

je dédie cette thèse à

A mes parents

A mon mari Moutawakil

A mes frères Toufik et Abdelghani

A la mémoire de ma sœur Chahida

A mes sœurs Assia, Yasmina et Téma

A mes enfants

A tous ceux qui m'aiment

# Remerciements

Ce travail a pris naissance grâce à l'accord programme établi entre l'Université Aboubakr Belkaid Tlemcen et celle de Pau. Ce dernier, a été réalisé par les Professeurs, feu O.Arino, Abdelkader Boucherif et Noureddine Ghouali. J'ai initialisé ce modeste travail à l'université de Pau, puis au centre international de recherche IRD Bondy France. Après le décès du Professeur, O. Arino c'est au Professeur Sidi Mohamed Bouguima que revient le mérite d'avoir suivi de très près mon travail et de le mener a bien jusqu'a sa réalisation totale.

Je témoigne ici ma profonde gratitude à mon Directeur de thèse, Monsieur Sidi Mohamed Bouguima Professeur à l'Université Abou Bakr Belkaid Tlemcen pour les efforts considérables qu'il a déployés pour la réalisation de ce travail. Je le remercie également pour sa disponibilité et pour sa patience qu'il'a bien voulu me témoigner.

Je tiens à exprimer mes vifs et sincères remerciements à Monsieur Abdelkader Boucherif Professeur a King Fahd University of Pertoleum and Minerals, à l'Arabie Saoudite, pour ses encouragements et ses conseils pertinents. Je lui serai toujours reconnaissante d'avoir dirigé mes premiers pas dans l'univers des inclusions différentielles, je lui témoigne ici ma profonde gratitude.

J'adresse aussi mes sincères remerciements aux membres de jury qui ont bien voulu examiner et juger ce travail.

Qu'il me soit permis ici de présenter mes vifs remerciements et mon profond respect à Monsieur Noureddine Ghouali, Professeur à l'Université Aboubakr Belkaid Tlemcen, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse.

J'adresse aussi mes remerciements les plus sincères à Messieurs, Mouffak Benchohra, Professeur à l'Université Djilali Liabes, Sidi Belabbes, Toufik Mahdjoub et Ali Moussaoui Maîtres de Conférences (A), à l'Université Abou Bakr Belkaid Tlemcen qui ont accepté de juger ce travail.

J'adresse aussi mes remerciements à mes collègues Ahmed Boussoir et Abdelkader Lakmèche qui m'ont bien reçu à l'université de Pau

Je dédie ce travail respectueusement à la mémoire du Professeur feu Ovid Arino qui a eu l'amabilité de m'introduire à la théorie de la dynamique de populations.

Je ne terminerai pas mes remerciements sans remercier mes parents sans lesquels mon travail n'aurait pas vu le jour.

Mes remerciements finaux et non les moindres vont à toute ma famille, en particulier à mon mari Moutawakil de m'avoir soutenu ces derniers mois, à mon frère Abdelghani qui m'a toujours encouragé dans mes études, et à ma sœur Téma.

Merci à vous mes enfants d'avoir compris les impératifs de cette fin de thèse.

Je ne citerai pas, mais ils se reconnaîtront, tous mes amis et collègues, qui m'ont soutenu, même de loin. Je leur en suis reconnaissante.

# Table des Matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>7</b>
<b>1 QUELQUES MODELES DE LA DYNAMIQUE DES POPULATIONS</b>	<b>10</b>
1.1 Modèles avec une seule population. . . . .	11
1.1.1 Modèle de Malthus . . . . .	12
1.1.2 Modèle logistique . . . . .	13
1.2 Modèles avec deux populations . . . . .	16
1.2.1 Modèle de Lotka Volterra . . . . .	16
1.2.2 Modèle de Gause . . . . .	20
1.3 Fonction réponse. . . . .	21
1.3.1 Fonction réponse dépendant seulement de la proie. . . . .	21
1.3.2 Fonction réponse dépendant de la proie et du prédateur . . . . .	24
1.4 Forme générale du modèle actuel. . . . .	25
1.4.1 Modèle proie dépendant . . . . .	26
1.4.2 Modèle ratio dépendant. . . . .	26
1.5 Le modèle en question. . . . .	26
1.5.1 Description du modèle. . . . .	26
1.5.2 Construction du modèle. . . . .	27
1.5.3 Prédation. . . . .	29
<b>2 PRELIMINAIRES</b>	<b>32</b>

2.1	Théorème de continuation de Mawhin . . . . .	32
2.2	Lemme généralisé de Gronwall . . . . .	33
2.3	Multi-application . . . . .	35
2.3.1	Continuité . . . . .	37
2.3.2	Mesurabilité et intégrale d'Aumann . . . . .	37
2.3.3	Condition de Carathéodory . . . . .	38
2.4	Notions sur les inclusions différentielles . . . . .	40
2.4.1	Existence de solutions . . . . .	40
2.4.2	Exemples d'inclusion différentielle . . . . .	41
<b>3</b>	<b>L'EFFET DES VARIATIONS DES EAUX SUR LES INTERACTIONS</b>	
	<b>DES MODELES PROIES-PREDATEURS</b>	<b>43</b>
3.1	Introduction . . . . .	45
3.2	Modèle proie-prédateur. . . . .	46
3.3	Analyse mathématique et résultats . . . . .	50
3.4	Preuve du théorème 3.1 . . . . .	51
3.4.1	Modèle réduit . . . . .	52
3.4.2	Estimations à priori . . . . .	53
3.4.3	Positivité de la solution . . . . .	56
3.4.4	Existence de solutions . . . . .	60
3.4.5	Calcul du degré topologique . . . . .	64
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>67</b>
<b>4</b>	<b>SYSTEMES DIFFERENTIELS MULTIVOQUES</b>	<b>69</b>
4.1	Introduction . . . . .	69
4.2	Cas Linéaire . . . . .	70
4.2.1	Problème aux limites linéaire . . . . .	70
4.2.2	Problèmes aux limites pour inclusions différentiels linéaires . . . . .	77
4.3	Problème aux limites pour inclusion différentiel non linéaire . . . . .	79

4.3.1	La théorie de la transversalité topologique dans le cas des multiap- plications . . . . .	80
4.3.2	Résultats . . . . .	81

<b>Bibliographie</b>		<b>92</b>
----------------------	--	-----------

# Introduction Générale

L'objectif entrepris dans cette première partie de cette thèse est l'étude des modèles mathématiques, plus précisément nous avons examiné de près les modèles proie-prédateur. A partir de quelques modèles cités dans la littérature, nous avons déduit l'importance du choix de la fonction de croissance des individus (Voir, [44], [78]) et nous avons mis en valeur le rôle de la fonction réponse qui décrit les interactions entre les espèces, nous renvoyons le lecteur à [39]. Dans notre travail, nous avons considéré un lac artificiel de la rivière Vioulou située à 30 km du sud-est de Rodèz. C'est l'un des plus grands lacs artificiels de France, permettant de stocker l'eau afin de la garder pour les saisons de forte demande d'électricité. Dans ce lac nous avons considéré deux espèces l'un le prédateur (le brochet) et l'autre la proie (le gardon). Nous définissons d'une manière rigoureuse la fonction réponse qui interprète notre contexte de dynamique de population et son influence réciproque sur les espèces considérées. Dans notre cas, cette dernière dépend d'une fonction continue, et périodique  $r(t)$  qui représente les niveaux des eaux du lac. Quand les niveaux des eaux sont très élevés, les brochets peuvent disparaître, car les rencontres prédateur-proie sont rares. Par contre quand les niveaux des eaux sont bas, le prédateur est plus en contact avec la proie, ce qui entraîne la mortalité des alevins du gardon, et par suite la disparition de la population proie, ce qui entraîne à son tour une extinction du prédateur. Dans ces deux cas il peut y avoir un risque de rupture de la survie des deux espèces. C'est ce risque qui est le centre de notre travail dans cette thèse. Pour cela nous construisons le modèle suivant:

$$\begin{cases} \frac{dG(t)}{dt} = - \min \left( \frac{r(t)G(t)}{B(t)+D}, \gamma_B \right) B(t) + \gamma_G G(t) - m_G (G(t))^2 \\ \frac{dB(t)}{dt} = \tau_B \min \left( \frac{r(t)G(t)}{B(t)+D}, \gamma_B \right) B(t) - m_B B(t) \end{cases} \quad (1)$$

Remarquons que le modèle contient des coefficients qui présentent des sauts discontinus, qui reflètent des variations temporaires des niveaux des eaux. Le système (1) est non linéaire, formé de deux équations différentielles ordinaires, à coefficients peu réguliers dû à la présence de la fonction min. La première équation décrit l'évolution de la proie et la deuxième l'évolution du prédateur. L'étude qualitative de ces équations sera le centre de notre travail. Nous considérons le problème de l'existence d'une solution périodique et positive. Notre travail est réparti de la manière suivante:

Dans le premier chapitre, nous rappelons les modèles classiques de Malthus, de Verhulst, et de Lokta Volterra. Nous en donnons quelques critiques faites dans la littérature à ces modèles.

Le chapitre deux, est consacré aux outils mathématiques utilisés dans notre travail, en particulier, le théorème de Mawhin, et une version généralisée du lemme de Gronwall. Nous faisons référence aux manographes [51],[55] et quelques théorèmes et définitions utilisés dans le chapitre quatre.

Dans le chapitre trois nous montrons le résultat essentiel de cette première partie de la thèse, qui est l'existence d'une solution 1- périodique et positive du système (1) .

Le chapitre quatre, fait l'objet de la deuxième partie, il est consacré aux systèmes multivoques. Dans cette partie, on établit l'existence d'une solution à une équation multivoque moyennant la transversalité topologique, les inégalités différentielles, le théorème du point fixe. Pour terminer ce quatrième chapitre nous donnons un résultat pour l'existence d'au moins une solution du problème (2) suivant:

$$x'(t) \in A(t)x(t) + F(t, x(t)), \quad t \in (0, 1); \quad Mx(0) + Nx(1) = 0 \quad (2)$$



Ici, nous supposons que :

$F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  vérifie une condition de Carathéodory des multifonctions, et certaines hypothèses que nous expliciterons dans le chapitre quatre.

# Chapitre 1

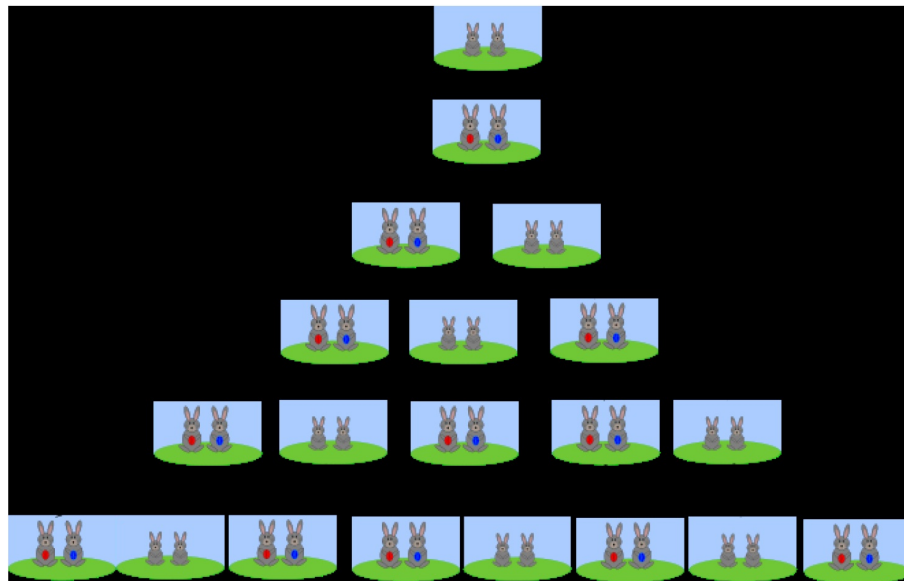
## QUELQUES MODELES DE LA DYNAMIQUE DES POPULATIONS

La population est un groupe d'individus de même espèce, vivant sous des conditions bien définies, dans un espace bien déterminé, considérée dans un moment bien précis et se reproduisent entre elles. Les études faites sur cette dernière ont pour but de comprendre les événements environnementaux et de connaître les accroissements et les diminutions des effectifs d'individus qui la composent. La science qui s'intéresse au développement numérique des populations des êtres vivants est la dynamique des populations. Des études faites sur ces sujets sont importantes pour la gestion de la pêche, la modération des zones protégées et pour le contrôle des populations d'animaux dit nuisibles. Les premiers auteurs en ce domaine, ont commencé à considérer des populations non structurées et asynchrones. Dans ce cas les naissances des nouveaux individus ont lieu de façon tout à fait aléatoire dans le temps. Ces auteurs ont résolu ces problèmes de dynamique de population en appliquant un fragment de mathématique à un fragment de réalité ( voir, [47]). Pour cela, ils ont créé une structure mathématique décrite par une analyse des processus réels qui sont souvent des données expérimentales. Ensuite, ils ont choisi des

hypothèses, pour restreindre les complexités du problème, permettant de transformer la situation réelle en une situation purement mathématique. De cette façon, ils ont construit des modèles mathématiques qui décrivent d'une façon plus précise la population désignée. L'étude de cette dernière est équivalente à l'étude mathématique du modèle formulé qui la représente. Finalement ce dernier doit être mis en œuvre pour comparer les résultats obtenus avec la réalité ainsi observée. Il est important que le modèle soit fidèle aux observations faites dans la nature afin d'être utile dans un but prédictif. Nous illustrons ceci par quelques modèles cités dans la littérature.

## 1.1 Modèles avec une seule population.

Le premier modèle en ce domaine a été proposé en 1202 par l'italien Fibonacci, dit Léonard de Pise. Il propagea l'algèbre arabe et l'usage des chiffres arabes par son ouvrage (Libber abbaci). En considérant un couple de lapin, il a divisé le cycle de vie en deux phases juvénile et adulte, voir( la figure 1[79].) Par l'étude de cette population il a introduit la célèbre suite de nombre portant son nom.



**FIG. 1-Description du modèle de Fibonacci**

### 1.1.1 Modèle de Malthus

Thomas Robert Malthus en 1798 a présenté le premier modèle de la dynamique de population. Il a considéré une population constituée d'une seule espèce animale, homogène, c'est -à -dire, qu' il a négligé les variations d'âge, de taille, de périodicité éventuelle pour la natalité. De plus, il a supposé que cette population vit seule dans un milieu invariable. Dans le cas contraire (si elle coexiste avec d'autres espèces) il néglige toute sorte d'influences. De plus, Malthus a aussi considéré qu'il n'y a pas de pression du milieu, ce qui veut dire qu'il n'existe pas de facteurs externes comme la guerre, la famine, qui limitent le nombre de la population, nous faisons référence à [55]. Suite à ces considérations, il a observé, la forme discrète suivante:

$$\frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = \gamma = cte$$

Il désigne par  $N_t$  l'effectif de la population à l'instant  $t$ .

Mais pour avoir une forme continue, il a considéré un intervalle de temps très court, et a montré que l'accroissement du nombre  $N(t)$  d'individus de cette population est proportionnel à  $N(t)$ . Ce qui se traduit par l'équation différentielle suivante:

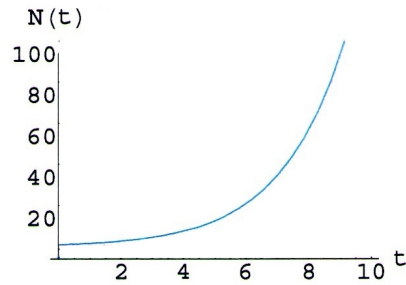
$$(M.1) \quad \frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t)$$

Où  $\gamma$  est un facteur constant de proportionnalité qui représente le taux de croissance. En intégrant l'équation précédente, on obtient:

$$N(t) = N_0 \exp \gamma t$$

Cette loi est appelée loi de croissance exponentielle ou loi de croissance malthusienne (voir,[44]). Son inconvénient, est le fait qu'elle ne tiennent pas compte des limites imposées à la croissance par le milieu. En effet, Darwin en 1859 a confirmé ceci, en montrant qu'il était impossible d'avoir une croissance infinie de populations. Il a clarifié cette

impossibilité par l'exemple du couple d'éléphants qui, dans des conditions normales, couvrirait la surface de la terre en quelques siècles, ( voir [24]). Cependant, il a été constaté que les prévisions de la loi malthusienne restent correctes seulement sur de petits effectifs. (Voir Figure2, [42])



**FIG. 2-Modèle de croissance de Malthus**

### 1.1.2 Modèle logistique

C'est suite aux considérations précédentes, que le biologiste belge Pierre-François Verhulst [75] propose en 1838 un modèle amélioré tenant compte de la limitation imposée par l'effectif croissant de la population. Il suppose que le taux d'accroissement par capita de la population est donné par:

$$\gamma \left( 1 - \frac{N(t)}{k} \right) = f(N(t))$$

nous notons par  $m_G = \frac{\gamma}{K}$

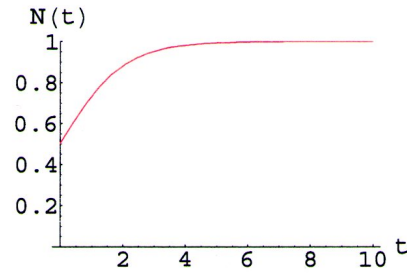
Donc

$$(M.2) \quad \frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t) - m_G [N(t)]^2 = f(N(t)) N(t)$$

Cette équation a pour solution

$$N(t) = \frac{kN_0 \exp \gamma t}{k - N_0 + N_0 \exp \gamma t}.$$

Voir (Figure 3,[42])



**FIG. 3-Modèle de croissance de P.F.Verhulst**

Nous admettons que la croissance est limitée par une sorte de " frottement " intérieur à la population, c'est -à -dire, qu' à ressources égales, plus le nombre d'individus est élevé, plus il est difficile de se nourrir, et de croître. Le facteur  $k$ , ( $k$  est strictement positif), correspond à la capacité du milieu et représente la population limite au-delà de laquelle elle ne peut plus croître.

Si  $N(t_0) < k$ . La population croît et s'approche asymptotiquement.

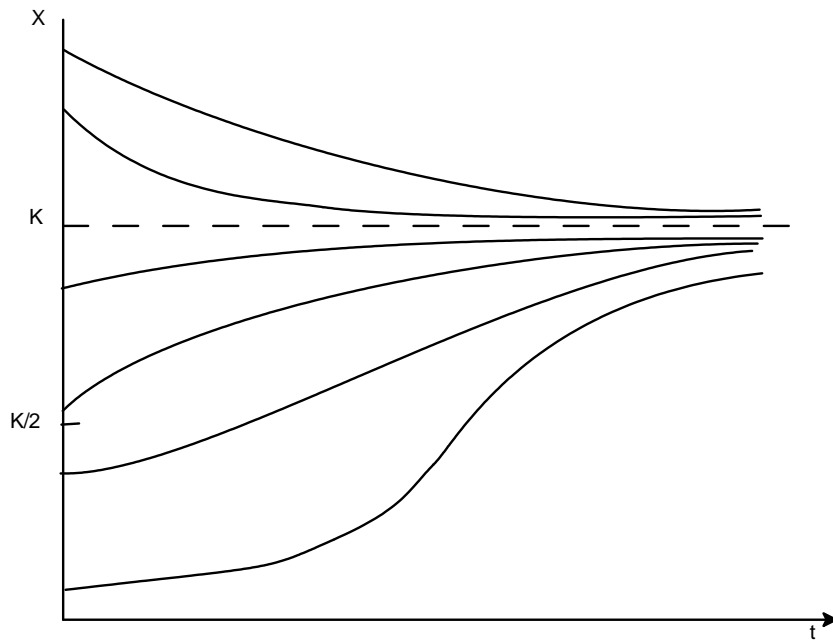
de  $k$  quand  $t \rightarrow +\infty$  et

Si  $N(t_0) < \frac{k}{2}$ , il existe alors un point d'inflexion au point  $N(t) = \frac{k}{2}$ ,

Par contre, si  $N(t_0) > k$ , la population décroît et elle s'approche asymptotiquement de  $k$  quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

Et dans le cas où  $N(t_0) = k$  la population reste constante pour tout ( $t > 0$ ).

(Voir figure 4, [42] et [76]).



**FIG. 4- Représentation de l'approche asymptotique de la population vers le coefficient  $k$**

Cette loi, nommée par Verhulst loi logistique, est différente de celle de Malthus car elle impose une valeur limite à la population. Elle a été appliquée avec succès à beaucoup de situations réelles. Nous donnons comme exemple, le biologiste russe G.F.Gause, en 1935 s'est servi du modèle de Verhulst pour faire ces expériences sur la croissance d'un protozoaire (Voir, [26]). D'autres modèles de croissance ont été développés. Nous citons comme exemple le modèle de B.Gompertz en 1825 destiné à évaluer la vitesse de croissance d'une tumeur, nous renvoyons l'auteur vers [31]. Plusieurs auteurs ont présenté des modèles avec divers fonctions de croissance. Dans la table suivante nous regroupons les fonctions de croissance les plus remarquables.

Dans le paragraphe suivant, nous allons donner un aperçu sur quelques types de modèles avec deux populations, et les différentes modifications faites d'un modèle à un autre.

source	$f(N(t))$	remarque
Malthus (1798)	$\gamma$	
Verhust (1838)	$\gamma \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right)$	
Gompertz (1825)	$\gamma \log\left(\frac{k}{N}\right)$	
Goel et al (1971)		
Gilpin et al (1976)	$\gamma \left(1 - \left(\frac{N(t)}{k}\right)^\theta\right)$	
Richards (1959)		
Rosenzweig (1971)	$\gamma \left(\left(\frac{N(t)}{k}\right)^\theta - 1\right)$	$0 < \theta \leq 1$
Szathmary (1991)	$kN(t)$	

Table 1.1: La fonction de croissance d'une population

## 1.2 Modèles avec deux populations

Dans la première moitié du XX siècle, appelée époque d'or de l'écologie théorique, l'étude de la dynamique de plusieurs espèces en interaction a connu un progrès énorme. Les premiers modèles de types proie -prédateur furent développés en cette période. Umberto d'Ancona, s'est intéressé aux statistiques de la pêche en mer Adriatique, de 1905 à 1923. Il a remarqué un accroissement significatif du prédateur, la pêche étant devenu moins intense pendant la guerre, durant la période allant de 1915 à 1920. D'Ancona demanda à Volterra de présenter une démonstration mathématique à son hypothèse. Publiée en 1926 la réponse de Volterra prit la forme du célèbre modèle " prédateur-proie ". (Voir modèle Lotka Voltérra ci-dessous). C'est pour cette raison que lui revient le mérite, de l'élaboration d'un tel modèle.

### 1.2.1 Modèle de Lotka Volterra

Considérons deux espèces différentes: la proie  $N(t)$ , a une croissance malthusienne. Le prédateur  $P(t)$ , se nourrit exclusivement de la première, mais en absence de la proie, s'épuiserait progressivement et disparaîtrait,  $N(t)$ , et  $P(t)$  sont supposées continues de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$ .

La mise en équation de la fonction représentant la prédation est basée sur la méthode



des rencontres et sur l'hypothèse des équivalents élaborée par Volterra , le lecteur peut consulter [74]. La première considère que pour qu'il y ait prédation entre une espèce prédatrice et une espèce proie, il faut tout d'abord qu'il y ait rencontre entre ces deux espèces et que le nombre de rencontres entre ces deux dernières soit proportionnel au nombre des individus qui la composent, le coefficient de proportionnalité étant égal à la probabilité de rencontres. La seconde consiste à supposer qu'il existe un rapport constant entre les disparitions et apparitions d'individus que provoquent les rencontres, c'est à dire que la prédation de la proie est équivalente à la croissance du prédateur. De plus, Volterra, considère que cet accroissement est immédiat.

Dans ce modèle, nous considérons deux populations  $N$  et  $P$  dont les abondances à l'instant  $t$  sont représentées respectivement par  $N(t)$  et  $P(t)$  et où l'espèce  $N$  est supposée être dévorée par l'espèce  $P$ . Le modèle est représenté par un système à deux équations qui est le suivant :

$$(M.3) \quad \begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN(t) - bN(t)P(t) \\ \frac{dP}{dt} = -cP(t) + dP(t)N(t) \\ N(t_0) = N_0, P(t_0) = P_0, \end{cases} ,$$

où

$a = f(N)$  représente le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateur. La proie est supposée croître selon la loi malthusienne et seuls les prédateurs  $P(t)$  s'opposent à la croissance de la proie.

$b =$  le taux de prédation du prédateur sur la proie. Les proies sont dévorées à un taux proportionnel à la probabilité de rencontre d'une proie et d'un prédateur (loi d'action de masse).

Nous notons par :

$bN(t) =$  la quantité de proie mangée par le prédateur (les baleines).

$c =$  le taux de mortalité du prédateur en absence de la proie (les sardines).

$d =$  le taux de croissance du prédateur du fait de sa prédation. Le nombre de préda-

teurs est limité par la quantité de proies dont ils disposent pour se nourrir.

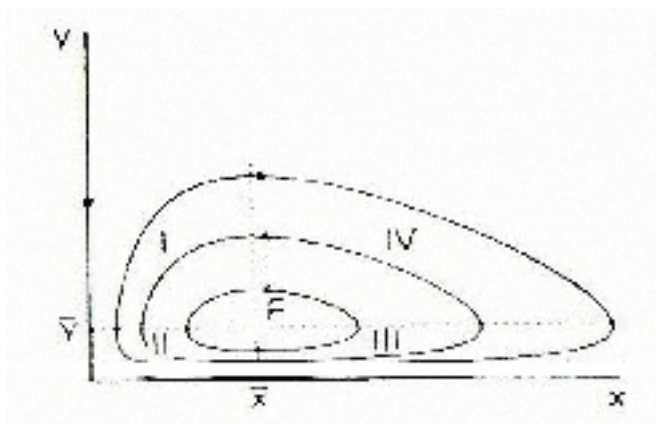
On doit tenir compte dans ce modèle des conditions initiales  $(N_0, P_0)$  qui représentent la population au temps initial  $t_0$  de chacune des deux espèces. Pour plus de détails sur la modélisation, consulter [75].

Le phénomène observé par D'Ancona est ainsi expliqué. Ils ont constaté que l'accroissement du nombre de prédateurs et la diminution du nombre de proies résultaient de la disparition de la pêche. Autrement dit, en pêchant moins, on favorise les espèces les plus voraces aux dépens des autres.

Ce modèle déterministe qui constitue un modèle général du réseau trophique a pour but de décrire différents types de comportements animaux par des fonctions mathématiques. Deux types de comportements y sont représentés: ceux liés à la croissance et ceux liés à la décroissance. La prédation décrit une croissance, pour le prédateur, par contre elle représente une mortalité par prédation pour la proie, donc dans ce cas c'est une décroissance.

Ce système d'équation semble apparaître pour la première fois chez Martini, voir [74] suivi par Lotka, et Volterra qui est le premier d'avoir proposé une théorie complète.

Ce modèle est appelé modèle de Volterra, ce dernier admet des solutions périodiques.



**FIG. 5-La périodicité du Modèle Volterra. (voir[39], p 44)**

Nous faisons l'étude du système suivant:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - bNP \\ \frac{dP}{dt} = -cP + dPN \end{cases}$$

possède deux points d'équilibre qui sont les points  $(N, P) = (0, 0)$  et

$$(N, P) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

### Stabilité des points d'équilibre

-Le point  $(0, 0)$  est un point d'équilibre instable car les valeurs propres de la matrice Jacobienne  $Df(0, 0)$  (la différentielle au point  $(0, 0)$ ) sont  $\lambda_1 = a$  et  $\lambda_2 = -c$ , et nous avons  $\text{Re } \lambda_1 > 0$

- Au point  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ , Les valeurs propres de  $Df\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  ont des parties réelles nulles donc nous ne pouvons rien conclure de la stabilité du point  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ . Pour cela nous allons montrer qu'il existe une solution périodique autour du point  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  par la théorie de Morse:

D'une part nous avons,

$$F(N, P) = bN - c \ln N + bP - a \ln P$$

est une intégrale première car par un calcul simple

$$\frac{d}{dt}(F(N(t), P(t))) = 0$$

D'autre part

$$\det Df\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = 0$$

et

$$\det D^2 f\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \neq 0$$

alors  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  est un point critique non dégénéré et  $F$  est une fonction de Morse autour du

point  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ . Donc nous faisons le développement de Taylor au point  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ ,

$$F(N, P) = F\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) + DF\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)\left(N - \frac{c}{d}, P - \frac{a}{b}\right) + D^2F\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)\left(N - \frac{c}{d}, P - \frac{a}{b}\right)^2 + \dots$$

Nous obtiendrons:

$$F(N, P) = F\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}F\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)\left(N - \frac{c}{d}\right)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)\left(N - \frac{c}{d}, P - \frac{a}{b}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}F\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)\left(P - \frac{a}{b}\right)^2 + \dots$$

Delà

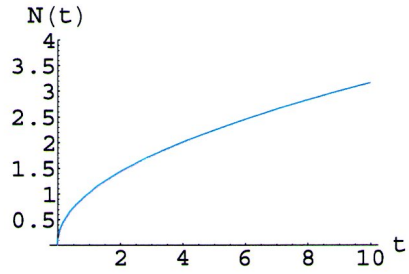
$$F(N, P) = F\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) + \frac{c}{\left(\frac{c}{d}\right)^2}\left(N - \frac{c}{d}\right)^2 + 0 + \frac{c}{\left(\frac{a}{b}\right)^2}\left(P - \frac{a}{b}\right)^2 + \dots$$

Les coefficients  $\frac{c}{\left(\frac{c}{d}\right)^2}\left(N - \frac{c}{d}\right)^2$  et  $\frac{c}{\left(\frac{a}{b}\right)^2}\left(P - \frac{a}{b}\right)^2$  sont positifs au voisinage de  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  donc  $k$  qui est l'indice du point  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  est nul. Donc il existe une solution périodique autour du point  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ . Le lecteur peut consulter [39]

## 1.2.2 Modèle de Gause

La modification la plus efficace, a été celle faite par le zoologiste russe G.F.Gause 1935, voir [26], en reprochant à Volterra son manque de réalisme, car la quantité de nourriture consommée par le prédateur choisi par Volterra pour décrire la prédation était proportionnelle au produit du nombre d'individus de chaque espèce:  $bN(t)P(t)$ .

Cette manière de décrire la prédation était modifiée par G.F.Gause 1935, qui fut l'un des premiers à faire des " vérifications expérimentales de la théorie mathématique de la lutte pour la vie ", et proposa un autre type de fonction visant à modifier la relation du prédateur vis-à-vis de ses proies:  $N^i(t)P(t)$  avec  $0 < i \leq 1$ .



**FIG. 6-Réponses fonctionnelle de G.F.Gause**

Le modèle de Gauss est donné par la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right) N(t) - bN^i(t) P(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = -cP(t) + dN^i(t) P(t) \end{cases}$$

D'après ces interprétations nous sommes arrivés à conclure qu'à chaque fois que la quantité consommée par le prédateur change, nous obtiendrons un modèle différent du précédent. Dans la littérature, cette quantité est une fonction notée  $g$  appelée fonction réponse ou réponse fonctionnelle. Au fur et à mesure, cette fonction a été modifiée par plusieurs auteurs. C'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

## 1.3 Fonction réponse.

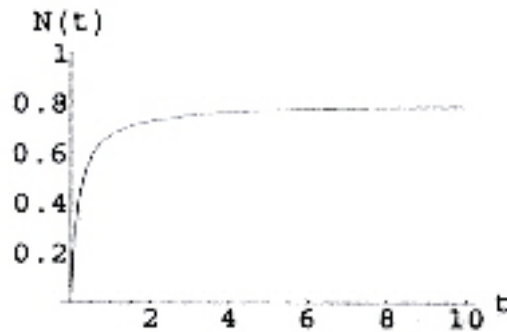
Dans cette section, nous allons citer quelques fonctions réponses utilisées dans des modèles célèbres

### 1.3.1 Fonction réponse dépendant seulement de la proie.

A la fin des années cinquante, l'entomologiste C.S.Holling propose, deux nouvelles réponses fonctionnelles. La fonction de Holling type  $II$  (voir,[40]) et la fonction de Holling type

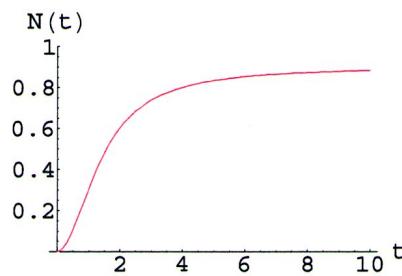
*III* . Ces deux formules supposent que le prédateur divise son temps en deux sortes d'activités: la recherche de sa proie et sa capture qui comprend le temps mis pour la chasser, la tuer, la dévorer et la digérer. La fonction de Holling type *II* (voir, .fig.7) est représentée par:

$$g(N(t)) = \frac{aN(t)}{1 + ahN(t)}$$



**FIG. 7-Réponses fonctionnelle Holling type *II***

La fonction de Holling type *III* (voir,[41]), est une réponse fonctionnelle dans laquelle le taux " d'attaque " du prédateur augmente tout d'abord lorsque le nombre de proies est faible puis ralentit lorsque le prédateur atteint sa faim. En d'autres termes, le prédateur augmente son activité de recherche lorsque la densité des proies augmente. Voir figure (8)



**FIG. 8-Réponses fonctionnelles Holling type *III***

Nous présentons dans la table (3) les fonctions réponses dépendant de la proie seulement notée  $g(N)$ :

LotkaVolterra et nicholson			
en (1939)	$aN$	fonction réponse linéaire	
forme non discrèt			
Maynard Smith (1975)	$b$	constante réponse instable	
Gauss (1934)	$cN^{\frac{1}{2}}$	le prédateur moins efficace	
		que dans le cas Lotka Volterra	
Rosenzweig(1974)	$cN^l$		
Holling (1959a)	$\frac{aN}{1+ahN}$		type 2 .
Ivlev	$b(1 - \exp \frac{a}{b}N)$		
Real (1977)	$\frac{bN^n}{c+N^N}$	Le cas n=2 est étudié	
		par Takahashi (1964)	
Watt (1957)	$b(1 - \exp(-cN^2))$		
Jost et al (1973)	$\frac{bcN^2}{b+dN+cN^2}$	proposé par Hassel et al	
Arditi (1980)	$\frac{ba(x+cx^2)}{b+a(N+cN^2)}$		type 3
Sokol&Howell (1981)	$\frac{aN}{1+hN^2}$		

**TAB. 3- Réponses fonctionnelles pour prédation dépendant de la proie seulement**

La fonction réponse décrit les interactions entre la proie (le petit poisson) notée par  $N(t)$  et (le gros poisson) le prédateur noté par  $P(t)$ , issue d'une descriptoin réelle de l'endroit dans lequel cette étude a été faite. A partir de cette fonction nous pouvons construire un modèle donné par une représentation abstraite simplifiée et idealisée, qui résume le contexte de la dynamique de population permettant une interprétation qui s'approche le plus de la réalité.

### 1.3.2 Fonction réponse dépendant de la proie et du prédateur

Pour les systèmes extrêmement simples, il n'existe pas une fonction universelle permettant de décrire la consommation du prédateur. Depuis le milieu des années vingt, ces réponses fonctionnelles ont fait l'objet de nombreuses recherches et développements visant à rendre plus réaliste la représentation du comportement animal par une fonction mathématique. Dans la littérature nous avons trouvé que plusieurs auteurs ont prouvé que la fonction réponse devait dépendre du prédateur, par exemple voir Hassel & Varley [38]. Mais d'après Solomon voir [69], il a prouvé que la fonction réponse doit dépendre de la proie et du prédateur et l'a désignée par  $g(N, P)$  :

$g(N, P)$  = La biomasse de proie effective consommée par unité de temps et par unité de biomasse du prédateur.

Plusieurs auteurs ont testé les hypothèses et les prédictions pour la nourriture du couple prédateur-proie. Nous citons quelques théories trouvées dans la littérature comme (McCauley & Murdoch (1987), Sarrelh (1992), Mittelbach et al. 1988). Arditi & Ginzburg (voir [1]) qui ont suggéré que la fonction réponse pouvait toujours s'approcher d'une proportion entre la proie et le prédateur au lieu de considérer seulement la densité de la proie comme dans les théories classiques proie-prédateur (traditionnellement la fonction réponse dans le cas Lotka (1924)  $g(N, P) = aN$ , cas de Holling (1959b)  $g(N, P) = \frac{aN}{1+ahN}$ ). Fréquemment on utilise la fonction réponse qui dépend de la ration alimentaire qui est basée sur l'analogie de Holling type 2,

$$g(N, P) = \left( \frac{a \frac{N}{P}}{1 + ah \frac{N}{P}} \right)$$

Beaucoup d'autres auteurs ont proposé d'autres formules, nous prenons comme exemple (Hassell-Varley, Hassel & Roger (voir [38]) et Arditi et Ginzburg [1]) ont montré que la fonction réponse dépendait d'un seul argument  $g(N, P) = g(N), \frac{N}{P}$  = "ratio prey per predator" Ce terme correspond au partage de la proie suivant le principe de la distribution idéale.



Nous donnerons quelques exemples des fonctions réponses dépendant de la proie et du prédateur

	Source	$g(N, P)$
	Hassel&Varley (1969)	$PNP^{-m}$
	Gomatam (1974)	$PN \frac{\log P}{p}$
	Strébal&Goel (1973)	$cN^l P^{-m}$
	Growley & Martin (1989)	$\frac{aN}{1+ahN} \frac{1}{1+\beta Y}$
	Harrisson & al (1995)	$g_1(N) \frac{P}{1+\beta P}$
	Arditi & Michalski (1995)	$\frac{aN}{P+ahN}$
	Fukaya et al	$\frac{aN^m}{P+ahP^m}$

## 1.4 Forme générale du modèle actuel.

Prenant compte de toutes les interprétations données ci dessus, les modèles proie-prédateur se résument par la forme générale suivante:

$$(M.5) \quad \begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = N(t) f(N(t)) - g(N, P) P(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = \tau g(N, P) P(t) - mP(t) \end{cases}$$

où

$f(N(t))$  est un taux d'accroissement pour la croissance de la proie en absence du prédateur, et  $N(t) f(N(t))$  est la quantité de nourriture consommée par la proie en absence du prédateur. L'hypothèse des équivalents faite par Volterra, en 1931, implique que la prédation intervienne à la fois dans la croissance et décroissance puisque la mortalité des proies par prédation est équivalente à un accroissement immédiat des prédateurs.

$g(N, P)$  est appelée " réponse fonctionnelle " elle exprime le taux de consommation de la proie (c'est à dire la consommation de proie par unité de prédateur) donc  $g(N, P) P(t)$  est la quantité de nourriture de proie consommée par le prédateur.

$\tau$  est une constante positive toujours inférieure à 1, elle représente le facteur de conversion.

$m$  est le taux de mortalité du prédateur par unité de biomasse

D'après l'interprétation faites ci dessus nous pouvons regrouper les modèles proie-prédateur de la manière suivante:

### 1.4.1 Modèle proie dépendant

Nous donnons la forme générale des modèles décrits par une fonction réponse qui dépend seulement de la proie.

$$(M.6) \quad \begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = N(t) f(N(t)) - g(N(t)) P(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = \tau g(N(t)) P(t) - mP(t) \end{cases}$$

### 1.4.2 Modèle ratio dépendant.

Parmi les modèles dont la fonction réponse dépend de la proie et du prédateur nous avons les modèles suivants:

$$(M.7) \quad \begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = N(t) f(N(t)) - g\left(\frac{N}{P}\right) P(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = \tau g\left(\frac{N}{P}\right) P(t) - mP(t) \end{cases}$$

## 1.5 Le modèle en question.

Dans cette section, nous allons construire notre modèle

### 1.5.1 Description du modèle.

Nous faisons notre étude dans un lac artificiel, contenant le (Brochet noté  $B(t)$ ), et (Gardon nommé  $G(t)$ ). Pour interpréter notre contexte de dynamique de population et décrire les interactions entre les deux espèces, nous allons construire un modèle du type prédateur-proie. L'objet principal de cette étude est de mettre en évidence le rôle joué par les niveaux des eaux du lac indiqués dans le modèle par la fonction continue notée  $r(t) \in C(R^+, R^+)$ ,  $(C(R, R))$  est l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans

$\mathbb{R}$ ) et surtout les variations de ses niveaux imposées sur la survie des espèces. De plus, comparer la quantité d'aliment dont le prédateur a besoin à celle dont il aura accès (quand un prédateur attaque une proie il a accès à une certaine quantité de nourriture qui dépend du niveau des eaux).

Notre modèle est non linéaire formé par un système de deux équations différentielles ordinaires à coefficients peu réguliers. La première équation décrit l'évolution de la proie dans le lac, et la deuxième l'évolution du prédateur

### 1.5.2 Construction du modèle.

Nous ne modélisons pas au niveau individuel, mais à celui de la biomasse, nous commençons par supposer une seule population qui est la proie, soit

$G(t)$  = biomasse de la proie à l'instant  $t$ .

L'évolution de la proie en absence du prédateur est donnée par l'équation suivante (Voir [42]).

$$\frac{dG(t)}{dt} = f(G(t)) G(t)$$

La proie se nourrit du phytoplancton qui est un producteur primaire, donc la nourriture de la proie est abondante, car il ya suffisamment de phytoplancton dans le lac. Les proies  $G(t)$  disposent de nourriture en quantité illimitée, pour cela contrairement à Volterra, pour éviter une croissance exponentielle, nous choisissons la fonction  $f(G(t))$  celle de Verhulst.

Le taux de croissance maximum de la ressource par la proie par unité de biomasse par unité de temps est nommé ici  $\gamma_G$ , (Voir[10]). Nous notons la quantité  $\frac{\gamma}{k}$  par  $m_G$ , les coefficients  $k$  et  $\gamma$  sont définis dans la section 1 paragraphe 2 de ce chapitre. De cette manière nous aboutirons à l'équation logistique suivante:

$$\frac{dG(t)}{dt} = \gamma_G G(t) - m_G [G(t)]^2 = f(G(t)) G(t)$$

Dans notre travail, nous considérons un système à deux espèces: l'une est le prédateur (on pense au brochet), l'autre la proie ( le gardon) et nous utilisons un cas de modèle proie-prédateur assez général qui regroupe les deux principes fondamentaux de la dynamique de population. En premier lieu nous appliquons le premier principe fondamental nous décomposons la population en croissance et perte pour décrire l'équation d'évolution du prédateur.

$$\frac{dB(t)}{dt} = \text{croissance-perte}$$

Le deuxième principe c'est celui de Ginzburg (Voir [28]) qui utilise la conservation de la masse principale et que le prédateur ne peut croître que selon ce qu'il mange.

Nous interprétons ce deuxième principe de la manière suivante, Soit :  $B(t)$  la biomasse du prédateur à l'instant  $t$  et, soit  $g(G, B)$  la fonction réponse. Cette dernière représente la biomasse de proie effective consommée par unité de temps et par unité de biomasse du prédateur. Par conséquent  $g(G, B) B(t)$  est la quantité de proie avec laquelle se nourrit le prédateur, donc elle se retranche de la biomasse de la proie. L'équation qui décrit la proie devient:

$$(E.1) \quad \frac{dG(t)}{dt} = \gamma_G G(t) - m_G [G(t)]^2 - g(G, B) B(t)$$

Nous formulons l'équation du prédateur de la manière suivante:

Nous notons par,  $\tau_B$  le taux de transformation de la proie en biomasse, par unité de biomasse de la proie et par unité de temps. La quantité  $g(G, B) B(t)$  de nourriture que reçoit le prédateur est transformée par le coefficient  $\tau_B$  (le prédateur ne garde pas tout ce qu'il mange dans son corps). Cette quantité s'ajoute à la biomasse du prédateur, c'est pour cela quelle est précédé d'un signe  $+$ . D'autre part, soit  $m_B(t)$  le taux de consommation de biomasse par le métabolisme, par unité de biomasse par unité de temps, du prédateur. Par principe de métabolisme le prédateur perd une quantité  $m_B(t) B(t)$ , c'est pour ça quelle est précédé d'un signe  $-$ . Suite à ces interprétations, l'équation

décrite par le prédateur est la suivante:

$$(E.2) \quad \frac{dB(t)}{dt} = \tau_B g(G, B) B(t) - m_B B(t)$$

Soit  $B_0$  et  $G_0$  des quantités strictement positives représentant les biomasses respectives du prédateur et de la proie au temps initial  $t_0$ . Nous regroupons les deux équations (E.1) et (E.2), et les conditions initiales, donc nous pouvons écrire la forme canonique de notre modèle proie- prédateur comme suit:

$$(M.8) \quad \begin{cases} \frac{dG}{dt} = f(G(t)) G(t) - g(G, B) B(t) \\ \frac{dB}{dt} = \tau_B g(G, B) B(t) - m_B(t) B(t) \\ B(0) = B_0, G(0) = G_0, \end{cases}$$

Pour bien décrire notre contexte de la dynamique de population du lac de Vioulou, le modèle prédateur-proie que nous devons construire doit présenter d'une manière réelle les interactions entre les brochets et les gardons. Pour cela le choix de la fonction réponse doit se faire d'une manière très rigoureuse.

### 1.5.3 Prédation.

Plusieurs auteurs, ont proposé des formules de la fonction réponse qui dépend de la ration alimentaire. Nous prenons comme exemple Holling, (voir [40], [41]) , en 1989 Arditi& Ginzburg, ont suggéré que la fonction réponse peut toujours s'approcher d'une proportion entre la proie et le prédateur, (voir, [1]). Ils ont montré que la fonction réponse dépend d'un seul argument qui est  $\frac{G}{B}$ ,  $g(G, B) = g\left(\frac{G}{B}\right)$ ,  $\frac{G}{B} =$  "ratio prey predator" Ce terme correspond au partage de la proie suivant le principe de la distribution idéale "ideal free distribution", c'est cette distribution que nous allons utiliser dans notre cas. Il y'a d'autres causes , en dehors du métabolisme et de la prédation, qui donnent la mesure dans laquelle l'environnement assure la protection de la proie présenté par le terme  $D(t)$ . Pour ne pas alourdir le modèle nous considérons le terme  $D = \int_0^1 D(t)dt$  à la place de

$D(t)$ . Les deux équations du modèle doivent être modifiées, en remplaçant la quantité  $B(t)$  par la quantité  $B(t) + D$  au dénominateur, le modèle devient:

$$(M.9) \quad \begin{cases} \frac{dG}{dt} = \gamma_G G(t) - g \left( \frac{aG(t)}{B(t)+D} \right) B(t) - m_G [G(t)]^2 \\ \frac{dB}{dt} = \tau_B g \left( \frac{aG(t)}{B(t)+D} \right) B(t) - m_B B(t) \\ B(0) = B_0, G(0) = G_0 \quad , \end{cases}$$

Afin d'obtenir une dynamique satisfaisante du point de vue qualitatif, nous noterons par  $r$  un indice d'accessibilité de la proie. Nous considérons ici que sur une biomasse  $G(t)$  de proie, le prédateur n'a accès qu'à une quantité  $r(t) G(t)$ . L'indice prend deux valeurs différentes suivant le niveau des eaux:  $r_1(t)$  est la valeur lorsque les niveaux des eaux sont hautes et  $r_2(t)$  est la valeur lorsque les eaux sont basses. Quand les niveaux des eaux sont bas le prédateur est plus en contact avec la proie et réussit à attaquer une proie plus facilement, suite à ceci nous deduisons que  $r_1 \leq r_2$ , nous traitons  $r$  comme une fonction périodique du temps de période annuelle.

Nous notons par,  $\gamma_B$  le taux de consommation maximum de la ressource par le prédateur, par unité de biomasse par unité de temps.

Le prédateur (les brochets) a besoin d'une quantité  $\gamma_B B(t)$  pour se nourrir, mais il n'a accès qu'à une quantité  $r(t) G(t) B(t)$  de la proie, donc la quantité de nourriture dont il aura accès sera  $\frac{r(t)G(t)}{B(t)+D} B(t)$ . Si la quantité  $\gamma_B B(t)$  est suffisante dans le lac ceci entraîne que  $\left[ \gamma_B B(t) \leq \frac{r(t)G(t)}{B(t)+D} B(t) \right]$ , si non le prédateur se contentera seulement de la quantité  $\frac{r(t)G(t)}{B(t)+D} B(t)$ . Donc finalement la quantité de nourriture que reçoit le prédateur sera la biomasse de proie effective,  $\gamma_{effB}$ , consommée par unité de temps et par unité de biomasse du prédateur est donnée par:

$$\gamma_{effB}(t) = \min\left(r(t) \frac{G(t)}{B(t) + D}, \gamma_B\right) = g(G, B) B(t)$$

cette quantité est transformée par le coefficient  $\tau_B$ . Ainsi la quantité

$$\tau_B \min \left( \frac{r(t) G(t)}{B(t) + D}, \gamma_B \right) B(t)$$

représente la quantité de croissance du prédateur.

# Chapitre 2

## PRELIMINAIRES

Dans ce chapitre nous allons donner les principales notations, définitions, et nous citons quelques lemmes et théorèmes utilisés dans la suite du travail.

Pour l'existence de solutions périodiques, nous faisons usage du théorème de Mawhin suivant:

### 2.1 Théorème de continuation de Mawhin

**Théorème 2.1** [49]

Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach.

Soit  $L$  de  $X$  vers  $Y$  un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Soient  $N$  un opérateur continue,  $L$ -compact de  $X$  vers  $Y$ , telque  $DomL \subset X$ ,  $P$  est la projection définie de  $X$  vers  $X$ ,  $Q$  la projection définie de  $Y$  vers  $Y$ . Nous considérons par  $J$  l'isomorphisme défini de  $Im Q$  vers  $ker L$  et  $\Omega$  un ouvert borné de  $X$ , Supposons:

1°) Pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$ ,  $\lambda L(x) \neq \lambda N(x)$  pour tout  $x \in \partial\Omega \cap DomL$

2°) pour tout  $x \in \partial\Omega \cap KerL$   $QNx \neq 0$

3°)  $deg \{JQN, \Omega \cap ker L, 0\} \neq 0$

Alors,  $LX = NX$  a une solution dans  $\bar{\Omega} \cap DomL$ .



## 2.2 Lemme généralisé de Gronwall

Le lemme que nous allons citer est un cas particulier du lemme présenté par Medvedev dans [62].

**Lemme 2.1** *Soit  $a$  une fonction non négative, non décroissante de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $[0, T]$ ,  $T \in ]0, \infty[$ , soit  $F(t)$  une fonction non négative continue sur  $[0, T]$  et considérons  $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction positive continue non décroissante. Nous supposons que  $u(t)$  est une fonction continue non négative sur  $[0, T]$ , satisfaisant l'inégalité*

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t F(s) \omega(u(s)) ds.$$

Alors

$$\begin{aligned} \Lambda_q(u(t)^q) &\leq \Lambda_q(2^{q-1}a^q) + K_q \int_0^t e^{-qs} F(s)^q ds \\ u(t) &\leq \left\{ \Lambda_q^{-1} \left[ \Lambda_q(2^{q-1}a^q) + K_q \int_0^t e^{-qs} F(s)^q ds \right] \right\}^{\frac{1}{q}} \\ 0 &\leq t \leq T \end{aligned}$$

Ici nous posons  $q = 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$

$$\Lambda_q(v) = \int_{v_0}^v \frac{d\sigma}{\omega\left(\sigma^{\frac{1}{q}}\right)^q} \quad \text{et} \quad 2^{q-1}a(0)^q \geq v_0 > 0$$

**Preuve:** Soit  $p > 0$ , tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

L'inégalité de Hölder implique que

$$u(t) \leq a(t) + \left[ \int_0^t e^{ps} ds \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[ \int_0^t e^{-qs} F(s)^q \omega(u(s))^q ds \right]^{\frac{1}{q}}$$

soit

$$\alpha(t) = 2^{q-1} [a(t)]^q$$

et nous notons par:

$$K_q = 2^{q-1} \left[ \int_0^t e^{ps} ds \right]^{\frac{1}{p}} \leq 2^{q-1} \frac{1}{p} e^{pt}$$

nous définissons

$$W(t) = 2^{q-1} (a(t))^q + K_q \int_0^t e^{-qs} F(s)^q \omega(u(s))^q ds$$

et

$$\Lambda_q(v) = \int_0^v \frac{d\sigma}{\omega\left(\sigma^{\frac{1}{q}}\right)^q}$$

$\Lambda_q, \omega$  des fonctions non décroissantes.

En intégrant les deux membres de 0 à  $t$ , nous avons

$$\Lambda_q(W(t)) \leq \Lambda_q(2^{q-1}a^q) + K_q \int_0^t e^{-qs} F(s)^q ds$$

Du fait que  $(u(t))^q < W(t)$ , alors

$$\Lambda_q(u(t))^q \leq \Lambda_q(2^{q-1}a^q) + K_q \int_0^t e^{-qs} F(s)^q ds$$

■

Nous avons présenté une brève démonstration, pour plus de détails, le lecteur peut consulter [62].

## 2.3 Multi-application

Dans ce paragraphe nous donnons un bref aperçu sur les multi-applications.

Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . La distance de  $x$  à  $D$  est définie par

$$d(x, D) = \inf_{y \in D} d(x, y).$$

où  $d$ , est la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $y \in \mathbb{R}^n$ , nous définirons sa norme par:

$$|y|_0 = d(y, 0)$$

La distance de deux parties  $D_1, D_2$  de  $\mathbb{R}^n$  est définie par

$$d^*(D_1, D_2) = \sup_{x \in D_1} d(x, D_2).$$

Nous définirons  $d_H^*$  par:

$$d_H^*(D_1, D_2) = \max(d^*(D_1, D_2), d^*(D_2, D_1))$$

### Définition 2.1

Soient  $X, Y$  deux ensembles. Nous appelons fonction multivoque ou multi-application de  $X$  dans  $Y$ , toute application définie sur  $X$  et à valeurs dans l'ensemble des parties de  $Y$ .

$$F : X \rightarrow P(Y)$$

1) Son domaine est

$$\text{dom}F = \{x \in X, F(x) \neq \emptyset\}$$

2) Nous noterons par  $R(F)$  l'image de  $F$ , et par définition, nous avons

$$R(F) = \cup_{x \in \text{Dom}F} F(x).$$

3) Le graphe de  $F$  est noté  $grF$  et il est défini par

$$grF = \{(x, y) \in X \times Y; y \in F(x)\}.$$

4) La fonction  $f$  de  $X$  à valeur dans  $Y$ , est appelée sélection si

$$f(x) \in Y \quad \forall x \in X$$

### Propriétés

$F$  est dite stricte si  $\text{dom}F = X$  et elle est dite propre si  $\text{dom}F \neq \emptyset$ .

Une multi-application  $F$  est dite homogène si,

$$\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda F(x) \subset F(\lambda x)$$

**Définition 2.2** 1-Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach, Une multi-application  $F: X \rightarrow 2^Y$  est dite compacte si

$$F(X) = \overline{\cup \{F(x); x \in X\}}$$

est compact

2- $F$  est une multi-application convexe (fermée, compacte) si  $F(x)$  est convexe (fermé, compact) pour tout  $x$ , élément de  $X$

3- $F$  est bornée, si pour tout sous ensemble borné  $B$  de  $X$ ,  $F(B)$  est borné dans  $Y$ .

### Notations

Nous désignerons par  $[A]^\varepsilon$  l'ensemble des  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $d(x, A) < \varepsilon$ .

Soit  $X$  un espace de Banach

- $n(X)$  désignera la famille des parties non vides de  $X$ .

- $cl(X)$  est la famille des parties fermées, non vides de  $X$ .
- $Comp(X)$  représente la famille des parties compactes non vides de  $X$ .
- $cc(X)$  dénote l'ensemble des parties fermées, convexes, non vides de  $X$ .
- $K(X)$  est l'ensemble des parties convexes et compactes, non vides de  $X$ .
- $bcc(X)$  : L'ensemble des parties de  $X$  non vides, bornées, fermées et convexes de  $X$ .

### 2.3.1 Continuité

Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach et  $F$  une multi-application définie de  $Dom X \rightarrow 2^Y$  alors:

1°) –  $F$  est semi continue supérieurement au point  $Z_0$  si pour tout ouvert  $O$  contenant  $G(Z_0)$ , alors il existe  $M$  un voisinage de  $Z_0$  tel que  $G(M) \subset O$ .

2°) –  $F$  est semi continue supérieurement (*scs*) dans  $X$  si et seulement si elle est semi continue supérieurement en tout point de  $X$ .

3°) –  $F$  est une multi application de  $X$  à valeurs les parties non vides compacte de  $Y$  est *scs* si et seulement si  $F$  à un graphe fermé.

### 2.3.2 Mesurabilité et intégrale d'Aumann

#### Mesurabilité

Soient  $(X, \Sigma)$  un espace mesurable,  $Y$  un espace topologique et une multi-application  $F : X \rightarrow n(Y)$

1–  $F$  est dite mesurable si:

$$\{t \in X, F(t) \cap U \neq \emptyset\} \in \Sigma \text{ pour tout ouvert } U \subset Y.$$

2 –  $F$  est dite mesurable au sens fort:

$$\{t \in X, F(t) \cap C \neq \emptyset\} \in \Sigma \text{ pour tout fermé } C \subset Y.$$

3— Si nous considérons  $Com(Y)$  au lieu de  $n(Y)$ , les deux notions de mesurabilité définies ci-dessus coïncident.

4— La multi-application  $G : I \rightarrow bcc(X)$  est mesurable si pour  $x$  de  $X$  la fonction  $t \mapsto d(x, G(t))$  est mesurable sur  $I$ .

### Intégrale d'Aumann

Soit  $F(t) \in P(\mathbb{R}^n)$ ,  $F(t) \neq \emptyset$  pour presque tout  $t \in I$ . Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble de toutes les fonctions intégrables,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que  $f(t) \in F(t)$  pour presque tout  $t \in I$ .

Nous définirons l'intégrale d'Aumann de  $F(t)$  par

$$\int_I F(t) dt = \left\{ \int_I f(t) dt; f \in \mathcal{F} \right\}.$$

### Propriétés

$F(t)$  fermé pour presque tout  $t \in I$  et  $F(\cdot)$  intégrablement bornée alors  $\int_I F(t) dt$  est compact.

Soit  $X$  un espace de Banach. Une multi-application  $F : X \rightarrow 2^Y$  a un point fixe s'il existe  $x \in X$  tel que  $x \in F(x)$

### 2.3.3 Condition de Carathéodory

$F$  la multi-application de  $I \times \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  est dite une multi-fonction  $L^1$ -Carathéodory si

- (i)  $t \rightarrow F(t, x)$  est mesurable pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- (ii)  $x \rightarrow F(t, x)$  est semicontinue superieurement pour tout  $t \in I$ .
- (iii) pour tout  $\sigma > 0$ , il existe  $h_\sigma \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$  tel que

$$\|x\| \leq \sigma \Rightarrow \|F(t, x)\| = \sup \{\|v\| : v \in F(t, x)\} \leq h_\sigma(t) \text{ p.p. } t \in I.$$

## Existence de selection

Dans ce paragraphe nous allons citer certains cas où nous avons l'existence d'une sélection.

### **Théorème 2.2** [24]

Soient  $(X, \Sigma)$  un ensemble mesurable et  $Y$  un ensemble séparable complet. Alors toute fonction multivoque définie sur  $X$  à pour valeurs les sous ensembles fermés non vides de  $Y$ , possède une selection mesurable.

## Caracterisation de fonctions multivoques mesurables

### **Théorème 2.3** ([24])

Soient  $(X, \Sigma)$  un espace mesurable et  $Y$  un espace métrique, séparable et soit la multi-application  $F : X \rightarrow cl(Y)$ .

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i)  $F$  mesurable.
- (ii)  $d(y, F(\cdot))$  est mesurable, pour tout  $y \in Y$ .
- (iii) Il existe une suite de selections mesurables  $(\varphi_k)$  de  $F$  telle que:

$$F(t) = \overline{\{\varphi_k(t)\}}.$$

### **Théorème 2.4** [34]

Soit  $F$  définie de  $I$  dans  $comp(\mathbb{R}^n)$  mesurable à valeurs dans une boule de centre 0 de rayon  $\rho$ . Soit  $w$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe une application mesurable  $r$  à valeurs  $r(t) \in F(t)$  pour presque tout  $t$  et telle que:

$$|w(t) - r(t)|_0 = d(w(t), F(t)) = \inf_{r \in F(t)} \{|w(t) - r|_0\}$$

## 2.4 Notions sur les inclusions différentielles

**Définition 2.3** Soit  $R(t, x)$  un sous ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$  pour  $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$ , où  $I = [0, 1]$ .

Nous appelons inclusions différentielles ou équation différentielles ordinaire à second membre multivoque une relation du type

$$(I.1) \quad \dot{x}(t) \in R(t, x(t)) \quad t \in I$$

Une fonction  $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est appelée solution de (I.1) sur  $I$  si  $x(\cdot)$  est absolument continue sur  $I$  et  $x(t) \in R(t, x(t))$  presque partout sur  $I$ .

En général nous imposons une condition initiale de la forme  $X(0) = X_0$ .

Si  $0 \in R(t, 0)$  alors  $x(t) \equiv 0$  est appelée solution triviale.

Soit  $Q_0 : I \rightarrow n(\mathbb{R}^n)$  et  $A(\cdot) : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$ , continues sur  $I$ .

Si  $R(t, x) = \{A(t)X + q; q \in Q_0(t)\}$  alors est dite inclusion différentielle linéaire. Nous écrivons

$$\dot{X}(t) \in A(t)X(t) + Q_0(t) \quad t \in I$$

$A(t)x(t) + Q_0(t)$  est l'ensemble translaté de  $Q_0(t)$  d'un vecteur  $A(t)x(t)$ .

### 2.4.1 Existence de solutions

**Théorème 2.5** [25]

Soit  $R : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow cl(\mathbb{R}^n)$  vérifiant:

1-  $R$  continue c'est à dire

$$d_H^*(R(t_1, x_1), R(t, x)) \rightarrow 0 \text{ quand } (t_1, x_1) \text{ tend vers } (t, x).$$



2– Il existe  $K : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ , intégrable telle que

$$d_H^*(R(t', x_1), R(t, x)) \leq K(t) |x_1 - x|_0.$$

Alors l'équation admet une solution  $x(t)$  pour tout  $t \in I$ .

**Théorème 2.6** [34]

(i) Supposons que  $R$  est semi continue supérieurement sur  $I \times \mathbb{R}^n$ .

(ii) Il existe une constante  $m$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et pour presque tout  $t \in I$  et  $y \in R(t, x)$ , nous avons  $|y|_0 \leq m$ .

Alors pour chaque  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$  il existe une solution  $x(t, t_0, x_0)$  de (I.1) satisfaisant à  $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ .

Pour plus de détails nous référons le lecteur au livre d'Aubin–Cellina [16]

## 2.4.2 Exemples d'inclusion différentielle

Il semblerait que le premier à avoir considéré des équations différentielles à second membre multivoque a été A.F.Fillipov [27], lors de l'étude d'équations différentielles à second membre discontinu.

1) Un exemple d'équation de ce type est

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t) - \operatorname{sgn}(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où

$$\operatorname{sgn}r = \begin{cases} +1 & \text{si } r > 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

Posons  $\beta(x(t)) = \operatorname{sgn}(x(t))$  et supposons que pour  $x(t) = 0$  et  $\beta(x(t)) = [-1, +1]$

alors nous aurons une expression nouvelle

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) + f(t) \in \beta(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

2) Soit  $|y|_0$  la norme euclidienne de  $y \in \mathbb{R}^n$ . Une inégalité différentielle de la forme

$$\begin{cases} \left| \dot{x}(t) - g(t, x(t)) \right| \leq f_0(t, x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

peut être écrite sous forme d'inclusion différentielle: soit  $R(t, x(t))$  la boule de centre  $g(t, x(t))$  et de rayon  $f_0(t, x(t))$ . Alors l'inégalité devient:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in R(t, x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

## **Chapitre 3**

# **L'EFFET DES VARIATIONS DES EAUX SUR LES INTERACTIONS DES MODELES PROIES-PREDATEURS**



### 3.1 Introduction

Le lac Parloup est un barrage d'eau alimenté de la rivière Vioulou située à 30 km au Sud-est de Rodez, (voir page 44). C'est l'un des plus grands lacs artificiels de France, permettant de garder l'eau pour les saisons de forte demande d'électricité. La gestion de ce lac a une importance écologique considérable. Des variations significatives des niveaux des eaux du lac peuvent avoir un fort impact sur la persistance de certaines espèces. Dans ce document, nous présentons un modèle mathématique qui décrit l'interaction entre le brochet et le gardon : C'est un système prédateur-proie. Si  $N(t)$  est la population de la proie et  $P(t)$  celle du prédateur à l'instant  $t$ , notre modèle prédateur-proie a la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = f(N) - g(N, P)P(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = eg(N, P)P(t) - qP \end{cases}$$

L'évolution de la proie en absence de prédateurs est décrite par la fonction  $F(N)$ , alors que  $g(N, P)$  est la fonction réponse. La quantité  $e$  est l'efficacité trophique et les prédateurs sont supposés mourir avec un taux constant de mortalité  $q$ . La fonction  $F$  est de type logistique,

$$F(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

La réponse fonctionnelle est un élément clé dans les modèles proie-prédateur. Dans les modèles classiques les plus connus,  $g(N, P)$  dépend uniquement de l'abondance des proies. Comme par exemple le modèle de Lotka Volterra

$$g(N, P) = g(N) = aN$$

et Holling

$$g(N, P) = g(N) = \frac{aN}{1 + ahN}$$

n'ont pas tenu compte de la densité du prédateur (nous envoyons le lecteur vers [63]). La

présence des saisons dans l'environnement est importante. La périodicité des paramètres a été étudié par de nombreux chercheurs (consulter [2] et les références incluses). Dans [14] la fonction  $g(N, P)$  est de la forme:

$$g(N, P) = \frac{aN}{N + D}$$

$a$  et  $D$  sont des fonctions périodiques.

Les contacts entre proies et prédateurs augmentent lorsque la densité de prédateurs est élevée. Suite à ceci dans ce papier, la fonction réponse est donnée par

$$g(N, P) = \frac{aN}{P + D}$$

Voir[29]. L'interaction entre le prédateur et la proie, est parmi les phénomènes les plus simples connus pour présenter des comportements oscillatoires, voir [63]. Le saut de discontinuité présent dans les coefficients du modèle complique significativement l'étude. Nous considérons la question de l'existence d'une solution 1- périodique positive. Nous utilisons la théorie du degré topologique pour assurer l'existence d'au moins une solution. Il n'est pas nécessaire de passer en revue la littérature étendue à cette approche, et nous nous limitons à ceci, pour plus d'informations nous orientons le lecteur vers le papier [78] et ces références.

## 3.2 Modèle proie-prédateur.

Dans le lac étudié, il y'a notamment la chaîne constituée par le gros poisson qui est le prédateur, le petit poisson qui est la proie, le phytoplancton, et quelques espèces intermédiaires qui, à certaines périodes, font partie du régime alimentaire du prédateur et/ou de la proie. La proie forme la population de loin la plus abondante du lac. Au sommet de la chaîne, le prédateur maintient la population de la proie et de quelques autres espèces à un niveau qui assure le bon fonctionnement de la chaîne. Les pontes de

diverses espèces se succèdent au cours de la saison de reproduction, Le prédateur étant le premier, la proie venant après une époque où les alevins du prédateur ont acquis une taille suffisante pour avoir une taille de prédation sur les œufs et les larves de la proie. Au cours de la progression du printemps, puis de l'été, les eaux du lac montent, du faite de l'arrivée des eaux venant du barrage, et au même temps de l'arrêt ou de la mise en sommeil de l'exploitation du barrage. La montée des eaux s'accompagne de l'inondation de nouvelles zones, essentiellement situées sur les berges du lac . Ces zones peu profondes, (voir page 49), souvent protégées des errances de gros poissons, et riches en éléments végétaux, sont les lieux privilégiés de la ponte et du développement de plusieurs espèces . C'est là que l'on retrouve les alevins de la proie. Au début de l'automne on assiste à une baisse des eaux du lac et à l'assèchement des zones inondées au printemps. Les nourriceries et les refuges qui s'étaient constitués dans ces zones disparaissent, les alevins sont dans un laps de temps très courts, rejetés dans une zone plus profonde où les contacts avec les prédateurs et avec d'autres espèces deviennent plus probables. Ils en résultent une augmentation significative et rapide de la mortalité des alevins de la proie, et il ya le risque d'une rupture de la chaîne trophique dans laquelle il s'insère, et à terme le risque que toute cette chaîne disparaisse. C'est ce risque que nous étudions ici, en faisant l'étude mathématique du modèle présenté ci dessous.

Soit  $G(t)$  et  $B(t)$  les biomasses respectives de la proie et du prédateur à l'instant  $t$ .

De la description du lac nous aboutissons à: .

Quand un prédateur attaque une proie, il a accès à une certaine quantité de nourriture dépendant des niveaux des eaux. Quand les niveaux des eaux sont basses, (voir page 49), le prédateur est plus en contactes avec la proie. Soit  $r$  l'indice d'accessibilité de la fonction proie. La fonction  $r$  est continue et périodique de périodicité un an ie  $r$  est 1-périodique. La fonction  $r$  atteint son minimum  $r_1$  en printemps, et son maximum pendant l'automne , (voir page 44). Nous notons aussi par  $\gamma_B$  (respectivement  $\gamma_G$ ) , le taux de consommation maximum de la ressource par le prédateur, par unité de biomasse par unité de temps.(respectivement la proie), (voir [18]).

Le prédateur a besoin d'une quantité

$$\gamma_B B(t)$$

pour se nourrir, mais il n'a accès qu'à une quantité  $r(t)G(t)$  de la proie, donc la quantité de nourriture dont il aura accès sera

$$G(t)r(t)\frac{B(t)}{B(t)+D}$$

Ici  $D$  mesure d'autres causes de mortalité autre que le métabolisme et la prédation et donne le maximum de prédation à la proie. Par conséquent le prédateur a accès à une quantité de nourriture égale à:

$$\min\left(\frac{r(t)G(t)}{B(t)+D}, \gamma_B\right)B(t)$$

Soit,

$\tau_B$  est le taux de conversion de la proie consommée par le prédateur en biomasse.

$m_B$  est le taux de consommation de biomasse, par le métabolisme, par unité de biomasse, par unité de temps, pour le prédateur.

$m_G$  est le taux de consommation de biomasse, par le métabolisme, par unité de biomasse, par unité de temps pour la proie.

Le modèle.

$$\begin{cases} \frac{dG(t)}{dt} = -\min\left(\frac{r(t)G(t)}{B(t)+D}, \gamma_B\right)B(t) + \gamma_G G(t) - m_G (G(t))^2 \\ \frac{dB(t)}{dt} = \tau_B \min\left(\frac{r(t)G(t)}{B(t)+D}, \gamma_B\right)B(t) - m_B B(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Du point de vue écologique la périodicité de  $r$  est dû aux différentes saisons durant un an. l'impact écologique change et il est décrit par les différences larges qui existent entre les niveaux des eaux. Nous repérons le lecteur vers [30] et les références incluses pour bien comprendre le défi de ce champ scientifique.





### 3.3 Analyse mathématique et résultats

Soient  $B_0 > 0$  et  $G_0 > 0$  les conditions initiales à l'instant  $t_0$  des biomasses respectives du prédateur et de la proie.

Nous supposons que:

(H.1)

$$r_2 < \frac{\gamma_B (B_0 + D)}{G_0}$$

(H.2)

$$r_2 < \frac{4m_B m_G D \gamma_B}{(\gamma_G + m_B)^2}$$

(H.3)

$$0 < D < \frac{(\gamma_G - r_2) \tau_B r_1}{m_G m_B}$$

#### Théorème 3.1

*Sous les conditions (H.1), (H.2) et (H.3), le système (3.1) admet au moins une solution positive et 1-périodique.*

**Remarque 3.1** *Nous avons établi l'existence qui reflète la survie de l'espèce. Elle est basée sur les valeurs de la fonction  $r$  qui dépendent directement du niveau des eaux du lac. Le résultat donné par le théorème (3.1) a une interprétation écologique intéressante, puisqu'il illustre que le niveau d'eau approprié peut être un avantage en termes de survie de l'espèce.*

a) En absence de l'action sur le lac nous pouvons supposer que:

$$r(t) = r_1 \text{ pour tout } t > 0$$

Dans ce cas la population survit si

$$\frac{\gamma_G}{2} < r_1 < r^* = \min \left\{ g^{-1}(D), \gamma_G, \gamma_B \frac{B_0 + D}{G_0}, \frac{4m_B m_G D \gamma_B}{(\gamma_G + m_B)^2} \right\}$$

Ici

$$g^{-1} : \left( 0, \frac{(\gamma_G)^2 m_B}{4m_G \tau_B} \right) \rightarrow \left( \frac{\gamma_G}{2}, \gamma_G \right)$$

est la fonction inverse de  $g$

b) Quand  $r_1 \leq r_2$ , nous obtenons des résultats sémilaires si nous remplaçons la fonction  $g$  par  $\alpha g$  avec

$$0 < \alpha = \frac{r_1}{r_2} \leq 1$$

### 3.4 Preuve du théorème 3.1

La preuve du théorème 3.1 est basée sur le théorème de Mawhin [49]

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. Soit  $L : DomL \subset X \rightarrow Y$  un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et soient:

$P : X \rightarrow X$  et  $Q : Y \rightarrow Y$  des projections continues telles que

$$\ker L = \text{Im } P, \ker Q = \text{Im } L$$

On a

$$X = \ker L \oplus \ker P$$

et

$$Y = \text{Im } L \oplus \text{Im } Q$$

Dans la suite nous notons par  $L_P$  la restriction de  $L$  à  $DomL \cap \ker P$ , et

$$K_P : \text{Im } L \rightarrow DomL \cap \ker P$$

l'application inverse de  $L_P$ , et soit

$$j : \text{Im } Q \rightarrow \ker L$$

un isomorphisme de  $\text{Im } L$  vers  $\text{ker } L$ .

Avant de démontrer le théorème (3.1), nous allons écrire le système sous une forme réduite.

### 3.4.1 Modèle réduit

**Proposition 3.1** *Supposons les hypothèses (H1 et H2) vérifiées, alors pour tout  $t$*

$$r_2 G(t) < \gamma_B (B(t) + D), \quad \forall t \geq 0$$

**Preuve:** Soit

$$u(t) = r_2 G(t) - \gamma_B (B(t) + D)$$

Dans cette proposition, nous voulons montrer que si les hypothèses (H.1 et H.2.) sont vérifiées, alors  $u(t)$  est strictement négatif pour tout  $t$ , pour cela nous faisons un raisonnement par l'absurde. D'après l'hypothèse H.1),  $u(0) < 0$  Supposons qu'il existe un  $t$  positif dans  $[0, T]$  tel que  $u(t) \geq 0$  et l'on se place au premier temps  $t_0$  où l'inégalité stricte n'est pas vérifiée. Nous avons alors:

$$u(t_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt}(t_0) \geq 0.$$

la condition

$$u(t_0) = 0$$

implique que

$$B(t_0) = \frac{r_2 G(t_0)}{\gamma_B} - D$$

d'après l'équation (1) du système (3.1)

$$\frac{du}{dt}(t_0) = r_2 \frac{dG}{dt}(t_0) - \gamma_B \frac{dB}{dt}(t_0)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t_0) = & -r(t_0) [r_2 + \tau_B \gamma_B] \frac{B(t_0)}{B(t_0) + D} G(t_0) + \\ & [\gamma_G r_2 G(t_0) + r_2 m_B G(t_0)] - \gamma_B m_B D - r_2 m_G [G(t_0)]^2 \end{aligned}$$

ainsi, nous aurons

$$\frac{du}{dt}(t_0) < [+r_2 (\gamma_G + m_B)] G(t_0) - \gamma_B m_B D - r_2 m_G [G(t_0)]^2$$

D'après l'hypothèse (H2), ce ci entraine que  $\frac{du}{dt}(t_0) < 0$ , et ceci constitue une contradiction. Donc  $u(t_0)$  strictement négatif pour tout  $t \geq 0$ . ■

**Remarque 3.2** *Sous les hypothèses de la proposition précédente, notre système s'écrit sous sa forme réduite suivante:*

$$\begin{cases} \frac{dG(t)}{dt} = -\frac{r(t)G(t)}{B(t)+D} B(t) + \gamma_G G(t) - m_G (G(t))^2 \\ \frac{dB(t)}{dt} = \tau_B \frac{r(t)G(t)}{B(t)+D} B(t) - m_B B(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Afin d'appliquer le théorème de Mawhin, nous aurons besoin des estimations suivantes.

### 3.4.2 Estimations à priori

Dans la suite du travail, nous supposons les hypothèses  $H.1)$ ,  $H.2)$  et  $H.3)$ . Pour montrer que les biomasses de la proie (les gardons) et du prédateur (les brochets) sont uniformément bornées. Nous allons montrer la proposition suivante.

#### Proposition 3.2

*Ils existent deux constantes positives  $\rho_i$   $i = 1, 2$ , telles que*

$$\max_{t \in [0,1]} |B(s)| < \rho_1$$

et

$$\max_{t \in [0,1]} |G(s)| < \rho_2$$

Pour tout  $(G, B)$  solution 1-périodique du système (3.2)

**Preuve:** Dans cette proposition, nous voulons montrer que si la solution périodique, du système réduit, existe alors  $(B, G)$  est uniformément bornée. Il est clair que si la condition initiale  $B_0 \geq 0$ , alors  $B(t) \geq 0$ , pour tout  $t \geq 0$ . Ceci implique que

$$\frac{B(t)}{B(t) + D} \leq 1 \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

Estimation sur  $G$

en intégrant la première équation du système 3.2, nous obtenons:

$$\begin{aligned} m_G \int_0^1 [G(s)]^2 ds &= m_G \int_0^1 |G(s)|^2 ds \\ &\leq \gamma_G \int_0^1 |G(s)| ds + r_2 \int_0^1 |G(s)| ds \end{aligned}$$

nous savons que

$$\left( \int_0^1 |G(s)| ds \right)^2 \leq \int_0^1 |G(s)|^2 ds$$

nous simplifions par  $\int_0^1 |G(s)| ds$  et nous obtenons:

$$\int_0^1 |G(s)| ds \leq \frac{r_2 + \gamma_G}{m_G}$$

**Estimation sur  $B$**

En intégrant la deuxième équation du système (3.2) sur  $[0, 1]$ , nous avons l'égalité

suivante:

$$\int_0^1 \tau_{Br}(s) \frac{G(s) B(s)}{B(s) + D} ds = \int_0^1 m_B B(s) ds$$

du faite que

$$\frac{B(s)}{B(s) + D} < 1$$

et en majorant  $\int_0^1 |G(s)| ds$  par sa valeur, nous obtenons l'inégalité suivante:

$$\int_0^1 |B(s)| ds \leq \frac{\tau_{Br_2}}{m_B} \times \frac{r_2 + \gamma_G}{m_G} = C_0.$$

D'après le théorème de la moyenne alors, il existe  $\xi \in [0, 1]$  tel que  $\int_0^1 G(s) ds = G(\xi)$

et

$$G(t) \leq G(\xi) + \int_{\xi}^t G'(s) ds$$

la première équation du système (3.2) implique que:

$$\int_0^t G'(s) ds \leq (r_2 + \gamma_G) \int_0^t |G(s)| ds + m_G \int_0^t |G(s)|^2 ds.$$

A partir de ceci, nous avons

$$|G(s)| \leq \frac{r_2 + \gamma_G}{m_G} + \int_0^s \omega[|G(s)|] ds$$

avec

$$\omega(S) = (r_2 + \gamma_G) S + m_G S^2$$

d'après le lemme (2.2) du chapitre 2), alors il existe une constante positive  $\rho_2$  tel que:

$$|G(t)| \leq \rho_2 \quad \text{pour tout } t \in [0, 1]$$

d'une manière similaire, et d'après le théorème des valeurs intérieures, il existe un  $\eta \in [0, 1]$  telque:

$$\int_0^1 B(s) ds = B(\eta)$$

d'après la seconde équation du système réduit nous montrerons que :

$$B(t) \leq B(\eta) + \int_{\eta}^t B'(s) ds$$

suite à ceci, nous avons la majoration suivante.

$$|B(t)| \leq \rho_2 \tau_B r_2 + m_B c_0 + c_0 = \rho_1 \quad \text{pout tout } t \in [0, 1]$$

de cette manière nous avons montrer que  $B(s)$  et  $G(s)$  sont uniformément bornées par les quantités respectives  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , et ceci pour tout  $t \geq 0$ . ■

Dans la partie suivante nous allons montrer  $G(s)$  et  $B(s)$  sont strictement positives pour tout  $s \in [0, 1]$

### 3.4.3 Positivité de la solution

Nous introduisons deux nouvelles fonctions

$$F = \log B \quad \text{et} \quad H = \log G,$$



Le système que vérifi  $(F, H)$  est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{dH(t)}{dt} = -\frac{r(t)\exp F(t)}{\exp F(t)+D} + \gamma_G - m_G \exp H(t) \\ \frac{dF(t)}{dt} = \tau_B \frac{r(t)\exp H(t)}{\exp F(t)+D} - m_B \end{cases} \quad (3.3)$$

Ici les paramètres  $\tau_B, r(t), m_G, m_B, \gamma_G$  et  $D$  de ce système sont exactement les mêmes que ceux des deux systèmes précédents. Il est claire que si ce système (3.3) admet une solution positive et 1-périodique alors le système réduit (3.2) admet une solution  $(B, G) = (\exp F, \exp H)$  positive 1-périodique.

Nous supposons dans la suite que les hypothèses  $H.1) - H.2) - H.3)$  sont vérifiées.

**Proposition 3.3** *Il existe  $R_i > 0 \quad i = 1, 2$  tels que :*

$$\max_{t \in [0,1]} |F(s)| < R_1 \quad \text{et} \quad \max_{t \in [0,1]} |H(s)| < R_2$$

**Preuve:** pour toute solution 1- périodique du système (3.3) De la première équation du système (3.3), nous aurons,

$$\int_0^1 -\frac{r(t)\exp F(t)}{\exp F(t)+D} dt + \gamma_G = \int_0^1 m_G \exp H(t) dt$$

D'autre part nous remarquons que

$$\int_0^1 \frac{r(t)\exp F(t)}{\exp F(t)+D} dt < r_2$$

Ainsi:

$$\int_0^1 -\frac{r(t)\exp F(t)}{\exp F(t)+D} dt + \gamma_G > \gamma_G - r_2$$

Par conséquent:

$$\int_0^1 \exp H(t) dt > \frac{\gamma_G - r_2}{m_G} =: \delta_1$$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\xi \in [0, 1]$  tel que

$$\exp H(\xi) \geq \delta_1$$

Nous intégrons la seconde équation du système précédent sur  $[0, 1]$ , nous aurons

$$\int_0^1 \left( \frac{r(t) \exp H(t)}{\exp F(t) + D} \right) dt = \frac{m_B}{\tau_B}$$

choisissons  $\eta \in [0, 1]$  tel que

$$F(\eta) = \max_{t \in [0, 1]} F(t)$$

Nous avons

$$\frac{r_1}{\exp F(\eta) + D} \int_0^1 \exp H(t) dt \leq \frac{m_B}{\tau_B}$$

d'après l'hypothèse H3) nous avons

$$\exp F(\eta) > \frac{(\gamma_G - r_2) \tau_B}{m_G m_B} r_1 - D =: \delta_2 > 0$$

D'après le système (3.3)

$$\int_0^1 |H'(s)| ds \leq r_2 + m_G \int_0^1 \exp H(s) ds + \gamma_G$$

ceci implique que

$$\int_0^1 |H'(s)| ds \leq r_2 + \gamma_G + m_G \rho_2 =: d_1$$

De la même manière nous avons

$$\int_0^1 |F'(s)| dt \leq \tau_B \int_0^1 \left( \frac{r(s) \exp H(s)}{\exp F(s) + D} \right) ds + m_B$$

intégrons la première équation du système, nous obtenons,

$$\int_0^1 \tau_B \left( \frac{r(t) \exp H(t)}{\exp F(t) + D} \right) dt = m_B$$

ceci implique que:

$$\int_0^1 |F'(s)| dt \leq 2m_B = d_2$$

de la relation

$$F(t) = F(\eta) + \int_{\eta}^t F'(s) ds > F(\eta) - \int_{\eta}^t |F'(s)| ds$$

nous déduisons que

$$F(t) \geq \ln \delta_2 - d_2, \quad \text{pout tout } t \in [0, 1]$$

de la même manière nous avons

$$H(t) \geq \ln \delta_1 - d_1 \quad \text{pout tout } t \in [0, 1]$$

suite à ceci

$$\max_{t \in [0,1]} |F(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} \{\ln \rho_1 + d_2, \ln \delta_2 - d_2\} = R_1 > 0$$

et

$$\max_{t \in [0,1]} |H(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} \{\ln \rho_2 + d_1, \ln \delta_1 - d_1\} = R_2 > 0$$

■

**Remarque 3.3** *La proposition précédente reste vraie si nous remplaçons  $D$  par  $\mu D$  avec  $\mu$  un paramètre dans  $[0, 1]$ .*

Pour montrer l'existence d'au moins une solution du système ( 3.3) nous allons nous placer dans le cadre du théorème (2.1).

### 3.4.4 Existence de solutions

Soit l'espace de Banach

$$X = Y = \{(F, H) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : (F(t+1), H(t+1)) = (F(t), H(t)), \forall t \in [0, 1]\}$$

muni de la norme

$$\|(F, H)\| = \|F\|_0 + \|H\|_0 \text{ avec } \|H\|_0 = \max_{t \in [0, T]} |H(t)| .$$

Nous définissons l'opérateur linéaire:

$$L : \text{Dom}L \cap X \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), L(F, H) = \left( \frac{dF}{dt}, \frac{dH}{dt} \right)$$

ici

$$\text{Dom}L \cap X = \{(F, H) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)\}$$

Soit l'opérateur de Nemyski

$$N : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$$

par

$$N(F, H) = \left( \tau_B \frac{r(t) \exp H(t)}{\exp F(t) + D} - m_B(r(t)), -\frac{r(t) \exp F(t)}{\exp F(t) + D} + \gamma_G - m_G \exp H(t) \right)$$

Nous définissons les projections  $P$  et  $Q$  tellesque:

$$P(F, H) = Q(F, H) = \left( \int_0^1 F dt, \int_0^1 H dt \right), \quad (F, H) \in X$$

il est clair que:

$$\ker L = \{(F, H) \in X : (F, H) = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

nous observons que  $\dim \ker L = 2$ .

Remarquons que

$$\text{Im } L = \left\{ (F, H) \in X : \int_0^1 F dt = 0, \int_0^1 H dt = 0 \right\}$$

est fermé dans  $X$ , et par suite

$$\text{Co dim Im } L = \dim \ker L = 2$$

ainsi  $L$  est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

Soit  $L_P$  la restriction de  $L$  à  $\text{Dom } L \cap \ker P$ . Alors  $L_P$  est une application bijective à valeurs dans  $\text{Im } L$ , donc elle admet une fonction inverse qu'on notera

$$K_P : \text{Im } L \rightarrow \text{Dom } L \cap X$$

définie par:

$$K_P(f_1, f_2) = \left( \int_0^t f_1(s) d(s) - \int_0^1 \int_0^\eta f_1(s) ds d(\eta), \int_0^t f_2(s) d(s) - \int_0^1 \int_0^\eta f_2(s) ds d(\eta) \right)$$

Pour calculer  $K_P(I - Q)$ , nous observons que:

$$\begin{aligned} (I - Q)(f_1, f_2)(t) &= (f_1(t), f_2(t)) - \left( \int_0^1 f_1(t) dt, \int_0^1 f_2(t) dt \right) \\ &= \left( f_1(t) - \int_0^1 f_1(t) dt, f_2(t) - \int_0^1 f_2(t) dt \right) \end{aligned}$$

Nous appliquons  $K_P$  à  $(I - Q)$ , nous aurons:

$$K_P(I - Q)(f_1, f_2)(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t f_1(F, H)(s) d(s) + \left(\frac{1}{2} - t\right) \int_0^1 f_1(F, H)(s) ds - \\ \int_0^1 \left(\int_0^\eta f_1(F, H)(s) ds\right), \\ \int_0^t f_2(F, H)(s) d(s) + \left(\frac{1}{2} - t\right) \int_0^1 f_2(F, H)(s) ds \\ - \int_0^1 \left(\int_0^\eta f_2(F, H)(s) ds\right) \end{pmatrix}$$

L'opérateur  $N$  de Nemyski défini de  $X$  vers  $X$  est un opérateur  $L$  compact sur  $\overline{\Omega}$ . En effet ceci découle du fait que les opérateurs  $QN$  et  $K_p(I - Q)N$  définis de  $X$  vers  $X$  sont des opérateurs continus sur  $X$ . D'après le théorème d'Ascoli Arzela  $QN(\overline{\Omega})$  et  $K_p(I - Q)N(\overline{\Omega})$  sont compactes

Soit le système:

$$\begin{cases} \left( \tau_B \bar{r} \frac{\exp \alpha}{\exp \beta + D} - m_B \right) = 0 & (1) \\ \frac{\exp \alpha}{\exp \beta + D} \bar{r} - m_G \exp \alpha + \gamma_G = 0 & (2) \end{cases} \quad (3.4)$$

ici  $\bar{r} = \int_0^T r(t) dt$ . Soit  $R_0 > 0$  une constante assez grande, de manière que toute solution  $(\alpha^*, \beta^*)$  du système (3.4) satisfait:

$$|\alpha^*| + |\beta^*| < R_0$$

Nous considérons l'ensemble

$$\Omega = \{(F, H) \in X : \|(F, H)\| < M\}$$

nous considérons ici  $M = R_0 + R_1 + R_2$ . Si  $(F, H)$  est solution de

$$L(F, H) = \lambda N(F, H) \quad \lambda \in (0, 1)$$

Alors  $(F, H)$  vérifie la proposition (3.2) avec  $R_1$  indépendant de  $\lambda$ . Delà la première condition du théorème de Mawhin est satisfaite.

Quand

$$(F^*, H^*) \in Ker L \cap \partial\Omega = \mathbb{R}^2 \cap \partial\Omega$$

alors  $(F^*, H^*)$  est un vecteur constant de  $\mathbb{R}^2$ , tel que

$$|F^*| + |H^*| = M$$

si (4) a une solution, alors

$$QN(F^*, H^*) = (0, 0)$$

ici

$$QN(F^*, H^*) = \left( \tau_B \bar{r} \frac{\exp H^*}{\exp F^* + D} - m_B, \frac{\exp F^*}{\exp F^* + D} \bar{r} - m_G \exp H^* + \gamma_G \right)$$

comme, le système 3.4 n'a pas de solution alors,

$$QN(F^*, H^*) \neq (0, 0)$$

et ceci prouve la condition (2) du théorème (2.1).

Pour compléter la preuve, il faut vérifier la condition (3) du théorème de Mawhin, nous définissons

$$\Phi(F, H, \mu) = \left( \tau_B \bar{r} \frac{\exp H}{\exp F + \mu D} - m_B, \frac{\exp F}{\exp F + \mu D} \bar{r} - m_G \exp H + \gamma_G \right)$$

il est clair que

$$\Phi(F, H, \mu) \neq (0, 0) \quad \forall (F, H) \in Ker L \cap \partial\Omega$$

d'autre part le vecteur constant  $(F, H)$  tel que  $|F| + |H| = M$  vérifie

$$\Phi(F, H, \mu) = (0, 0)$$

d'après la remarque (3.3) ceci mène à une contradiction.

### 3.4.5 Calcul du degré topologique

Soit  $J = Id : \text{Im } Q \rightarrow \text{ker } L$  l'application identique. Nous avons  $JQN_{\text{ker } L \cap \Omega} = \Phi(., ., 1)$

Nous utilisons les propriétés du degré topologique, nous obtenons

$$\begin{aligned} \deg(JQN(F, H), \text{Ker } L \cap \Omega, (0, 0)) &= \deg(\Phi(F, H, 1), \text{Ker } L \cap \Omega, (0, 0)) \\ &= \deg(\Phi(F, H, 0), \text{Ker } L \cap \Omega, (0, 0)) \end{aligned}$$

Considerons la relation  $\Phi(F, H, 0) = (0, 0)$ , Alors

$$\begin{cases} \left( \tau_B \bar{r} \frac{\exp H}{\exp F} - m_B \right) = 0 \\ -\bar{r} - m_G \exp H + \gamma_G = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Soit  $u = \exp H$  et  $v = \exp F$ , Alors

$$u^* = \frac{\gamma_G - \bar{r}}{m_G} > 0 \quad v^* = \frac{1}{m_B} \tau_B \bar{r} \frac{\gamma_G - \bar{r}}{m_G} > 0$$

est la solution unique de (3.5).

delà

$$\begin{aligned} \deg(JQN(F, H), \text{Ker } L \cap \Omega, (0, 0)) &= \text{sign} \begin{vmatrix} \tau_B \frac{F}{\tau^*} & -\tau_B \bar{r} \frac{\mu^*}{(\tau^*)^2} \\ -m_G & 0 \end{vmatrix} \\ &= \text{sign} \left( m_G \tau_B \bar{r} \frac{\mu^*}{(\tau^*)^2} \right) = 1 \end{aligned}$$

Et ceci complète notre démonstration.

**Proposition 3.4** *Sous les hypothèses H.1) et H.2) et la condition*

$$r_1 > \gamma_G$$



Alors il existe  $D_0$  positif tel que pour tout  $0 < D < D_0$  nous avons

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} G(t) = 0$$

pour toute solution du système avec conditions initiales positives.

**Preuve:** D'après la remarque (3.2), il suffit de considérer le système (3.2). Il est clair que pour la donnée d'une condition initiale positive, la trajectoire reste positive pour tout  $t \geq 0$ . Par le principe de comparaison pour les équations différentielles nous obtenons

$$G(t) \leq V(t) \text{ pour tout } t \geq 0$$

ici  $V(t)$  est la solution de l'équation auxiliaire

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -\frac{r(t)V(t)}{B(t)+D}B(t) + \gamma_G V(t) \\ V(0) = G_0 \end{cases}$$

Alors

$$V(t) = V(0) \exp \int_0^t p(s) ds$$

Ici

$$p(s) = \gamma_G - \frac{r(s)}{B(s)+D}B(s)$$

quand  $D$  est suffisamment petit, la quantité

$$\frac{B(t)}{B(t)+D}$$

proche de 1 pour tout  $t$  et pour tout  $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$ , il existe  $D_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < D < D_0$ , nous avons

$$\frac{B(t)}{B(t)+D} \geq (1 - \epsilon) \text{ pour tout } t$$

du faite que

$$r(t) \geq r_1 \text{ pour tout } t$$

nous avons

$$\int_0^t p(s) ds \leq \int_0^t (\gamma_G - (1 - \epsilon) r_1) ds = (\gamma_G - (1 - \epsilon) r_1) t$$

comme

$$r_1 > \gamma_G$$

Ceci implique pour  $\epsilon$  suffisamment petit

$$\gamma_G - (1 - \epsilon) r_1 = \gamma_G - r_1 + \epsilon r_1 < 0$$

Nous déduisons que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$$

et

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} G(t) = 0$$

■

# Conclusion et perspectives

Les écosystèmes aquatiques sont souvent affectés par les activités humaines. Cette étude fournit des résultats préliminaires de l'évolution des écosystèmes basée sur la gestion des eaux des lacs. Nous avons montré que les variations des niveaux des eaux est un facteur important dans la persistance ou l'extinction des espèces proies-prédateurs. Dans notre travail, nous obtenons une condition suffisante pour la survie de population en cas de fluctuations des niveaux des eaux. Le théorème 3.1 reflète les interactions complexes entre l'environnement et les espèces pour assurer sa survie. Il indique que la variabilité des niveaux d'eau joue un rôle important. Ainsi la gestion des lacs ne doit pas altérer la relation proie prédateur. L'analyse suggère que quand le niveau d'eau baisse, les chances de survie augmentent. Ainsi le programme de gestion de l'eau devrait être établie de telle sorte qu'il ne modifie pas la ration du système proie prédateur. Dans le cas d'un environnement périodique (fluctuations saisonnières) c'est à dire les coefficients de système (3.1) continues et 1-périodique peut être manipulés par les mêmes techniques.

D'autre part dans la littérature nous trouvons que pour s'approcher plus de la réalité nous pouvons supposer que les coefficients d'accroissement dépendent non seulement, pour chaque instant, des valeurs actuelles des grandeurs  $B(t)$  caractérisant la biomasse du prédateur au temps  $t$ , mais aussi des valeurs passées jusqu'à une époque plus ou moins reculée. Il ne faudra plus seulement les considérer comme des fonctions de  $B(t)$ , mais comme des " fonctionnelles ", et cela nous conduira à des équations intégral-différentielles. Nous pouvons considérer par exemple le principe suivant, quand un prédateur attaque une proie, et réussit son attaque il fait diminuer instantanément la biomasse de la proie;

mais par contre quand le prédateur reçoit cette quantité de nourriture, il lui faut un certain moment pour la transformer en croissance. Soit  $\theta$  le temps maximal que fait le prédateur pour transformer ses aliments en croissance donc la connaissance des fonctions  $G(t)$  et  $B(t)$  sur l'intervalle  $[-\theta, 0]$  est nécessaire. Nous pouvons envisager l'étude d'un modèle à retard., comme nous pouvons considérer aussi que  $D$  est un deuxième prédateur.

# Chapitre 4

## SYSTEMES DIFFERENTIELS MULTIVOQUES

### 4.1 Introduction

Nous étudions dans cette partie un problème aux limites d'ordre un à second membre multivoque. Plus spécifiquement, nous nous intéressons à l'existence des solutions du problème aux limites pour équations différentielles du premier ordre à second membre multivoques. Soit le problème suivant:

$$x'(t) \in A(t)x(t) + F(t, x(t)), \quad t \in (0, 1); \quad Mx(0) + Nx(1) = 0 \quad (4.1)$$

Ici, nous considérons  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  vérifie les conditions de Carathéodory des multifonctions, soient,  $I = [0, 1]$ ,  $A(\cdot)$  est une matrice fonctionnelle, carrée d'ordre  $n$ , continue sur  $I$ ,  $M$  et  $N$  sont des matrices constantes carrées  $n \times n$ . Nous notons par  $\|x\|$  la norme de chaque élément  $x \in \mathbb{R}^n$  et par  $\|A\|$  la norme de la matrice  $A$ . Plusieurs auteurs ont étudié des problèmes semblables à 4.1 conformément aux suppositions diverses. (voir par exemple [5],[6],[7],[8],[9],[12],[20],[32],[33],

[59]) et les références qui y sont cités). Plusieurs phénomènes physiques sont décrits

par le problèmes 4.1 par exemples dans le cas des frottements secs

(voir par exemple [21] et [71]), et les problèmes de contrôles (Voir [20],[35],[59] et les références incluses). Nous présentons le résultat de l'existence de solutions ci dessous, nous supposons que la multi application  $F$  vérifie des conditions assez générales,et de même pour les matrices  $A,M$  et  $N$  .Cette approche est basée sur le théorème de la transversalité topologique présenté par Granas, le théorème du point fixe et les inégalités différentielles. Pour l'utilisation du degré topologique dans le cas des problèmes aux limites à second membre multivoques, nous referons le lecteur à [67]. Notre résultat ne peut pas être tiré trivialement des résultats précédents.

## 4.2 Cas Linéaire

Dans cette section, nous commençons par étudier un problème aux limites pour une classe d'équations différentielles ordinaires. Ensuite nous considérons un problème aux limites lineaire pour équations différentielles à second membre multivoque.

### 4.2.1 Problème aux limites linéaire

Pour des raisons de simplicités, nous étudierons ces problèmes sur l'intervalle  $I = [0, 1]$  .

Dans le premier paragraphe nous étudierons en détails le problème linéaire non homogène,

Soit le problème aux limites suivant

$$(L.1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + p(t) & t \in I \\ Mx(0) + Nx(1) = \xi \end{cases}$$

## Problème homogène

Le problème homogène correspondant au problème (L.1) est le système suivant:

$$(L.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) & t \in I \\ Mx(0) + Nx(1) = 0 \end{cases}$$

$A(\cdot)$  une matrice continue sur  $I$ ,  $M$  et  $N$  des matrices constantes de type  $n \times n$ .

Dans un premier temps nous allons rappeler quelques résultats élémentaires mais utiles.

Soit l'équation différentielle

$$(L.2') \quad \dot{x} = A(t)x$$

Ces résultats sont démontrés dans la plupart des ouvrages sur la théorie des équations différentielles ordinaires (Par exemple [10], [13], [15]).

Le théorème d'existence et d'unicité implique que le problème de Cauchy linéaire admet une solution unique satisfaisant à  $x(0) = x_0$ , pour tout  $x_0$  vecteur donné de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $\phi(t)$  la matrice dont la  $j^{\text{ième}}$  colonne est la fonction vectorielle  $\varphi_j(t) = (\varphi_{1j}(t), \dots, \varphi_{nj}(t))^T$  telle que

$$\begin{aligned} (i) \quad \dot{\varphi}_j(t) &= A(t)\varphi_j(t) & t \in I \\ (ii) \quad \varphi_j(0) &= e_j & j = 1, 2; \dots, n \end{aligned}$$

où  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , c'est à dire  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots;$

$$e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Alors nous pouvons montrer que  $\varphi_1(t); \dots, \varphi_n(t)$  sont linéairement indépendants, et nous avons;

Toute solution de (L.2') vérifiant la condition initiale  $x(0) = x_0$  est donnée par

$x(t) = \phi(t)x_0$ . La matrice  $\phi(t)$  est solution de l'équation différentielle matricielle  $\dot{\phi}_j(t) = A(t)\phi_j(t)$  satisfaisant à  $\phi(0) = Id$ , identité de  $\mathbb{R}^n$ .

La matrice  $\phi(t)$ , est la matrice fondamentale canonique de solution de  $(L2')$ . Soit  $w(t) = \det \phi(t)$ . Alors  $w(t)$  est appelé Wronskien des solutions  $\varphi_1(t); \dots, \varphi_n(t)$ .

**Théorème 4.1** (*Formule de Liouville*)

Pour tout  $t_0 \in I$  nous avons

$$w(t) = w(t_0) \exp \left[ \int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds \right]$$

$\phi(t)$  est la matrice fondamentale de solution de  $(L2')$  si et seulement si  $w(t) \neq 0$

Le problème  $(L2')$  admet pour seule solution, la solution triviale si et seulement si

$$\det(M + N\phi(1)) \neq 0,$$

où  $\phi(t)$  est la matrice fondamentale de solution de  $(L2')$  telle que  $\phi(0) = Id$ .

Toute solution  $(L2')$  est donnée par :

$$x(t) = \phi(t)x(0),$$

les conditions aux limites  $Mx(0) + Nx(1) = 0$  impliquent

$$Mx(0) + N\phi(1)x(0) = (M + N\phi(1))x(0) = 0$$

comme  $x(t) = 0$  si et seulement si  $x(0) = 0$ , et  $x(t) = 0$  si et seulement si  $[M + N\phi(1)]^{-1}$  existe, le résultat s'en suit.

Dans toute la suite la condition  $\det(M + N\phi(1)) \neq 0$  sera désignée par condition  $(C)$ .



### Problème non homogène et noyau de Green.

Nous avons résolu le problème homogène dans le but de résoudre le problème (L.1).

Nous citons le résultat, de l'unicité de la solution du problème (L1).

**Proposition 4.1** *Si la condition (C) est vérifiée, Alors le problème (L.1) admet une solution unique pour tout  $\xi$  et  $p(\cdot)$*

**Preuve:** La formule de la variation de la constante montre que toute solution de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + p(t)$$

est donnée par

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t)\phi^{-1}(s)p(s)ds$$

cette relation montre que si  $x(0)$  est déterminée de manière unique  $x(t)$  le sera aussi.

Utilisons les conditions aux limites

$$Mx(0) + Nx(1) = \xi$$

avec

$$x(1) = \phi(1)x(0) + \int_0^1 \phi(1)\phi^{-1}(s)p(s)ds.$$

De ceci, nous en déduisons que

$$\xi = Mx(0) + N\phi(1)x(0) + N \int_0^1 \phi(1)\phi^{-1}(s)p(s)ds$$

ou encore

$$(M + N\phi(1))x(0) = \xi - N \int_0^1 \phi(1)\phi^{-1}(s)p(s)ds$$

la condition (C) implique que:

$$(L.3) \quad x(0) = (M + N\phi(1))^{-1} \left[ \xi - N \int_0^1 \phi(1)\phi^{-1}(s)p(s)ds \right]$$

ceci montre que  $x(0)$  est uniquement déterminé à partir de  $\xi$  et  $p(\cdot)$ .

nous allons déterminer deux fonctions à valeurs matricielles  $G(t, s)$  et  $Q(t)$  telles que:

$$x(t) = Q(t)\xi + \int_0^1 G(t, s)p(s) ds$$

est l'unique solution du problème(L1).

Pour cela posons  $x(t) = u(t) + v(t)$  où  $v$  est solution du problème

$$(L4) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) & t \in I \\ Mx(0) + Nx(1) = \xi \end{cases}$$

Les résultats précédents montrent que

$$v(t) = \phi(t)(M + N\phi(1))^{-1}\xi \quad t \in I$$

posons

$$Q(t) = \phi(t)(M + N\phi(1))^{-1} \quad t \in I$$

alors

$$v(t) = Q(t)\xi \quad t \in I$$

Maintenant  $u$  est solution du problème

$$(L4') \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + p(t) & t \in I \\ Mx(0) + Nx(1) = 0 \end{cases}$$

Puisque

$$u(t) = \phi(t)u(0) + \int_0^t \phi(t)\phi^{-1}(s)p(s) ds$$

Alors nous avons

$$u(0) = -(M + N\phi(1))^{-1}N \int_0^1 \phi(1)\phi^{-1}(s)p(s) ds$$

Donc

$$\begin{aligned}
u(t) &= -\phi(t) (M + N\phi(1))^{-1} N \int_0^1 \phi(1) \phi^{-1}(s) p(s) ds + \\
&\quad \int_0^t \phi(t) \phi^{-1}(s) p(s) ds \\
&= -Q(t) N \int_0^1 \phi(1) \phi^{-1}(s) p(s) ds + \int_0^t \phi(t) \phi^{-1}(s) p(s) ds \\
&= -\int_0^t Q(t) N \phi(1) \phi^{-1}(s) p(s) ds - \int_t^1 Q(t) N \phi(1) \phi^{-1}(s) p(s) ds + \dots \\
&\quad \dots + \int_0^t \phi(t) \phi^{-1}(s) p(s) ds \\
&= \int_0^t (\phi(t) - Q(t) N \phi(1)) \phi^{-1}(s) p(s) ds - \int_t^1 Q(t) N \phi(1) \phi^{-1}(s) p(s) ds
\end{aligned}$$

Posons

$$J(t) = -(M + N\phi(1))^{-1} N \phi(1) \phi^{-1}(t) \quad \forall t \in I$$

En utilisant cette relation et la définition de  $Q(t)$  nous obtenons

$$(L.5) \quad u(t) = \int_0^t \phi(t) (\phi^{-1}(s) + J(s)) p(s) ds + \int_t^1 \phi(t) J(s) p(s) ds$$

Définissons l'opérateur  $G(t, s)$  par:

$$(L.6) \quad G(t, s) = \begin{cases} \phi(t) \phi^{-1}(s) + \phi(t) J(s) & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \phi(t) J(s) & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Alors  $G(t, s)$  est un opérateur à valeurs matricielles appelée Noyau de Green et la solution  $u(t)$  du problème (L.4') est donnée par:

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) p(s) ds$$

Finalement la solution du problème est donnée par:

$$(L.7) \quad x(t) = Q(t)\xi + \int_0^1 G(t,s)p(s)ds$$

■

### 3° – Formulation abstraite du Problème

Soit  $X = C^1(I, \mathbb{R}^n)$  l'ensemble des fonctions vectorielles continument dérivables sur l'intervalle  $I$ , et  $Z = C(I, \mathbb{R}^n)$  l'ensemble des fonctions vectorielles continues sur l'intervalle  $I$ .

Pour  $x \in X$  nous définissons sa norme par

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty \quad \text{où} \quad \|x\|_\infty = \sup_{t \in I} |x(t)|_0$$

avec  $|x(t)|_0$  est la norme euclidienne du vecteur  $x(t)$ .

Alors  $(X, \|\cdot\|)$  et  $(Z, \|\cdot\|_\infty)$  sont des espaces de Banach.

Soit  $L$ , un opérateur linéaire de  $X$  dans  $Z$  défini par:

$$(Lx)(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t).$$

De même soit  $\ell_0: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application définie par:

$$\ell_0(x) = Mx(0) + Nx(1).$$

Finalement, soit  $\mathcal{L}: X \rightarrow Z \times \mathbb{R}^n$  défini par:

$$\mathcal{L}x = (Lx, \ell_0(x)).$$

Le problème (3.1) est équivalent à l'équation abstraite:

$$(L.8) \quad \mathcal{L}x = (p, \xi)$$

dans le sens où toute solution de (L.2) est solution de (L.2) et réciproquement.

(i)  $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire continu,

(ii)  $\mathcal{L}$  est inversible si et seulement si la condition (C) est satisfaite,

(iii)  $\mathcal{L}^{-1}$  est un opérateur intégral linéaire continu (en fait complètement continu) et pour tout  $p$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$  nous avons, si  $K = \mathcal{L}^{-1}$ , alors

$$(L.9) \quad K(p, \xi) = Q(t)\xi + \int_0^1 G(t, s)p(s)ds$$

#### 4.2.2 Problèmes aux limites pour inclusions différentiels linéaires

Dans ce paragraphe, nous considérons une classe de problèmes aux limites pour équations différentielles à second membre multivoque.

Dans ce paragraphe nous considérons le problème suivant:

$$(I.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \in A(t)x(t) + R_0(t) & t \in I \\ Mx(0) + Nx(1) = \xi \end{cases}$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^n$  et  $A(t)$  matrice carrée d'ordre  $n$ , continue sur  $I$ , et  $R_0 \rightarrow \text{Comp}(\mathbb{R}^n)$  mesurable.

Nous rappelons que  $\phi(t)$  est la matrice fondamentale de solutions de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  avec  $\phi(0) = I$ .

Nous supposons dans toute la suite que la condition (C) est satisfaite, c'est à dire

$$\det(M + N\phi(1)) \neq 0.$$

Posons  $x(t) = u(t) + v(t)$  où  $u(t)$  est solution du problème

$$(L.10) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = A(t)u(t) & t \in I \\ Mu(0) + Nu(1) = \xi \end{cases}$$

Nous avons vu que  $u(t) = Q(t)\xi = \phi(t)(M + N\phi(1))^{-1}$ .

Le problème de détermination d'une solution du problème (L.10) revient à déterminer  $v(t)$ , solution du problème suivant:

$$(I.3) \quad \begin{cases} \dot{v}(t) \in A(t)v(t) + R_0(t) & t \in I \\ Mv(0) + Nv(1) = 0 \end{cases}$$

le théorème [34] implique l'existence d'une application mesurable  $p_0(\cdot)$  telle que,  $p_0(t) \in R_0(t)$ . Pour une telle fonction  $p_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $p_0(t) \in R_0(t)$ , la solution du (I.3)

$$(L.11) \quad \begin{cases} \dot{v}_0(t) = A(t)v_0(t) + p_0(t) & t \in I \\ Mv_0(0) + Nv_0(1) = 0. \end{cases}$$

est une solution du problème (L.11).

D'après, précédemment la solution de (L.11) est donnée par

$$v_0(t) = \int_0^1 G(t,s)p_0(s)ds.$$

Maintenant nous avons

$$\begin{aligned} 1) \quad \phi(t)R_0(t) &= \{\phi p(t); p(t) \in R_0(t)\} \\ 2) \quad \int_0^t \phi^{-1}(s)R_0(s)ds &= \left\{ \int_0^t \phi^{-1}(s)p(s)ds; p(t) \in R_0(t) \right\} \\ 3) \quad \int_0^1 G(t,s)R_0(s)ds &= \left\{ \int_0^1 G(t,s)p(s)ds; p(t) \in R_0(t) \right\} \end{aligned}$$

Nous voyons donc que

$$v_0(t) \in \int_0^1 G(t, s) R_0(s) ds.$$

soit

$$V(t) = \int_0^1 G(t, s) R_0(s) ds.$$

Comme

$$x(t) = u(t) + v(t) \in u(t) + V(t)$$

nous aurons

$$x(t) \in Q(t)\gamma + \int_0^1 G(t, s) R_0(s) ds.$$

Donc l'ensemble des solutions du problème (I.1) est l'ensemble

$$Q(t)\gamma + \int_0^1 G(t, s) R_0(s) ds.$$

### **Proposition 4.2**

*L'ensemble des solutions du problème (I.1) est non vide, convexe, et compact*

Nous expliciterons dans le paragraphe suivant quelques résultats du problème général.

## **4.3 Problème aux limites pour inclusion différentiel non linéaire**

Nous formulons quelques définitions et résultats sur la théorie de la transversalité topologique (voir, [32])

### 4.3.1 La théorie de la transversalité topologique dans le cas des multiapplications

Soit  $X$  un espace de Banach,  $C$  un sous ensemble convexe de  $X$  et  $U$  un sous ensemble ouvert de  $C$ . Nous notons par  $K_{\partial U}(\bar{U}, 2^C)$  l'ensemble des multiapplications  $G : \bar{U} \rightarrow 2^C$  qui sont compactes, scs à valeur convexe et fermé qui n'ont pas de point fixe sur  $\partial U$  (i.e.,  $u \notin Gu$  pour tout  $u \in \partial U$ ).

**Définition 4.1** Une homotopie compacte est une multiapplication  $H : [0, 1] \times \bar{U} \rightarrow 2^C$  qui est compacte, scs à valeur des sous ensemble fermé convexe. Si  $u \notin H(\lambda, u)$  pour  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $u \in \partial U$ ,  $H$  est dit point fixe libre sur  $\partial U$ .

**Définition 4.2** Deux multiapplications  $F, G \in K_{\partial U}(\bar{U}, 2^C)$  sont dites homotopiques dans  $K_{\partial U}(\bar{U}, 2^C)$ , s'il existe une homotopie compacte  $H : [0, 1] \times \bar{U} \rightarrow 2^C$  qui est un point fixe libre sur  $\partial U$  et telque  $H(0, \cdot) = F$  et  $H(1, \cdot) = G$ .

$G \in K_{\partial U}(\bar{U}, 2^C)$  elle est appelée essentielle si pour chaque  $F \in K_{\partial U}(\bar{U}, 2^C)$  tel que  $G|_{\partial U} = F|_{\partial U}$ , à un point fixe. autrement  $G$  est dite inessentielle.

**Théorème 4.2** (théorème de la transrersalité topologique)

Soit  $F, G$  deux multiapplications homotopiques à valeur dans  $K_{\partial U}(\bar{U}, 2^C)$ . Alors  $F$  est essentielle si et seulement si  $G$  est essentielle.

Soit  $G : \bar{U} \rightarrow 2^C$  une multi-application constante  $G(u) \equiv u_0$ . Alors si  $u_0 \in U$ ,  $G$  est essentielle.

**Théorème 4.3** (Théorème [65])

Soient  $E$  un espace de Banach,  $C$  un ensemble fermé convexe de  $E$  et  $U$  un ensemble ouvert de  $C$ , telque  $0 \in U$ . Soit  $G : \bar{U} \rightarrow C$ ,  $G(\bar{U})$  est bornée et  $G = G_1 + G_2$ , telle que:

1)  $G_1 : \bar{U} \rightarrow E$  est continue et complètement continue.



2)  $G_2: \bar{U} \rightarrow E$  est une contraction non linéaire (i.e. il existe une contraction  $\varphi$  continue non décroissante; la fonction  $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  satisfait  $\phi(z) < z$  Pour  $z > 0$ , tel que  $\|G_2(x) - G_2(y)\| \leq \phi(\|x - y\|)$  (pour tout  $x, y \in \bar{U}$ ).

Alors nous avons l'un des deux résultats suivant.

(A<sub>1</sub>)  $G$  a un point fixe dans  $\bar{U}$ ; ou

(A<sub>2</sub>) Il existe un point  $u \in \partial U$  et  $\lambda \in (0, 1)$  avec  $u = \lambda G(u)$ .

### Remarque 4.1

*Ce théorème est exposé dans le cas des fonctions d'une seule variable, Ce pendant, il s'ensuit de la preuve donnée en [65] que le théorème est toujours valable si  $G_1$  est un opérateur multivoque. Aussi nous appliquons ce théorème avec  $G_2 \equiv 0$  L'application à une seule valeur identiquement nulle.*

### 4.3.2 Résultats

Dans tout cette partie nous supposons que

$A(\cdot)$  est une matrice continue sur  $I$  avec

$$A_0 := \sup \{ \|A(t)\| ; t \in I \},$$

$G(t, s)$  est l'opérateur de Green,.

Soit

$$G_0 := \sup \|G(t, s)\| ; (t, s) \in I \times I$$

nous supposons la condition (c) vérifiée, donc les matrices  $M$  et  $N$  sont tels que

$$\det(M + N\Phi(1)) \neq 0.$$

nous notons par  $S_{F(.,x(\cdot))}^1 = \{v \in L^1(I, \mathbb{R}^n) : v(t) \in F(t, x(t)) \text{ for a.e. } t \in I.\}$  l'ensemble des sélections qui sont dans  $F$  et reste dans  $L^1$ . La solution de 4.1 est une fonction  $x$  absolument continue sur  $I$ , tel que

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \text{ a.e. } t \in (0, 1); \quad Mx(0) + Nx(1) = 0 \quad (4.2)$$

Ici  $f \in S_{F(.,x(.))}^1$ . et  $AC_0(I)$  est l'ensemble de fonctions  $x$  absolument continues sur  $I$  vérifiant la condition

$$Mx(0) + Nx(1) = 0.$$

Aussi pour  $x \in AC(I)$  nous définissons sa norme par:

$$\|x\|_0 = \sup \{\|x(t)\|; t \in I\}$$

Nous considérons  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  une multifonction  $L^1$ Carathéodory. L'ensemble  $S_{F(.,x(.))}^1$  est non vide (voir [53]).

Pour plus de détails nous referons le lecteur à [11] et [20].

Dans notre premier résultat nous supposons

(H1)  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow bcc(\mathbb{R}^n)$  est une multifonction qui satisfait la condition  $L^1$ -Carathéodory

$$\|F(t, x)\| \leq \alpha(t) \psi(\|x\|) \text{ for a.e. } t \in I, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

Ici  $\alpha \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$  et  $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  est continue non décroissante et tel que.

$$\limsup_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\rho}{\psi(\rho)} = +\infty.$$

Nous avons le résultat suivant:

**Théorème 4.4** *Si l'hypothèse (H1) est satisfaite alors, le problème aux limites a second membre multivoque 4.1 admet au moins une solution .*

**Preuve:** La démonstration se fait en plusieurs étapes.

1°) étape 1: Considerons l'opérateur multivoque  $F : AC(I) \rightarrow L^1(I)$  défini par

$$(Fx)(t) = F(t, x(t)),$$

$F$  est définie, s.c.s., à valeurs les ensembles convexes, et envoie les sous ensembles bornés de  $AC(I)$  vers les sous ensembles bornés de  $L^1(I)$ . En effet nous avons,

$$Fx := \{u : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mesurable; } u(t) \in F(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in I, \}.$$

Soit  $z \in AC(I)$ . Si  $u \in Fz$  Alors

$$\|u(t)\| \leq \alpha(t) \psi(\|z(t)\|) \leq \alpha(t) \psi(\|z\|_0).$$

delà

$$\|u\|_{L^1} \leq C_0 := \|\alpha\|_{L^1} \psi(\|z\|_0).$$

cela montre que  $F$  est bien définie. Il est clair que  $F$  est à valeur convexe.

Soit  $B$  un sous ensemble borné de  $AC(I)$ . Alors, il existe,  $K > 0$  tel que  $\|u\|_0 \leq K$  pour  $u \in B$ .

Ainsi,

$$\|\omega\|_{L^1} \leq C_1, \quad \forall \omega \in Fu$$

ici

$$C_1 = \psi(K) \|\alpha\|_{L^1}.$$

Aussi nous pouvons montrer, comme dans ([23], p 10) que  $F$  est s.c.s.

Etape 2. Estimation à priori.

Supposons que  $x$  est une solution de (4.1). Alors, il existe une constante positive  $R^*$ , indépendante de  $x$ , telle que

$$|x(t)| \leq R^* \text{ pour tout } t \in I.$$

Puisque  $x$  est solution de 4.1. Il s'en suit que:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), p.p. t \in (0, 1); \quad Mx(0) + Nx(1) = 0.$$

Ici  $f \in S_{F(.,x(.))}^1$ . Il est clair que la solution du problème (4.2) est donnée par:

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds. \quad (4.3)$$

Delà

$$\|x(t)\| \leq \int_0^1 \|G(t, s)\| \|f(s)\| ds. \quad (4.4)$$

L'hypothèse (H1) donne

$$\|x(t)\| \leq G_0 \int_0^1 \alpha(s) \psi(\|x(s)\|) ds. \quad (4.5)$$

Soit

$$R_0 = \max \{ \|x(t)\| ; t \in j \}.$$

Alors

$$R_0 \leq G_0 \int_0^1 \alpha(s) \psi(\|x(s)\|) ds \quad (4.6)$$

Du faite que  $\psi$  est non décroissante nous avons

$$R_0 \leq G_0 \int_0^1 \alpha(s) \psi(R_0) ds. \quad (4.7)$$

La dernière inégalité implique que

$$\frac{R_0}{\psi(R_0)} \leq G_0 \|\alpha\|_{L^1}. \quad (4.8)$$

D'après (H1), la condition imposée sur  $\psi$  montre qu'il existe  $R^* > 0$  tel que pour tout  $R > R^*$

$$\frac{R}{\psi(R)} > G_0 \|\alpha\|_{L^1}. \quad (4.9)$$

Comparons les deux inégalités précédentes 4.8 et 4.9 nous remarquons que  $R_0 \leq R^*$ . Par conséquent, nous obtenons

$$\|x(t)\| \leq R^* \quad \text{pour tout } t \in I.$$

**Etape 3.** Existence de solution.

pour  $0 \leq \lambda \leq 1$  considérons la famille de problèmes à un paramètre

$$(1)_\lambda \quad x'(t) \in A(t)x(t) + \lambda F(t, x(t)), \quad t \in I; \quad Mx(0) + Nx(1) = 0$$

pour  $\lambda = 1$ ,  $(1)_\lambda \iff (1)$ .

D'après la démonstration de l'étape 2 alors si  $x$  est solution de  $(1)_\lambda$  pour  $\lambda \in [0, 1]$ , alors

$$\|x(t)\| \leq R^* \quad \text{pour tout } t \in I.$$

et  $R^*$  indépend de  $\lambda$ .

Nous considérons

$$F_\lambda : C(I) \rightarrow L^1(I)$$

défini par:

$$(F_\lambda x)(t) = \lambda F(t, x(t)).$$

L'étape 1 montre que  $F_\lambda$  est semi continue supérieurement, a valeur convexe et envoie les sous ensembles bornés de  $AC(I)$  vers les sous ensembles bornés de  $L^1(I)$ .

Soit  $j : AC_0(I) \rightarrow AC(I)$  l'injection continue. L'opérateur

$$L : AC_0(I) \rightarrow L^1(I),$$

défini par:

$$(Lx)(t) = x'(t) - A(t)x(t)$$

a un inverse borné (en effet ceci se déduit de la solution donnée par (4.3), qui est notée par  $L^{-1}$ ). De plus  $L^{-1}$  est complètement continue.

Soit

$$B_{R^*+1} := \{x \in AC_0(I); \|x(t)\|_0 \leq R^* + 1\}.$$

nous définissons la multi-application

$$H : [0, 1] \times B_{R^*+1} \rightarrow AC_0(I).$$

par

$$H(\lambda, x) = (L^{-1} \circ F_\lambda \circ j)(x).$$

Nous pouvons montrer facilement que les points fixes de  $H(\lambda, \cdot)$  sont des solutions de  $(1)_\lambda$ . De plus,  $H$  est une homotopie compact entre  $H(0, \cdot) \equiv 0$  et  $H(1, \cdot)$ . En effet,  $H$  est compacte du faite que  $j$  est continue,  $F_\lambda$  est bornée sur les sous ensembles bornés ( $F_\lambda(C)$  borné si  $C$  est un sous ensemble borné) et  $L^{-1}$  est complètement continue. Aussi,  $H$  est scs à valeur convexe fermée. Du faite que la solution de  $(1)_\lambda$  satisfait

$$\|x(t)\|_0 \leq R^* < R^* + 1$$

nous remarquons que  $H(\lambda, \cdot)$  n'a pas de point fixe sur  $\partial B_{R^*+1}$ .

D'après le théorème (4.3) nous déduisons que  $H(0, \cdot)$  est essentielle. Delà  $H_1$  est essentielle. Ceci implique que  $L^{-1} \circ F \circ j$  a un point fixe. Donc le problème (4.1) a une solution est ceci complète la preuve du théorème (4.4). ■

Notre second résultat est basé sur l'application du point fixe présenté par O'Regan ([65]).

Nous remplaceront l'hypothèse  $(H_1)$  par la condition suivante:

$$(H_2) : |F(t, x)| \leq p(t) \psi(\|x\|) \text{ pour p.p } t \in I, \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \text{ ici } p \in L^1(I, \mathbb{R}_+),$$

$\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  est continue non décroissante est telle que

$$\sup_{\delta \in (0, +\infty)} \frac{\delta}{G_0 \|p\|_{L^1} \psi(\delta)} > 1.$$

Nous pouvons énoncer le deuxième résultat suivant:

**Théorème 4.5** *Supposons l'hypothèse  $(H_2)$  vérifiée, Alors le problème aux limites (4.1) a au moins une solution.*

**Preuve:** La preuve est similaire à la preuve du théorème (4.4).

Soit  $M_0 > 0$  définit par

$$\frac{\delta}{G_0 \|p\|_{L^1} \psi(\delta)} > 1.$$

Soit

$$U := \{x \in AC_0(I); \|x\|_0 \leq M_0\}$$

Considerons L'opérateur compact ( Voir étape ci dessus )

$$(L^{-1} \circ F \circ j) : U \rightarrow AC_0(I).$$

Supposons que l'alternative  $(A_2)$  dans le théorème (4.3) a lieu. Cela signifie qu'il existe  $x \in \partial U$  tel que  $x \in (L^{-1} \circ F \circ j)(x)$ , ou équivalent à

$$x'(t) \in A(t)x(t) + F(t, x(t)), \quad t \in (0, 1), \quad Mx(0) + Nx(1) = 0.$$

Maintenant comme dans l'étape 2 ci dessus, d'après l'hypothèse  $(H_2)$  nous avons,

$$\|x(t)\| \leq G_0 \int_0^1 p(s) \psi(\|x(s)\|) ds.$$

Du fait que  $\psi$  est non décroissante nous arrivons à

$$\|x(t)\| \leq G_0 \int_0^1 p(s) \psi(\|x\|_0) ds$$

Et, delà pour  $x \in \partial U$  nous avons  $\|x\|_0 = M_0$  à partir de cette dernière implication, nous déduisons que

$$M_0 \leq G_0 \int_0^1 p(s) \psi(M_0) ds$$

qui donne à son tour

$$M_0 \leq G_0 \left[ \int_0^1 p(s) ds \right] \psi(M_0).$$

Delà,

$$M_0 \leq G_0 \|p\|_{L^1} \psi(M_0).$$

Ceci contredit clairement, la définition de  $M_0$ . Donc, la condition  $(A_2)$  du théorème (4.3) n'est pas vérifiée. Par conséquent,  $L^{-1} \circ F \circ j$  a un point fixe, qui est solution du problème (4.1). ■

Maintenant nous présentons le troisième résultat en se basant sur l'inégalité du type Henry-Bihari Voir [58].

Nous supposons que  $f$  satisfait

$(H_3)$  il existe  $p \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$  et  $\Psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , non décroissante vérifient les propriétés suivantes

(i) Il existe  $\gamma \in C(I; \mathbb{R}_+)$  telque

$$e^{-A_0 t} \Psi(u) \leq \gamma(t) \Psi(e^{-A_0 t} u) \quad \text{pour chaque } u \geq 0,$$



(ii)

$$\int_{I \times \mathbb{R}^n} \frac{d\sigma}{\Psi(\sigma)} = +\infty, \text{ telque } \|F(t, x)\| \leq p(t) \Psi(\|x\|) \text{ pour tout } (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n.$$

Comme un exemple d'une telle fonction  $\Psi$ , nous pouvons prendre  $\Psi(u) = u^m$ , avec  $0 < m < 1$ .

### Proposition 4.3

Supposons  $(H_3)$  satisfaite. Alors il existe  $M_1 > 0$  telque  $\|x(t)\| \leq M_1$  pour tout  $t \in I$  et n'importe quelle solution  $x$  de  $(1)_\lambda$ .

**Preuve:** Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et le produit sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors pour  $f \in S_{F(\cdot, x(\cdot))}^1$  nous avons

$$\langle x'(t), x(t) \rangle = \langle A(t)x(t) + \lambda f(t), x(t) \rangle.$$

nous rappelons que

$$\langle x'(t), x(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x(t)\|^2$$

nous utilisons L'inégalité de Cauchy-Schwarz et nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 \leq \|A(t)\| \|x(t)\|^2 + \lambda \|f(t)\| \|x(t)\|.$$

En intégrant le second membre de l'inégalité entre 0 et  $t$ , nous obtiendrons

$$\|x(t)\|^2 \leq \|x(0)\|^2 + 2A_0 \int_0^t \|x(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t \|F(s, x(s))\| \|x(s)\| ds$$

qui donne

$$\|x(t)\|^2 \leq \|x(0)\|^2 + 2A_0 \int_0^t \|x(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t p(s) \Psi(\|x(s)\|) \|x(s)\| ds. \quad (4.10)$$

Soit  $u(t) :=$  le second membre de l'inégalité (4.10). Alors

- (i)  $\|x(t)\| \leq \sqrt{u(t)} \quad t \in I;$
- (ii)  $u'(t) = 2A_0 \|x(t)\|^2 + 2p(t) \Psi(\|x(t)\|) \|x(t)\|.$

Pour que

$$u'(t) \leq 2A_0 u(t) + 2p(t) \Psi(\sqrt{u(t)}) \sqrt{u(t)}. \quad (4.11)$$

delà

$$\frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} \leq A_0 \sqrt{u(t)} + p(t) \Psi(\sqrt{u(t)})$$

ou

$$\frac{d}{dt} (\sqrt{u(t)}) \leq A_0 \sqrt{u(t)} + p(t) \Psi(\sqrt{u(t)}). \quad (4.12)$$

Soit  $v(t) = \sqrt{u(t)}$  pour  $t \in [0, 1]$  .alors l'inégalité 4.12 Devient

$$v'(t) \leq A_0 v(t) + p(t) \Psi(v(t))$$

elle est équivalente à

$$(e^{-A_0 t} v(t))' \leq e^{-A_0 t} p(t) \Psi(v(t)). \quad (4.13)$$

d'après les propriétés de la fonction  $\Psi$  et l'inégalité 4.13 alors, nous aurons l'inégalité suivante

$$(e^{-A_0 t} v(t))' \leq p(t) \gamma(t \Psi(e^{-A_0 t} v(t)))$$

Soit  $z(t) = e^{-A_0 t} v(t)$  . Alors d'après l'inégalité précédente nous aurons

$$z(t)' \leq p(t) \gamma(t) \Psi(z(t))$$

Ainsi

$$\frac{z(t)'}{\Psi(z(t))} \leq p(t) \gamma(t) \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4.14)$$

Rappelons que  $z(0) = v(0) = \sqrt{u(0)} = \|x(0)\|$ . L'inégalité (4.14) implique que

$$\int_{\|x(0)\|}^{z(t)} \frac{d\sigma}{\Psi(\sigma)} \leq \int_0^t p(s) \gamma(s) ds \leq \|p\|_{L^1} \|\gamma\|_0.$$

Ceci montre qu'il existe  $M_1 > 0$  telque

$$\|x(t)\| \leq M_1 \quad 0 \leq t \leq 1.$$

■

Maintenant, nous suivons la même procédure que le théorème (4.3) pour montrer le théorème suivant

**Théorème 4.6** *Si l'hypothèse (H.3) est vérifiée, alors notre problème aux limites (4.1) a au moins une solution.*

# Bibliographie

- [1] Arditi, R. ,& L. R. Guinzburg, Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence. *Journal of Theoretical Biology* 139 (1989), 311-326.
- [2] Arditi, R. , & H. Saiih. Empirical evidence of the role of hétérogéniy in ratio dépendant consumption. *Ecology* 73(1992),1544-1551.
- [3] Arditi, R. , L. R. Ginzburg, & H. R. Akçakaya. Variation in plankton densities among lakes: a case for ratio-dependent predation models. *American Naturalist* .138(1991a), 1287-1296.
- [4] Arditi, R. , & J. Michalski. 1995. Nonlinear food web models and response to increased basel productivity. In G. A. Polis, & K. O. Winemiller, eds. , *Food : Webs: Integration of Patterns and Dynamics*, 1995 pp 122-133. Chapman and Hall.
- [5] Agarwal, R.P. and O'Regan, D.,*Set valued mappings with applications in nonlinear analysis*, Taylor & Francis, London 2002.
- [6] Andres, J., Nielsen number and multiplicity results for multivalued boundary value problems, Boston MA, Birkhäuser, *Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl.* 43 (2001) , 175-187.
- [7] Andres, J. and Bader, R., Asymptotic boundary value problems in Banach space, *J.Math.Anal. Appl.* 274 (2002) , 437-457.

- [8] Anichini, G., Boundary value problems for multivalued differential equations and controllability, *J.Math.Anal. Appl.* 105(1985) , p.p 372-382.
- [9] Anichini, G. and Conti,G., Boundary value problems for systems of differential equations, *Nonlinearity* 1 (1988) , 1-10.
- [10] Arnold.V, -"Equation Différentielles" Ed Mir mouscou (1974)
- [11] Aubin, J.P. and Cellina, A., *Differential Inclusions, Set-valued Maps and Viability theory*, Springer Verlag, New York 1984.
- [12] Bernfeld, S. and Lakshmikantham, V., *An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems*, Academic Press, New York 1974.
- [13] Braun.M.-"Differential Equations and Their Applications" Springer Verlag, New York(1975)
- [14] Britler. GJ. Freedman HI. Predator-prey system with periodique coefficient math Broxi:55.(1981) 27-38.
- [15] Coddington.E.A andLevinson.N, "Theory of Ordinary Differential Equations", Mc Graw Hill Bookco, New York(1955)
- [16] .Cellina.A."Multivalued differential equation and ordinary differential equations" *Siam J.Appl. Math*;Vol 18,n°2 (1970) p.p 533-538.
- [17] Callois, J.-M. *Théorie de L'intéraction trophique: construction de modèles dynamiques avec interférences entre les prédateurs. Tests expérimautaux sur deux espèces de cladocères.* Dea, Institut national agronomique. Paris Grigon. (1997)
- [18] Cuij. Permanance of Predatory-prey system with périodic coefficient *Math Comput Model* (2005); 42, p.p 87-98.
- [19] Darwin, C. , "The Origin of Spices," W. Cloes & Sons, London, (1859).

- [20] Deimling, K., Multivalued Differential Equations, W. de Gruyter, Berlin (1992).
- [21] Deimling, K., Multivalued differential equations and dry friction problems, in Delay and Differential Equations, (A.M.Fink, R.K.Miller and W.Klieman, Eds.), 99-106, World Scientific Publ.,N.J.(1992).
- [22] Deimling, K. , "Nonlinear Functional Analysis".Springer Verlag Berlin Heidelberg New-York,1984.
- [23] Frigon, M., Application de la transversalite topologique à des problemes non lineaires pour des equations differentielles ordinaires, Dissertations Math.296, PWN, Warsaw (1990).
- [24] Fibonacci, L. Liber abaci, reproduit dans, "A translation Into Modern English of Lionardo Pisano' Bookof calculation" Springer-Verlag, New york, (2004)
- [25] Fillippov.A.f, "Classical Solutions of Differentail Equations with Multivalued Right-hand Side" Siam J.Control Vol.5, N°4 (1967) p.p 609-621
- [26] Gause, G. F. Expérimental demonstrations of Volterra's périodic oscillation in the numbers of animals. British journal of Experimental Biology. (1935);12:44-48.
- [27] Gilpin, M. E. , T. J. Case, & F. J . Ayala. Theta-selection. Mathematical Biosciences. (1976);32:131-139.
- [28] Ginzburg, L.R. Assuming reproduction to be a function to consumption raises doubts some popular predator-preys models:Journal of Animal Ecology. '(1998);67:325 327.
- [29] Ginzburg, L.R.,&H.R.Akçakaya. Conséquences of ratio-dependent for predation for steady-state proprieties of ecosystems.Ecology. (1992);73:1536-1543.
- [30] Goel, N. S. , S. C. Maitra, & E. W. Montrol. On the Volterra and other non linear models of interacting populations. Reviews of Modern physics. (1971);43:231-276.

- [31] Gompertz, B. . On the nature of the function expressive of the law of human mortality Philosophical transactions (1825);115:513-585.
- [32] Granas, A. and Dugundji, J., Fixed point theory, Springer Verlag (2003).
- [33] Granas, A. and Frigon, M., Topological Methods In Differential Equations and Inclusions, Kluwer Academic Publ., Dordrecht 1995.
- [34] Hermes.H, "The Generalized Differential equation  $\dot{x} \in R(t, x)$  Advances in Math.(1970) p.p 149-169.
- [35] Hu, S. and Papageorgiou, N. S., Handbook of Multivalued Analysis, 2 Applications, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht 2000.
- [36] Harris, G. P. A replay to sarnelleand some forther comments on Harris's opinions. Freshwater Biology. 1996;35,p.p343-347.
- [37] Harrisson, G. W. Comparing predator- prey models to Luginbill's expérimet with Didinum and paramecium. Ecology. 1995;76:357-374.
- [38] Hassel, M. P, & G.C. Varley . New inductive population model for insect parasites and its beoring on biological controle.Nature. 1967;223,p.p1133-1137.
- [39] J. Haufbauer and K. Sigmand. "The Theory of Evolution and Dynamic Systems" London Mathematical Society Student Texts 7. 1988.
- [40] Holling,C.S.The Composants of Predation isrevealed by a study of Small-mammal predation of the european pure Sawfly,the canadian Entomologist1956a;91,p.p293-320
- [41] Holling,C.S. Some Characteristics of Simple types of predation and parasitism.The Canadian Entomologiste1956b;91,p.p385-398.
- [42] H.I. FREEDMAN,"Deterministic Mathématiqueal Models in Population Ecology",1987

- [43] H.Reinhard "equations differentielles Fondements et applications " Goutier-Villars.Bordas Paris 1982.
- [44] Ivlev, V, S, Experimental Ecology of the feeding of fishes. Yale University Press, New Haven, CT 1961.
- [45] Israel, G. , Voltérra's Analytical Mechanics of biological Association' ,Arch, int. Hist. Sci 41, 57-104;3-352, (1991)
- [46] Israel ,G. ; ,Millan Gasca, The biology for numbers The correspondance of Vito Volterra on Mathematical Biology, Basel, Boston, (2002)
- [47] Israel, G La Mathématisation du Réel / Essai Sur la Modélisation Mathématique, Seuil, Paris,(1996),
- [48] K Hale "Asymptotic and Behavior of Dissipative Systems" American Mathematical Society Providence, Rhode Island 1998
- [49] Gaines RE, Mawhin JL. coincidences degree and nonlinear equations. Berlin : springer-Verlag: 1977.
- [50] J.Moser and E.Zehender "Dynamical systems".Courant Institut NYU1979/1980.
- [51] Jost, C. , O Arino, & R. Arditi. About deterministic extinction in ratio- dependant predator-prey models. bulletin of mathematical Biology (1999);61,p.p:19-32.
- [52] Kuratowski.K; Ryll Narozewski,-A General Theorem on Selectors,Bull.Acad.Poln Sci.Math Astronom.Phys. 13 (1965), p.p 397-403
- [53] Lasota, A. and Opial, Z., An application of the Kakutani-Ky-Fan Theorem in The Theory of ordinary Differential Equations, Bull. Acad. Polon . Sci. Ser. Sci. Math.Astronom. Phys. 13 (1965) ,781-786.
- [54] Lotka,A.J. Elements of Physical Biology.Williams and Wilkins CO. (1924).



- [55] Malthus, T.R. .An Essay on the Principale of Population, and A Summary View of the Principale of Population. Penguin, Harmondsworth, England. (1798).
- [56] Medved. M. Integral Inequalities and global Solutions semi linear evolution equations. J Math Appl ,267(2002):643-650.
- [57] May, R. M. Detecting density dependance in imaginary wolds. Nature 1976a;338:16-17.
- [58] Medved, , A new approach to an analysis of Henry type integral inequalities and their Bihari type versions, J.Math. Anal. Appl. 214 (1997) , 349-366.
- [59] Miller, L. E., Generalized boundary value problems, J.Math.Anal. Appl. 74 (1980) , 233-246.
- [60] M.C Cauley, E, & w.w. Murdoch. Cyclic and stable population: pankton as a paradigm. Américan naturalist 1987 129: (1987) 97-121.
- [61] Miklos FARKAS, "Periodic Motions". Springer verlag, 1994.
- [62] Milan, Medved. Integral Inégalities and Global Solution of semi linear Evolution Equation. Journal of math. Anal. Application 267, (2002) 643-650.
- [63] Murray, JD *Mathématical Biology*, Berlin: Springer-Verlag: 1993
- [64] Olech, C, "Existence of solutions of non convex orientor field". Summer school. ol, O.D.E, Brno (1974), p.p 61-70.
- [65] O'Regan, D., Fixed-point theory for the sum of two operators, Applied Math. Letters 91 (1996) , 1-8.
- [66] Pimm, S.L. 1991. *The Balance of Nature*. University of Chicago Press.
- [67] Pruzko, T., Topological degree methods in multivalued boundary value problems, Nonlinear Anal. T. M. A. 59 (1982) , 959-973.

- [68] Real, L. A 1977 The kinetics of the functional réponse. *Américan Naturalist* 111, 289-300.
- [69] Solomon, M. E. 1949. The natural control of Animal populations. *Journal of Animal Ecology* 18 1-35
- [70] Sokol, W. ,&J. A. Howell. 1981 Kinetrcs of phénol oxidation by washed cells. *Biotechnology and Bioengineering* 23:2039-2049.
- [71] Senkyrik, M. and Guenther, R., Boundary value problems with discontinuities in the spacial variable, *J.Math.Anal. Appl.* 193 (1995) , 296-305..
- [72] Stalski GT: Gilliam JF.Functional réponses with predator interférence: viable alternative to the Holling type II model *écology* 2011.82(11)p.p366-92
- [73] Volterra,V. Fluctuations in the abundance of aspecies considered mathematically.*Nature* 1926;118p.p558.
- [74] Volterra, V. , *Leçons sur la Théorie Mathématique De la Lutte Pour la Vie*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [75] Verhulst,P.F.138.Notice sur la loi que la population suit dans un accroissement.correspondances *Mathematiques et physiques* 10:113-121
- [76] F.VERHULST."Non Linear Differential Equations and Dynamical Systems and Chaos". Springer Verlag, 1985.
- [77] Wlosinski JH, Kaljonad ER, Effect of water levels on écosystème,an annotated bibliography, long term resource monitoring program. Technical report 96-T007;1996
- [78] Zhang ZQ, Zheng XW, Apériodic state-structure model. *Appl Math Lett* 2003;16p.p1053-61
- [79] [http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite\\_de\\_Fibonacci](http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Fibonacci)

[80] <http://ginoux.univ-tln.fr/HDS/Le%20paradoxe%20du%20mod%20E8le%20pr%20E9dateur-proie%20de%20Vito%20Volterra.pdf> (jean Marc Guinoux de l'université de Toulon).21/02/2006.