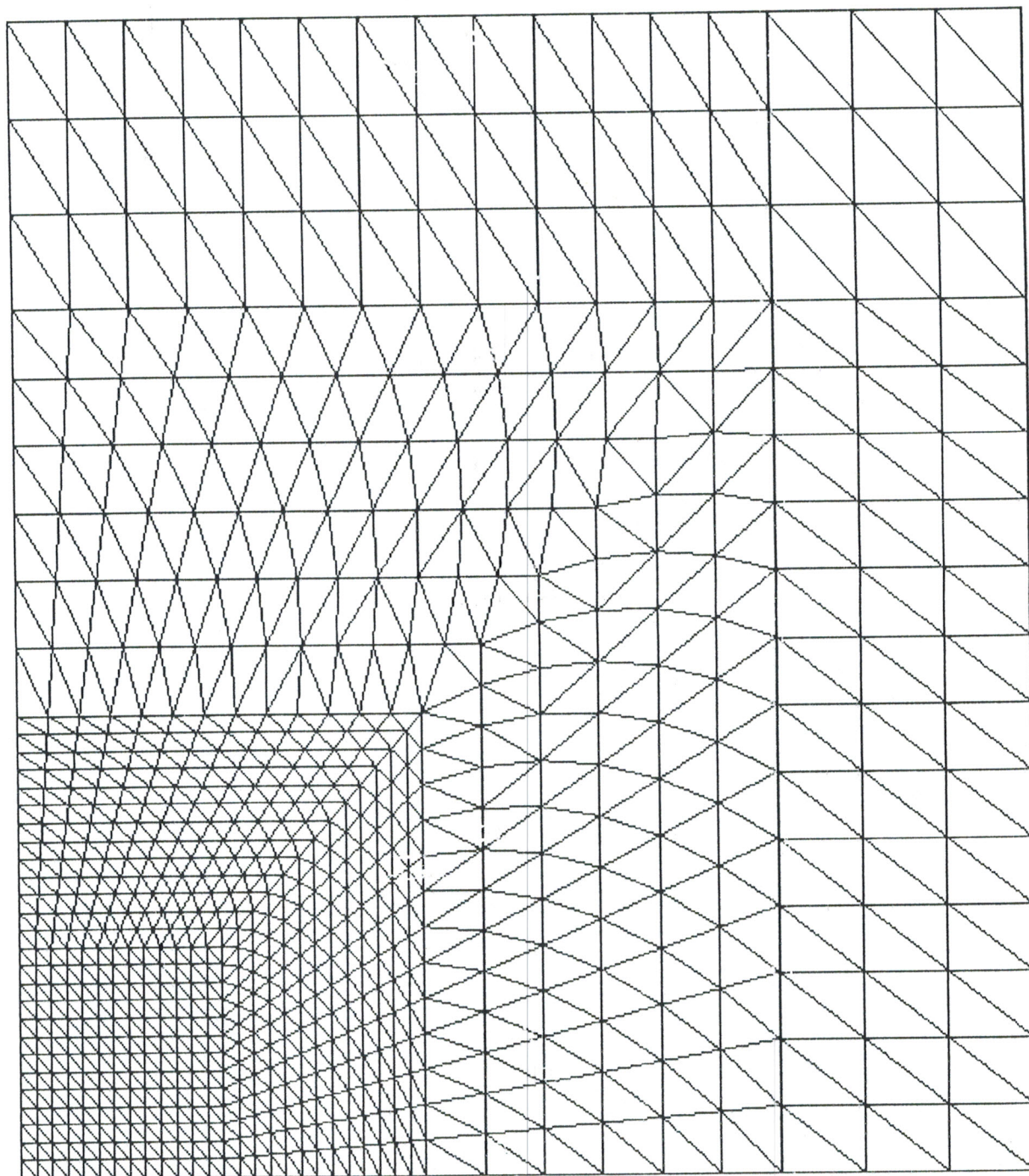


Figure III-43 : maillage de la demi-structure étudiée par le PMA  
(1500 éléments et 802 nœuds)

Les figures (III- 44) à (III- 51) montrent la répartition du comportement électromagnétique du champ diffracté des composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$  pour les deux types de conditions aux limites d'absorption en tenant compte du type du plan de symétrie (PEC ou PMC).

Les figures (III- 52) à (III- 59) montrent le comportement électromagnétique du champ total des composantes  $E_z$  et  $H_z$  pour les deux types de conditions aux limites d'absorption ABC et PMA.

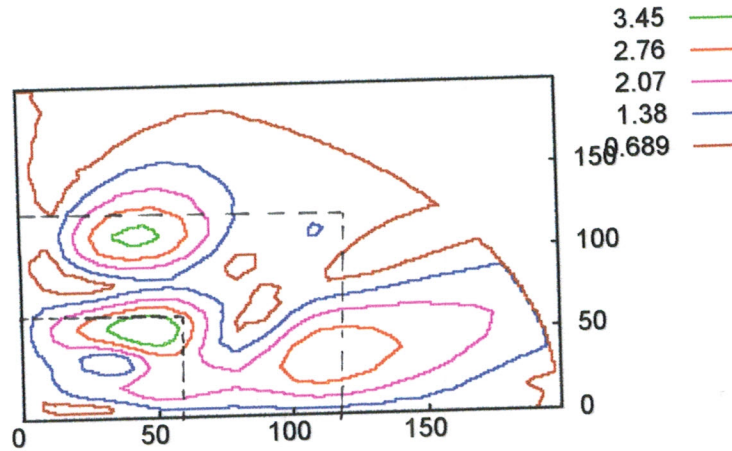


Figure III-44 : Champ électrique  $E_z$  diffracté obtenu par la technique des ABC

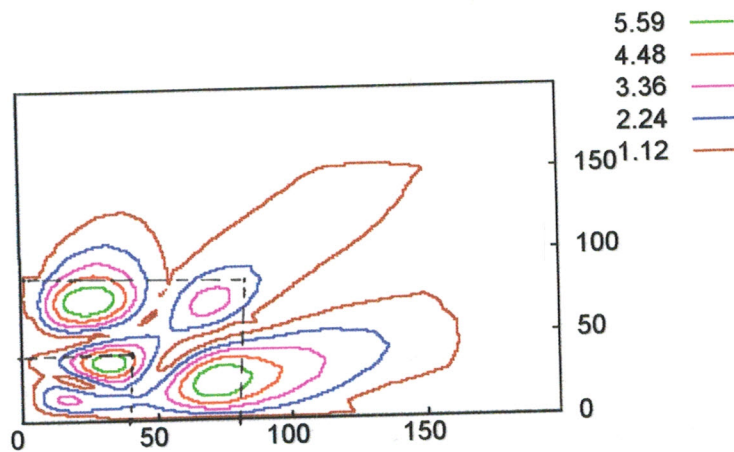


Figure III-45 : Champ électrique  $E_z$  diffracté obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur électrique : PEC

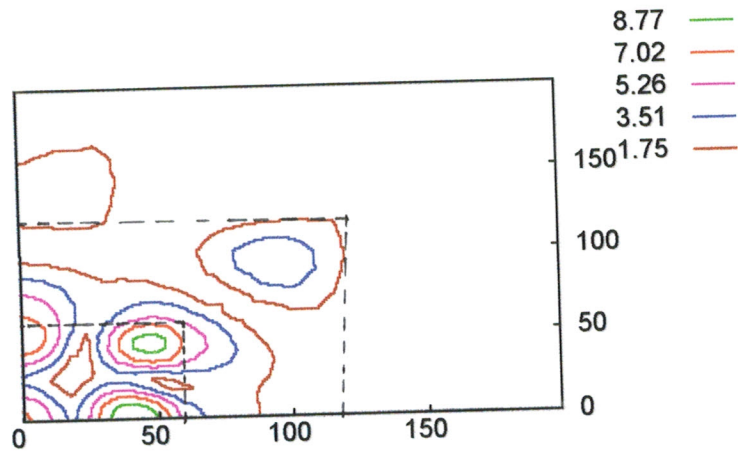


Figure III-46 : Champ magnétique  $H_z$  diffracté obtenu par la technique des ABC

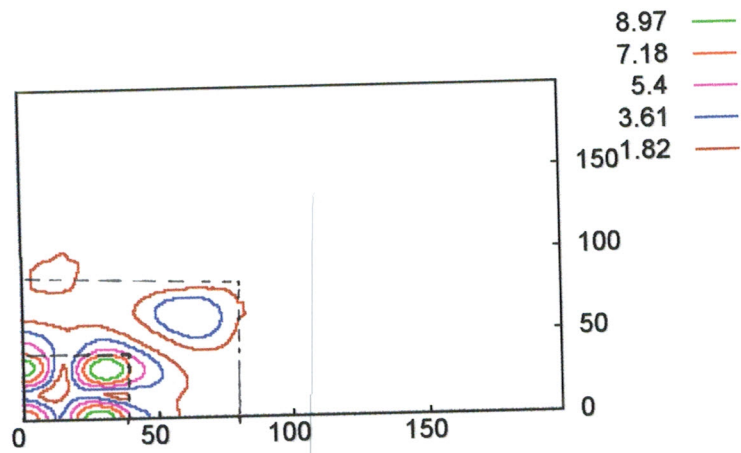


Figure III-47 : Champ magnétique  $H_z$  diffracté obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur électrique : PEC

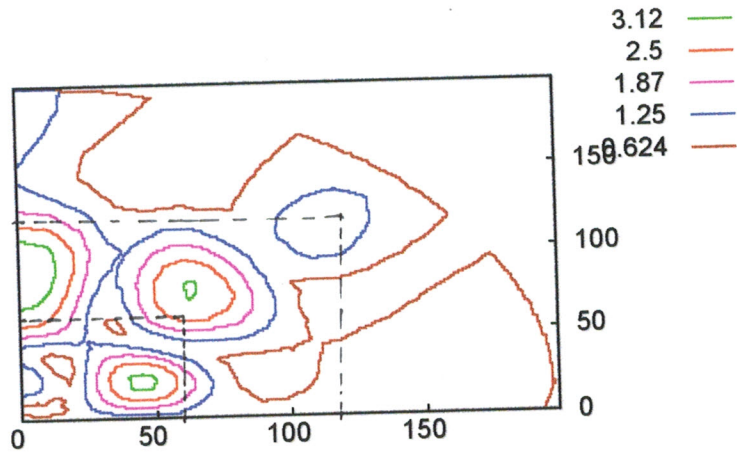


Figure III-48 : Champ électrique  $E_z$  diffracté obtenu par la technique des ABC

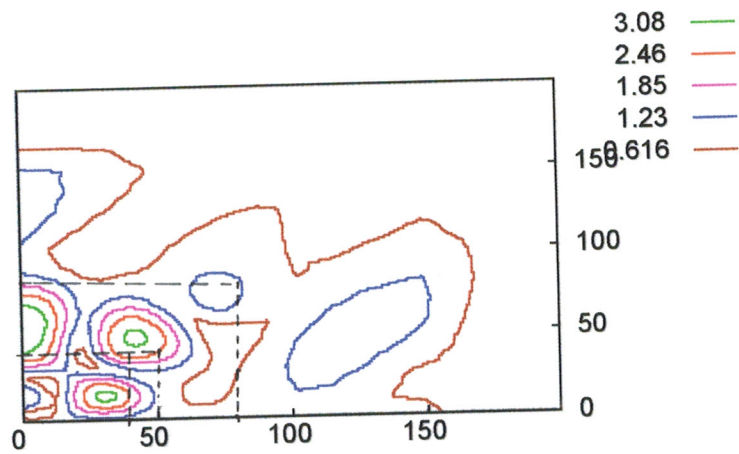


Figure III-49 : Champ électrique  $E_z$  diffracté obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur magnétique : PMC

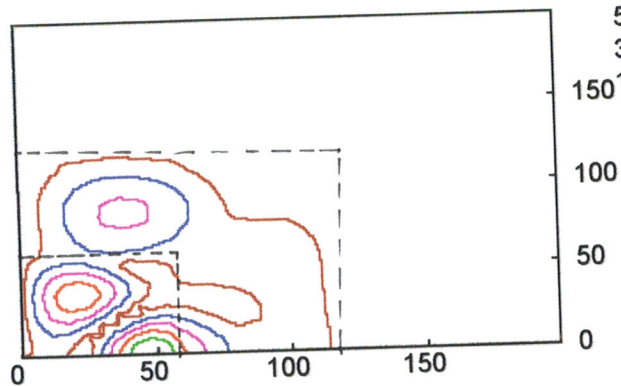
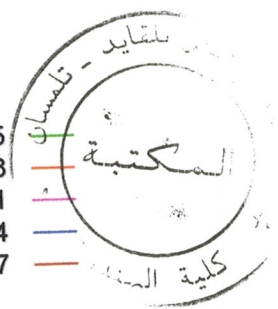


Figure III-50 : Champ magnétique  $H_z$  diffracté obtenu par la technique des ABC

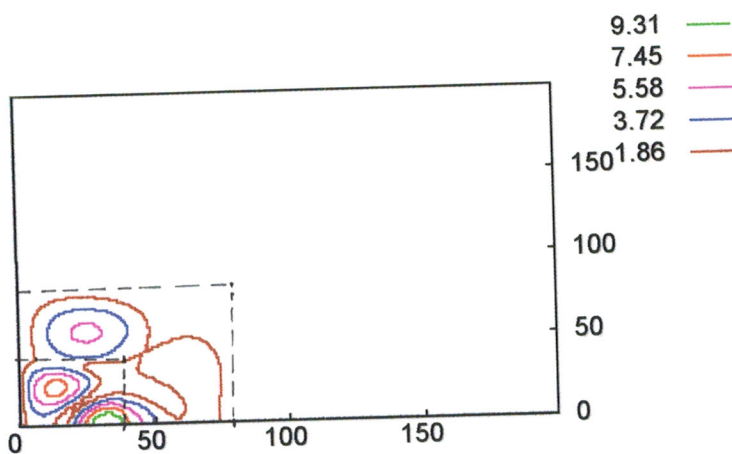


Figure III-51 : Champ magnétique  $H_z$  diffracté obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur magnétique : PMC

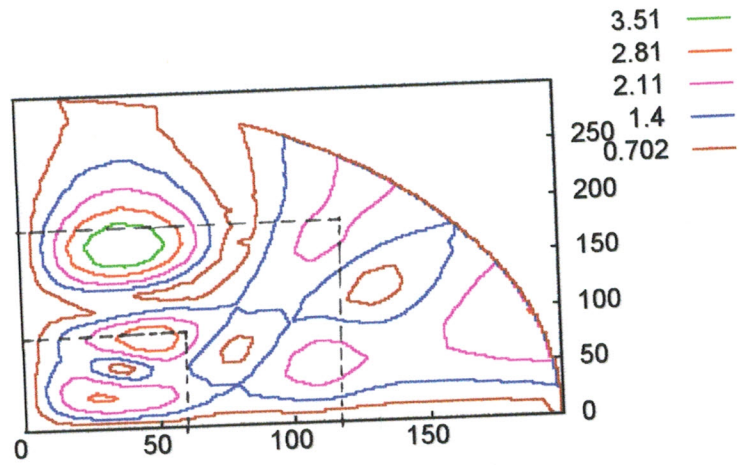


Figure III-52 : Champ électrique  $E_z$  total obtenu par la technique des ABC

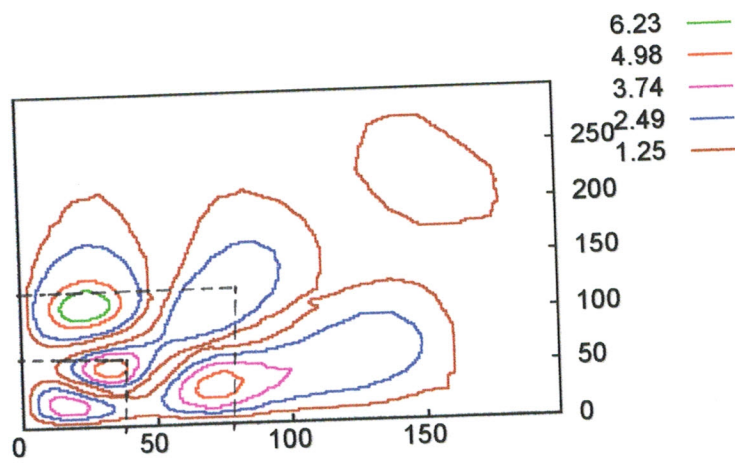


Figure III-53 : Champ électrique  $E_z$  total obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur électrique : PEC



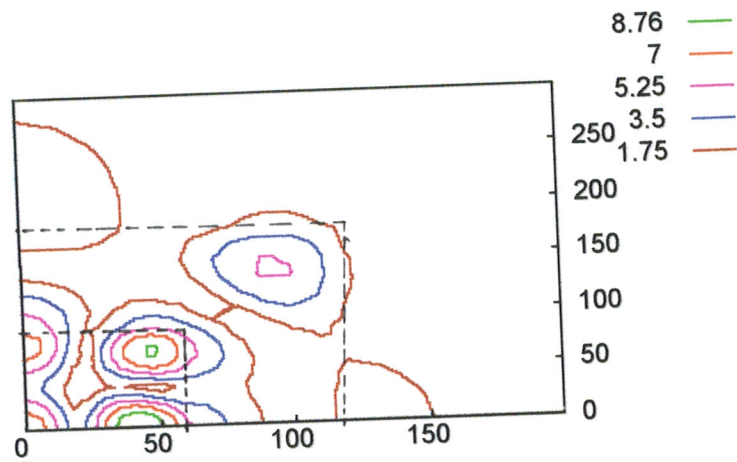


Figure III-54 : Champ magnétique  $H_z$  total obtenu par la technique des ABC

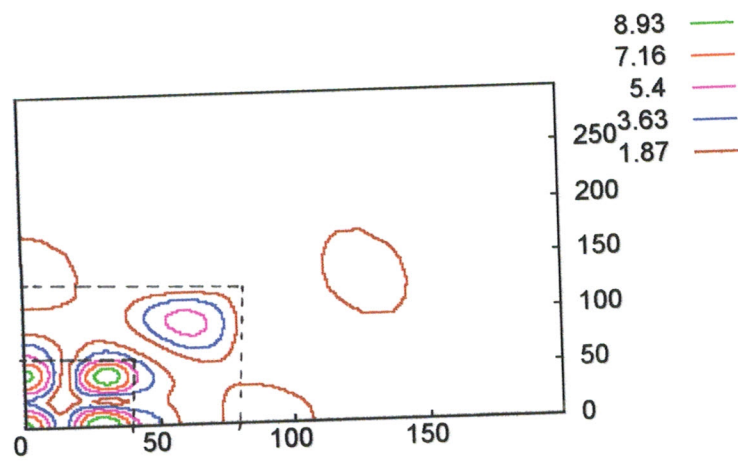


Figure III-55 : Champ magnétique  $H_z$  total obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur électrique : PEC

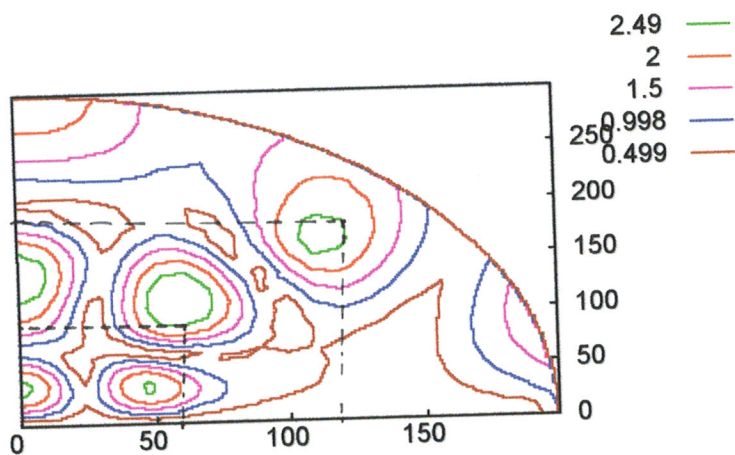


Figure III-56 : Champ électrique  $E_z$  total obtenu par la technique des ABC

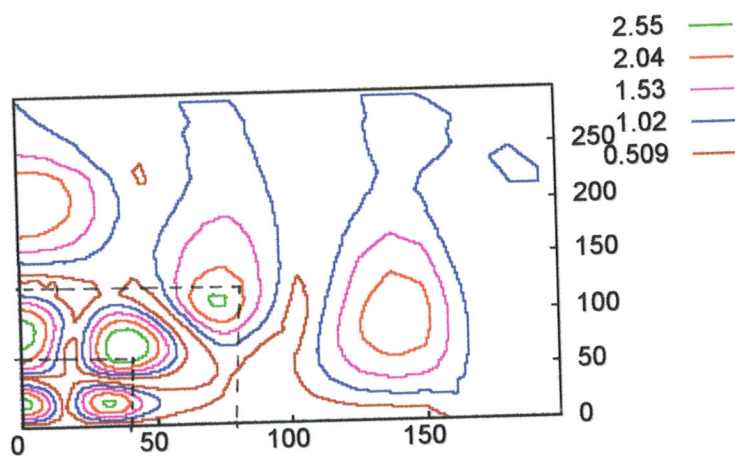


Figure III-57 : Champ électrique  $E_z$  total obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur magnétique : PMC

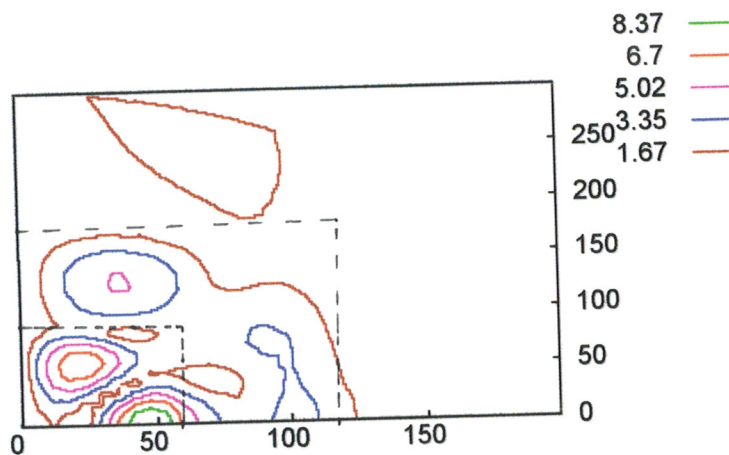


Figure III-58 : Champ magnétique  $H_z$  total obtenu par la technique des ABC

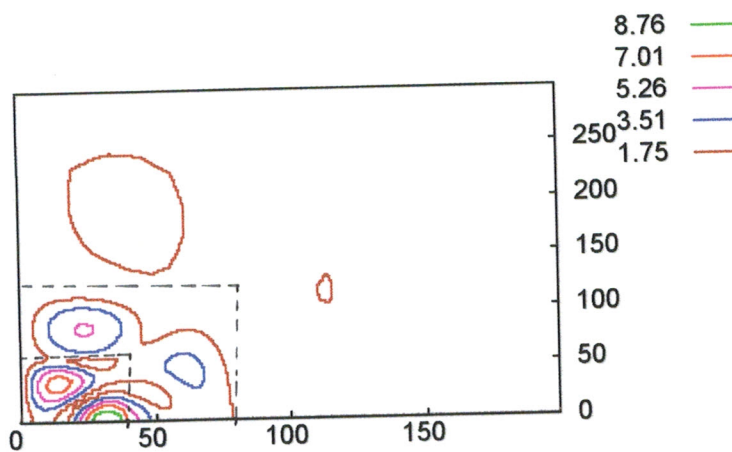


Figure III-59 : Champ magnétique  $H_z$  total obtenu par la technique du PMA

Le plan de symétrie est de type mur magnétique : PMC

D'après la cartographie des champs représentées sur les figures (III-24) à (III- 59), on remarque bien que dans le cas du guide image ouvert le champ diffracté à l'extérieur du guide (air) est élevé, par contre dans le cas où le guide est couvert par une enveloppe diélectrique, le champ diffracté est réduit (décroissance du champ à l'extérieur du guide). Autrement dit, il y a un confinement du champ à l'intérieur du guide.

A partir du comportement électromagnétique du champ visualisé, on peut conclure que pour remédier au problème de rayonnement excessif dans les structures ouvertes, on fait usage d'enveloppes diélectriques au lieu d'utiliser le blindage métallique qui se comporte comme un sérieux handicap dans les circuits intégrés micro-ondes (C.I.M).

### III-C-3) CONCLUSION

A partir des résultats obtenus, il est intéressant d'en tirer quelques conséquences :

- L'effet des conditions aux limites (ABC) et (PMA) sur l'affaiblissement du champ rayonné est bien observé.
- L'adaptation entre les conditions aux limites d'absorption et la méthode des éléments finis pour l'analyse des structures ouvertes est accomplie avec succès.
- La généralisation de la méthode des éléments finis aux problèmes de rayonnement à travers ces quelques exemples montre bien son efficacité.
- Les problèmes traités concernent des structures diélectriques ouvertes polarisées par des ondes TE et TM ; cependant le principe général d'analyse du rayonnement par la MEF, sous d'autres polarisations reste valable.

## CONCLUSION GENERALE

L'étude que nous venons de mener se caractérise essentiellement par l'utilisation de la méthode des éléments finis en deux dimensions pour l'analyse des paramètres caractéristiques des structures passives microondes blindées et ouvertes.

La caractérisation des guides diélectriques blindés repose sur la détermination des constantes de propagation (affaiblissement et vitesse de phase), des fréquences de coupure, des diagrammes de dispersion et de la distribution du champ électromagnétique des modes susceptibles d'être excités dans ces structures guidantes inhomogènes (TE, TM et HEM).

Sachant que la méthode des éléments finis à formulation vectorielle s'impose pour l'étude de ces structures et notamment lors de la recherche des modes hybrides (HEM), elle génère des solutions parasites imbriquées étroitement avec les solutions physiques. Des moyens efficaces ont été mis en œuvre pour les identifier et les éviter. Dans ce cadre, différentes structures guidantes ont été analysées avec succès.

Dans la bande des fréquences millimétriques, exploitée pour la conception des circuits intégrés microondes, le blindage métallique est un sérieux handicap car il engendre des pertes excessives.

Dans ces applications, le blindage est remplacé par des couches diélectriques (substrat et superstrat) permettant d'atténuer le rayonnement des sources microondes.

Un formalisme mathématique traduisant le concept de frontières fictives absorbantes (ABC, PMA) a été adapté à la méthode des éléments finis pour déterminer le champ rayonné des structures ouvertes. Ainsi, nous avons conçu un modèle numérique à base de cette méthode (MEF) capable de répondre à cet objectif.

A titre d'exemple, nous avons étudié longuement le guide image par des méthodes approximatives et par le modèle rigoureux MEF.

Afin de vérifier l'influence des frontières absorbantes (ABC et PMA), nous avons analysé différentes structures ouvertes irradiées par des ondes TE et TM. Cette étude consiste à déterminer le champ total diffracté représentant la somme du champ incident et du champ rayonné dans les plans E et H.

Le logiciel développé reste valable pour l'étude de toute structure diélectrique propageant des ondes TE et TM.

En perspective, notre étude peut être étendue à :

- L'analyse du champ diffracté par des guides diélectriques soumis à des polarisations HEM, ondes de surface, ...
- L'analyse du champ proche rayonné par des structures diélectriques de longueurs finies, tels que le résonateur diélectrique et le résonateur à ruban métallique, rentrant dans le cadre de la conception d'applicateurs microondes.

## **ANNEXES**

## ANNEXE A

Démonstration des relations (II-104) et (II-105) du chapitre II.

A partir des équations de Maxwell:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\bar{\epsilon}\vec{E} \end{array} \right. \quad (\text{A-1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\bar{\epsilon}\vec{E} \end{array} \right. \quad (\text{A-2})$$

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -j\omega\mu\nabla \times \vec{H} = -j\omega\mu j\omega\bar{\epsilon}\vec{E} \\ &\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \omega^2 \bar{\epsilon}\mu\vec{E} = \omega^2 \mu\bar{\epsilon}_r \epsilon_0 \vec{E} = \omega^2 \mu_r \mu_0 \epsilon_0 \bar{\epsilon}_r \vec{E} \\ &\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = k_0^2 \mu_r \bar{\epsilon}_r \vec{E} \\ &\Rightarrow \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} = k_0^2 \bar{\epsilon}_r \vec{E} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

où :  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$  et  $\bar{\epsilon}_r = \bar{\epsilon} / \epsilon_0$

Supposons que toutes les composantes du champ dépendent de  $z$  de la forme:  $\exp(-\gamma z)$  avec  $\gamma = \alpha + j\beta$ ; constante de propagation complexe et subdivisons le champ électrique  $\vec{E}$  en parties transverse ( $\vec{E}_t$ ) et longitudinale ( $E_z$ ), nous obtenons:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) e^{-\gamma z} = \left[ \vec{E}_t(x, y) + E_z(x, y) \vec{u}_z \right] e^{-\gamma z} \quad (\text{A-4})$$

L'équation (3) peut être aussi divisée en parties transverse et longitudinale:

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} = k_0^2 \bar{\epsilon}_r \vec{E} &\Rightarrow \left( \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \right) \times \frac{1}{\mu_r} \left( \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \right) \times (\vec{E}_t + E_z \vec{u}_z) = k_0^2 \bar{\epsilon}_r (\vec{E}_t + E_z \vec{u}_z) \\ &\Rightarrow \nabla_t \times \left[ \frac{1}{\mu_r} \left( \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \right) \times (\vec{E}_t + E_z \vec{u}_z) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \times \left[ \frac{1}{\mu_r} \left( \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \right) \times (\vec{E}_t + E_z \vec{u}_z) \right] \\ &= k_0^2 \bar{\epsilon}_r \vec{E}_t + k_0^2 \bar{\epsilon}_r E_z \vec{u}_z \\ &\Rightarrow \nabla_t \times \frac{1}{\mu_r} \left[ \nabla_t \times \vec{E}_t + \nabla_t \times E_z \vec{u}_z + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \times \vec{E}_t + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \times E_z \vec{u}_z \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \times \frac{1}{\mu_r} \left[ \nabla_t \times \vec{E}_t + \nabla_t \times E_z \vec{u}_z + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \times \vec{E}_t + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \times E_z \vec{u}_z \right] \\ &= k_0^2 \bar{\epsilon}_r \vec{E}_t + k_0^2 \bar{\epsilon}_r E_z \vec{u}_z \quad (\text{A-5}) \end{aligned}$$

$\vec{E}$  et  $\vec{H}$  varient en  $e^{-\gamma z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \Leftrightarrow -\gamma = -(\alpha + j\beta)$ .

Après simplification, l'équation (A-5) devient:



## **BIBLIOGRAPHIE**

## BIBLIOGRAPHIE



- [1] G. DHATT et G. TOUZOT  
 “ Une présentation de la méthode des éléments finis ”  
 Collection Université de Compiègne, deuxième édition 1984. MALOINE S.A.  
 Editeur Paris. Les presses de l'Université LAVAL – QUEBEC.
- [2] E. MAROUBY  
 “ Analyse d'Eléments de Conéctique micro-ondes par la méthode des éléments finis ”  
 Thèse de Doctorat de l'Université de Limoges, Avril 1990.
- [3] M. FEHAM  
 “ Méthode des éléments finis : Application à l'étude des caractéristiques électromagnétiques des résonateurs diélectriques ”  
 Thèse de Docteur-Ingénieur, LIMOGES, Mai 1987.
- [4] F. GARDIOL  
 “ Hyperfréquences ”, Vol. XIII du traité d'électricité  
 Dunod, Paris (1981) - Editions Georgi.
- [5] Paul F. Combes  
 “ Micro-ondes ”  
 Dunod, Paris (1996).
- [6] Paul F. Combes  
 “ Circuits passifs, propagation, antennes ”  
 Dunod, Paris (1996).
- [7] Silvester P.P.  
 “ Finite-element solution of homogeneous waveguide problems ”  
 Alta Frequenza, Vol. 38, 1969.
- [8] Cendes Z.J. and Silvester P.P.  
 “ Numerical solution of dielectric loaded waveguides : finite element analysis ”  
 IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques,  
 Vol. MTT-18 ; pp. 1124-1131, 1970.

- [9] Ahmed S. and Daly P.  
“ Finite- element methods for inhomogeneous waveguides ”  
IEEE Proceeding, Vol. 116 ; pp. 1661-1664, 1969.
- [10] Silvester P.P. and Ferrari R.L.  
“ Finite elements for electrical engineers ”  
3 rd ed., Cambridge, UK ; Cambridge University Press, 1996.
- [11] Giuseppe Pelosi, Roberto Coccioli, Stefano Selleri  
“ Quick Finite Elements for Electromagnetic waves ”  
Artech House, INC., 1998.
- [12] S. M. Saad  
“ Review of Numerical Methods for the Analysis of Arbitrarily Shaped  
Microwave and Optical Dielectric Waveguides ”  
IEEE Trans. On Micro. Theo. And Tech. Vol. MTT- 33,  
n° 10, October 1985, pp. 894- 899.
- [13] A. Konrad  
“ Vector Variational Formulation of electromagnetic fields in anisotropic media ”  
IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 24 ; pp.553-559, 1976.
- [14] Lee, J.F.  
“ Finite element analysis of lossy dielectric waveguides ”  
IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques,  
Vol. 42 ; pp. 1025-1031, 1994.
- [15] C. Polycarpou, Michael R, and Constantine A.  
“ Finite Element Analysis of MMIC Waveguide Structures  
with Anisotropic Substrates ”  
IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques,  
Vol. 44, n° 10 October 1996.
- [16] Rozzi T., Pierantoni L. and Farina M.  
“ Eigenvalue approach to the efficient determination of hybrid and complex  
spectrum of inhomogeneous closed waveguides ”  
IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques,  
Vol. 45 ; pp. 345-353, 1997.

- [17] T. ITOH  
“ Dielectric Waveguide- type millimeter wave integrated circuits ”  
Vol. 4, Academic Press 1981.
- [18] E.A.J. MARCATILI  
“ Dielectric rectangular waveguide and directional couplers for integrated optics ”  
B.S.T.J. Sept. 1969, PP. 2071-2102.
- [19] R.M. KNOX, P.P. TOULIOS  
“ Integrated circuits for the millimeter through optical frequency range ”  
Proc. Symp. Sub-millimeter wave, New-York, March 1970, PP. 497-516.
- [20] Xiao Hu Jiao  
“ Filtres millimétriques à résonateurs diélectriques ”  
Thèse de Doctorat d'électronique de l'Université de Limoges, Février 1988.
- [21] W. Mc Levege, T. Itoh, R. Mittra  
“ New Waveguide Structures for mm-wave and optical integrated circuits ”  
IEEE Trans. on MTT, Oct. 1975, pp. 788-794.
- [22] T. Itoh  
“ Inverted Strip Dielectric Waveguide for mm-wave integrated circuits ”  
IEEE Trans. on MTT, Nov. 1976, pp. 821-827.
- [23] F. Gardiol  
“ Electromagnétisme ”, Vol. III du traité d'électricité  
Editions Georgi (1979).
- [24] A. Djemai, F. Hadj-Amara  
“ Synthèse des lignes microrubans pour application en micro-ondes ”  
Mémoire d'ingénieur d'état en électronique de l'Université de Tlemcen, Sept. 1997.
- [25] Silvester P. and Hsieh M.S.  
“ Finite-element solution of 2-dimensional exterior-field problems ”  
IEEE Proceeding, Vol. 118 ; pp. 1743-1747, 1971.
- [26] Jin, J.M. and Liepa. V.V.  
“ Application of hybrid finite element method to electromagnetic scattering from coated cylinders ”  
IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 36 ; pp. 50-54, 1988.

- [27] Karp S.M.  
“ A convergent far-field expansion for two-dimensional radiation functions ”  
Comm. Pure Appl. Math., Vol. 14 ; pp. 427-434, 1961.
- [28] Abramowing M. and Stegun I.A.  
“ Hand book of Mathematical functions with formulas,  
graphs, and Mathematical tables ”  
New York, NY : Dover Publications, 1972.
- [29] Bayliss A. and Turkel. E.  
“ Radiatio boundary conditions for wave-like equations ”  
Communications on Pure and Applied Mathematics,  
Vol. 33 ; pp. 707-725, 1980.
- [30] Webb J.P.  
“ Absorbing Boundary Conditions for the finite element analysis of planar devices ”  
IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques,  
Vol. 38 ; pp. 1328-1332, 1990.
- [31] Sacks Z.S. Kings land, D.M., Lee R. and Lee J.F.  
“ A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary  
condition ”  
IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 43 ; pp. 1460-1463, 1995.

## RESUME

L'utilisation de la méthode des éléments finis (MEF) à deux dimensions a permis l'étude des structures diélectriques blindées et ouvertes.

L'analyse rigoureuse des guides diélectriques blindés par la MEF permet de calculer les constantes de propagation (affaiblissement et vitesse de phase), les fréquences de coupure, les diagrammes de dispersion et la distribution du champ électromagnétique des modes susceptibles d'être excités dans ces structures guidantes.

Pour l'étude des guides diélectriques ouverts et en particulier le guide image, nous avons établi une adaptation de la technique des frontières absorbantes fictives (ABC, PMA) à la méthode des éléments finis (MEF) pour la caractérisation dans les plans E et H de la diffraction des ondes électromagnétiques par ces structures ouvertes.

### Mots clés :

- Méthode des éléments finis.
- Théorie des ABC et PMA.
- Guide diélectrique blindé.
- Guide image.
- Constante de propagation.
- Fréquence de coupure.
- Champ électromagnétique.
- Modes de propagation.
- Diagramme de dispersion.
- Champ diffracté.