République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkäd de Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématique

MEMOIRE

Présenté

Par

SOHBI BENAZZOUZ

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

Spécialité : MATHEMATIQUES

Option : EQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Sur le Thème

ETUDE DE DECROISSANCE DE L'ENERGIE POUR CERTAINS SYSTEMES DISTRIBUES ET INEGALITES DE DIFFERENCES FINIES

Soutenue le 08/06/2013 devant le jury :

Président **:**	K. BALGHABA	Maître de conférence classe A (Oran)
Encadreur :	A. HAKEM	Professeur (Sidi Bel Abbès)
Examinateurs :	N. AMROUN	Maître de conférence classe A (Sidi Bel Abbès)
	A. BOUHASSOUN	Maître de conférence classe A (Oran)

Remerciements

Mes remerciements d'abord au bon dieu ensuite à tous ceux qui y ont contribués d'une façon ou d'une autre.

- le mémoire a été réalisé au sein de l'Institut des Sciences d'université

  ABOU BAKR BALKAID (Tlemcen) dirigé par et Pr **A. HAKEM** Professeurs (Sidi Bel Abbes) Je l'adresse mes premiers remerciements, d'abord d'avoir bien voulu diriger ma recherche et m'a confié un sujet d'étude particulièrement intéressant. Je tiens à adresser ma profonde reconnaissance.

- Je remercie particulièrement Monsieur **K. BALGHABA** Maître de conférence classe A (Oran), qui a accepté de présider le jury et surtout pour le temps qu'il a accepté de consacrer aux nombreux problèmes qui se sont posés tout au long de ce travail.

- Je remercie très vivement Monsieur **N. AMROUN** Maître de conférence classe A (Sidi Bel Abbes) qui a bien voulu accepter d'être examinateur de ma thèse et de participer au jury. Je le remercie sincèrement.

- Je suis très honorée que **A. BOUHASSOUN** Maître de conférence classe A (Oran) d'être un examinateur et de participer au jury. Un grand merci**.**

- Il m'est particulièrement agréable de remercier Monsieur

  B. TEBTI,doyen de la faculté des sciences d'université de Tlemcen Pour l'aide irremplaçable qu'il m'a apporté, qu'il trouve ici l'expression da ma profonde gratitude.

- Je tiens également à remercier toutes les personnes qui m'ont permis de passer des bons moments , plus particulièrement aux Pr **A. BENAISSA** Professeurs (Sidi Bel Abbes) et Pr **M. BOUCHEKIF** (Tlemcen)

- Une page ne serait pas suffisante pour exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes que j'ai côtoyées au cours de ces années.

…..et que ceux que j'ai oublié me pardonnent.

- mille pensées très affectueuses pour mes proches ainsi que pour ma généreuse belle famille.

<u>DEDICACE</u>

A la mémoire de mon frère AHMED

A ma très chère mère

A mon père

A ma grand mère

A mes frères

A mon cher épouse

A mon fils

A tous ceux que je porte dans mon cœur. Que dieu les garde.

Contents

Chapitre 1

Introduction

Ce travail est consacré à l'étude de certains problèmes d'évolution nonlinéaires de type hyperbolique. On s'intéresse à l'existence globale en temps et à la stabilisation (stabilisation de systèmes vibrants). Étant donné un système vibrant (par exemple une corde), on mesure à tout instant t les vibrations à l'aide de l'énergie, qu'on note $E(t)$. On suppose que ce système est soumis à un terme d'amortissement, qui fait décroître l'énergie. Notre problème est de déterminer le comportement asymptotique de l'énergie: étudier sa limite (c'est-à-dire déterminer si elle est nulle ou pas), et, si cette limite est nulle, donner une estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie vers zéro. Tout cela dépend des hypothèses sur le terme d'amortissement.

Divers aspects de ce problème ont été étudiés par de nombreux mathématiciens ces dernières années: sous diverses hypothèses sur le terme d'amortissement, des propriétés de stabilité asymptotique forte, c'est-à-dire

$$E(t) \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to +\infty,$$

ont été prouvées par C.M. Dafermos **[15]**, A. Haraux **[29]**, J.E. Lagnese **[39]**, I. Lasiecka et R. Triggiani **[41]**, F. Conrad et M. Pierre **[14]**, E. Zuazua **[66]**,

des propriétés de stabilisation uniforme, c'est-à-dire

$$\forall t \geq 0, E(t) \leq Cf(t),$$

où C est une fonction constante par rapport à t et qui dépend de la norme des données initiales, et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue décroissante qui satisfait

$$f(t) \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to +\infty,$$

ont été démontrées pour des systèmes linéaires ou non linéaires, par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch **[3]** (en utilisant des techniques d'analyse micro-locale), par V. Komornik **[37]**, J.E. Lagnese et J.L. Lions **[40]**, F. Conrad et B. Rao **[13]**, E. Zuazua **[66]** (avec la méthode des multiplicateurs et la construction de fonction de Lyapunov), I. Lasiecka et D. Tataru **[42]**(en combinant les deux méthodes).

des propriétés de stabilité asymptotique faible, c'est-à-dire

$$(u(t), u'(t)) \rightharpoonup 0 \quad \text{quand} \quad t \to +\infty,$$

dans un certain espace de Hilbert H, ont aussi été obtenues, notamment par M. Slemrod **[63]**, J. Vancostenoble **[65]**.

Notre travail se compose de quatre chapitres

- Dans le chapitre un, on commence par des rappels de certains résultats sur les espaces de Sobolev, la convergence faible étoile et la méthode de Galerkin.

- Dans le chapitre deux, on rappelle les inégalités de différences finies et quelques extenstions en particulier les inégalités intégrales avec poids qui sont utiles pour étudier la stabilité. Ces inégalités ont été introduites par M. Nakao **[50]**, A. Haraux **[29]** et V. Komornik **[37]** et ensuite généralisées par P. Martinez **[44]** et A. Guesmia **[25]**.

- Dans le chapitre trois, on considère l'équation des ondes non dissipative avec un terme de source de la forme

  $$u'' - \Delta u + h(\nabla_x u) + g(u') + f(u) = 0,$$

  On prouvera l'existence globale de la solution dans $H_0^1(\Omega)$ dans le cas où h est nonlinéaire et linéaire et g est linéaire ou de forme générale. Dans le cas où h est linéaire, on donne une estimation de la vitesse de décroissance pour g de forme générale. La preuve d'existence est basée sur la méthode de Galerkin avec le conpect des ensembles stables. On établit aussi une estimation de la vitesse de décroissance de lénergie associée aux solutions à l'aide des inégalités de différences finies de Nakao lorsque le terme dissipatif est de forme polynomiale et les inégalités intégrales lorsque le terme dissipatif est de forme générale non nécessairement de forme polynomiale.

- Dans le chapitre quatre, on considére l'équation des ondes non dissipatif à coefficients variables dans un domaine non borné. On prouve la stabilité en utilisant les inégalités intégrales.

Chapitre 2

Préliminaires

Avant d'entamer ce travail, on introduit les notations suivantes:
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les points génériques de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ sont respectivement notés t et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et on notera $u_t(t,x) = \partial u(t,x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ la dérivée de u par rapport à la variable temporelle t et $\partial_i u(t,x) = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)$ les dérivées par rapport aux variables spatiales.
Pour un multi-indice $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ dans $\mathbb{N}$ nous noterons $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\ldots\partial_3^{\alpha_n}$ la dérivée d'ordre α et la longueur de α est notée $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

Lemme 1 (de Gronwall) *Soient α, $\beta \in L^1[0,T]$ tels que α, $\beta \geq 0$ et soit C une constante ≥ 0. Soit g une fonction continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant*

$$0 \leq g(s) \leq C + 2\int_0^s \alpha(r)\sqrt{g(r)}\,dr + \int_0^s \beta(r)g(r)\,dr \ (0 \leq s \leq T).$$

Alors

$$g(t) \leq \left(\sqrt{C} + \int_0^t \alpha(s)\,ds\right)^2 e^{\left(\int_0^t \beta(s)\,ds\right)} \ \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

2.1 Espaces fonctionnels

On appelle $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions à valeurs réelles définies sur Ω, qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact dans Ω.
Introduisant maintenant quelques espaces fonctionnels fondamentaux.
Pour $1 \leq p \leq \infty$, on appelle $L^p(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables sur Ω telles que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty \quad \text{pour} \quad p < +\infty \\ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup_\Omega |f(x)| < +\infty \qquad\qquad \text{pour} \quad p = +\infty \end{aligned}$$

Cet espace est un espace de Banach pour la norme $f \longrightarrow \|f\|_{L^p}$ que nous allons noter $\|f\|_p$
L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Dans la suite nous travaillerons essentiellement dans un cadre Hilbertien, c'est-à-dire avec des espaces de type L^2, mais nous aurons ici ou là l'occasion d'utiliser les espaces L^p.
Nous sommes à présent en mesure d'introduire les espaces de Sobolev.
Pour $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty[$, on définit l'espace de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega); \partial^\alpha v \in L^p(\Omega). \ \ \forall \alpha; |\alpha| \leq k\} \ ,$$

les dérivées étant bien entendues prises au sens des distributions. Muni de la norme

$$v \longrightarrow \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} , \qquad \text{pour} \qquad p < +\infty$$

ct

$$v \longrightarrow \|v\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)} \ , \qquad \text{pour} \qquad p = +\infty$$

$W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.
L'espace $W^{k,2}(\Omega)$, que nous noterons $H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

On introduit maintenant les espaces de fonctions à valeurs dans X (Espace de Hilbert séparable).
Une fonction $f : [0, T) \longrightarrow X$ est dit étagée si elle est de la forme

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} v_i \chi_{E_i}(t)$$

où les v_i sont des éléments de X, les E_i une partition mesurable (pour la mesure de Lebesgue) de $[0, T]$ et χ_{E_i} désigne la fonction caractéristique de E_i.
On dit qu'une fonction $f : [0, T) \longrightarrow X$ est mesurable, s'il existe une suite de fonctions étagées f_n telle que $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_X = 0$ presque par tout dans $[0, T]$.
Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on appelle $L^p(0, T; X)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables de $[0, T]$ dans X telles que

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|^p_X dx \right)^{1/p} < +\infty \quad \text{pour} \quad p < +\infty$$

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \sup_{t \in [0,T]} \|f(x)\|_X < +\infty \qquad \text{pour} \qquad p = +\infty$$

Cette définition a bien un sens car il est facile de voir que si f est mesurable a valeurs dans X, alors $\|f\|_X$ est mesurable a valeurs réelles. L'espace $L^p(0,T;X)$ est un espace de Banach pour la norme définie ci-dessus. il est séparable si $1 \leq p \leq \infty$. En fait, $C([0,T];X)$ est dense dans $L^p(0,T;X)$ pour ces mêmes valeurs de p.
L'espace $L^2(0,T;X)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f,g)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (f(t),g(t))_X dt.$$

Notons enfin que $L^\infty(0,T;X)$ est le dual d'un espace séparable.

Nous pouvons maintenant définir les espaces de Sobolev a valeurs dans X . Pour $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$, on pose:

$$W^{k,p}(0,T;X) = \left\{ v \in L^p(0,T;X); v^i \in L^p(0,T;X). \ \ \forall i \leq k \right\} \ ,$$

les dérivées étant prises au sens des distributions. On muni $W^{k,p}(0,T;X)$ de la norme

$$\begin{aligned} \|v\|_{W^{k,p}(0,T;X)} &= \left(\sum_{i=0}^{k} \|v^i\|^p_{L^p(0,T;X)} \right)^{1/p} , \ \text{pour} \quad p < +\infty \\ \|v\|_{W^{k,\infty}(0,T;X)} &= \sum_{i=0}^{k} \|v^i\|_{L^\infty(0,T;X)} , \qquad \text{pour} \quad p = +\infty \end{aligned}$$

qui est un espace de Banach. L'espace $W^{k,2}(0,T;X)$ que nous noterons $H^k(0,T;X)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v)_{H^k(0,T;X)} = \sum_{i=0}^{k} \int_0^T \left(u^i(t), v^i(t) \right)_X dt \ .$$

$f * g$ est le produit de convolution.
$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} =$ Laplacien de u
$\nabla u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots\ldots. \dfrac{\partial u}{\partial x_N}) =$ grad u.
$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_1} = 0\}$, où $H^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev classique.
$C^k(\Omega)$ (k est un entier positif) est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω. On note que: $||.||_2 = ||.||_{L^2(\Omega)}$.

Theorème 2 *Soit $1 \leq p \leq n$, alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$$

où p^* est donné par $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ (quand $p = n, p^* = \infty$) et il existe une constante $C = C(p,n)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Corollaire 3 *Soit $1 \leq p < n$, alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

avec injection continue.

Pour le cas $p = n$, on a

$$W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n) \quad \forall q \in [n, +\infty[$$

Theorème 4 *Soit $p > n$, alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

avec injection continue. De plus pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p} \text{ p.p. } x, y \in \mathbb{R}^n$$

avec $\alpha = 1 - n/p$ et C est une constante qui dépend seulement de p et n.

Corollaire 5 *Soient $m \geq 1$ un entier et $1 \leq p < \infty$. On a*

$$\begin{array}{l} si \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0, \text{ alors } W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n) \text{ où } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}. \\ si \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0, \text{ alors } W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n), \forall q \in [p, +\infty[. \\ si \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0, \text{ alors } W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

avec injection continue.

On suppose dans la suite que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné ou bien $\Omega = \mathbb{R}^n_+$.

Corollaire 6 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. on a*

$$\begin{array}{l} si\ 1 \leq p < n, \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) \text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}. \\ si\ p = n, \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[. \\ si\ p > n, \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \end{array}$$

avec injection continue.
De plus, si $p > n$, on a pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ p. p. } x, y \in \Omega$$

avec $\alpha = 1 - \frac{n}{p} > 0$ et C est une constante qui dépend seulement de p, n et Ω. En particulier

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}).$$

Corollaire 7 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 avec $\Gamma = \partial\Omega$ et $1 \leq p \leq \infty$. On a*

$$\begin{array}{l} \text{si } p < n, \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \forall q \in [1, p^*[\text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}. \\ \text{si } p = n, \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[. \\ \text{si } p > n, \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \end{array}$$

avec injection compact.

Remarque 8 *En particulier, on a*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

avec injection compact pour $1 \leq p \leq \infty$ et pour $p \leq q < p^*$.

Definition 9 *Soit $1 \leq p < \infty$, on définit*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \equiv \overline{C_0^\infty}(\Omega) \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega).$$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite de $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach separable et reflexif si $p > 1$.

Remarque 10 *On constate que $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ grâce à la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Lemme 11 (Sobolev-Poincaré inequality) *Soit q un nombre réel avec $2 \leq q < +\infty$ ($n = 1, 2$) ou $2 \leq q \leq 2n/(n-2)$ ($n \geq 3$), alors il existe une constante C_* qui dépend de q et Ω $C_* = C(\Omega, q)$ telle que*

$$\|u\|_q \leq C_* \|\nabla u\|_2 \quad \text{for} \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

2.1.1 Convergence faible et convergence faible étoile

Proposition 12

Soit X un espace de Banach reflexif, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite bornée dans X, alors il est possible d'extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge faiblement dans X,ie:

$$\forall f \in X', (f, x_{n_k})_{X'\times X} \longrightarrow (f, x)_{X'\times X} \quad \text{quand} \quad k \longrightarrow +\infty$$

Proposition 13

Soit X un espace de Banach réfléxif. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de X, on suppose:

i) $\|x_n\| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}^*$; *c étant une constante positive.*

ii) L'ensemble des points d'accumulation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour la topologie faible est réduite à $\{x\}$.

Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge faiblement vers* x *dans* X.

Proposition 14
Soit X *un espace normé séparable et soit* X' *son dual muni de la norme dual* $\|.\|_*$. *Considérons* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite bornée dans* X'. *Alors il est possible d'extraire de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une sous-suite* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ *telle que* $x_{n_k} \longrightarrow x$ *quand* $k \longrightarrow +\infty$ *dans* X' *muni de la topologie faible étoile c'est-à-dire:*

$$\forall f \in X, (x_{n_k}, f)_{X'\times X} \longrightarrow (x, f)_{X'\times X} \text{ quand } k \longrightarrow +\infty$$

Proposition 15
Soit X *un espace de Banach (non nécessairement réflexif) séparable. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite bornée d'éléments de* X'. *On suppose que l'ensemble des points d'accumulation de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *pour la topologie faible étoile est réduite à* $\{x\}$. *Alors:* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* x *dans X' faible étoile.*

Theorème 16 *Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach. Soit* T *un opérateur linéaire et continu de* X *dans* Y. *Alors* T *est continu de* X *muni de la topologie faible dans* Y *muni de la topologie faible. Et réciproquement.*

2.2 Problèmes d'évolution du second ordre

1- **Position du problème**

1.1- **Données spatiales**

Soient V et H deux espaces de Hilbert réels vérifiant les mêmes conditions que dans C

1.2- **Famille de formes** $a(t;u,v)$

Soit $a(t;u,v)$ une famille de formes bilinéaires symétriques sur V, telles que

i) la fonction $t \longmapsto a(t;u,v)$ est $\forall u, v \in V$, une fois continûment différentiable dans $[0,T]$, $T < +\infty$

ii) $a(t;v,v) + \lambda|v|^2 \geq \alpha\|v\|^2, \alpha > 0, \forall v \in V, \lambda > 0.$

1.3- **Famille d'opérateurs** $A(t)$

On définit la famille d'opérateurs $A(t)$ de V dans V' par

i) la fonction $t \longmapsto a(t;u,v)$ est $\forall u, v \in V$, une fois continûment différentiable dans $[0,T], T < +\infty$

ii) $a(t;v,v) + \lambda|v|^2 \geq \alpha\|v\|^2, \alpha > 0, \forall v \in V, \lambda > 0.$

1.4- Formulation du problème

On se donne $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ et l'on considère le problème

$$(2.1) \qquad \begin{cases} A(t)u(t) + u''(t) = f(t) \\ u(0) = u_0 \\ u'(t) = u_1 \end{cases}$$

Le problème (1) peut être formulé de la façon suivante

$$(Pr) \qquad \begin{cases} Trouver \quad u \quad verifiant \\ u \in C([0,T];V), u' \in C([0,T];H) \\ Pour \quad toutv \in V, ona: \\ a(t,u(t),v) + (u''(t),v) = (f(t),v) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[) \\ u(0) = u_0 \in V \\ u'(t) = u_1 \in H \end{cases}$$

Le problème (Pr) peut être résolu par la méthode classique de Galerkin dont on rappelle maintenant les points essentiels.

2- Méthodes d'approximation de Faedo-Galerkin

On peut la résumer en trois parties principales:

2.1-) Formulation du problème approché

Soit (V_m) une famille de sous espaces de V, de dimensions finies, denses dans V,
On note d_m: la dimension de V_m. Soit $\{w_{jm}\}$ une base de V_m.
On définit la solution (u_m) du problème approché (Pm) qui admet une unique

solution par

$$(Pm)\begin{cases} Trouver \quad u_m(t)=\sum_{j=1}^{d_m} g_m(t)w_{jm} \\ verifiant \quad u_m\in C([0,T];V_m,u'_m\in C([0,T];V_m),u_m\in L^2(0,Y;V_m) \\ telle \quad que \\ \qquad a(t,u_m(t),x_{jm})+(u''_m(t),w_{jm})=(f(t),w_{jm}),1\le j\le d_m, \\ \qquad u_m(0)=u_m^0=\sum_{i=1}^{d_m}\xi_{im}w_i \\ \qquad u'_m(0)=u_m^1=\sum_{i=1}^{d_m}\eta_{im}w_i \end{cases}$$

où ξ_{im} et η_{im} sont telles que

$$\sum_{i=1}^{d_m}\xi_{im}w_i \longrightarrow u_0 \quad \text{dans} \quad V \quad \text{losque} \quad m\longrightarrow +\infty$$

$$\sum_{i=1}^{d_m}\eta_{im}w_i \longrightarrow u_{01} \quad \text{dans} \quad V \quad \text{losque} \quad m\longrightarrow +\infty$$

Lemme 17 *(***Gronwall***)*
Soit $T>0$, $\lambda\in L^1(0,T)$, $\lambda\ge 0$ p.p et $c_1,c_2\ge 0$, et soit $\varphi\in L^1(0,T)$, $\varphi\ge 0$ p.p tel que $\lambda\varphi\in L^1(0,T)$ et

$$\varphi(t)\le c_1+c_2\int_0^T\lambda(s)\varphi(s)ds, \quad presque\ tout \quad t\in(0,T).$$

Alors, on a:

$$\varphi(t)\le c_1exp(c_2\int_0^T\lambda(s)ds), \quad presque\ tout \quad t\in(0,T).$$

2.2) **Estimation à priori et convergence**

En utilisant l'estimation

$$\|u_m(t)\|^2+\|u'_m(t)\|^2\le C(\|u_m^0\|^2+|u_m^0|+\int_0^T|f(\sigma)|^2d\sigma),0\le t\le T,$$

et d'aprés lemme de Gronwall, on montre que la solution $u_m(t)$ du problème approchée (P_m) converge vers la solution u du problème (P). L'unicité dans le problème (P) implique que u est bien la solution cherchée.

2.3) **Remarque** En posant $\mathcal{H} = V \times \mathrm{H}$, le problème (1) s'écrit alors:

$$(P1) \qquad \begin{cases} U'(t) + A(t)U(t) = F(t) \quad dans \quad [0,T] \\ \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

Chapitre 3

Quelques inégalités et extension

3.1 Inégalités de Différence:

3.1.1 Inégalités de Différence de Nakao:

On rappelle dans ce chapitre quelques inégalités connues et appliquées à l'estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie de certains problèmes d'évolution.

Theorème 18 *Soit $\Phi(t)$ une fonction positive sur $[0,\infty)$, telle que satisfying*

$$\sup_{s\in[t,t+1]} \Phi(s)^{1+\alpha} \leq c_0\,(1+t)^r\,(\Phi(t)-\Phi(t+1))+g(t) \tag{1.1}$$

où c_0 est une constante positive et $g(t)$ est fonction positive. Alors, on a:

(i) *Si $\alpha>0, r=1$ et $\lim\limits_{t\to\infty}(\log t)^{1+\frac{1}{\alpha}}g(t)=0$, alors*

$$\Phi(t)\leq c_1(\log(t+1))^{-\frac{1}{\alpha}},$$

(ii) *Si $\alpha>0, 0\leq r<1$ et $\lim\limits_{t\to\infty}t^{(1-r)(t+1/\alpha)}g(t)=0$, alors*

$$\Phi(t)\leq c_2t^{-(1-r)/\alpha},$$

(iii) *Si $\alpha=0, r=1$ et $g(t)\leq const\ t^{-\theta-1}$ alors*

$$\Phi(t)\leq c_3(1+t)^{-\theta}\ \textit{avec}\ \theta^{'}=\min(c_0^{-1},\theta),$$

(iv) *Si* $\alpha = 0, 0 \leq r < 1$ *et* $g(t) \leq$ *const* $t^{\frac{1}{\theta'}} \exp\left[-\frac{1}{(c_0+1)(1-r)} t^{1-r}\right]$, *où* c_i $(i = 1, 2, ...)$ *sont des constantes qui dépendent de* $\Phi(0)$.

Preuve:
preuve de (i) Soit $\psi(t) = \Phi(t) + \nu(\log(1+t))^{-1/\alpha}$ où ν est un nombre positif. Alors par (1.1) on a

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{aligned} \sup_{s\in[t,t+1]} \psi(s)^{1+\alpha} &\leq 2^{1+\alpha}\left\{\max_{s\in[t,t+1]} \Phi(s)^{1+\alpha} + \nu^{1+\alpha}(\log(1+t))^{-1(1+\alpha/\alpha}\right\} \\ &\leq const.\{(1+t)(\psi(t) - \psi(t+1)) + I_1(t)\} \end{aligned}$$

où

$$I_1(t) = (1+t)\left\{\nu(\log(t+2))^{-1/\alpha} - \nu(\log(t+1))^{-1/\alpha}\right\} + g(t) + \nu^{1+\alpha}(\log(t+1))^{-(\alpha+1)/\alpha}.$$

Montrons que $I_1(t) \leq 0$ pour t assez grand.

$$I_1(t) = \nu(\log(t+1))^{-1-\frac{1}{\alpha}}\left[(1+t)\log(t+1)\left\{\left(\frac{\log(t+2)}{\log(t+1)}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right\} + \frac{1}{\nu}(\log(t+1))^{1+\frac{1}{\alpha}}g(t) + \nu^\alpha\right].$$

Comme

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{\log(t+2)}{\log(t+1)}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 &= \left(\tfrac{\log(t+2)-\log(t+1)}{\log(t+1)} + 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \\ &\leq -(2\alpha)^{-1}(\log(t+2) - \log(t+1))(\log(t+1))^{-1} \end{aligned}$$

pour t large, on a

$$I_1(t) \leq \nu(\log(t+1))^{-1-\frac{1}{\alpha}}\left\{-(2\alpha)^{-1}(t+1)\log((t+2)/t+1)) + \nu^{-1}(\log(t+1))^{1+\frac{1}{\alpha}}g(t) + \nu^\alpha\right\}$$

pour t large.

D'après l'hypothèse sur $g(t)$ et puisque

$$\lim_{t\to\infty}(t+1)\log\left(\frac{t+2}{t+1}\right) = 1.$$

Alors, il existe $T_1 > 0$ tel que pour $t \geq T_1$, on a

$$I_1(t) \leq \nu(\log(t+1))^{-1-\frac{1}{\alpha}}(-(4\alpha)^{-1} + \frac{1}{2}\nu^\alpha).$$

On choisit $\nu < (2\alpha)^{-1/\alpha}$ et on déduit que

$$I_1(t) < 0$$

pour $t \geq T_1$. Ainsi pour $t > T_1$ et ν assez petit

$$\text{(1.3)} \qquad \sup_{s\in[t,t+1]} \psi(s)^{1+\alpha} \leq c_0'(1+t)(\psi(t) - \psi(t+1)).$$

Posons $\psi(s)^{-\alpha} = w(s)$, on trouve:

$$
(1.4)\quad \begin{array}{rcl} w(t) - w(t+1) & = & \displaystyle\int_0^1 -\frac{d}{d\theta}(\theta\psi(t) + (1-\theta)\psi(t+1))^{-\alpha} d\theta \\ & = & \displaystyle -\alpha \int_0^1 \{\theta\psi(t) + (1-\theta)\psi(t+1)\}^{-1-\alpha} d\theta(\psi(t) - \psi(t+1)) \\ & \leq & -\alpha c_0^{'-1}(1+t). \end{array}
$$

Par conséquent, pour un entier n tel que $n + T_1 \leq t < n + 1 + T_1$, on a

$$
\begin{array}{rcl} w(t-n) - w(t) & \leq & -\alpha c_0^{'-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(t-i)} \\ & \leq & \displaystyle -\alpha c_0^{'-1} \int_0^{n-1} \frac{1}{t-x} dx \\ & \leq & -\alpha c_0^{'-1}(\log t - \log(t+1-n)) \end{array}
$$

et donc

$$
w(t) \geq \inf_{s\in[0,1]} w(s) + \alpha c_0^{'-1} \log t - \alpha c_0^{'-1} \log(T_1 + 2)
$$

ce qui donne

$$
(1.5)\quad \Phi(t) < \psi(t) \leq (\inf_{s\in[T_1,T_1+1]} w(s) + \alpha c_0^{'-1} \log t - \alpha c_0^{'-1} \log(T_1+2))^{\frac{-1}{\alpha}}
$$

D'après (1.1), on a pour $t \leq T_1$

$$
(1.6)\quad \Phi(t) \leq \max\left\{g(t), (c_0\Phi(0) + g(0)^{1/(1+\alpha)}\right\}.
$$

Finalement, d'après (1.5) and (1.6), on déduit (i) . Ceci complete la preuve.
Preuve of(ii). Posons

$$
\psi(t) = \Phi(t) + \nu t^{-(1-r)/\alpha}.
$$

Alors, de même que (1.2), on a

$$
\sup_{s\in[t,t+1]} \psi(s)^{1+\alpha} \leq 2^{1+\alpha} \{c_0(1+t)^r(\psi(t) - \psi(t+1)) + I_2(t)\}
$$

où

$$
I_2(t) = \nu t^{-(1-r)/\alpha} \left\{c_0(1+t)^r \left(\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-(1-r)/\alpha} - 1\right) + \nu^{-1} t^{(1-r)/\alpha} g(t) + \nu^\alpha t^{-(1-r)}.\right\}
$$

En utilisant l'hypothèse sur $g(t)$ et l'inégalité

$$
\left(\frac{t+1}{t}\right)^{-(1-r)/\alpha} - 1 \leq -\frac{(1-r)}{2\alpha} t^{-1}
$$

pour t large, on a

$$
\begin{array}{rcl} I_2(t) & \leq & \nu t^{-(1-r)/\alpha + r - 1} \left\{-c_0(1+t^{-1})^r(1-r)/2\alpha + \frac{1}{2}\nu^\alpha\right\} \\ & < & 0 \end{array}
$$

pour t large, où on a choisit ν assez petit. On déduit qu'il existe $T_2 > 0$ tel que si $T \geq t_2$

$$\sup_{s\in[t,t+1]} \psi(s)^{1+\alpha} \leq 2^{1+\alpha} c_0(1+t)^r(\psi(t) - \psi(t+1))$$

et en suivant le même argument dans la preuve de (i), on obtient

$$\begin{array}{rcl} w(t-n) - w(t) & \leq & -\alpha c_0^{'-1} \int_0^{n-1} \frac{1}{(t-x)^r} dx (c_0^{'} \equiv 2^{1+\alpha} c_0) \\ & \leq & \alpha c_0^{'-1} (1-r)^{-1} \left\{ (t-n+1)^{1-r} - t^{1-r} \right\} \end{array}$$

pour un entier positif n, ceci complète la preuve de (ii).

Preuve de (iii) et (iv). La démonstration de (iii) et (iv) est la même. On donne seulement la preuve de (iv). Par (1.1) on a

$$\Phi(t+1) \leq \frac{c_0(1+t)^r}{c_0(1+t)^r+1} \Phi(t) + g(t)$$

et par suite,

$$\begin{array}{rcl} \Phi(t+1) & \leq & \Pi_{i=0}^{n} \frac{c_0(t+1-i)^r}{c_0(t+1-i)^r+1} \Phi(t-n) + \sum_{j=0}^{n} \Pi_{i=0}^{j} \frac{c_0(t+1-i)^r}{c_0(t+1-i)^r+1} g(t-j) \\ & \equiv & I_1 + I_2 \end{array}$$

Fixons l'entier n tel que $n \leq t < n+1$. Alors on a

$$\begin{array}{rcl} \log(I_1) & \leq & -\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{c_0(t+1-i)^r+1} + \sup\limits_{s\in[0,1]} \log \Phi(s) \\ & \leq & -\int_0^{n-1} \frac{1}{c_0(t+1-x)^r+1} dx + \sup\limits_{s\in[0,1]} \log \Phi(s) \end{array}$$

(on peut supposer $\sup\limits_{s\in[0,1]} \Phi(s) > 0$)

$$\leq -\frac{1}{(c_0+1)(1-r)}(1+t)^{1-r} + \frac{1}{(c_0+1)(1-r)}(t+1-n)^{1-r} + \log\left\{c_0\Phi(0) + g(0)\right\}^{1/(1+\alpha)}.$$

On déduit que

$$I_1 \leq c_5 \exp\left\{-\frac{1}{(c_0+1)(1-r)}(1+t)^{1-r}\right\}.$$

Par le même argument, on a

$$\begin{array}{rcl} I_2 & \leq & \sum_{i=0}^{n-1} \exp\left\{-\int_0^j \frac{1}{c_0(t+1-x)^r+1} dx\right\} g(t-j) \\ & \leq & c_6 \exp\left\{-\frac{1}{(c_0+1)(1-r)}(1+t)^{1-r}\right\}. \end{array}$$

Ceci complete la preuve.

3.1.2 Extension des inégalités de M. Nakao:

On etend l'inégalité de Nakao dans le cas générale.

Lemme 19 *Soient* $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction décroissante et* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction strictement croissante de classe* C^1 *telles que*

$$f(0) = 0 \text{ and } f(t) \to +\infty \text{ quand } t \to +\infty.$$

Supposons qu'il existe $K_0 > 0$ *tel que*

$$\max_{s\in[f(t),f(t)+1]} E(f^{-1}(s)) \leq K_0(E(t) - E(f^{-1}(f(t)+1))). \tag{3.1}$$

Alors, on a les estimations suivantes

$$E(t) \leq Ce^{-\omega f(t)},$$

Preuve

Si $K_0 \leq 1$, l'inégalité est une conséquence directe de (3.1):

Si $K_0 > 1$, on pose $g(t) = E(f^{-1}(t))$, par conséquent l'inégalité (3.1) devient

$$\max_{s\in[f(t),f(t)+1]} g(s) \leq K_0(g(f(t)) - g((f(t)+1))) \tag{3.2}$$

cela implique

$$g((f(t)+1)) \leq \frac{K_0 - 1}{K_0} g(f(t)) \tag{3.3}$$

comme $f(t) > 0$; il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $n < f(t) < n+1$; d'où, de (3.3), on a

$$\begin{aligned} g(f(t)) &\leq \left(\frac{K_0 - 1}{K_0}\right)^n g(f(t) - n) \\ &\leq \left(\frac{K_0}{K_0 - 1}\right)^{-n} g(f(t) - n) \\ &\leq \left(\frac{K_0}{K_0 - 1}\right)^{-f(t)} g(f(t) - n) \\ &\leq M\left(\frac{K_0}{K_0 - 1}\right)^{-f(t)}. \end{aligned}$$

Comme $E(t) = g(f(t))$, on obtient de l'inégalité ci dessus

$$E(t) \leq \left(\frac{K_0}{K_0 - 1}\right)^{-f(t)} = e^{-\omega f(t)}$$

Il est clair que la précédente inégalité implique l'ingalité de Nakao pour $f(t) = t$.

3.2 Nouvelles inégalités intégrales

Lemme 20 ([37]) *Soit $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe deux constantes $\sigma \geq 0$ et $\omega > 0$ tels que E satisfait la relation*

$$\int_S^{+\infty} E^{1+\sigma}(t)\,dt \leq \frac{1}{\omega} E^\sigma(0)E(S), \quad 0 \leq S < +\infty.$$

Alors

$$\begin{array}{rcll} E(t) & \leq & E(0)\left(\dfrac{1+\sigma}{1+\omega\sigma t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} & \forall t \geq 0, \quad \text{si} \quad \sigma > 0 \\ E(t) & \leq & E(0)e^{1-\omega t} & \forall t \geq 0, \quad \text{si} \quad \sigma = 0, \end{array}$$

Lemme 21 ([44]) *Soit $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante et $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante de classe C^1 telle que*

$$\phi(0) = 0 \quad \textit{et} \quad \phi(t) \to +\infty \quad \textit{quand} \quad t \to +\infty.$$

Supposons qu'il existe deux constantes $\sigma \geq 0$ et $\omega > 0$ tels que

$$\int_S^{+\infty} E^{1+\sigma}(t)\phi'(t)\,dt \leq \frac{1}{\omega} E^\sigma(0)E(S). \quad 0 \leq S < +\infty, \tag{3.4}$$

Alors

$$E(t) \leq E(0)\left(\frac{1+\sigma}{1+\omega\sigma\phi(t)}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \forall t \geq 0, \quad \textit{si} \quad \sigma > 0, \tag{3.5}$$

$$E(t) \leq cE(0)e^{1-\omega\phi(t)} \forall t \geq 0, \quad \textit{si} \quad \sigma = 0. \tag{3.6}$$

On présente maintenant une généralisation des deux Lemmes 20 et 21 au cas non dissipatif (voir [**23**]). Ceci améliore dans certains cas et généralise au cas non dissipatif tous les cas considérés.

On présente dans ce chapitre des inégalités intégrales nouvelles introdute par Guesmia (voir [**23**]) permettant d'obtenir une estimation sur le comportement à l'infini d'une fonction positive non nécessairement décroissante. Avant d'énonces le premier résultat principal de ce chapitre, on introduit une fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dont l'intérêt est d'obtenir de meilleures estimations de stabilité en minimisant, par rapport à $h(t)$.
Soient r un réel positif, α un réel strictement positif, $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues. On note: $\tilde{\lambda}(t) = \int_0^t \lambda(\tau)d\tau$ et on trouve que

$$\int_0^{+\infty} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(t)}dt = +\infty \tag{3.7}$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$ fixé, on définit la fonction $I_s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par:

$$I_s(t) = (\omega(s))^{r+1}\int_s^t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}d\tau - e^{(r+1)\tilde{\lambda}(s)}\Big((\alpha\omega(0))^r + r\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}d\tau\Big).$$

On a: $I_s \in C^1(\mathbb{R}^+), I_s'(t) = (\omega(s))^{r+1} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(t)} > 0$,

$$I_s(0) = (\omega(s))^{r+1} \int_s^0 e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)} d\tau - e^{(r+1)\tilde{\lambda}(s)} \Big((\alpha\omega(0))^r + r \int_0^s (\omega(\tau))^{r+1} d\tau \Big) < 0$$

et, d'après (3.7), $lim_{t\to+\infty} I_s(t) = +\infty$. Donc I_s admet une seule racine dans $\mathbb{R}^{+*}$ notée $g(s)$ d'où on définit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ par:

$$I_s(g(s)) = 0, \forall s \geq 0. \tag{3.8}$$

D'une part, comme ω est continue, il en est de même pour la fonction g. D'autre part, on a:

$$I_s(s) = -e^{(r+1)\tilde{\lambda}(s)} \Big((\alpha\omega(0))^r + r \int_0^s (\omega(\tau))^{r+1} d\tau \Big) < 0,$$

d'où $g(s) > s$, et par conséquent $lim_{s\to+\infty} g(s) = +\infty$. Donc g est surjective de $\mathbb{R}^+$ sur $[g(0), +\infty[$.

Soit maintenant $t \in]g(0), +\infty[$ fixé. On définit la fonction $J_t : [0, t] \to \mathbb{R}^+$ par:

$$J_t(s) = \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_s^t e^{\tilde{\lambda}(\tau)} d\tau \Big) e^{\int_0^s \omega(\tau) d\tau} & \text{si} \quad r = 0, \\ \Big(e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)} d\tau \Big) \Big((\alpha\omega(0))^r + r \displaystyle\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1} d\tau \Big)^{\frac{1}{r}} & \text{si} \quad r > 0. \end{cases}$$

La fonction J_t est positive et dérivable sur $[0, t]$, et on a:

$$J_t'(s) = \begin{cases} I_s(t) e^{\int_0^s \omega(\tau) d\tau} & \text{si} \quad r = 0, \\ I_s(t) \Big((\alpha\omega(0))^r + r \displaystyle\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1} d\tau \Big)^{\frac{1}{r}-1} & \text{si} \quad r > 0. \end{cases}$$

Comme $J_t'(s)$ est de même signe que $I_s(t)$, alors $J_t' > 0$ à droite de 0 (car $t > g(0)$) et $J_t' < 0$ à gauche de t (car $g(s) > s$). Donc J_t atteint son maximum sur $[0, t]$ au moins en un point $s_0 \in]0, t[$ vérifiant $I_{s_0}(t) = 0$ d'où $s_0 \in g^{-1}(\{t\})$.
On définit maintenant la fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ par:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \in [0, g(0)], \\ \\ max g^{-1}(\{t\}) & si \quad t \in]g(0), +\infty[. \end{cases} \tag{3.9}$$

On a, pour tout $t > g(0)$: $h(t) \in g^{-1}(\{t\})$ et $I_{h(t)}(t) = 0$. Pour minimiser les termes à droite de (3.20) et (3.21) ci-aprés par rapport à $h(t)$, il suffit de maximiser J_t (avec $\alpha = \dfrac{1}{E(0)}$). Donc les termes à droite de (3.20) et (3.21) atteignent leur minimum en $h(t)$ pour tout $t > g(0)$.

Si ω est une constante, alors g est strictement croissante (il suffit de dériver l'égalité (3.8)), et dans ce cas-là,

$$h(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \in [0, D^{-1}(\frac{\alpha^r}{\omega})], \\ \\ g^{-1}(t) = K^{-1}(D(t)) & si \quad t \in]D^{-1}(\frac{\alpha^r}{\omega}), +\infty[. \end{cases}$$

où K et D sont les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par:

$$K(t) = D(t) + e^{(r+1)\tilde{\lambda}(t)}(rt + \frac{\alpha^r}{\omega}), \quad D(t) = \int_0^t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)} d\tau.$$

On présente maintenant une généralisation du a Guesmia du lemme 20 dans plusieurs directions en montrant le premier lemme principal suivant:

Lemme 22 *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues. Supposons qu'il existe $r \geq 0$ tels que*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_s^{+\infty} E^{r+1}(t)\, dt \leq a(s)E(s), & \forall s \geq 0, \\ E'(t) \leq \lambda(t)E(t), & \forall t \geq 0. \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Alors E vérifie, pour tout $t \geq 0$, les estimations suivantes:

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)} \omega(h(t)) e^{\tilde{\lambda}(t)-\tilde{\lambda}(h(t))} e^{-\displaystyle\int_0^{h(t)} \omega(\tau)\, d\tau} \quad si\ r = 0, \tag{3.11}$$

$$E(t) \leq \omega(h(t)) e^{\tilde{\lambda}(t)-\tilde{\lambda}(h(t))} \left(\left(\frac{E(0)}{\omega(0)} \right)^r + r \int_0^{h(t)} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau \right)^{-\frac{1}{r}} \quad si\ r > 0, \tag{3.12}$$

où $\tilde{\lambda}(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau$, h est définie par (3.9) avec $\alpha = \dfrac{1}{E(0)}$ et $\omega = \dfrac{1}{a}$.

Remarque En utilisant un changement de variables, les estimation (3.11) et (3.12) peuvent être généralisées au cas suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_s^{+\infty} \phi'(t)E^{r+1}(t)\, dt \leq a_1(s)E(s), & \forall s \geq 0, \\ E'(t) \leq \lambda_1(t)E(t), & \forall t \geq 0. \end{array} \right. \tag{3.13}$$

où $a_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sont deux fonctions continues et ϕ vérifie les mêmes hypothèses que dans le Lemme 1.1. En effet, on pose $E_1 = E \circ \phi^{-1}, a = a_1 \circ \phi^{-1}$ et $\lambda = \dfrac{\lambda_1 \circ \phi^{-1}}{\phi' \circ \phi^{-1}}$. D'après (3.13), on a:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_s^{+\infty} E_1^{r+1}(t)\, dt \leq a(s)E_1(s), & \forall s \geq 0, \\ E_1'(t) \leq \lambda(t)E_1(t), & \forall t \geq 0. \end{array} \right.$$

Preuve du Lemme 22 Si $E(s) = 0$ ou si $a(s) = 0$ pour un $s \geq 0$, la premiére inégalité de (3.10) implique que $E(t) = 0$ pour tout $t \geq s$, et dans ce cas-là, il n'y a rien à démontrer. Donc, on peut supposer que $E(t) > 0$ et $a(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ sans perte de généralité.

On pose:

$$\omega = \frac{1}{a} \text{ and } L(s) = \int_s^{+\infty} E^{r+1}(t)\, dt, \quad \forall s \geq 0.$$

On a

$$\psi(s) \leq \frac{1}{\omega(s)} E(s), \quad \forall s \geq 0. \tag{3.14}$$

La fonction ψ est positive décroissante de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant, d'après (3.20)

$$\psi'(s) = -E^{r+1}(s) \geq -(\omega(s)\psi(s))^{r+1}, \quad \forall s \geq 0.$$

alors, par intégration,

$$\psi(s) \leq \psi(0) e^{-\int_0^s \omega(\tau)} \leq \frac{E(0)}{\omega(0)} e^{-\int_0^s \omega(\tau)\, d\tau} \quad \text{si } r = 0, \tag{3.15}$$

$$\psi(s) \leq \left(\left(\frac{E(0)}{\omega(0)}\right)^r + r \int_0^{h(t)} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau \right)^{-\frac{1}{r}} \quad \text{si } r > 0. \tag{3.16}$$

Maintenant, pour tout $s \geq 0$, on pose:

$$f_s(t) = e^{-(r+1)\tilde{\lambda}(t)} \int_s^t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau, \ \forall t \geq s. \tag{3.17}$$

La fonction f_s est de classe C^1 sur $[s, +\infty[$ et strictement positive sur $]s, +\infty[$ vérifiant:

$$f_s(s) = 0 \quad \text{et} \quad f_s'(t) + (r+1)\lambda f_s(t) = 1, \quad \forall t \geq s \geq 0,$$

Donc, d'après la deuxiéme inégalité de (3.10),

$$E^{r+1}(t) \geq \partial_t (f_s(t) E^{r+1}(t)), \quad \forall t \geq s \geq 0. \tag{3.18}$$

Donc, d'après (3.18),

$$\psi(s) \geq \int_s^{g(s)} E^{r+1}(t)\, dt \geq f_s(g(s)) E^{r+1}(g(s)), \forall s \geq 0 \tag{3.19}$$

où g est définie par (3.8) avec $\alpha = \dfrac{1}{E(0)}$.

Soient maintenant $t \geq g(0)$ et $s = h(t)$ oú h est définit par (3.9) avec $\alpha = \dfrac{1}{E(0)}$. On a donc $g(s) = t$ et on déduit alors de (3.11) que, pour tout $t > g(0)$,

$$\psi(h(t)) \geq f_{h(t)} E^{r+1}(t) = \left(e^{-(r+1)\tilde{\lambda}(t)} \int_s^t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \right) E^{r+1}(t).$$

On conclut donc de (3.15) et (3.16) que, pour tout $t > g(0)$

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)} e^{\tilde{\lambda}(t)} \left(\int_{h(t)}^t e^{\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \right)^{-1} e^{-\int_0^{h(t)} \omega(\tau)\, d\tau} \quad \text{si } r = 0, \tag{3.20}$$

$$E(t) \leq e^{\tilde{\lambda}(t)} \left(\int_{h(t)}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)} \, d\tau \right)^{-\frac{1}{r+1}} \left(\left(\frac{E(0)}{\omega(0)} \right)^{r} + r \int_{0}^{h(t)} (\omega(\tau))^{r+1} \, d\tau \right)^{-\frac{1}{r(r+1)}} \text{ si } r > 0. \tag{3.21}$$

En utilisant le fait que $I_{h(t)} = I_s(g(s)) = 0$, i.e.

$$\int_{h(t)}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)} \, d\tau = (\omega(h(s)))^{-(r+1)} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(h(t))} \left(\left(\frac{E(0)}{\omega(0)} \right)^{r} + r \int_{0}^{h(t)} (\omega(\tau))^{r+1} \, d\tau \right)$$

on conclut (3.11) et (3.12) pour $t > g(0)$.

Si $t \in [0, g(0)]$, la deuxiéme inégalité de (3.10) implique

$$E(t) \leq E(0) e^{\tilde{\lambda}(t)}$$

et comme $h(t) = 0$ sur $[0, g(0)]$, $E(0)e^{\tilde{\lambda}(t)}$ coïncide avec les termes à droite de (3.11) et (3.12). Ceci achève la preuve du Lemme 22.

Lemme 23 *Sous les hypothéses du Lemme 22, E vérifie, pour tout $t > 1$, les estimations suivantes:*

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)} e^{\tilde{\lambda}(t)} \left(\int_{t-1}^{t} e^{\tilde{\lambda}(\tau)} \, d\tau \right)^{-1} e^{-\displaystyle\int_{0}^{t-1} \omega(\tau) \, d\tau} \quad \textit{si } r = 0, \tag{3.22}$$

$$E(t) \leq e^{\tilde{\lambda}(t)} \left(\int_{t-1}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)} \, d\tau \right)^{-\frac{1}{r+1}} \times$$

$$\left(\left(\frac{E(0)}{\omega(0)} \right)^{r} + r \int_{0}^{t-1} (\omega(\tau))^{r+1} \, d\tau \right)^{-\frac{1}{r(r+1)}} \quad \textit{si } r > 0, \tag{3.23}$$

Preuve. On choisit dans (3.19):

$$g(s) = s + 1, \forall s \in \mathbb{R}^{+},$$

au lieu de la racine de I_s, on obtient (3.20) et (3.21) avec $h(t) = t - 1$ pour $t > 1$. D'oú (3.22) et (3.23).

Remarque Comme $\tilde{\lambda}(t)$ est croissante, alors

$$\int_{t-1}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)} \, d\tau \geq e^{(r+1)\tilde{\lambda}(t-1)}.$$

Donc, on déduit de (3.22) et (3.23) qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $t > 1$, on a

$$E(t) \leq c e^{\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\lambda}(t-1)} e^{-\displaystyle\int_{0}^{t-1} \omega(\tau) \, d\tau} \quad \text{si } r = 0, \tag{3.24}$$

$$E(t) \leq c e^{\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\lambda}(t-1)} \left(1 + \int_{0}^{t-1} (\omega(\tau))^{r+1} \, d\tau \right)^{-\frac{1}{r(r+1)}} \quad \text{si } r > 0, \tag{3.25}$$

Lemme 24 *Sous les hypothéses du Lemme 22, E vérifie, pour tous $\epsilon \in]0,1[$ et $t > 1$, les estimations suivantes:*

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)} e^{\tilde{\lambda}(t)} \left(\int_{\epsilon t}^{t} e^{\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \right)^{-1} e^{-\int_0^{\epsilon t} \omega(\tau)\, d\tau} \quad si\ r = 0, \tag{3.26}$$

$$E(t) \leq e^{\tilde{\lambda}(t)} \left(\int_{\epsilon t}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \right)^{-\frac{1}{r+1}} \times$$

$$\left(\left(\frac{E(0)}{\omega(0)} \right)^{r} + r \int_0^{\epsilon t} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau \right)^{-\frac{1}{r(r+1)}} \quad si\ r > 0, \tag{3.27}$$

Preuve. On choisit dans (3.19):

$$g(s) = \frac{1}{\epsilon} s, \forall s \in \mathbb{R}^+,$$

au lieu de la racine de I_s, on obtient (3.20) et (3.21) avec $h(t) = \epsilon t$ pour $t > 0$. D'oú (3.26) et (3.27).

Remarque Comme $\tilde{\lambda}(t)$ est croissante, alors

$$\int_{\epsilon t}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \geq (1-\epsilon) e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\epsilon t)}.$$

Donc, on déduit de (3.26) et (3.27) qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tous $\epsilon \in]0,1[$ et $t > 1$, on a

$$E(t) \leq \frac{c}{(1-\epsilon)t} e^{\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\lambda}(\epsilon t)} e^{-\int_0^{\epsilon t} \omega(\tau)\, d\tau} \quad \text{si } r = 0, \tag{3.28}$$

$$E(t) \leq \frac{c}{((1-\epsilon)t)^{r+1}} e^{\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\lambda}(\epsilon t)} \left(1 + \int_0^{\epsilon t} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau \right)^{-\frac{1}{r(r+1)}} \quad \text{si } r > 0, \tag{3.29}$$

Comme des cas particuliers, on déduit du Lemme (3.8) les estimation suivantes:

Lemme 25 *Sous les hypothéses du Lemme 22 et si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et*

$$a(s) = c_1 e^{-c_2 s} \quad avec \quad c_1 > 0 \quad et \quad c_2 \in \mathbb{R},$$

alors il existe une constante $c > 0$ telle que E vérifie, pour tout $t > 1$, les estimations suivantes:

$$E(t) \leq c e^{-\frac{1}{c_1} t} \quad si \quad r = c_2 = 0$$

$$E(t) \leq c e^{-\frac{e^{c_2}}{c_1 c_2} e^{c_2 t}} \quad si \quad r = 0 \quad et \quad c_2 \neq 0$$

$$E(t) \leq c t^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0 \quad et \quad c_2 = 0$$

$$E(t) \leq c \left(\frac{e^{(r+1)c_2(t-1)} - 1}{c_2} \right)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0 \quad et \quad c_2 \neq \frac{-1}{r+1}.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\tilde{\lambda}(t) = \lambda t$ et $\omega(s) = \frac{1}{c_1}e^{c_2 s}$, et d'appliquer (3.24) et (3.25).

Remarque. Quand $c_2 < 0$, les estimation du Lemme 25 n'impliquent pas que E converge vers zéro.

Lemme 26 *Sous les hypothéses du Lemme 22 et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et*

$$a(s) = c_1(s+1)^{-c_2} \text{ avec } c_1 > 0 \text{ et } c_2 \in \mathbb{R},$$

alors il existe une constante $c > 0$ telle que E vérifie, pour tout $t > 1$, les estimations suivantes:

$$E(t) \le ct^{\frac{-1}{c_1}} \text{ si } r = 0 \text{ et } c_2 = -1,$$

$$E(t) \le ce^{\frac{-1}{c_1(c_2+1)}t^{c_2+1}} \text{ si } r = 0 \text{ et } c_2 \ne -1,$$

$$E(t) \le c(ln(t))^{\frac{-1}{r(r+1)}} \text{ si } r > 0 \text{ et } c_2 = \frac{-1}{r+1},$$

$$E(t) \le c\Big(\frac{t^{c_2(r+1)+1} - 1}{c_2(r+1)+1}\Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \text{ si } r > 0 \text{ et } c_2 \ne \frac{-1}{r+1},$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\tilde{\lambda}(t) = \lambda t$ et $\omega(s) = \frac{1}{c_1}(s+1)^{c_2}$, et d'appliquer (3.24) et (3.25).

Remarque. Quand $c_2 < \frac{-1}{r+1}$, les estimation du Lemme 26 n'impliquent pas que E converge vers zéro.

Dans le lemme suivant, on considère des hypothèses plus générales que (3.10) en incluant le cas d'une perturbation du second membre.

Lemme 27 *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, $a_3 \in \mathbb{R}^+$, $a_1, a_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ trois fonctions continues. Supposons qu'il existe $r, p \ge 0$ tels que*

$$a_3(r+1)\sup_{t\ge 0}\{\lambda(t)\} < 1$$

et, pour tout $0 \le s \le T < +\infty$,

$$\text{(3.30)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_s^T E^{r+1}(t)\,dt \le a_1(s)E(s) + a_2(s)E^{p+1}(s) + a_3E^{r+1}(T), & \forall s \ge 0, \\ E'(t) \le \lambda(t)E(t), & \forall t \ge 0. \end{cases}$$

Alors E vérifie (3.20) and (3.20) oú $\tilde{\lambda}(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau$, $\omega = \frac{1}{a}$.

Remarque

1. Comme dans le lemme (3.8) et le lemme (3.9), on peut montrer, sous les hypothéses du lemme (2.6), que E vérifie (3.22)-(3.25) et (3.26)-(3.29) oú $\omega = \frac{1}{a}$ et a est défini par (3.32).

2. Si $r = 0$, λ cst unc constantc ct $\lambda a_3 \ge 1$, alors $E(t) = e^{\lambda t}$ satisfait (2.24). Ccci impliquc qu'une fonction vérifiant (2.24) ne converge pas forcément vers zéro.

Preuve du Lemme 25 Il suffit de montrer que E vérifie la premiére inégalité de (3.10) pour appliquer le Lemme 22.

On a:

$$\begin{aligned} a_3 E^{r+1}(T) &= a_3 \int_s^T (E^{r+1})'(t)dt + a_3 E^{r+1}(s) \\ &\leq a_3(r+1) \int_s^T \lambda(t) E^{r+1}(t)dt + a_3 E^{r+1}(s) \\ &\leq a_3(r+1) \sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\} \int_s^T E^{r+1}(t)\, dt + a_3 E^{r+1}(s). \end{aligned}$$

Donc, d'après la première inégalité de (3.30), on obtient:

$$\int_s^{+\infty} E^{r+1}(t)\, dt \leq b(s)E(s), \quad \forall s \geq 0 \tag{3.31}$$

oú

$$b(s) = \frac{a_1(s) + a_2(s)E^p(s) + a_3(s)E^r(s)}{1 - a_3(r+1)\sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\}}. \quad \forall s \geq 0$$

On considére la fonction f_0 (définie par (3.9) pour $s = 0$) et on intégre sur $[0, s]$ l'inégalité

$$E^{r+1}(t) \geq \partial_t(f_0(t)E^{r+1}(t)), \quad \forall t \geq 0,$$

on obtient, d'après (3.31):

$$b(0)E(0) \geq \int_0^s E^{r+1}(t)\, dt \geq f_0(s)E^{r+1}(s) \quad \forall s \geq 0$$

d'oú (on exclut $s = 0$ car $f_0(0) = 0$)

$$E(s) \leq \left(\frac{b(0)E(0)}{f_0(s)}\right)^{\frac{1}{r+1}} \quad \forall s \geq 0.$$

D'autre part, la deuxième inégalité de (3.30) implique que

$$E(s) \leq E(0)e^{\tilde{\lambda}(s)}, \quad \forall s \geq 0.$$

Donc

$$E(s) \leq \min\left\{E(0)e^{\tilde{\lambda}(s)}, \left(\frac{b(0)E(0)}{f_0(s)}\right)^{\frac{1}{r+1}}\right\} = d(s), \quad \forall s \geq 0.$$

La fonction d est continue et strictement positive, et on a:

$$b(s) = \frac{a_1(s) + a_2(s)(d(s))^p(s) + a_3(s)(d(s))^r(s)}{1 - a_3(r+1)\sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\}}. \quad \forall s \geq 0$$

D'où, on conclut de (3.31) la première inégalité de (3.10) avec

$$a(s) = \frac{a_1(s) + a_2(s)(d(s))^p(s) + a_3(s)(d(s))^r(s)}{1 - a_3(r+1)\sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\}}. \tag{3.32}$$

Ceci achève la preuve du Lemme 25

Lemme 28 *Soient $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction dérivable, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $a_3, r, p, \lambda \in \mathbb{R}_+$, Supposons que*

$$\begin{cases} \int_s^T E^{r+1}(t)\,dt \le a_1 E(s) + a_2 E^{p+1}(s) + a_3 E^{r+1}(T), & \forall 0 \le s \le T, \\ E'(t) \le \lambda(t) E(t), & \forall t \ge 0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Si $a_3\lambda(r+1) < 1$, alors il existe deux constantes strictement positives ω et c telles que, pour tout $t \ge 0$,

$$E(t) \le c e^{-\omega t} \text{ si } r = 0, \tag{3.34}$$

$$E(t) \le c(1+t)^{-\frac{1}{r}} \text{ si } r = 0 \text{ et } \lambda = 0 \tag{3.35}$$

$$E(t) \le c(1+t)^{-\frac{1}{r(r+1)}} \text{ si } r = 0 \text{ et } \lambda > 0. \tag{3.36}$$

Preuve du Lemme 28 Si $\lambda = 0$. Donc, d'après le Lemme 24, (3.17) et (3.18) implique (3.34) et (3.35) respectivement.

Supposons que $\lambda > 0$. D'après la preuve du Lemme 2.6, E vérifie la première inégalité de (2.4) où a est défini par (2.26). Donc, on déduit (2.16) et (2.17) avec $\omega(s) = \dfrac{1}{a(s)}$. Or, sous lae hypothèses du Lemme 2.7, la fonction a est bornée. Donc $\omega(s) \ge \dfrac{1}{sup_{t\ge0}\{a(t)\}}$ (si $sup_{t\ge0}\{a(t)\} = 0$, alors $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, et par conséquent $E = 0$) d'où (2.16) et (2.17) impliquent, pour tout $t > 1$, (2.28) et (2.30) respectivement.

Pour $t \in [0,1]$, on a:

$$E(t) \le E(0)e^{\lambda t} \le E(0)e^{\lambda}.$$

Donc E vérifie (2.28)-(2.30) aussi pour $t \in [0,1]$.

Lemme 29 *Soient $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction dérivable, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction convexe et strictement croissante vérifiant:*

$$\varphi(0) = 0 \tag{3.37}$$

Supposons que

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} \varphi(E(t))\,dt \le E(s), & \forall s \ge 0, \\ E'(t) \le \lambda E(t), & \forall t \ge 0. \end{cases} \tag{3.38}$$

Alors E vérifie l'estimation suivante:

$$E(t) \le g^{-1}\Big(e^{\lambda(t-h(t))}\varphi\Big(\psi^{-1}(h(t) + \psi(E(0)))\Big)\Big) \tag{3.39}$$

où

$$\psi(t) = \int_t^1 \frac{1}{\varphi(s)}ds, \quad \forall t > 0, \tag{3.40}$$

$$g(t) = \begin{cases} \varphi(t) & si \quad \lambda = 0, \\ \displaystyle\int_0^t \frac{\varphi(s)}{s}\, ds, & si \quad \lambda > 0 \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{3.41}$$

$$h(t) = K^{-1}(D(t)), \quad \forall t > T_0, \tag{3.42}$$

$$\begin{cases} K(t) = D(t) + \dfrac{\psi^{-1}\Big(t + \psi(E(0))\Big)}{\varphi\Big(\psi^{-1}\Big(t + \psi(E(0))\Big)\Big)} e^{\lambda t}, \\ D(t) = \displaystyle\int_0^t e^{\lambda s}\, ds, & \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{3.43}$$

$$T_0 = D^{-1}\Big(\frac{E(0)}{\varphi(E(0))}\Big). \tag{3.44}$$

Remarque.

1. Si $\lambda = 0$ et $\varphi(t) = dt^{r+1}$ pour $d > 0$ et $r \geq 0$, alors l'estimation (2.33) coïncide avec (1.5), (1.8) et (1.11), et elle coïncide avec (1.3) et (1.4) si de plus $\phi(s) = s$.

2. Si $\lambda = 0$ (imlique que E est décroissante), alors on a

$$E(t) \leq \psi^{-1}(h(t) + \psi(E(0))), \forall t \geq 0,$$

où $\psi(t) = \displaystyle\int_t^1 \frac{1}{\varphi(s)} ds, \quad \forall t > 0, h(t) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq \frac{E(0)}{\psi(E(0))}$, et

$$h^{-1}(t) = t + \frac{\psi^{-1}(t + \psi(E(0)))}{\varphi(\psi^{-1}(t + \psi(E(0))))}, \forall t \geq 0.$$

Preuve du Lemme 2.8. Si $E(s) = 0$ pour un $s \geq 0$, la premiére inégalité de (2.32) implique que $E(t) = 0$ pour tout $t \geq s$, et dans ce cas-là, il n'y a rien à démontrer. Donc, on peut supposer que $E(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ sans perte de généralité.

On pose:

$$L(s) = \int_s^{+\infty} \varphi(E(t))\, dt, \quad s \geq 0. \tag{3.45}$$

D'après (2.32), on a:

$$L(s) \leq E(s), \quad \forall s \geq 0. \tag{3.46}$$

La fonction L est strictement positive décroissante de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant, d'après (2.39) et (2.40):

$$-L'(s) = \varphi(E(s)) \geq \varphi(L(s)), \quad \forall s \geq 0.$$

La fonction ψ définie par (2.34) est strictement décroissante, donc,

$$\Big(\psi(L(s))\Big)' = \frac{-L'(s)}{\varphi(L(s))} \geq 1, \quad \forall s \forall 0.$$

Donc, par intégration sur $[0, t]$ et en utilisant (2.40) pour $s = 0$,

$$\psi(L(t)) \geq t + \psi(E(0)), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.47}$$

Comme φ est convexe et $\varphi(0) = 0$, alors

$$\varphi(s) \leq \varphi(1)s, \quad \forall s \in [0,1] \text{ et } \varphi(s) \geq \varphi(1)s, \quad \forall s \geq 1, \tag{3.48}$$

et par conséquent $lim_{t\to 0}\psi(t) = +\infty$ et $[\psi(E(0)), +\infty[\subset$ Image(ψ). On déduit donc de (2.41) que:

$$L(t) \leq \psi^{-1}\Big(t + \psi(E(0))\Big), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.49}$$

Maintenant, pour tout $s \geq 0$, on pose:

$$f_s(t) = s^{-\lambda t} \int_s^t e^{\lambda\tau} d\tau, \quad \forall t \geq s. \tag{3.50}$$

La fonction f_s est strictement croissante sur $[s, +\infty]$ et strictement positive sur $]s, +\infty]$ vérifiant:

$$f_s(s) = 0 \text{ et } f_s'(t) + \lambda f_s(t) = 1, \quad \forall t \geq s \geq 0. \tag{3.51}$$

D'après (2.42), la fonction g définie par (2.35) est bien définie, positive et strictement croissante vérifiant:

$$g(t) \leq \varphi(t) \text{ ct } \lambda t g'(t) = \lambda\varphi(t), \quad \forall t \geq 0,$$

donc, d'après (2.45) et la deuxiéme inégalité de (2.32),

$$\partial_\tau\Big(f_s(\tau)g(E(\tau))\Big) = f_s'(\tau)g(E(\tau)) + f_s(\tau)E'(\tau)g'(E(\tau))$$

$$\leq \Big(1 - \lambda f_s(\tau)\Big)\varphi(\tau)) + \lambda f_s(\tau)\varphi(E(\tau)) = \varphi(E(\tau)), \quad \forall \tau \geq s \geq 0.$$

En intégrant cette intégalité sur $[s, t], onobtient$:

$$L(s) \geq \int_s^t \varphi(E(\tau))d\tau \geq f_s(t)g(E(t)), \quad \forall t \geq s \geq 0. \tag{3.52}$$

D'après (2.42), $lim_{t\to+\infty}g(s) = +\infty$. Commc $g(0) = 0$ ct g cst strictcmcnt croissantc, on déduit alors de (2.43) et (2.46) que:

$$E(t) \leq g^{-1}\left(\inf_{s\in[0,t[} \frac{\psi^{-1}\Big(s + \psi(E(0))\Big)}{f_s(t)}\right), \quad \forall t > 0. \tag{3.53}$$

On fixe maintenant $t > T_0$ oú T_0 est défini par (2.38) et on pose:

$$J(s) = \frac{\psi^{-1}\Big(s + \psi(E(0))\Big)}{f_s(t)}, \quad \forall s \in [0, t[. \tag{3.54}$$

La fonction J est dérivable et on a, pour tout $s \in [0, t[$:

$$J'(s) = f_s^{-2}(t)\Big[e^{-\lambda(t-s)}\psi^{-1}\Big(s + \psi(E(0))\Big) - f_s(t)\varphi\Big(\psi^{-1}\Big(s + \psi(E(0))\Big)\Big)\Big].$$

On vérifie facilement, d'après (2.44), que:

$$J'(s) = 0 \Longleftrightarrow K(s) = D(t) \text{ et } J'(s) < 0 \Longleftrightarrow K(s) < D(t)$$

oú K et D sont définies par (2.37). On a: $K(0) = \frac{E(0)}{\varphi(E(0))}$ et $D(0) = 0$. De plus, comme ψ^{-1} est strictement décroissante et $d(s) = \frac{s}{\varphi(s)}, s > 0$ est décroissante (puisque φ est convexe), alors K et D sont strictement croissantes. Donc, si $t > T_0$,

$$\inf_{s\in[0,t[} J(s) = J\Big(K^{-1}(D(t))\Big) = J(h(t)).$$

Comme h vérifie $J'(h(t)) = 0$, alors on conclut de (3.53) l'estimation (3.39).

Remarque. Sous les hypothése du Lemme 29, on a toujours

$$Lim_{t\to+\infty}E(t) = 0 \tag{3.55}$$

En effet, il suffit de choisir $s = \frac{1}{2}t$ dans (3.54) et noter que $g(0) = 0$, $lim_{t\to 0}\psi(t) = +\infty$ et $lim_{t\to+\infty}f_{\frac{1}{2}t}(t) > 0$ d'oú, d'après (2.47), le résultat (3.55).

3.2.1 Inégalité de M. Nakao implique l'inégalité de A.Haraux

Comparons l'inégalité de Nakao et l'inégalité de Haraux pour un cas simple (le cas de décroissance exponentielle).

Supposons que qu'on a l'inégalité de Nakao:

$$\max_{s\in[t,t+1]} E(s) \leq K_0(E(t) - E(t+1)) \tag{3.56}$$

où E est une fonction positive borné dans $\mathbb{R}^+$: on a

$$E(t) \leq Ce^{-\ln\left(\frac{K_0}{K_0-1}\right)t} \tag{3.57}$$

L'inégalité de Haraux est comme suit: Soit $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante telle que

$$\forall S > 0, \int_S^{+\infty} E(t)\, dt \leq \frac{1}{\omega}E(S) \tag{3.58}$$

alors

$$E(t) \leq E(0)e^{(1-\omega)t} \tag{3.59}$$

Soit $S > 0$; le terme à gauche de (3.58) peut etre ecrit sous la forme

$$\int_S^{+\infty} E(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_S^{S+n} E(t)\, dt \tag{3.60}$$

Aussi par (3.56), on a

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_S^{S+n} E(t)\,dt & = & \displaystyle\int_S^{S+1} E(t)\,dt + \int_{S+1}^{S+2} E(t)\,dt + \ldots + \int_{S+n-1}^{S+n} E(t)\,dt \\ & \leq & \displaystyle\int_S^{S+1} \max_{[S,S+1]} E(t)\,dt + \int_{S+1}^{S+2} \max_{[S+1,S+2]} E(t)\,dt + \ldots + \int_{S+n-1}^{S+n} \max_{[S+n-1,S+n]} E(t)\,dt \\ & \leq & K_0(E(S) - E(S+1)) + \ldots K_0(E(S+n-1) - E(S+n)) \\ & = & K_0(E(S) - E(S+n))\end{array}$$

(3.61)

Comme la fonction E vérifie (3.56), alors on a $\lim_{x\to+\infty} E(x) = 0$: par conséquent de 3.60) et 3.61), on a

$$\int_S^{+\infty} E(t)\,dt \leq K_0 E(S)$$

c'est à dire l'inégalité de Nakao implique l'inégalité d'Haraux

Chapitre 4

Existence globale et décroissance de l'énergie des solutions pour l'équation des ondes non dissipative avec un terme de source

On considère dans ce chapitre l'équation des ondes non dissipative avec des conditions au bord du type de Dirichlet et un terme de source nonlinéaire de la forme

$$(P) \qquad \begin{cases} u'' - \Delta u + h(\nabla_x u) + g(u') + f(u) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, +\infty) \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad x \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) de frontière réguliére $\Gamma = \partial\Omega$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue croissante telle que $g(0) = 0$ et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^1.

Lorsque $h \equiv 0$, L'interaction entre un terme dissipatif et un terme de source a été étudiée par Levine dans le cas où g est linéaire, en utilisant la méthode de concavité pour montrer l'expolosion de la solution.

Cependant, l'interaction entre un terme dissipatif non linéaire et un terme non linéaire de source provoque des difficultés considérables.

Lorsque $g(x) = \delta x$ ($\delta > 0$), Ikehata et Suzuki **[33]** ont pu démontrer pour des données initiales suffisamment petites, que la trajectoire $(u(t), u'(t))$ tend vers $(0,0)$ dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ quand $t \to +\infty$.

Pour $g(x) = \delta |x|^{r-1} x$ ($r \geq 1$) et $f(y) = -\beta |y|^{p-1} y$ ($\beta > 0$, $p \geq 1$), Georgiev et Todorova

[**19**] ont prouvé que si le terme dissipatif domine celui de source, alors on a l'existence globale de la solution pour tout données initiales dans l'espace d'energie.

Récemment, Ikehata [**32**] a pu démontrer l'existence globale de la solution, en négligeant la relation entre p et m et cela en utilisant la méthode introduite par Sattinger [**60**], basée sur les ensembles stables. Benaissa et Rahmani [**4**] ont etendu ce resultat au cas où g a une forme général non nécessairement polynomiale au voisinage de zéro.

La stabilisation de (P) a été étudiée (lorsque $h \equiv 0$ et $f \equiv 0$) par plusieurs auteurs (voir Komornik [**37**], Nakao [**57**]). Dans tous ces travaux, (P) est dissipatif, l'énergie associée au solution definie par

$$E(t) = \int_\Omega (|u'|^2 + |\nabla u|^2)\, dx$$

satisfait

$$E'(t) = -2 \int_\Omega u' g(u')\, dx \leq 0,$$

et les estimations de la vitesse de décroissance suivantes ont été obtenues:

$$\begin{cases} E(t) & \leq & cE(0)e^{-\omega t} \quad \text{si } r = 1, \\ E(t) & \leq & cE(0)(1+t)^{-\frac{2}{(r-1)}} \quad \text{si } r > 1, \end{cases} \tag{4.1}$$

pour $c, \omega > 0$. La preuve est basée sur la méthode des multiplicateurs qui consiste à multiplier (P) par $uE^{\frac{(r-1)}{2}(t)}$ et aprés un nombre d'intégration par parties, on obtient

$$\int_S^\infty E^{\frac{(r+1)}{2}}\, dt \leq cE(S), \quad \forall S \in \mathbb{R}^+. \tag{4.2}$$

Le lemme de Komornik ([**37**]) donne les estimations (4.1). En effet, la décroissance de l'énergie est essentielle dans la preuve de la stabilité asymptotique dans (4.2).

Quand $h \equiv \nabla_x \Phi(x).\nabla_x u$ avec $\Phi(x) \in W^{1,\infty}$, $g(x) = \delta x$ et $f(y) = \mu|y|^{p-1}y$ $(\mu > 0, p \geq 1)$, Messaoudi [**46**] a prouvé que (P) admet une solution globale unique et que l'énergie de la solution décroit exponentiellement. Si $f(y)$ est un terme de source de la forme $-\mu|y|^{p-1}y$ $(\mu > 0, p \geq 1)$, Benaissa et Messaoudi ([**5**]) ont montré l'explosion des solutions dans un temps fini pour toute énergie initiale $E(0)$ négative.

Quand h est nonlinéaire satisfaisant $|h(x)| \leq \beta|x|$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, $g \equiv 0$ et $f(y) = \mu|y|^{p-1}y$ $(\mu > 0, p \geq 1)$, Erden et Kalantarov [**17**] ont montré l'explosion des solutions dans un temps fini pour toute énergie initiale $E(0)$ négative. Quand $h \not\equiv 0$, le système (P) n'est pas dissipative puisque

$$E'(t) = -\int_\Omega u' g(u')\, dx - 2\int_\Omega u' h(\nabla u)\, dx.$$

Dans ce chapitre, on étend les résultats obtenus par Komornik [**37**] et Guesmia [**22**] au cas où h est nonlinéaire et linéaire et le terme dissipatif est de forme polynomiale ou de forme générale en présence d'un terme de source. L'idé principale est la contruction d'un ensemble stable dans $H_0^1(\Omega)$ avec combination de la méthode des multiplicateurs.

4.1 Préliminaires et résultats principaux

On considère le problème (P) lorsque $h(\nabla u) = -\nabla\Phi\nabla u$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \nabla\Phi.\nabla u + f(u) + g(u_t) = 0, \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.3}$$

où Φ est une fonction dans $W^{1,\infty}(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ régulière et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues vérifiant $f(0) = g(0) = 0$ et
(H1) $\|f(u) - f(v)\|_2 \leq a(u,v)\|\nabla(u-v)\|_2$, où $a(u,v)$ est une fonction qui dépend des normes de $u; v$ dans $H_0^1(\Omega)$;
(H2) g est une fonction croissante telle que

$$c_1\{|s_1 - s_2|^r + |s_1 - s_2|^p\} \leq |g(s_1) - g(s_2)| \leq c_2\{|s_1 - s_2| + |s_1 - s_2|^p\} \tag{4.4}$$

pour certaines constantes $c_1, c_2 > 0, 1 \leq r \leq p$ avec

$$(n-2)p \leq n+2. \tag{4.5}$$

Theorème 30 *Supposons que les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$ sont satisfaites. Alors pour toute donné initiale $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ le problème (4.3) admet une solution unique u vérifiant (4.16) pour T assez petit.*

On étudie maintenant l'existence globale du problème (4.3). En plus des hypothèses du Théorème 30, nous supposons qu'il existe des constantes $k_1, k_2, c_1, c_2, \alpha, \beta > 0$ and $r, p \geq 0$ telles que $(n-2)p \leq n+2$, that

$$\begin{aligned} &c_1 \min\{|s|, |s|^r\} \leq |g(s)| \leq c_2 \max\{|s|^{\frac{1}{r}}, |s|^p\}, \quad \forall s \in \mathbb{R}; \\ &|h(\zeta)| \leq \beta|\zeta|, \forall \zeta \in \mathbb{R}^n; \\ &|f(u)| \leq k_1|u|^{\alpha+1} \ \text{ et } |f'(u)| \leq k_2|u|^\alpha \end{aligned} \tag{4.6}$$

On définit

$$\mathcal{W}_\Phi = \{u \in H_0^1(\Omega), \|e^{\frac{\Phi(x)}{2}}\nabla_x u\|_2^2 - k_1\|e^{\frac{\Phi(x)}{\alpha+2}}u\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} > 0\} \cup \{0\}$$

$$E_\Phi(t) = \|e^{\frac{\Phi(x)}{2}}u'\|_2^2 + J_\Phi(u(t))$$

$$J_\Phi(u) \equiv \|e^{\frac{\Phi(x)}{2}}\nabla_x u\|_2^2 + 2\int_\Omega e^{\Phi(x)}\int_0^u f(\eta)\,d\eta\,dx \quad \text{pour } u \in H_0^1(\Omega)$$

$$K_\Phi(u) \equiv \|e^{\frac{\Phi(x)}{2}}\nabla_x u\|_2^2 + \int_\Omega e^{\Phi(x)}f(u)u\,dx \quad \text{pour } u \in H_0^1(\Omega).$$

Theorème 31 *Supposons que* $\alpha \leq \dfrac{4}{n-2}(\alpha < \infty \ if \ n \leq 2)$. *Pour toute donnée initiale* $\{u_0, u_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *vérifiant*

$$\max\{c_4 c_*^{\frac{\alpha}{2}} E_\Phi(0)^{\frac{\alpha}{2}}, c_4 \|\nabla_x u_0\|_2^{\alpha}\} < 1 \tag{4.7}$$

Alors, le problème (4.3) admet une solution globale unique faible $u = u(t,x)$ *vérifiant*

$$u \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega)).$$

En plus, l'énergie E_Φ *vérifie, pour toute solution faible de (4.3) les estimations suivantes*

$$E_\Phi(t) \leq C_0 E_\Phi(0) e^{-\omega t} \quad \forall t \in [0, +\infty) \ si \ r = 1,$$

$$E_\Phi(t) \leq C_1 E_\Phi(0)(1+t)^{-\frac{2}{(r-1)}} \quad \forall t \in [0, +\infty) \ si \ r > 1$$

où ω, C_0 *et* C_1 *sont des constantes positives qui ne dependent que de* $\|\nabla_x u_0\|_2$ *et de* $\|u_1\|_2$.

On considère maintenant le cas $h(\nabla_x u) = -\nabla_x \Phi(x).\nabla_x u$ avec un terme dissipatif g de forme générale, i. e g est une fonction de classe C^1 croissante et impaire telle que

$$c_2|x| \leq |g(x)| \leq c_3|x|^p \quad \text{if} \quad |x| \geq 1 \quad \text{with} \quad 1 \leq p \leq \frac{n+2}{(n-2)^+},$$

where c_1, c_2 and c_3 are positive constants.

Theorème 32 *Supposons que* $\alpha \leq \dfrac{4}{n-2}(\alpha < \infty \ if \ n \leq 2)$. *Pour toute donnée initiale* $\{u_0, u_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *vérifiant*

$$\max\{c_4 c_*^{\frac{\alpha}{2}} E_\Phi(0)^{\frac{\alpha}{2}}, c_4 \|\nabla_x u_0\|_2^{\alpha}\} < 1. \tag{4.8}$$

Alors, le problème (4.3) admet une solution globale unique faible $u = u(t,x)$ *vérifiant*

$$u \in C(]0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1(]0,\infty); L^2(\Omega)).$$

En plus, l'énergie E_Φ *vérifie, pour toute solution faible de (4.3) les estimations suivantes*

$$E_\Phi(t) \leq C_2 \ E_\Phi(0) \left(g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 \qquad on \ [0, +\infty).$$

où ω, C_0 *et* C_1 *sont des constantes positives qui ne dependent que de* $\|\nabla_x u_0\|_2$ *et de* $\|u_1\|_2$.

Exemples

- 1) Si $g(x) = e^{-1/x^p}$ pour $0 < x < 1, \ p > 0$, alors on a

$$E_\Phi(t) \leq \frac{c}{(\ln t)^{2/p}}.$$

- 2) Si $g(x) = e^{-e^{1/x}}$ for $0 < x < 1$, alors on a

$$E_\Phi(t) \leq \frac{c}{(\ln(\ln t))^2}.$$

- 3) Soit $g(x)$ la fonction inverse de

$$M(0) = 0 \text{ et } M(x) = \frac{x^\sigma}{(\log(-\log x))^\beta} \text{ pour } 0 < x < x_0, (\beta, \sigma > 0).$$

  Lorsque $0 < \sigma < 1$, la fonction g existe et satisfait les hypothèses du théorème 32. Ainsi

$$g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^\sigma(\log(\log t))^\beta}$$

On considère maintenant le cas où h est nonlinéaire. On étudie le problème aux limites à valeurs initiales

$$u'' - \Delta u + h(\nabla_x u) + g(u') + f(u) = 0, \quad \text{in } \Omega \times [0, +\infty) \tag{4.9}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0 \tag{4.10}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad x \text{ in } \Omega \tag{4.11}$$

Avant d'énoncer et prouver les résultats, on considère les fontionnels suivants

$$J(u) \equiv \|\nabla_x u\|_2^2 + 2\int_\Omega \int_0^u f(\eta)\, d\eta\, dx \qquad \text{pour } u \in H_0^1(\Omega),$$

$$K(u) \equiv \|\nabla_x u\|_2^2 + \int_\Omega f(u)u\, dx \qquad \text{pour } u \in H_0^1(\Omega).$$

On définit l'ensemble stable par

$$\mathcal{W} = \{u \in H_0^1(\Omega), \|\nabla_x u\|_2^2 - k_1\|u\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} > 0\} \cup \{0\},$$

et l'énergie de la solution par la formule

$$E(t) = \|u'\|_2^2 + J(u) \equiv \|u'\|_2^2 + \|\nabla_x u\|_2^2 + 2\int_\Omega F(u)\, dx, \tag{4.12}$$

avec $F(u) = \displaystyle\int_0^\eta f(\eta)\, d\eta$. En multipliant la première équation de (P) par u', intégration sur Ω et en utilisant les conditions aux bords, on obtient

$$E'(t) = -2\int_\Omega u' g(u')\, dx - 2\int_\Omega u' h(\nabla_x u)\, dx. \tag{4.13}$$

Theorème 33 *Supposons que β est assez petit et $p = r = 1$. Supposons que $\alpha \leq \dfrac{4}{n-2}$ ($\alpha < \infty$ if $n \leq 2$). Pour toute donnée initiale $\{u_0, u_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ vérifiant*

$$\max\{C_4\|\nabla_x u_0\|_2^\alpha, C_4 c_*^{\frac{\alpha}{2}} C^{\frac{\alpha}{2}} E(0)^{\frac{\alpha}{2}}\} < 1. \tag{4.14}$$

Alors, le problème (P) admet une solution globale unique faible $u = u(t,x)$ vérifiant

$$u \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega)).$$

En plus, l'énergie E vérifie, pour toute solution faible de (P) l'estimation suivante

$$E(t) \leq cE(0)e^{-\omega t}.$$

Lemme 34 ([44]) *Il existe une fonction croissante $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes*

$$\phi \textit{ est concave et } \phi(t) \to +\infty \textit{ quand } t \to +\infty,$$

$$\phi'(t) \to 0 \quad \textit{quand} \quad t \to +\infty,$$

$$\int_1^{+\infty} \phi'(t)\left(g^{-1}(\phi'(t))\right)^2 dt < +\infty.$$

Preuve de lemme 34.
Si une telle fonction existe, on peut supposer que $\phi(1) = 1$. Posant $s := \phi(t)$, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \phi'(t)\left(g^{-1}(\phi'(t))\right) dt = \int_1^{+\infty} \left(g^{-1}(\phi'(\phi^{-1}(s)))\right)^2 ds =$$
$$= \int_1^{+\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{(\phi^{-1})'(s)}\right)^2 ds.$$

Définissons ψ par

$$\psi(t) := 1 + \int_1^t \frac{1}{g\left(\frac{1}{s}\right)} ds, \quad t \geq 1.$$

ψ est une fonction strictement croissante de classe C^2, et

$$\psi'(t) = \frac{1}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \to +\infty \quad \text{quand} \quad t \to +\infty.$$

Donc

$$\psi(t) \to +\infty \quad \text{quand} \quad t \to +\infty,$$

et

$$\int_1^{+\infty}\left(g^{-1}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\right)\right)^2 ds = \int_1^{+\infty}\frac{1}{s^2}\,ds < +\infty.$$

De plus ψ' est croissante, et donc ψ est une fonction convexe. Vérifiant que ψ^{-1} est concave. De $\psi(\psi^{-1}(s)) = s$ on a

$$\begin{aligned}(\psi^{-1})''(s) &= -\frac{\psi''(\psi^{-1}(s))\left((\psi^{-1})'(s)\right)^2}{\psi'\left(\psi^{-1}(s)\right)}\\ &= -\frac{\psi''\left(\psi^{-1}(s)\right)}{\left(\psi'(\psi^{-1}(s))\right)^3} \leq 0.\end{aligned}$$

Finallement, si on définit ϕ par $\phi(t) := \psi^{-1}(t)$ $\forall t \geq 1$, on voit que ϕ satisfie toutes les hypothèses du lemme 34.

□

Existence locale La preuve de l'existence locale est une modification de la preuve du théortème d'existence locale de Georgiev-Todorova [**19**]. On établit des résultats d'existence locale et globale pour (4.3). Premièrement, considérons le problème linéaire pour une fonction v donnée

$$\begin{aligned}&u_{tt} - \Delta u - \nabla\Phi.\nabla u + f(v) + g(u_t) = 0, \quad x \in \Omega,\ t > 0,\\ &u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, t \geq 0,\\ &u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega,\end{aligned} \tag{4.15}$$

Lemme 35 *Supposons satisfaite (H1) and (H2). Alors pour toute v dans $C([0,T]; C_0^\infty(\Omega))$ et pour toute donnée initiale $\{u_0, u_1\} \in C_0^\infty(\Omega)\times C_0^\infty(\Omega)$ le problème* (2.1) *admet une solution globale unique faible $u = u(t,x)$ vérifiant*

$$\begin{aligned}&u \in L^\infty((0,T); H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),\\ &u_t \in L^\infty((0,T), H_0^1(\Omega)),\\ &u_{tt} \in L^\infty((0,T), L^2(\Omega)).\end{aligned} \tag{4.16}$$

Ce lemme est une conséquence directe du théorème 3.1 de [**2**]

Lemme 36 *Supposons que les hypothèses* $(H1)$ *et* $(H2)$ *sont satisfaites. Alors pour toute fonction v dans $C([0,T], H_0^1(\Omega))$ et pour toute donné initiale $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ le problème (4.15) admet une solution unique faible*

$$\begin{aligned}&u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)),\\ &u_t \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^{p+1}(\Omega\times(0,T)).\end{aligned} \tag{4.17}$$

En plus,

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\int_\Omega e^{\Phi(x)}[u_t^2 + |\nabla u|^2](x,t)\,dx + \int_0^t\int_\Omega e^{\Phi(x)} g(u_t)u_t(x,s)\,dx\,ds\\ &= \tfrac{1}{2}\int_\Omega e^{\Phi(x)}[u_1^2 + |\nabla u_0|^2](x)\,dx - \int_0^t\int_\Omega e^{\Phi(x)} g(u_t)u_t(x,s)dxds; \forall t\in[0,T].\end{aligned} \tag{4.18}$$

Preuve: On approxime u_0, u_1 par des suites $(u_0^\mu), (u_1^\mu)$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ et v par une suite (v^μ) dans $C([0,T]; C_0^\infty(\Omega))$. On cherche alors une solution du problème

$$\begin{aligned}&u_{tt}^\mu - \Delta u^\mu - \nabla\Phi.\nabla u^\mu + f(u^\mu) + g(u_t^\mu) = 0, \quad x \in \Omega,\ t > 0,\\ &u^\mu(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0,\\ &u^\mu(x,0) = u_0^\mu(x), \quad u_t^\mu(x,0) = u_1^\mu(x), \quad x \in \Omega.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Le lemme 2.1 assure l'existence d'une de soluition unique (u^μ) vérifiant (2.3). Montrons maintenant que (u^μ, u_t^μ) est une suite de Cauchy dans

$$\mathbf{Y} := \{w : w \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)), w_t \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^p(\Omega \times (0,T))\}.$$

Pour cela on pose

$$U := u^\mu - u^\nu, \quad V := v^\mu - v^\nu.$$

Alors U vérifie

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U - \nabla\Phi.\nabla U + g(u_t^\mu) - g(u_t^\nu) + f(v^\mu) - f(v^\nu) = 0,\\ U(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0,\\ U(x,0) = U_0(x) = u_0^\mu(x) - u_0^\nu(x),\\ U_t(x.0) = U_1(x) = u_1^\mu(x) - u_1^\nu(x).\end{cases} \tag{4.20}$$

On Multiplie la première équation de (2.6) par $e^{\Phi(x)}U_t$ et on intègre sur $\Omega \times (0,t)$ on obtient

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\int_\Omega e^{\Phi(x)}[U_t^2 + |\nabla U|^2](x,t)dx + \int_0^t\int_\Omega e^{\Phi(x)}(g(u_t^\mu) - g(u_t^\nu))U_t(x,s)dxds\\ &= \tfrac{1}{2}\int_\Omega e^{\Phi(x)}[U_1^2 + |\nabla U_0|^2](x)dx + \int_0^t\int_\Omega e^{\Phi(x)}[f(v^\mu) - f(v^\nu)]U_t(x;s)dxds.\end{aligned} \tag{4.21}$$

En utilisant (H1) et le fait que g est croissante, (2.7) donne

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\int_\Omega [U_t^2 + |\nabla U|^2](x,t)dx\\ &\le \int_\Omega [U_1^2 + |\nabla U_0|^2](x)dx + \Gamma\int_0^t |U_t(.,s)|_2|\nabla V(.,s)|_2 ds,\end{aligned}$$

où Γ est une constante positive qui dépend de C, de maximum et minimum de $e^{\Phi(x)}$ et du rayon de la boule dans $C([0,T], H_0^1(\Omega))$ qui contient v^μ et v^ν. L'inégalité de Young donne

$$\begin{aligned}&\max_{0\le t\le T}\int_\Omega [U_t^2 + |\nabla U|^2](x,t)dx \le \Gamma\int_\Omega [U_1^2 + |\nabla U_0|^2](x)dx\\ &+\Gamma T\max_{0\le t\le T}\int_\Omega [V_t^2 + |\nabla V|^2](x,t)dx.\end{aligned}$$

Puisque (Φ^μ) est une suite de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$ et dans $L^2(\Omega)$, et (v^μ) est une suite de Cauchy dans $C([0,T]; H_0^1(\Omega))$. On conclut que (u^μ, u_t^μ) est une suite de Cauchy dans $C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$. Pour montrer que u_t est une suite de Cauchy dans in $L^{p+1}(\Omega \times (0,T))$ on utilise (H2) pour obtenir

$$|U_t|_{L^{p+1}(\Omega\times(0,T))}^{p+1} \le C\int_0^t\int_\Omega e^{\Phi(x)}(g(u_t^\mu) - g(u_t^\nu))U_t(x;s)dxds\ , \tag{4.22}$$

on déduit donc, d'après (2.7),

$$|U_t|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega\times(0,T))} \leq \Gamma \int_\Omega [U_1^2 + |\nabla U_0|^2](x)dx + \Gamma \int_0^t |U_t(.,s)|_2 |\nabla V(.,s)|_2 ds.$$

Donc (u_t^μ) est une suite de Cauchy dans $L^{p+1}(\Omega \times (0,T))$, hence (u^μ, u_t^μ) est une suite de Cauchy dans $\mathbf{Y}$. Montrons maintenant que la limite de (u^μ, u_t^μ) est une solution faible de (2.1) i.e

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\int_\Omega u_t(x,t)\theta(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x,t).\nabla\theta(x)dx \\ &-\int(\nabla\Phi.\nabla u)\theta(x)dx + \int_\Omega [f(u)+g(u_t)]\theta(x)dx = 0, \end{aligned} \tag{4.23}$$

pour toute fonction θ dans $H_0^1(\Omega)$. Pour cela on multiplie l'équation (4.19) par θ et par intégration sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\int_\Omega u_t^\mu(x,t)\theta(x)dx + \int_\Omega \nabla u^\mu(x,t).\nabla\theta(x)dx \\ &-\int(\nabla\Phi.\nabla u^\mu)\theta(x)dx + \int_\Omega [f(u^\mu)+g(u_t^\mu)]\theta(x)dx = 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_t^\mu(x,t)\theta(x)dx \to \int_\Omega u_t(x,t)\theta(x)dx, \text{ lorsque } \mu\to\infty \\ &\int_\Omega f(u^\mu)\theta(x)dx \to \int_\Omega f(u)\theta(x)dx \ \text{ in } C([0,T]) \text{ lorsque } \mu\to\infty \end{aligned}$$

et $\int_\Omega g(u_t^\mu)\theta(x)dx \to \int_\Omega g(u_t)\theta(x)dx$ dans $L^1((0,T))$ lorsque $\mu\to\infty$. Ainsi $\int_\Omega u_t(x,t)\theta(x)dx$ [$=\lim \int_\Omega u_t^\mu(x,t)\theta(x)dx$] est une fonction absolument continue sur $[0,T]$, ainsi (4.23) est vérifié pour tout t dans $[0,T]$. Par le même procedure on obtient l'identité d'énergie (4.18). Pour montrer l'unicité, on considère v^μ et v^ν et soit u^μ et u^μ les solutions associée de (4.15). On a $U = u^\mu - u^\nu$ vérifie

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\int_\Omega e^{\Phi(x)}[U_t^2 + |\nabla U|^2](x,t)dx + \int_0^t\int_\Omega e^{\Phi(x)}(g(u_t^\mu) - g(u_t^\nu))U_t(x;s)dxds \\ &+\int_0^t\int_\Omega e^{\Phi(x)}[f(v^\mu) - f(v^\nu)]U_t(x,s)dxds = 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Si $v^\mu = v^\nu$ alors (4.25) implique que $U = 0$, ainsi on a l'unicité. Ceci complete la démonstration.
Remarque.
Notons que la condition (4.5) sur p est essentiel pour que soit définie $\int_\Omega g(u_t^\mu)\theta(x)dx$.
Preuve du théorème 30: Pour $M > 0$ assez grand et $T > 0$, on définit l'ensemble $Z(M,T)$ des fonctions w dans $\mathbf{Y}$ vérifiant les conditions initiales (4.3) et

$$\max_{0\leq t\leq T}\int_\Omega [w_t^2 + |\nabla w|^2](x,t)dx + \int_0^T\int_\Omega |w_t(x,s)|^{p+1}dxds \leq M^2. \tag{4.26}$$

$Z(M,T)$ est non vide par le théorème de trace (voir [**43**]). Aussi, on définit l'application h de $Z(M,T)$ vers $\mathbf{Y}$ par $u := h(v)$, où u est la solution unique du problème lináire (4.15). On va montrer que h est une contraction de $Z(M,T)$ dans lui même pour M assez grand et T assez petit.

En utilisant l'inégalité d'énergie (4.18), (H1) et (H2), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [u_t^2 + |\nabla u|^2](x,t)dx + \int_0^t \int_\Omega |u_t(x,s)|^{p+1} dxds \\
(4.27) \qquad &\leq C\int_\Omega [u_1^2 + |\nabla u_0|^2](x)dx + C\int_0^t \int_\Omega |f(v)||u_t|(x,s)dxds. \\
&\leq C\int_\Omega [u_1^2 + |\nabla u_0|^2](x)dx + C\int_0^t a(u,0)|\nabla v|_2 |u_t|_2, \forall t \in [0,T],
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$|u|_{\mathbf{Y}}^2 \leq C\int_\Omega [u_1^2 + |\nabla u_0|^2](x)dx + CKT|u|_{\mathbf{Y}},$$

où K est une constante dépendant de M. En choisissant M assez grand et T assez petit, (4.26) est vérifié, donc $u \in Z(M,T)$. Ainsi on h envoie $Z(M,T)$ dans lui même.

On vérifie maintenant que h est une contraction. Posons $U = u - \bar{u}$ et $V = v - \bar{v}$, où $u = h(v)$ et $\bar{u} = h(\bar{v})$. On remarque que U vérifie

$$\begin{aligned}
&U_{tt} - \Delta U - \nabla\Phi.\nabla U + g(u_t)u_t - g(\bar{u}_t)\bar{u}_t + f(v) - f(\bar{v}) = 0, \\
(4.28) \qquad &U(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, t > 0, \\
&U(x,0) = U_t(x,0) = 0 x \in \Omega.
\end{aligned}$$

En multipliant la première équation de (4.3) par $e^{\Phi(x)}U_t$ et en intégrant surr $\Omega \times (0,t)$, on arrive à

$$\begin{aligned}
(4.29) \qquad &\int_\Omega [U_t^2 + |\nabla U|^2](x,t)dx + \int_0^t \int_\Omega [g(u_t)u_t - g(\bar{u}_t)\bar{u}_t]U_t(x,s)dxds \\
&\leq C\int_0^t \int_\Omega [f(v) - f(\bar{v})]|U_t|(x,s)dxds.
\end{aligned}$$

En utilisant (H1) et (H2), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [U_t^2 + |\nabla U|^2](x,t)dx + \int_0^t \int_\Omega |U_t(x,s)|^{p+1} dxds \\
&\leq C\int_0^t a(v,\bar{v})|U_t|_2 |\nabla V|_2(.,s)ds.
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$|U|_{\mathbf{Y}}^2 \leq CTK|V|_{\mathbf{Y}}^2. \qquad (4.30)$$

En choisissant T assez petit tel que $CTK < 1$, (4.30) implique que h est une contraction. Par application du théorème de point fixe, on a l'existence et l'unicité de u vérifiant $u = h(u)$. Ceci complete la preuve du théorème.

□

Preuve du théorème 31 En multipliant la première équation dans (4.3) par $e^{\Phi(x)}u'$, on obtient

$$E'(t) + 2\int_\Omega e^{\Phi(x)} u' g(u')\, dx = 0. \qquad (4.31)$$

L'intégration de (4.31) sur l'intervalle $[t, t+1]$ nous donne

$$2\int_t^{t+1}\int_\Omega e^{\Phi(x)}g(u')u'\,dx = E(t) - E(t+1) \equiv D^2(t). \tag{4.32}$$

De l'estimation précédente et le théorème de la valeur moyenne au terme à gauche de (4.32), il existe $t_1 \in [t, t+\frac{1}{4}]$ et $t_2 \in [t+\frac{3}{4}, t+1]$ tels que

$$\int_\Omega e^{\Phi(x)}g(u'(t_i))u'(t_i)\,dx \leq 4D^2(t) \quad \text{pour } i = 1, 2$$

En multipliant la première équation dans (4.3) par $e^{\Phi(x)}u$ et en intégrant sur $[t_1, t_2]$ on obtient

$$\begin{aligned}
0 = &\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega e^{\Phi(x)}uu''\,dx\,ds - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega e^{\Phi(x)}u\Delta_x u\,dx\,ds - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega e^{\Phi(x)}u\nabla\Phi(x)\nabla_x u\,dx\,ds\\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega e^{\Phi(x)}ug(u')\,dx\,ds + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega e^{\Phi(x)}uf(u)\,dx\,ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\|e^{\frac{\phi(x)}{2}}\nabla_x u\|_2^2 + \int_\Omega e^{\Phi(x)}f(u)u\,dx\right)ds\\
&= \int_{t_1}^{t_2}\|e^{\frac{\phi(x)}{2}}u'\|_2^2\,ds + \int_\Omega e^{\Phi(x)}[u'(t_1)u(t_1) - u'(t_2), u(t_2)]\,dx - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega e^{\Phi(x)}g(u'(s))u(s)\,dx\,ds
\end{aligned}$$

Pour $|u'| \leq 1$, on a

$$|u'|^2 \leq c(u'g(u'))^{\frac{2}{r+1}}$$
$$|g(u')|^2 \leq c(u'g(u'))^{\frac{2}{r+1}}$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{t_1}^{t_2}\|e^{\frac{\phi(x)}{2}}u'\|_2^2\,ds = \int_{t_1}^{t_2}\int_{|u'|\leq 1} e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx\,ds + \int_{t_1}^{t_2}\int_{|u'|\geq 1} e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx\,ds$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\int_{|u'|\leq 1} e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx &\leq \frac{1}{c_1^2}\int_{|u'|\leq 1} e^{\phi(x)}(u'g(u'))^{\frac{2}{r+1}}\,dx\\
&\leq \frac{1}{c_1^2}\int_{|u'|\leq 1} e^{\frac{r-1}{r+1}\phi(x)}(e^{\phi(x)}u'g(u'))^{\frac{2}{r+1}}\,dx\\
&\leq \frac{1}{c_1^2}\left(\int_{|u'|\leq 1} e^{\phi(x)}\,dx\right)^{\frac{r-1}{r+1}}\left(\int_{|u'|\leq 1} e^{\phi(x)}u'g(u')\,dx\right)^{\frac{2}{r+1}}\\
&\leq \frac{1}{c_1'^2}\left(\int_\Omega e^{\phi(x)}\,dx\right)^{\frac{r-1}{r+1}}(-E')^{\frac{2}{r+1}}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}\int_{|u'|\leq 1} e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx\,ds &\leq c\left(\int_\Omega e^{\phi(x)}\,dx\right)^{\frac{r-1}{r+1}}\int_{t_1}^{t_2}(-E')^{\frac{2}{r+1}}\,ds\\
&\leq c\left(\int_\Omega e^{\phi(x)}\,dx\right)^{\frac{r-1}{r+1}}\int_t^{t+1}(-E')^{\frac{2}{r+1}}\,ds\\
&\leq c\left(\int_\Omega e^{\phi(x)}\,dx\right)^{\frac{r-1}{r+1}}\left(\int_t^{t+1}(-E')\,ds\right)^{\frac{2}{r+1}}\\
&\leq c\left(\int_\Omega e^{\phi(x)}\,dx\right)^{\frac{r-1}{r+1}}(E(t) - E(t+1))^{\frac{2}{r+1}}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{|u'|\leq 1} e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx\,ds \leq c\left(\int_\Omega e^{\phi(x)}\,dx\right)^{\frac{r-1}{r+1}} D^{\frac{4}{r+1}}$$

de l'inégalité (4.6) on a

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{|u'|\geq 1} e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx\,ds \leq c\int_{t_1}^{t_2}\int_{|u'|\geq 1} e^{\phi(x)}u'g(u')\,dx\,ds \leq cD^2(t)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega e^{\phi(x)}g(u')u\,dx\,ds \quad \leq \quad \int_{t_1}^{t_2}\int_{\{|u'|\leq 1\}} e^{\phi(x)}g(u')u\,dx\,ds + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\{|u'|\geq 1\}} e^{\phi(x)}g(u')u\,dx\,ds$$

En appliquant l'inégalité de Young on obtient

$$a\ b \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2, \quad \forall a,b\geq 0.$$

Alors, on aura

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u'|\leq 1\}} e^{\phi(x)}g(u')u\,dx \leq \varepsilon\int_{\{|u'|\leq 1\}} e^{\phi(x)}|u|^2\,dx\,ds + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\{|u'|\leq 1\}} e^{\phi(x)}|g(u')|^2\,dx\,ds\\
&\leq c_*\varepsilon\frac{\max\limits_{x\in\Omega} e^{\phi(x)}}{\min\limits_{x\in\Omega} e^{\phi(x)}}\int_{\{|u'|\leq 1\}} e^{\phi(x)}|\nabla_x u|^2\,dx\,ds + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\{|u'|\leq 1\}} e^{\phi(x)}|g(u')|^2\,dx\,ds
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder sur le dernier terme qui se trouve à droite de la formule précédente et en utilisant l'identité de l'énergie on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u'|\leq 1\}} e^{\phi(x)}|g(u')|^2\,dx\,ds \leq c\left(\int_\Omega e^{\phi(x)}\,dx\right)^{\frac{r-1}{r+1}}(E(t)-E(t+1))^{\frac{2}{r+1}}\\
&\leq c\left(\int_\Omega e^{\phi(x)}\,dx\right)^{\frac{r-1}{r+1}} D^{\frac{4}{r+1}}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\{|u'|\geq 1\}} e^{\phi(x)}|ug(u')|\,dx \quad &\leq \quad \left(\int_{\{|u'|\geq 1\}} e^{\phi(x)}|u|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{1}{q+1}}\left(\int_{\{|u'|\geq 1\}} e^{\phi(x)}|g(u')|^{\frac{q+1}{q}}\,dx\right)^{\frac{q}{q+1}}\\
&\leq \quad \|e^{\frac{\phi(x)}{q+1}}u\|_{L^{q+1}}\left(\int_{\{|u'|\geq 1\}} e^{\phi(x)}|u'||g(u')|\,dx\right)^{\frac{q}{q+1}}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\|e^{\frac{\phi(x)}{q+1}}u\|_{L^{q+1}}\left(\int_{\{|u'|\geq 1\}} e^{\phi(x)}|u'||g(u')|\,dx\right)^{\frac{q}{q+1}}\qquad ds\\
&\leq \sup_{t\in[t_1,t_2]}\|e^{\frac{\phi(x)}{q+1}}u\|_{L^{q+1}}\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{\{|u'|\geq 1\}} e^{\phi(x)}|u'||g(u')|\,dx\right)^{\frac{q}{q+1}} ds\\
&\leq C\sup_{t\in[t_1,t_2]}\|e^{\frac{\phi(x)}{q+1}}u\|_{L^{q+1}}(t_2-t_1)^{\frac{1}{q+1}}\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega e^{\phi(x)}u'g(u')\,dx\,ds\right)^{\frac{q}{q+1}}\\
&\leq C\sup_{t\in[t_1,t_2]}\|e^{\frac{\phi(x)}{q+1}}u\|_{L^{q+1}}D^{\frac{2q}{q+1}}
\end{aligned}$$

alors on obtient

$$
\begin{aligned}
I &\le C\ D^2(t) + CD^{\frac{4}{r+1}} \\
&+C \sup_{t_1\le s\le t_2} \|e^{\frac{\phi(x)}{2}} u(s)\|_{L^2} D^{\frac{2}{r+1}}(t) \\
&+C \sup_{t_1\le s\le t_2} \|e^{\frac{\phi(x)}{q+1}} u(s)\|_{L^{q+1}} D^{\frac{2q}{q+1}}(t) \\
&\le C\ D^2(t) + CD^{\frac{4}{r+1}} + C'\ D^{\frac{2}{r+1}}(t)E^{\frac{1}{2}} + C''\ D^{\frac{2q}{q+1}}(t)E^{\frac{1}{2}}(t)
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

Ainsi de (4.32) et (4.33) on a:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} E(t)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} \|e^{\frac{\phi(x)}{2}} u'\|_2^2\,ds + \int_{t_1}^{t_2} \|e^{\frac{\phi(x)}{2}} \nabla_x u\|_2^2\,ds \\
+2\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega e^{\phi(x)} \int_0^u f(s)\,ds\,dx\,dt \\
\le C\left(D^2(t) + D^{\frac{4}{r+1}} + D^{\frac{2}{r+1}}(t)E^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{2q}{q+1}}(t)E^{\frac{1}{2}}(t)\right).
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

En multipliant la première équation dans (4.3) par $2e^{\Phi(x)}u'$ et en intégrant sur $[t_1, t_2]$ on aura

$$
E(t) = E(t_2) + \int_t^{t_2}\int_\Omega e^{\phi(x)} g(u')u'\,dx\,ds \tag{4.35}
$$

Puisque $t_2 - t_1 \ge \dfrac{1}{2}$, on a

$$
\int_{t_1}^{t_2} E(s)\,ds \ge \int_{t_1}^{t_2} E(t_2)\,ds = (t_2-t_1)E(t_2) \ge \frac{1}{2}E(t_2).
$$

c'est à dire

$$
E(t_2) \le 2\int_{t_1}^{t_2} E(s)\,ds. \tag{4.36}
$$

Il s'cnsuit dc (4.34), (4.35) and (4.36) quc

$$
\begin{aligned}
E(t) &\le 2\int_{t_1}^{t_2} E(s)\,ds + \int_t^{t+1}\int_\Omega e^{\phi(x)} g(u'(s))u'(s)\,dx\,ds \\
&\le C\left(D^2(t) + D^{\frac{4}{r+1}} + D^{\frac{2}{r+1}}(t)E^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{2q}{q+1}}(t)E^{\frac{1}{2}}(t)\right).
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient

$$
\begin{aligned}
E(t) &\le C\left(D^2(t) + D^{\frac{4}{r+1}}(t) + D^{\frac{4q}{q+1}}(t)\right) \\
&\le C\left(1 + E^{\frac{2(r-1)}{r+1}}(0) + E^{\frac{4(qr-1)}{(q+1)(r+1)}}(0)\right) D^{\frac{4}{r+1}}(t)
\end{aligned}
$$

or

$$
E^{1+\frac{r-1}{2}}(t) = E^{\frac{r+1}{2}}(t) \le c\left(1 + E^{\frac{2(r-1)}{r+1}}(0) + E^{\frac{4(qr-1)}{(q+1)(r+1)}}(0)\right)^{\frac{2}{r+1}} (E(t) - E(t+1)). \tag{4.37}
$$

Finalement, après l'application du lemme 18 à (4.37), on déduit que

$$
E(t) \le \{E(0)^{-\frac{r-1}{2}} + d_0(t-1)^+\}^{-\frac{2}{r-1}}
$$

où $d_0^{-1} \equiv C^{-1}\dfrac{r-1}{2}\left(1 + E^{\frac{2(r-1)}{r+1}}(0) + E^{\frac{4(qr-1)}{(q+1)(r+1)}}(0)\right)^{-\dfrac{r+1}{2}}$ sur $[0, T[$.

Preuve du théorème 32.

Pour établir l'existence globale, on procède de la même manière que le théorème 31,

On donne seulement la preuve de la stabilité.

Si $E_\Phi(t_0)=0$ pour certains $t_0>0$, alors $E_\Phi(t)=0$, pour tout $t\geq t_0$, nous supposons que $E_\Phi(t)>0$, pour tout $t\geq 0$, sans perte de généralité. On multiplie la premièrere équation de (P) par $E_\Phi\phi' u$, o'u ϕ vérifiant les hypothèses du lemme 34 et on fait une intégration par parties, on obtient, pour tout $0\leq S\leq T$,

$$0=\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}u(u''-\Delta u-\nabla_x\Phi(x).\nabla_x u+g(u')+f(u))\,dx\,dt$$
$$=\Big[E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}uu'\,dx\Big]_S^T-\int_S^T(E'_\Phi\phi'+E_\Phi\phi'')\int_\Omega e^{\Phi(x)}uu'\,dxdt-2\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}u'^2\,dxdt$$
$$+\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}\Big(u'^2+|\nabla u|^2+f(u)u\Big)\,dxdt+\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}ug(u')\,dxdt.$$

On remarque que si $u(t)\in\mathcal{W}_\Phi$, alors les deux fonctionnelles $K_\Phi(u(t))$ and $J_\Phi(u(t))$ sont équivalentes à $\|e^{\frac{\Phi(x)}{2}}\nabla_x u(t)\|_2^2$ par le lemme 38. Ainsi, on a

$$\frac{\alpha+2}{2(\alpha+2)}\int_S^T E_\Phi^2\phi'\,dt\leq-\Big[E_\Phi\phi'\int_\Omega uu'\,dx\Big]_S^T+\int_S^T(E'_\Phi\phi'+E_\Phi\phi'')\int_\Omega e^{\Phi(x)}uu'\,dxdt$$
$$+2\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}u'^2\,dxdt-\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}ug(u')\,dxdt$$
$$\leq-\Big[E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}uu'\,dx\Big]_S^T+\int_S^T(E'_\Phi\phi'+E_\Phi\phi'')\int_\Omega e^{\Phi(x)}uu'\,dxdt$$
$$+2\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}u'^2\,dxdt+c(\varepsilon)\int_S^T E_\Phi\phi'\int_{|u'|\leq 1}e^{\Phi(x)}g(u')^2\,dxdt$$
$$+\varepsilon\int_S^T E_\Phi\phi'\int_{|u'|\leq 1}e^{\Phi(x)}u^2\,dxdt-\int_S^T E_\Phi\phi'\int_{|u'|\geq 1}e^{\Phi(x)}ug(u')\,dxdt$$

pour tout $\varepsilon>0$. Choisissons ε assez petit, on déduit que

$$\int_S^T E_\Phi^2\phi'\,dt\leq-\Big[E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}uu'\,dx\Big]_S^T+\int_S^T(E'_\Phi\phi'+E_\Phi\phi'')\int_\Omega e^{\Phi(x)}uu'\,dxdt$$
$$(4.38)\quad +c\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega u'^2\,dxdt-\int_S^T E_\Phi\phi'\int_{|u'|\geq 1}e^{\Phi(x)}ug(u')\,dxdt$$
$$\leq cE_\Phi(S)+c\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}u'^2\,dxdt.-\int_S^T E_\Phi\phi'\int_{|u'|\geq 1}e^{\Phi(x)}ug(u')\,dxdt$$

où on a utilisé la majoration suivante

$$\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}u^2\,dxdt\ \leq\ Ac_*^2\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega|\nabla_x u|^2\,dxdt$$
$$\leq\ \frac{Ac_*^2}{a}\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}|\nabla_x u|^2\,dxdt$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{\Phi(x)}uu'\,dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega e^{\Phi(x)}u^2\,dx+\frac{1}{2}\int_\Omega e^{\Phi(x)}u'^2\,dx\\ &\leq \frac{1}{2}\left\{1+\frac{Ac_*^2}{a}\right\}E_\Phi(t)\leq\frac{1}{2}\left\{1+\frac{Ac_*^2}{a}\right\}E_\Phi(S),\ S\leq t\leq T.\end{aligned}$$

Aussi, on a

$$\begin{aligned}&\int_S^T E_\Phi\phi'\int_{|u'|>1}e^{\Phi(x)}ug(u')\,dx\,dt\\ \leq\ &\int_S^T E_\Phi\phi'\Big(\int_\Omega e^{\Phi(x)}|u|^{p+1}\,dx\Big)^{1/(p+1)}\Big(\int_{|u'|>1}e^{\Phi(x)}|g(u')|^{\frac{(p+1)}{p}}\,dx\Big)^{p/(p+1)}\\ \leq\ &c_3^{\frac{p}{p+1}}\frac{A^{\frac{1}{p+1}}c_*d_*^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\int_S^T E_\Phi^{3/2}\phi'\Big(\int_{|u'|>1}e^{\Phi(x)}u'g(u')\,dx\Big)^{q/(q+1)}\leq c'\int_S^T\phi'E_\Phi^{3/2}(-E')^{\frac{q}{(q+1)}}\\ \leq\ &c\int_S^T\phi'(E_\Phi^{\frac{3}{2}-\frac{q}{q+1}})\left((-E_\Phi')^{\frac{q}{(q+1)}}E_\Phi^{\frac{q}{q+1}}\right)\\ \leq\ &c'(\varepsilon')\int_S^T\phi'(-E_\Phi'E_\Phi)\,dt+\varepsilon'\int_S^T\phi'E_\Phi^{(q+1)(\frac{3}{2}-\frac{q}{(q+1)})}\,dt\\ \leq\ &c(\varepsilon')E_\Phi(S)^2+\varepsilon'E_\Phi(0)^{(q-1)/2}\int_S^T\phi'E_\Phi^2\,dt\end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon'>0$. Choisissons ε' assez petit, on obtient

$$\int_S^T E_\Phi^2\phi'\,dt\leq cE_\Phi(S)+c\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega u'^2\,dx\,dt$$

On majore maintenant le terme $\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}u'^2\,dxdt$. On a

$$\begin{aligned}\int_S^T E_\Phi\phi'\int_\Omega e^{\Phi(x)}u'^2\,dxdt &= \int_S^T E_\Phi\phi'\int_{\Omega_1}e^{\Phi(x)}u'^2\,dxdt+\int_S^T E_\Phi\phi'\int_{\Omega_2}e^{\Phi(x)}u'^2\,dxdt\\ &+\int_S^T E_\Phi\phi'\int_{\Omega_3}e^{\Phi(x)}u'^2\,dxdt,\end{aligned}\tag{4.39}$$

où, pour $t\geq 1$, on définit

$$\begin{aligned}\Omega_1&:=\{x\in\Omega,\ \ |u'|\leq h(t)\},\\ \Omega_2&:=\{x\in\Omega,\ \ h(t)<|u'|\leq h(1)\},\\ \Omega_3&:=\{x\in\Omega,\ \ |u'|>h(1)\},\end{aligned}$$

et

$$h(t):=g^{-1}(\phi'(t)).$$

h est une fonction positive décroissante et vérifie

$$h(t)\to 0 \text{ lorsque } t\to+\infty.$$

On a

• •

$$
\begin{aligned}
\int_S^T E_\Phi \phi' \int_{\Omega_1} e^{\Phi(x)} u'^2 \, dxdt \quad &\le cA \int_S^T E_\Phi(t)\phi'(t) \left(\int_{\Omega_1} h(t)^2 \, ds \right) dt \\
&\le cE_\Phi(S) \int_S^T \phi'(t)(g^{-1}(\phi'(t)))^2 \, dt \\
&\le cE_\Phi(S).
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

• • Comme g est croissante, si $x \in \Omega_2$, alors

$$\phi'(t) = g(h(t)) \le |g(u')|.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\int_S^T E_\Phi \phi' \int_{\Omega_2} e^{\Phi(x)} u'^2 \, dxdt \quad &\le \int_S^T E_\Phi \int_{\Omega_2} e^{\Phi(x)} |g(u')| u'^2 \, dxdt \\
&\le h(1) \int_S^T E_\Phi \int_{\Omega_2} e^{\Phi(x)} u' g(u') \, dxdt \\
&\le \frac{h(1)}{2} E_\Phi(S)^2.
\end{aligned} \tag{4.41}
$$

• • Comme $g(x) \ge cx$ si $x \ge h(1)$, on a

$$
\begin{aligned}
\int_S^T E_\Phi \phi' \int_{\Omega_3} u'^2 \, dxdt \quad &\le c \int_S^T E_\Phi \phi' \int_\Omega u' g(u') \, dxdt \\
&\le c \int_S^T E_\Phi (-E_\Phi') \, dxdt \\
&\le cE_\Phi(S)^2.
\end{aligned} \tag{4.42}
$$

On déduit de (4.38), (4.39), (4.40), (4.41) et (4.42) qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_S^T E_\Phi^2 \phi' \, dt \le cE_\Phi(S).$$

Donc, en appliquant le lemme 34, on déduit

$$E_\Phi(t) \le \frac{c\ E_\Phi(0)}{\phi(t)}, \qquad \forall t \ge 1.$$

Soit s_0 tel que $g(\frac{1}{s_0}) \le 1$. Comme g est croissante, on a

$$\psi(s) \le 1 + (s-1) \frac{1}{g\left(\dfrac{1}{s}\right)} \le s \frac{1}{g\left(\dfrac{1}{s}\right)} = \frac{1}{G\left(\dfrac{1}{s}\right)} \quad \forall s \ge s_0,$$

donc

$$s \le \phi\left(\frac{1}{G\left(\dfrac{1}{s}\right)} \right).$$

Ainsi
$$\frac{1}{\phi(t)} \leq \frac{1}{s} \quad \text{avec} \quad t := \frac{1}{G\left(\frac{1}{s}\right)},$$
ce qui donne
$$\frac{1}{\phi(t)} \leq G^{-1}\left(\frac{1}{t}\right).$$
Soit $H(x) := \dfrac{g(x)}{x}$, H est une fonction croissante, $H(0) = 0$. Définissons la fonction $h(t)$ par $h(t) := H^{-1}(\phi'(t))$. Comme sur Ω_2
$$\phi'(t)u'^2 \leq |H(u')|u'^2 = u'g(u'),$$
le même raisonnement est valable. Alors, avec
$$\phi^{-1}(t) = 1 + \int_1^t \frac{1}{H\left(\frac{1}{s}\right)}\, ds$$
on obtient
$$E_\Phi(t) \leq c\ E_\Phi(0)\left(g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2.$$

Preuve du théorème 33.

Proposition 37 **(i)** *Si* $\alpha < \dfrac{4}{[n-2]^+}$, *alors*

(4.43) $$\mathcal{W} \text{ est un voisinage ouvert de } 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

(ii) *Si* $u \in \mathcal{W}$, *alors*

(4.44) $$\|\nabla_x u\|_2^2 \leq d_* J(u)$$

avec $d_* = \dfrac{\alpha+2}{\alpha}$.

Preuve du proposition 37.
(i) Grâce à l'inégalité de Sobolev-Poincaré (voir lemme 11), on a

(4.45) $$k_1\|u\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \leq Kk_1\|\nabla_x u\|_2^\alpha \|\nabla_x u\|_2^2$$

Soit
$$U(0) \equiv \left\{u \in H_0^1(\Omega) \Big\backslash \|\nabla_x u\|_2^\alpha < \frac{1}{Kk_1}\right\}.$$
Alors, pour tout $u \in U(0)\backslash\{0\}$, on déduit de (4.45) que
$$k_1\|u\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} < \|\nabla_x u\|_2^2,$$

d'où, $K(u) > 0$. Alors $U(0) \subset W$.
(**ii**) On a

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \|\nabla_x u\|_2^2 - \frac{2k_1}{\alpha+2}\|u\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \\ &\geq \frac{\alpha}{\alpha+2}\|\nabla_x u\|_2^2. \end{aligned}$$

□

Lemme 38 *Soit $u(t)$ solution de Eq. (4.3). Supposons que*

$$u(t) \in \overline{\mathcal{W}} \text{ and } K(u(t)) \geq \frac{1}{2}\|\nabla_x u\|_2^2 \tag{4.46}$$

pour $0 \leq t \leq T$. Alors on a

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\omega t}. \tag{4.47}$$

Preuve du lemme 38
On montre qu'il existe $d \in]0,1[$ et $T_0 > 0$ tels que

$$E(S+T_0) \leq dE(S), \quad \text{for } 0 \leq S \leq T.$$

$$E(S+T_0) \leq dE(S), \quad \forall S \in \mathbb{R}^+. \tag{4.48}$$

En multipliant la première équation de (4.3) par u et on fait une intégration sur

$$\Omega \times [S,T]$$

, on obtient, pour tout $0 \leq S \leq T$,

$$\int_S^T E(t)\,dt \leq a_0(E(S)+E(T)) + a_1(E(S)-E(T)), \tag{4.49}$$

où $a_0, a_1 > 0$. En effet: En multipliant la première équation de (4.3) par u et on fait une intégration sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned} &\|\nabla_x u\|_2^2 + \int_\Omega f(u)u\,dx + \|u'(t)\|_2^2 = 2\|u'(t)\|_2^2 \\ &-\frac{d}{dt}\int_\Omega u'u\,dx - \int_\Omega h(\nabla_x u)\,dx - \int_\Omega g(u')u\,dx \end{aligned} . \tag{4.50}$$

En utilisant (4.6) et la définition de $\mathcal{W}$ on trouve

$$\int_\Omega f(u)u\,dx \leq K_1\|u\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \leq \|\nabla_x u\|_2^2$$

et

$$|J(u(t))| \leq \|\nabla_x u\|_2^2 + \frac{2}{\alpha+2}\|\nabla_x u\|_2^2 \leq \frac{\alpha+4}{\alpha+2}\|\nabla_x u\|_2^2,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}\|\nabla_x u\|_2^2 \leq K(u(t)) \leq 2\|\nabla_x u\|_2^2.$$

On en déduit alors

$$K(u(t)) \geq \frac{1}{2}\|\nabla_x u\|_2^2 \geq \frac{\alpha+2}{2(\alpha+4)}J(u). \tag{4.51}$$

En substituant l'inégalité (4.51) dans (4.50), on obtient

$$\frac{\alpha+2}{2(\alpha+4)}J(u(t)) + \|u'(t)\|_2^2 \leq 2\|u'(t)\|_2^2 - \frac{d}{dt}\int_\Omega u'u\,dx - \int_\Omega h(\nabla_x u)u\,dx - \int_\Omega g(u')u\,dx.$$

Posons $c_1' = \dfrac{\alpha+2}{2(\alpha+4)}$, on a

$$\begin{aligned} c_1'\int_S^T E(t)\,dt \leq\ & 2\int_S^T \|u'(t)\|_2^2\,dt + \int_\Omega u'(S)u(S)\,dx - \int_\Omega u'(T)u(T)\,dx \\ & - \int_S^T\int_\Omega h(\nabla_x u)u\,dx\,dt - \int_S^T\int_\Omega g(u'(t))u\,dx\,dt \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} |<u'(S),u(S)> - <u'(T),u(T)>| & \leq & \|u'(S)\|\|u(S)\| + \|u'(T)\|\|u(T)\| \\ & \leq & \|u'(S)\|_2^2 + \|u(S)\|_2^2 + \|u'(T)\|_2^2 + \|u(T)\|_2^2 \\ & \leq & E(S) + C_*^2 d_* E(S) + E(T) + C_*^2 d_* E(T) \\ & \leq & (1 + C_*^2 d_*)(E(S) + E(T)) \end{array}$$

En utilisant

$$2\int_\Omega u'g(u')\,dx = -E'(t) - 2\int_\Omega u'h(\nabla_x u)\,dx$$

et l'hypothèse (4.6), on obtient

$$\begin{array}{rcl} 2c_1\displaystyle\int_S^T \|u'(t)\|_2^2\,dt & \leq & -\displaystyle\int_S^T E'(t) - 2\int_S^T\int_\Omega u'h(\nabla_x u)\,dx \\ & \leq & E(S) - E(T) + 2\beta\displaystyle\int_S^T \|u'(t)\|_2\|\nabla_x u\|_2\,dt \\ & \leq & E(S) - E(T) + 2\beta\left(\displaystyle\int_S^T \|u'(t)\|_2^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\displaystyle\int_S^T \|\nabla_x u(t)\|_2^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}b^2, \quad \forall a,b \geq 0$$

on trouve

$$(2c_1 - 2\beta\varepsilon)\int_S^T \|u'(t)\|_2^2\,dt \leq E(S) - E(T) + \frac{2\beta}{\varepsilon}d_*\int_S^T E(t)\,dt.$$

On choisit $\varepsilon = \dfrac{c_1}{2\beta}$, on trouve

$$c_1\int_S^T \|u'(t)\|_2^2\,dt \leq E(S) - E(T) + \frac{4\beta^2}{c_1}d_*\int_S^T E(t)\,dt.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\left|\int_S^T\int_\Omega g(u')u\,dx\,dt\right| &\leq c_2\int_S^T \|u'(t)\|_2\|u\|_2\,dt\\ &\leq c_2\left(\int_S^T \|u'(t)\|_2^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_S^T C_s\|\nabla_x u(t)\|_2^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq c_2\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\int_S^T \|u'(t)\|_2^2\,dt + C_s\varepsilon_1\int_S^T \|\nabla_x u(t)\|_2^2\,dt\right),\end{aligned}$$

alors, on obtient des estimations précédentes

$$\begin{aligned}&c_1'\int_S^T E(t)\,dt \leq \frac{2}{c_1}(E(S)-E(T)) + \frac{8\beta^2}{c_1^2}\int_S^T E(t)\,dt\\ &+(1+C_*^2d_*)(E(S)+E(T)) + \beta C_* d_*\int_S^T E(t)\,dt\\ &+\frac{c_2}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{c_1}(E(S)-E(T)) + \frac{4\beta^2}{c_1^2}\int_S^T E(t)\,dt\right)\\ &+c_2C_*^2\varepsilon_1 d_*\int_S^T E(t)\,dt,\end{aligned}$$

on choisit $\varepsilon_1 = \dfrac{c_1'}{2(c_2C_*^2d_*)}$, on trouve

$$\begin{aligned}&\left(\frac{c_1'}{2} - \frac{8\beta^2}{c_1^2} - \beta C_* d_* - \frac{4c_2\beta^2}{\varepsilon_1 c_1^2}\right)\int_S^T E(t)\,dt \leq\\ &\left(\frac{2}{c_1}+\frac{c_2}{\varepsilon c_1}\right)(E(S)-E(T)) + (1+C_*^2d_*)(E(S)+E(T))\end{aligned}$$

En utilisant (4.6), (4.12) et (4.13), on a

$$\begin{aligned}E'(t) &= -2\int_\Omega u'(t)g(u'(t))\,dx - 2\int_\Omega u'(t)h(\nabla_x u)\,dx\\ &\leq 2\beta\|u'(t)\|_2\|\nabla_x u\|_2\\ &\leq \frac{2\beta}{\sqrt{d_*}}\|u'(t)\|_2\sqrt{d_*}\|\nabla_x u\|_2\\ &\leq \frac{\beta}{\sqrt{d_*}}(\|u'(t)\|_2^2 + d_*\|\nabla_x u\|_2^2)\\ &\leq \frac{\beta}{\sqrt{d_*}}E(t)\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$E(t) \leq e^{\frac{\beta}{\sqrt{d_*}}(t-s)}E(s)\ \forall 0\leq s\leq t<+\infty. \tag{4.52}$$

Supposons que $2a_0\dfrac{\beta}{\sqrt{d_*}} < 1$ et fixons $T_0 > \dfrac{-1}{\beta}\ln\left(1-2a_0\dfrac{\beta}{\sqrt{d_*}}\right)$. On pose

$$I = \int_S^{S+T_0} E(t)\,dt + (a_1-a_0)E(S+T_0).$$

Remarquons que $E(t) \geq \frac{\sqrt{d_*}}{\beta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(1-e^{-\frac{\beta}{\sqrt{d_*}}(t-s)}\right)E(t)\right)$, pour tout $0 \leq S \leq T < \infty$.

On montre maintenant que $I \geq a_2 E(S+T_0)$ avec $a_2 > a_0 + a_1$, en effet, on a

$$\begin{aligned} I &\geq \int_S^{S+T_0} \frac{\sqrt{d_*}}{\beta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(1-e^{-\frac{\beta}{\sqrt{d_*}}(t-s)}\right)E(t)\right)dt + (a_1-a_0)E(S+T_0) \\ &\geq \left(\frac{\sqrt{d_*}}{\beta}(1-e^{-\frac{\beta}{\sqrt{d_*}}T_0}\right) + (a_1-a_0))E(S+T_0). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Posons

$$a_2 = \frac{\sqrt{d_*}}{\beta}\left(1-e^{-\frac{\beta}{\sqrt{d_*}}T_0}\right) + (a_1-a_0)$$

On remarque que $a_2 > a_0 + a_1$.

En combinant (4.53) et (4.49), on prend $T = S + T_0$, on obtient (4.48) avec $d = \frac{a_0+a_1}{a_2}$.

Donc pour tout $t \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nT_0 \leq t \leq nT_0 + T_0$, en utilisant (4.52) et la dernière inégalité, on déduit que

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{\beta}{\sqrt{d_*}}e^{\frac{\beta}{\sqrt{d_*}}(t-nT_0)}E(nT_0) \\ &\leq \frac{\beta}{\sqrt{d_*}}e^{\frac{\beta}{\sqrt{d_*}}T_0}d^nE(0) \end{aligned}$$

En plus on a $d^{n+1} \leq d^{\frac{t}{T_0}}$ et

$$E(t) \leq \frac{\beta}{\sqrt{d_*}}e^{\frac{\beta}{\sqrt{d_*}}T_0}\frac{1}{d}d^{\frac{t}{T_0}}E(0).$$

Choisissons $C = \frac{\beta e^{\frac{\beta}{\sqrt{d_*}}T_0}}{\sqrt{d_*}d} > 0$ et $\omega = -\frac{\ln d}{T_0} > 0$, on déduit par la dernière inégalité que

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\omega t} \quad \forall t \in [0, T[.$$

Ceci achève la démonstration du lemme 38.

□

Comme $u_0 \in \mathcal{W}$ et $\mathcal{W}$ est un ensemble ouvert. Soit

$$T_1 = \sup\{t \in [0, +\infty) : u(s) \in \mathcal{W} \text{ pour } 0 \leq s \leq t\},$$

on remarque que $T_1 > 0$ et $u(t) \in \mathcal{W}$ pour $0 \leq t < T_1$. Si $T_1 < T_{\max} < \infty$, où $T_{\max}$ est le temps de vie de la solution, alors $u(T_1) \in \partial\mathcal{W}$, donc

$$K(u(T_1)) = 0 \text{ et } u(T_1) \neq 0. \tag{4.54}$$

On déduit par le lemme 11 que

$$k_1\|u(t)\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \leq \frac{1}{2}B(t)\|\nabla_x u(t)\|_2^2 \tag{4.55}$$

pour $0 \le t \le T_1$, où

$$B(t) = C_4 \|\nabla_x u(t)\|_2^\alpha \tag{4.56}$$

avec $C_4 = 2k_1 c_*^{\alpha+2}$.

On pose alors:

$$T_2 \equiv \sup\{t \in [0,+\infty) : B(s) < 1 \text{ pour } 0 \le s < t\},$$

et on remarque que $T_2 > 0$ and $B(t) < 1$ for $0 \le t \le T_2$ car $B(0) = C_4\|\nabla_x u_0\|_2^\alpha < 1$ par (4.14). Si $T_2 < T_1 (< +\infty)$, alors

$$B(T_2) = 1, \tag{4.57}$$

et

$$\begin{aligned} K(u(t)) &\ge \|\nabla_x u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}B(t)\|\nabla_x u(t)\|_2^2 \\ &\ge \frac{1}{2}\|\nabla_x u(t)\|_2^2 \end{aligned} \tag{4.58}$$

pour $0 \le t \le T_2$. En appliquant le lemme 38, on arrive donc à

$$E(t) \le CE(0)e^{-\omega t} \tag{4.59}$$

pour $0 \le t \le T_2$.

D'après (4.44) et (4.59), on a

$$\begin{aligned} &B(t) \le C_4(d_* J(u(t)))^{\frac{\alpha}{2}} \le C_4(d_* E(t))^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\le C_4 d_*^{\frac{\alpha}{2}} C^{\frac{\alpha}{2}} E(0)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\omega\alpha}{2}t} \le C_4 d_*^{\frac{\alpha}{2}} C^{\frac{\alpha}{2}} E(0)^{\frac{\alpha}{2}} < 1, \end{aligned} \tag{4.60}$$

ce qui contredit (4.57), donc $T_2 \ge T_1$. En plus, (4.54) et (4.58) impliquent

$$K(u(T_1)) \ge \frac{1}{2}\|\nabla_x u(T_1)\|_2^2 > 0,$$

ce qui est une contradiction, donc $T_1 = T_{\max}$ et de là on déduit que (4.59) est vraie pour $0 \le T \le T_{\max}$. Ainsi nous avons prolongé notre solution en une solution globale (i.e., $T_{\max} = \infty$). Ceci achève la démonstration du théorème 33.

□

Remarques:
On peut avoir les mêmes résultats pour le as $\alpha = 0$, mais on aura besoin de quelques modifications sur la proposition 37, dans ce cas le volume de Ω joue un rôle essentiel dans la démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned} J(u(t)) &\ge \|\nabla_x u\|_2^2 - k_1\|u\|_2^2 \\ &\ge \|\nabla_x u\|_2^2 - k_1 c_*^2(\Omega)\|\nabla_x u\|_2^2 \end{aligned}$$

Si on impose la condition suivante condition $k_1 c_*^2(\Omega) < \frac{1}{2}$, on trouve un résultat similaire à (4.44).

Chapitre 5

Stabilisation de l'équation des ondes non dissipative dans $\mathbb{R}^n$

5.1 Introduction

On considère dans ce chapitre le problème de la stabilisation interne de l'équation des ondes avec un terme perturbant d'ordre 1 dans un domaine non borné (l'énergie classique n'est pas nécessairement une fonction décroissante) de la forme

$$(P) \qquad \begin{cases} u'' - \Delta_x u + \lambda^2(x)u + \sigma(t)g(u') + \theta(t)h(\nabla_x u) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \text{ in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue croissante telle que $g(0) = 0, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et λ, σ et θ sont des fonctions positive.

Lorsque $h \equiv 0$,La stabilisation de (P) a été étudiée (lorsque $h \equiv 0$ et $f \equiv 0$) par plusieurs auteurs (voir Nakao **[54]** et **[53]**, Kawashima, Nakao, et Ono **[36]**, Nakao et Narazaki **[55]**, Nakao et Ono **[56]**, Haraux et Zuazua **[31]**, Pucci et Serrin **[59]**, et Zuazua **[66]**).

Dans **[53]**, Nakao a considéré le problème aux limites à valeurs initiales suivant:

$$(P1) \qquad \begin{cases} u'' - \Delta_x u + \rho(u') + f(u) = 0 \text{ in } \Omega \times [0, +\infty[, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

où $\rho(v) = |v|^\beta v, \beta > -1, f(u) = bu|u|^\alpha \alpha, b > 0$ et Ω est un domaine borné non vide de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ de frontière réguliére $\Gamma = \partial\Omega$. Il a montré que le problème $(P1)$ admet une solution globale unique faible si $0 \leq \alpha \leq 2/(n-2), n \geq 3$ ainsi q'une solution globale forte si $\alpha > 2/(n-2), n \geq 3$. Aussi le problème de l'estimation de la vitesse de décroissance a été traité. Dans les deux cas, Nakao a montré que l'énergie associée à la solution décroit polynômialement si $\beta > 0$ et exponentiellement si $\beta = 0$. Ces résultats améliorent des résultats antérieurs obtenus par le même auteur dans [**54**], où les résultats de stabilité sont obtenus uniquement dans le cas $\alpha \leq 2/(n-2), n \geq 3$. Plus tard, et dans un travail conjoint avec Ono [**56**], ces résultats ont été étendus au problème de Cauchy de la forme

$$u'' - \Delta_x u + \lambda^2(x)u + \rho(u') + f(u) = 0$$

où λ a une forme polynomiale. Dans ce cas, les auteurs imposent des conditions de petitesse sur la norme dans $H^1 \times L^2$ des données initiales avec un support compact.

Pour le problème de Cauchy (P) avec $\lambda \equiv 1$ et $\sigma \equiv 1$, lorsque $g(x) = \delta|x|^{m-1}x$ $(m \geq 1)$ Todorova [**64**] (voir aussi [**56**]) a montré que l'énergie satisfait $E(t) \leq (1+t)^{-\frac{2-n(m-1)}{(m-1)}}$ pour $t \geq 0$, elle a utilisé la méthodes des différences finies introduite par Nakao [**50**] avec des données initiales à support compact.

Quand $h \not\equiv 0$, peu de résultats sont connus dans la littérature, les résultats les plus récent dans cette direction ont été obtenus par Guesmia [**25**]. Dans ce travail l'auteur a montré la stabilité uniforme pour le problème (P) lorsque h est nonliéaire et le terme dissipatif est linéaire avec $f \equiv 0$ et la stabilité polynomiale lorsque h est linéaire et g de forme polynomiale.

La présence du terme $h(\nabla u)$ dans le système (P) rend le problème non dissipatif, l'énergie classique E definie par (5.3) associé à l'équation des ondes est non décroissante (voir l'identité (5.15)). La décroissance de l'énergie est essentielle pour établir la stabilité

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier dans $[0, \infty[\times \mathbb{R}^n$ le problème de Cauchy (P) et nous déterminons la vitesse de dcroissance de l'énergie associée aux solutions en combinant la méthode des multiplicateurs et quelques idées dans [**26**] and [**27**] .

Dans le cas où h est linéaire, on introduit une fonction d'énergie équivalente qui est décroissante (voir (5.10)). On prouvera que l'énergie décroit exponentiellement et polynomialement suivant la forme du terme dissipatif en utilisant la méthode des multiplicateurs basée sur le lemme de Haraux-Komornik (see [**37**], Theorem [9.1]).

5.2 Préliminaires et résultats principaux

$\sigma(t)$ et g vérifient les hypothèses suivantes:
$\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de classe C^1 croissante sur $\mathbb{R}_+$.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue croissante telle que

$$g(v)v > 0 \; \forall v \neq 0.$$

On suppose qu'il existe deux constantes $c_3' > 0$ et $c_4' > 0$ telle que

$$c_3'|v| \leq |g(v)| \leq c_4'|v| \tag{5.1}$$

On suppose que h vérifie les hypothèses suivantes:
$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que

$$\nabla h \text{ est borné}$$

et il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$|h(\zeta)| \leq \beta|\zeta|, \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \tag{5.2}$$

Maintenant, on rappelle deux lemmes connues et utiles pour la suite.

Lemme 39 *Soit q un nombre réel avec $2 \leq q < +\infty$ $(n = 1, 2)$ ou $2 \leq q \leq 2n/(n-2)$ $(n \geq 3)$, alors il existe une constante $c_* = c(q)$ telle que*

$$\|u\|_q \leq c_* \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \quad \textit{pour} \quad u \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Lemme 40 (Gagliardo-Nirenberg) *Soient $1 \leq r < p \leq +\infty$ et $p \geq 2$. alors il existe une constante positive $c_* = c(p, q, r)$ telle que*

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla_x^m u\|_2^\theta \|u\|_r^{1-\theta} \quad \textit{pour} \quad u \in \mathcal{D}((-\Delta)^{\frac{m}{2}}) \cap L^r$$

avec

$$\theta = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{m}{n} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

pourvu que $0 < \theta \leq 1$ (on suppose $0 < \theta < 1$ si $m - \frac{n}{2}$ est un entier positif).

Nous définissons l'énergie du problème (P) par:

$$E(t) = \|u'\|_2^2 + \|\nabla_x u\|_2^2 + \|\lambda(x)u\|_2^2. \tag{5.3}$$

Posons $\tilde{d}(t) = d(L + t)$, où la constante L étant le radius du support des données initiales: $suppu_0 \cup suppu_1 \subset \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < L\}$.

Nous avons le théorème d'existence locale suivant.

Theorème 41 *Soit $1 < p \leq \dfrac{n+2}{n-2}$ $(1 < p < \infty$ si $n = 1, 2)$. Alors pour toute donné initiale $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ le problème (P) admet une solution unique u sur $\mathbb{R}^n \times [0, T)$ vérifiant*

$$u(t, x) \in C([0, T); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T); L^2(\mathbb{R}^n))$$

pour T assez petit.

Remarque 42 *La propriété de la vitesse de propagation finie signifie que si supp $u_0 \cup$ supp $u_1 \subset \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < L\}$ pour certain $L > 0$, alors $suppu(t) \subset \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < L + t\}$. Ainsi, $d(|x|) \geq d(L + t) \equiv \tilde{d}(t)$ sur $\{x \in \mathbb{R}^n, |x| < L + t\}$.*

1) Si $\sigma(t) = \mathcal{O}(\tilde{d}(t)), \theta(t) \leq c\sigma(t)$ et

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|\sigma'(t)|}{\tilde{d}'(t)\sigma(t)} = 0,$$

nous supposons que

$$\int_0^\infty \sigma(\tau)\,d\tau = +\infty \tag{5.4}$$

2) Si $\tilde{d}(t) = \mathcal{O}(\sigma(t)), \theta(t) \leq c\frac{\tilde{d}(t)}{\sigma(t)}$ et

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|\tilde{d}'(t)|}{\dfrac{\tilde{d}^2(t)}{\sigma(t)}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{|\sigma'(t)|}{\dfrac{\tilde{d}^2(t)}{\sigma(t)}} = 0,$$

nous supposons que

$$\int_0^\infty \frac{\tilde{d}^2(\tau)}{\sigma(\tau)}\,d\tau = +\infty. \tag{5.5}$$

Nous avons le théorème suivant.

Theorème 43 *Soit* $(u_0, u_1) \in H^1 \times L^2$. *nous avons les cas suivants*

- $\sigma(t) = \mathcal{O}(\tilde{d}(t))$

  Supposons les hypothèses (5.4) et (5.2). Alors le problème (P) *admet une solution unique* u *sur* $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ *vérifiant*

$$u(t,x) \in C([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n))$$

En plus l'énergie $E(t)$ *vérifie les etimations suivantes:*

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)}\omega(h(t))e^{\tilde{\lambda}(t)-\tilde{\lambda}(h(t))}e^{-\int_0^{h(t)}\omega(\tau)\,d\tau}, \tag{5.6}$$

- $\tilde{d}(t) = \mathcal{O}(\sigma(t))$

  Supposons les hypothèses (5.5) et (5.2) vérifiées. Alors le problème (P) *admet une solution unique* u *sur* $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ *vérifiant*

$$u(t) \in C([0,\infty); H^1) \cap C^1([0,\infty); L^2).$$

En plus l'énergie $E(t)$ *vérifie les etimations suivantes:*

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)}\omega(h(t))e^{\tilde{\lambda}(t)-\tilde{\lambda}(h(t))}e^{-\int_0^{h(t)}\omega(\tau)\,d\tau}, \tag{5.7}$$

Maintenant, On considère le problème (P) lorsque $h(\nabla u) = -\nabla\Phi.\nabla u, \theta \equiv 1$ et $\lambda \equiv 1$, où Φ est une fonction telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi(x)}\,dx < \infty.$$

On suppose qu'il existe des constantes $C_i > 0$; $i = 1,2,3,4$ telles que

$$c_3'|v|^m \leq |g(v)| \leq c_4'|v|^{\frac{1}{m}} \text{ si } |v| \leq 1 \tag{5.8}$$

(5.9) $$c_1|v| \leq |g(v)| \leq c_2|v|^r \text{ si } |v| \geq 1$$

où $m \geq 1$ et $1 \leq r \leq \dfrac{n+2}{(n-2)^+}$.

Nous définissons l'énergie du problème (P) par:

(5.10) $$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi}(|u'|^2 + |\nabla_x u|^2 + |u|^2)\, dx.$$

Nous supposons que

(5.11) $$\int_0^\infty \sigma(\tau)\, d\tau = +\infty \text{ si } m = 1$$

(5.12) $$\int_0^\infty (1+\tau)^{-\frac{n(m-1)}{2}} \sigma(\tau)\, d\tau = +\infty \text{ si } m > 1$$

Theorème 44 *Soit $(u_0, u_1) \in H^1 \times \in L^2(\mathbb{R}^n)$, nous avons les cas suivants*

Supposons les hypothèses (5.8), (5.9) et (5.11). Alors le problème (P) admet une solution unique u sur $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ vérifiant

$$u(t) \in C([0,\infty); H^1) \cap C^1([0,\infty); L^2)$$

En plus l'énergie $E(t)$ vérifie les etimations suivantes:

(5.13) $$E(t) \leq E(0) exp\left(1 - \omega \int_0^t \sigma(\tau)\, d\tau\right) \quad \forall t > 0.$$

Supposons les hypothèses (5.8), (5.9) et (5.12). Alors le problème (P) admet une solution unique u sur $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ vérifiant

$$u(t) \in C([0,\infty); H^1) \cap C^1([0,\infty); L^2)$$

En plus l'énergie $E(t)$ vérifie les estimations suivantes:

(5.14) $$E(t) \leq \left(\frac{C(E(0))}{\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{n(m-1)}{2}} \sigma(\tau)\, d\tau}\right)^{\frac{2}{(m-1)}} \qquad \forall t > 0.$$

- 1) Si $\sigma(t) = \dfrac{1}{t^\theta}$, en appliquant le théorème 44, on a

$$E(t) \leq E(0) e^{1-\omega t^{1-\theta}} \quad \text{if } m = 1.$$

et

$$E(t) \leq C(E(0))(1+t)^{-\frac{2-n(m-1)-2\theta}{m-1}} \quad \text{si } 1 < m < 1 + \frac{2-2\theta}{n}, 0 < \theta < 1.$$

$$E(t) \leq C(E(0))(\ln t)^{-\frac{2}{m-1}} \quad \text{if } m = 1 + \frac{2-2\theta}{n}, 0 < \theta < 1$$

- 2) Si $\sigma(t) = \dfrac{1}{t^\theta \ln t \ln_2 t \dots \ln_p t}$, en appliquant le théorème 44, on a

$$E(t) \le E(0)(\ln_p t)^{-\omega} \quad \text{si } m = 1 \text{ and } \theta = 1.$$

par exemple si $\dfrac{n(m-1)}{2} + \theta = 1$, i.e $1 < m < 1 + \frac{2}{n}$

$$E(t) \le C(E(0))(\ln_p t)^{-\frac{2}{m-1}}$$

En multipliant la première équation de (P) par u', intégration sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$E'(t) = 2\sigma(t) \int_{\mathbb{R}^n} g(u_t(t))u_t(t)\, dx - 2\theta(t) \int_{\mathbb{R}^n} u_t(t)h(\nabla_x u)\, dx \tag{5.15}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve

$$E' \le 2\beta\theta(t)E(t).$$

Dans la démonstration des résultats, nous avons utilisé souvent l'inégalité suivante:

$$\|u(t)\|_2 \le \frac{1}{\tilde{d}(t)} \|\lambda(x)u(t)\|_2. \tag{5.16}$$

Preuve du théorème 43 .
Si $E(t_0) = 0$ pour certains $t_0 > 0$, alors $E(t) = 0$, pour tout $t \ge t_0$, nous supposons que $E(t) > 0$, pour tout $t \ge 0$, sans perte de généralité. On multiplie la premièrere équation de (P) par $E^q\phi' u$, où ϕ vérifiant les hypothèses du lemme 21 et on fait une intégration par parties, on obtient, pour tout $0 \le S \le T$,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} u(u'' - \Delta u + \lambda^2(x)u + \sigma(t)g(u') + \theta(t)h(\nabla_x u))\, dx\, dt \\
&= \left[E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} uu'\, dx\right]_S^T - \int_S^T (qE'E^{q-1}\phi' + E^q\phi'') \int_{\mathbb{R}^n} uu'\, dxdt - 2\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} u'^2\, dxdt \\
&\quad + \int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} \left(u'^2 + |\lambda u|^2 + |\nabla u|^2\right) dxdt + \int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(t)ug(u')\, dxdt \\
&\quad + \int_S^T E^q\phi'\theta(t) \int_{\mathbb{R}^n} uh(\nabla_x u)\, dxdt.
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_S^T E^{q+1}\phi'\, dt &\le -\left[E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} uu'\, dx\right]_S^T + \int_S^T (qE'E^{q-1}\phi' + E^q\phi'') \int_{\mathbb{R}^n} uu'\, dxdt \\
+2\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} u'^2\, dxdt &- \int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(t)ug(u')\, dxdt - \int_S^T E^q\phi'\theta(t) \int_{\mathbb{R}^n} uh(\nabla_x u)\, dxdt
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'ingalité de Young, on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(t)ug(u')\,dxdt &\leq \varepsilon \int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^2(x)u^2\,dxdt + c(\varepsilon)\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\lambda^2(x)} g^2(u')\,dxdt \\
&\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} E^{q+1}\phi'\,dt + c(\varepsilon)\int_S^T E^q\phi' \frac{\sigma(t)}{\tilde{d}^2(t)} \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(t)u'g(u')\,dxdt \\
&\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} E^{q+1}\phi'\,dt + c(\varepsilon)\int_S^T E^q\phi' \frac{\sigma(t)}{\tilde{d}^2(t)}(-E' - 2\theta(t)\int_{\mathbb{R}^n} u'h(\nabla_x u)\,dx)\,dt
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} u'^2\,dxdt &\leq c\int_S^T E^q\phi' \frac{1}{\sigma(t)} \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(t)u'g(u')\,dxdt \\
&\leq \int_S^T E^q\phi' \frac{1}{\sigma(t)}(-E' - 2\theta(t)\int_{\mathbb{R}^n} u'h(\nabla_x u)\,dx)\,dt
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

Définissons la fonction ϕ par

$$\phi(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\,d\tau. \tag{5.19}$$

ϕ est une fonction croissante de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, qui satisfait grâce à l'hypothèse (5.4)

$$\phi(t) \to +\infty \text{ as } t \to +\infty. \tag{5.20}$$

Alors, on obtient en utilisant (5.18)

$$
\begin{aligned}
\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} u'^2\,dxdt &\leq c\int_S^T E^q(-E')\,dt + 2c\int_S^T E^q\theta(t)\int_{\mathbb{R}^n} |u'||h(\nabla_x u)|\,dx \\
&\leq cE^{q+1}(S) + 2c\beta\int_S^T E^{q+1}\theta(t)\,dt
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

Si $\theta(t) \leq c\sigma(t)$, i.e $\theta(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$ plus vite que $\sigma(t)$, on déduit de (5.21) que

$$\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} u'^2\,dxdt \leq cE^{q+1}(S) + 2c\beta\int_S^T E^{q+1}\phi'(t)\,dt \tag{5.22}$$

Si $\sigma(t) \leq c(\tilde{d}(t))$, i.e $\sigma(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$ plus vite que $\tilde{d}(t)$, on déduit de (5.17) que

$$
\begin{aligned}
\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(t)ug(u')\,dxdt &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} E^{q+1}\phi'\,dt + c(\varepsilon)E^{q+1}(S) + 2c\beta\int_S^T E^{q+1}\theta(t)\,dt \\
&\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} E^{q+1}\phi'\,dt + c(\varepsilon)E^{q+1}(S) + 2c\beta\int_S^T E^{q+1}\phi'(t)\,dt
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

$$\int_S^T E^q\phi'\theta(t)\int_{\mathbb{R}^n} uh(\nabla_x u)\,dxdt \leq \beta\int_S^T E^{q+1}\phi'\theta(t)\frac{1}{\tilde{d}(t)}\,dt \tag{5.24}$$

Si $\theta(t) \leq c(\tilde{d}(t))$, i.e $\theta(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$ plus vite que $\tilde{d}(t)$, on déduit de (5.24) que

$$\int_S^T E^q\phi'\theta(t)\int_{\mathbb{R}^n} uh(\nabla_x u)\,dxdt \leq c\beta\int_S^T E^{q+1}\phi'\,dt.$$

On a aussi les estimations suivantes

$$\begin{aligned} E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} uu'\,dx &\leq E^q \frac{\phi'}{\tilde{d}(t)} \|\lambda u\|_2 \|u'\|_2 \\ &\leq cE^{q+1}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_S^T qE'E^{q-1}\phi' \int_{\mathbb{R}^n} uu'\,dxdt &\leq \int_S^T q|E'|E^q \frac{\phi'}{\tilde{d}(t)}\,dt \\ &\leq \int_S^T E^q(-E'(t) + c\beta\theta(t)E)\,dt \\ &\leq cE^{q+1}(S) + c\beta \int_S^T E^{q+1}\phi'\,dt \end{aligned}$$

Supposons à présent que $|\sigma'(t)| \leq \varepsilon'\sigma(t)\tilde{d}(t)$, alors on a

$$\begin{aligned} \left| \int_S^T E^q\phi'' \int_{\mathbb{R}^n} uu'\,dxdt \right| &\leq \int_S^T E^{q+1} \frac{|\sigma'(t)|}{\tilde{d}(t)}\,dt \\ &\leq \varepsilon' \int_S^T E^{q+1}\phi'\,dt \end{aligned}$$

Définissons la fonction ϕ par

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{\tilde{d}^2(\tau)}{\sigma(\tau)}\,d\tau. \tag{5.25}$$

ϕ est une fonction croissante de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. Si on a $\theta(t) \leq c\frac{\tilde{d}^2(t)}{\sigma(t)}$ et $\tilde{d}(t) \leq \sigma(t)$, alors par (5.5), on obtient les mêmes estimations que (5.22) and (5.23).

Supposons maintenant que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|\tilde{d}'(t)|}{\frac{\tilde{d}^2(t)}{\sigma(t)}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{|\sigma'(t)|}{\frac{\tilde{d}^2(t)}{\sigma(t)}} = 0,$$

alors on a

$$\begin{aligned} \left| \int_S^T E^q\phi'' \int_{\mathbb{R}^n} uu'\,dxdt \right| &\leq \int_S^T E^{q+1} \left[\frac{2\tilde{d}(t)|\tilde{d}'(t)|}{\sigma(t)} + |\sigma'(t)| \left(\frac{\tilde{d}(t)}{\sigma(t)} \right)^2 \right] dt \\ &\leq \varepsilon' \int_S^T E^{q+1}\phi'\,dt. \end{aligned}$$

On obtient des estimations précédentes

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{q+1}\phi'\,dt \leq CE^{q+1}(S) + C'E^{q+1}(T) \\ &E' \leq 2\beta\theta(t)E(t) \end{aligned}$$

Soit $E_1 = E \circ \phi^{-1}$ (notons que ϕ^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$). Alors

$$\begin{aligned} &\int_S^T E_1^{q+1}\,dt \leq CE_1^{q+1}(S) + C'E_1^{q+1}(T) \\ &E_1' \leq \lambda(t)E_1(t) \end{aligned}$$

où

$$\lambda(t) = 2\beta \frac{\theta \circ \phi^{-1}}{\phi' \circ \phi^{-1}}.$$

Ainsi, on obtient (5.6) et (5.7) avec $\tilde{\lambda}(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau$ et $\omega = \frac{1}{a}$ tels que

$$a(s) = \frac{a_1(s) + a_2(s)(d(s))^p(s) + a_3(s)(d(s))^r(s)}{1 - a_3(r+1)\sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\}}.$$

Preuve du théorème 44.

Si $E(t_0) = 0$ pour certains $t_0 > 0$, alors $E(t) = 0$, pour tout $t \geq t_0$, nous supposons que $E(t) > 0$, pour tout $t \geq 0$, sans perte de généralité. On multiplie la premièrere équation de (P) par $E^q \phi' e^{\Phi} u$, o'u ϕ vérifiant les hypothèses du lemme 21 et on fait une intégration par parties, on obtient, pour tout $0 \leq S \leq T$,

$$0 = \int_S^T E^q \phi' \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} u(u'' - \Delta u + u - \nabla\Phi\nabla u + \sigma(t) g(u'))\, dx\, dt$$
$$= \left[E^q \phi' \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} u u'\, dx\right]_S^T - \int_S^T (qE'E^{q-1}\phi' + E^q \phi'') \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} u u'\, dxdt - 2\int_S^T E^q \phi' \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} u'^2\, dxdt$$
$$+ \int_S^T E^q \phi' \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} \left(u'^2 + |u|^2 + |\nabla u|^2\right)\, dxdt + \int_S^T E^q \phi' \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(t) e^{\Phi} u g(u')\, dxdt.$$

Nous avons

$$2\int_S^T E^{q+1}\phi'\, dt \leq -\left[E^q \phi' \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} u u'\, dx\right]_S^T + \int_S^T (qE'E^{q-1}\phi' + E^q \phi'') \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} u u'\, dxdt$$
$$+2\int_S^T E^q \phi' \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} u'^2\, dxdt - \int_S^T E^q \phi' \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(t) e^{\Phi} u g(u')\, dxdt$$
$$\leq -\left[E^q \phi' \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} u u'\, dx\right]_S^T + \int_S^T (qE'E^{q-1}\phi' + E^q \phi'') \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} u u'\, dxdt$$
$$+2\int_S^T E^q \phi' \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} u'^2\, dxdt + c(\varepsilon)\int_S^T E^q \phi' \int_{|u'|\leq 1} e^{\Phi} g(u')^2\, dxdt + \varepsilon \int_S^T E^q \phi' \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} u^2\, dxdt$$
$$+ \int_S^T E^q \phi' \int_{|u'|\geq 1} \sigma(t) e^{\Phi} u g(u')\, dxdt$$

pour $\varepsilon > 0$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'ingalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^q\phi' \int_{|u'|>1} \sigma(t)e^\Phi u g(u')\,dxdt \\
&\leq \int_S^T E^q\phi'\sigma(t)\left(\int_\Omega e^\Phi |u|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{1}{(r+1)}}\left(\int_{|u'|>1} e^\Phi |g(u')|^{\frac{(r+1)}{r}}\,dx\right)^{\frac{r}{(r+1)}} dt \\
&\leq c\int_S^T E^{\frac{2q+1}{2}}\phi'\sigma^{\frac{1}{r+1}}(t)\left(\int_{|u'|>1}\sigma(t)e^\Phi u'g(u')\,dx\right)^{\frac{r}{(r+1)}} dt \leq \int_S^T \phi'\sigma^{\frac{1}{r+1}}(t)E^{\frac{2q+1}{2}}(-E')^{\frac{r}{(r+1)}}\,dt \\
&\leq c(\varepsilon')\int_S^T (-E')\,dt + \varepsilon'\int_S^T \phi'^{r+1}\sigma(t)E^{(r+1)(\frac{2q+1}{2})}\,dt \\
&\leq c(\varepsilon')E(S) + \varepsilon'\sigma^{r+1}(0)E(0)^{\frac{(2rq+r-1)}{2}}\int_S^T \phi' E^{q+1}\,dt
\end{aligned}$$

pour $\varepsilon' > 0$. Ainsi, en choisissant ε and ε' suffisament petit, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{q+1}\phi'\,dt \leq -\left[E^q\phi'\int_{\mathbb{R}^n} e^\Phi uu'\,dx\right]_S^T + \int_S^T (qE'E^{q-1}\phi' + E^q\phi'')\int_{\mathbb{R}^n} e^\Phi uu'\,dxdt \\
&+\int_{|u'|\geq 1}\sigma(t)e^\Phi ug(u')\,dxdt + c\int_S^T E\phi'\int_{\mathbb{R}^n} e^\Phi u'^2\,dxdt \\
&\leq cE(S) + c\int_S^T E\phi'\int_{\mathbb{R}^n} e^\Phi u'^2\,dxdt.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Or $xg(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors l'énergie E est décroissante et localement absolument continue, et par conséquent elle est dérivable presque partout et $E'(t) = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\sigma(t)e^\Phi u'g(u')\,dx$ dans $\mathbb{R}_+$. En utilisant la définition de E et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on déduit que:

$$\begin{aligned}
-\left[E^q\phi'\int_{\mathbb{R}^n} e^\Phi uu'\,dx\right]_S^T &= E^q(S)\phi'(S)\int_{\mathbb{R}^n} e^\Phi u(S)u'(S)\,dx - E^q(T)\phi'(T)\int_{\mathbb{R}^n} e^\Phi u(T)u'(T)\,dx \\
&\leq C\mu E^{q+1}(S)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left|\int_S^T (qE'E^{q-1}\phi' + E^q\phi'')\int_{\mathbb{R}^n} e^\Phi uu'\,dxdt\right| &\leq c\mu\int_S^T q|E'|E^q\,dt + \int_S^T E^{q+1}(-\phi''(t))\,dt \\
&\leq c\mu E^q(S) + cE^{q+1}\int_S^T(-\phi''(t))\,dt \\
&\leq c\mu E^q(S)
\end{aligned}$$

Preuve de (5.13).
Le cas $m = 1$ i.e.

$$c_3|v| \leq |g(v)| \leq c_4|v| \text{ for all } |v| \leq 1.$$

Alors on a

$$u'^2 \leq \frac{c_{13}}{\sigma(t)}u'\rho(t,u') \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.27}$$

où $\rho(t,s) = \sigma(t)g(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Donc on déduit de (5.26) (appliquer avec q=0) que

$$\int_S^T E(t)\phi'(t)\,dt \leq CE(S) + 2C\int_S^T \phi'(t)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\sigma(t)}e^\Phi u'\rho(t,u')\,dx\,dt \tag{5.28}$$

Définissons la fonction ϕ par

$$\phi(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\, d\tau. \tag{5.29}$$

ϕ est une fonction croissante de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. qui satisfait grâce à l'hypothèse (5.11)

$$\phi(t) \to +\infty \text{ lorsque } t \to +\infty. \tag{5.30}$$

Alors on déduit de (5.28)

$$\int_S^T E(t)\phi'(t)\, dt \le CE(S) + 2C \int_S^T \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} u'\rho(t,u')\, dx\, dt \le 3CE(S). \tag{5.31}$$

En utilisant le Lemme 21, on en déduit l'estimation

$$E(t) \le E(0)e^{(1-\phi(t))/(3C)} \tag{5.32}$$

Preuve de (5.14).

Cas $m > 1$ dans (5.8). Define ϕ by (5.29). On applique le lemme 21 avec $q = \dfrac{(m-1)}{2}$.

On majore le terme

$$\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} u'^2\, dx\, dt$$

On fixe $t \ge 0$ et on pose

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, |u'| \le 1\} \text{ et } \Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n, |u'| > 1\}$$

Pour tout $t \ge 0$, on a

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{R}^n.$$

On utilise Hyp.2 on trouve, pour tout $t \ge 0$,

$$\begin{aligned}
&\text{si } x \in \Omega_1, \text{ alors } u'^2 \le \left(\frac{1}{\sigma(t)} u'\rho(t,u')\right)^{\frac{2}{(m+1)}} \\
&\text{si } x \in \Omega_2, \text{ alors } u'^2 \le \frac{1}{\sigma(t)} u'\rho(t,u')
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} u'^2\, dx\, dt \\
\le\ & 2\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi}\frac{1}{\sigma(t)} u'\rho(t,u')\, dx\, dt + 2\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma(t)} u'\rho(t,u')\right)^{\frac{2}{(m+1)}} dx\, dt \\
\le\ & 2\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sigma(t)} e^{\Phi} u'\rho(t,u')\, dx\, dt + 2\int_S^T E^q\phi' \frac{1}{\sigma(t)^{\frac{2}{m+1}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{m-1}{m+1}\Phi}\left(e^{\Phi} u'\rho(t,u')\right)^{\frac{2}{(m+1)}} dx\, dt \\
\le\ & 2\int_S^T E^q\phi' \int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi}\frac{1}{\sigma(t)} u'\rho(t,u')\, dx\, dt + 2\int_S^T E^q\phi' \frac{1}{\sigma(t)^{\frac{2}{m+1}}} (\int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi}\, dx)^{\frac{m-1}{m+1}} (-E')^{\frac{2}{(m+1)}}\, dt \\
\le\ & cE(S)^{1+q} + c'\int_S^T E^q\phi' \frac{1}{\sigma(t)^{\frac{2}{m+1}}} (-E')^{\frac{2}{m+1}}\, dt.
\end{aligned}$$

(5.33)

En utilisant la définition de q, ϕ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}&\int_S^T E^q \phi' \int_{\mathbb{R}^n} u'^2 \, dx \, dt \\ &\leq cE(S)^{1+q} + \varepsilon \int_S^T E^{1+q} (\phi')^{\frac{m+1}{m-1}} \sigma(t)^{-\frac{2}{m-1}} \, dt + c(\varepsilon) E(S).\end{aligned} \tag{5.34}$$

Choisissons la fonction ϕ telle que

$$\phi'^{\frac{2}{m-1}} \sigma^{-\frac{2}{m-1}} = 1$$

Ainsi

$$\phi(t) = \int_0^t \sigma(s) ds$$

Alors on déduit de (5.23)

$$\int_S^T E^{1+q} \phi' \, dt \leq 2CE(S),$$

En utilisant le lemme 21, on en déduit l'estimation

$$E(t) \leq \frac{C}{\phi(t)^{\frac{2}{(m-1)}}}.$$

Bibliography

[1] N. Amroun & A. Benaissa, *Some remarks on global existence to the Cauchy problem of the wave equation with nonlinear dissipation,* Math. Nachr. **281** (2008)-12, 1694-1707.

[2] V. Barbu, Analysis and control of nonlinear infinite-dimensional systems, Academic Press, New York, (1993).

[3] C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary,* SIAM J. Control Optim. **30** (1992)-5, 1024-1065.

[4] A. Benaissa & L. Rahmani, *Global existence and energy decay of solutions for Kirchhoff-Carrier equation with weakly nonlinear dissipation,* Bulletin of the Belgium Mathematical Society, Simon Stevin,**11** (2004)-4,547-574 .

[5] A. Benaissa & M. S. Messaoudi, *Blowup of solutions of a quasilinear wave equation with nonlinear dissipation,* Journal of Partial Differential Equations **15** (2002)-3, 61-67.

[6] A. Benaissa & S. A. Messaoudi, *Blow-up of solutions for the Kirchhoff equation of q-Laplacian type with nonlinear dissipation,* Colloq. Math. **94** (2002)-1, 103-109.

[7] A. Benaissa & A. Guesmia, *Energy decay for wave equations of ϕ-Laplacian type with weakly nonlinear dissipation,* Electron. J. Differential Equations **2008** (2008)-109, 1-22.

[8] A. Benaissa & S. Mokeddem, *Decay estimates of solutions to the Cauchy problem for a wave equation with a bounded nonlinear dissipation,* Z. Anal. Anwend. **27** (2008)-2, 179-194.

[9] A. Benaissa & S. Mokeddem, *Global existence and energy decay of solutions to the Cauchy problem for a wave equation with a weakly nonlinear dissipation,* Abstr. Appl. Anal., **2004** (2004)-11, 935-955.

[10] A. Benaissa, S. Benazzouz, *Energy decay of solutions to the Cauchy problem for a nondissipative wave equation,* J. Math. Phys. **51**, (2010)-12, 123504.

[11] H. Brezis, Analyse fonctionnelle et application, Ed Masson (1983).

[12] M. M. Cavalcanti, N. A. Larkin & J. A. Soriano, *On solvability and stability of solutions ofnonline ar degenerate hyperbolic equations with boundary damping,* Funkcial. Ekvac., **41** (1998), 271289.

[13] F. Conrad, B. Rao, *Decay of solutions of the wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback,* Asymptotic Anal. **7** (1993)-3, 159-177.

[14] F. Conrad & M. Pierre, *Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedbacks,* Ann. Inst. Henri Poincaré, **11** (1994)-5, 485-515.

[15] C. M. Dafermos, *Asymptotic behavior of solutions of evolution equations,* in "Nonlinear Evolution Equations", M. G. Crandall Ed., Academic Press, New York, (1978), 103-123.

[16] J. Dieudonné, Calcul infinitésimal, Collection Methodes, Herman, Paris, 1968.

[17] D. Erden & V. K. Kalantarov, *A remark on nonexistence of global solutions to quasi-linear hyperbolic and parabolic equations,* Applied Mathematics Letters, **15** (2002), 585-590.

[18] M. Eller, J. E. Lagnese & S. Nicaise, *Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping,* Computational. Appl. Math., **21** (2002), 135-165.

[19] V. Georgiev & G. Todorova, *Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms,* J. Diff. Equat. **109** (1994), 295-308.

[20] J. Ginibre & G. Velo, *The global Cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation,* Math. Z. **189** (1985), 487-505.

[21] A. Guesmia, *Une nouvelle approche pour la stabilisation des systmes distribus non dissipatifs,* C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **332** (2001)-7, 633-636.

[22] A. Guesmia, *Nouvelles inégalités intégrales et application à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs,* C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **336** (2003)-10, 801-804.

[23] A. Guesmia, *Inégalités intégrales et application à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs,* J. Math. Pures. Appl., submitted.

[24] A. Guesmia & S. A. Messaoudi, *Decay estimates of solutions of a nonlinearly damped semilinear wave equation,* Ann. Polon. Math. **85** (2005)-1, 25-36.

[25] A. Guesmia, *A new approach of stabilization of nondissipative distributed systems,* SIAM J. Control Optim. **42** (2003)-1, 24-52.

[26] A. Guesmia, *Existence globale et stabilisation frontière non linéaire d'un système d'élasticité,* Portugal. Math., **56** (1999), pp. 361379.

[27] A. Gucsmia, *On linear elasticity systems with variable coefficients,* Kyushu J. Math., **52** (1998), 227248.

[28] A. Guesmia, *Une nouvelle approche pour la stabilisation des systmes distribués non dissipatifs,* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math., **332** (2001), 633636.

[29] A. Haraux, *Two remarks on dissipative hyperbolic problems,* in: Research Notes in Mathematics, Pitman, 1985, p. 161-179.

[30] A. Haraux, *Oscillations forcées pour certains systèmes dissipatifs non linéaires.* Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique N0. 78010 (1978), Université Pierre et Marie Curie, Paris.

[31] A. Haraux & E. Zuazua, *Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems,* Arch. Ration. Mech. Anal., **100** (1988), 191206.

[32] R. Ikehata, *Some remarks on the wave equations with nonlinear damping and source terms,* Nonlinear Analysis **27** (1996), 1165-1175.

[33] R. Ikehata & T. Suzuki, *Stable and unstable sets for evolution equations of parabolic and hyperbolic type,* Hiroshima Math. J. **26** (1996)-3, 475491.

[34] H. Ishii, *Asymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations,* J. Diff. Equat. **26** (1977), 291-319.

[35] F. John, *Nonlinear wave equation, formation of singularities,* Pitcher Lect. Math. Providence, RI: Am. Math. Soc. 1989.

[36] S. Kawashima, M. Nakao & K. Ono, *On decay property ofsolutions to the Cauchy problem ofthe semilinear wave equation with a dissipative term,* J. Math. Soc. Japan, **47** (1995), 617653.

[37] V. Komornik, Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method, Masson-John Wiley, Paris, 1994.

[38] V. Komornik & E. Zuazua, *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation* , J. Math. Pures Appl. **69** (1990)-1, 33-54.

[39] J. Lagnese, *Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation,* J. Differential Equations **50** (1983)-2, 163-182.

[40] J. Lagnese, J. L. Lions, *Modelling analysis and control of thin plates,* Recherches en Mathématiques Appliquées, **6**. Masson, Paris, (1988).

[41] I. Lasiecka, R. Triggiani, *Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometrical conditions,* Appl. Math. Optim. **25** (1992)-2, 189-224.

[42] I. Lasiecka, D. Tataru, *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping,* Differential Integral Equations **6** (1993)-3, 507-533.

[43] J. L. Lions & E. Magenes, Problèmes aux limites non homognes et applications, Vols 1 & 2, Dunod, Paris (1968).

[44] P. Martinez, *A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems,* ESAIM Control Optim. Calc. Var., **4** (1999), 419-444.

[45] S. A. Messaoudi, *Decay ofthe solution energy for a nonlinearly damped wave equation,* Arabian. J. Sci. Eng. Scct. A Sci., **26** (2001), 6368.

[46] S. A. Messaoudi, *Energy decay of solutions of a semilinear wave equation,* International Journal of Applied Mathematics. **2** (2000), 1037-1048.

[47] K. Mochizuki & T. Motai, *On energy decay problems for wave equations with nonlinear dissipation term in* $\mathbb{R}^n$, J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 405-421.

[48] M. Nakao & K. Ono, *Existence of global solutions to the Cauchy problem for semilinear dissipative wave equations,* Math. Z. **214** (1993), 325-342.

[49] M. Nakao, *Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with a nonlinear dissipative term,* J. Math Anal. Appl. **58** (1977), 336-343.

[50] M. Nakao, *A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equations,* J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), 747-762.

[51] M. Nakao, *Energy decay of the wave equation with a nonlinear dissipative term,* Funkcial. Ekvac. **26** (1983)-3, 237-250.

[52] M. Nakao, *An example of nonlinear wave equation whose solutions decay faster than exponentially,* J. Math. Anal. Appl., **122** (1987), 260-264.

[53] M. Nakao, *Remarks on the existence and uniqueness of global decaying solutions of the nonlinear dissipative wave equations,* Math. Z., **206** (1991), 265-2276.

[54] M. Nakao, *Decay ofsolutions ofsome nonlinear evolution equations,* J. Math. Anal. Appl., **60** (1977), 542549.

[55] M. Nakao & T. Narazaki, *Existence and decay ofsolutions ofsome nonlinear wave equations in noncylindrical domains,* Math. Rep., **11** (1978), 117125.

[56] M. Nakao & K. Ono, *Global existence to the cauchy problem ofthe semilinear wave equation with a nonlinear dissipation,* Funkcialaj Ekvacioj, **38** (1995), 417431.

[57] M. Nakao, *On the decay of solutions of some nonlinear dissipative wave equations in higher dimensions*, Math. Z. **193** (1986), 227-234.

[58] L. Paync & D. H. Sattingcr, *Saddle points and instability on nonlinear hyperbolic equations,* Israel Math. J. **22** (1981), 273-303.

[59] P. Pucci & J. Serrin, *Asymptotic stability for nonautonomous dissipative wave systems,* Comm. Pure Appl. Math., **49** (1996), 177216.

[60] D. H. Sattinger, *On global solution of nonlinear hyperbolic equations,* Arch. Rat. Mech. Anal. **30** (1968), 148-172.

[61] W. A. Strauss, *On continuity of functions with values in various Banach spaces,* Pac. J. Math. **19** (1966), 543-551.

[62] W. A. Strauss, *Nonlinear wave equations,* CBMS Reg. Conf. Ser. Math. Providence, RI: Am. Math. Soc. (1989).

[63] M. Slemrod, *Weak asymptotic decay via a "elaxed invariance principle" for a wave equation with nonlinear, nonmonotone damping*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **113** (1989)-1-2, 87-97.

[64] G. Todorova, *Stable and unstable sets for the Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms,* J. Math. Anal. Appl. **239** (1999), 213-226.

[65] J. Vancostenoble, *Weak asymptotic stability of second-order evolution equations by nonlinear and nonmonotone feedbacks,* SIAM J. Math. Anal. **30** (1999)-1, 140-154.

[66] E. Zuazua, *Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems,* Asymptot. Anal., **1** (1988), 161185.

Résumé

Mon mémoire de Magister intitulé " Etude de décroissance de l'énergie pour certains systèmes distribués et inégalités de différences finies'' à comme sujet l'étude de l'existence et de comportement asymptotique en temps des solutions de certaines équations d'évolution non lineaires.

Dans les préliminaires, on rappelle des définitions et des résultats utile pour notre travail.
Ces résultats concernent essentiellement les espaces de Sobolev, les injections de Sobolev et les inégalités de différences finies et les inégalités intégrale avec poids. On rappelle aussi les types de stabilité et des résultats généraux connus dans la littérature et appliquées pour certaines équations dissipatives.Dans le chapitre quatre, on considère l'équation des ondes nondissipative avec un terme de source dans un domaine borné. On montre l'existence globale de la solution dans des espaces de Sobolev et on détermine la vitesse de décroissance de l'énergie associée aux solutions. Dans le chapitre cinq, on considère l'équation des ondes nondissipative dans un domaine non borné. On établit la vitessse de décroissance de l'énergie des solutions. On obtient des résultats intéressants et nouveaux. On utilise de nouvelles inégalités intégrales avec poids.

mots clés: Equations d'évolution non linéaires, Existence globale, stabilisation, Systèmes non dissipatif, Méthode de Galerkin, Méthode de différences finies, Méthode des multiplicateurs.

Abstract

My memory of Magister is devoted to the study of global existence, asymptotic behaviour in time of solutions to nonlinear evolution equations.
This work consists of five chapters:
In chapter 2 we give some preliminaries about some functional spaces in particular Sobolev spaces and some inequalities (Sobolev injections).
In chapter 3, we give some difference inequalities of Nakao type and some extention. Nakao inequalitie are useful to study the asymptotic behavior of evolution equations of parabolic and hyperbolic type, we give also some inequalities of integral type, A. Haraux was the first who introduced this type of inequalities, after, Haraux inequalities were generalized by many authors
In chapter 4, we consider the initial boundary value problem for the nondissipative wave equation with source term of the type. We prove global existence and stabilization.

In chapter 5, we consider the Cauchy problem for the nondissipative wave equation. We give an estimate of the energy decay of solutions.

Key words: nonlinear evolution equations, global existence, stability, non-dissipative systems, Galerkin method, finite difference method, method of multipliers.

الملخص

المذكرة التي بين أيديكم تحمل عنوان : **"دراسة تناقص الطاقة لبعض النظم الموزعة ومتباينات الفروق المحدودة"** ، مثل موضوع دراسة وجود والسلوك التقاربي بدلالة الزمن لحلول بعض دوال التطور غير الخطية.
في البداية : نذكر بالتعاريف و النتائج المستعملة في هذا العمل، هذه النتائج تخص بالأساس : فراغات سوبولاف ، متباينات سوبولاف ، متباينات الفروق المحدودة مع الأوزان ، كما نذكر أيضا بحالات الإستقرار والنتائج المعروفة وتطبيقاتها على بعض المعادلات المبددة.
في الفصل الرابع : نعتبر معادلات الأمواج غير مبددة مع مصطلح مصدر في مجال محدود ، نبرهن وجود الحل الكلي في فراغات سوبولاف ونعين سرعة تناقص الطاقة المرتبطة بالحلول .
في الفصل الخامس : نعتبر معادلة الأمواج غير مبددة في مجال غير محدود ، نؤسس سرعة تناقص الطاقة المرتبطة بالحلول ، تحصلنا على نتائج مهمة وجديدة استعملنا فيها نتائج جديدة تخص متباينات التكامل مع الأوزان .

الكلمات المفتاحية : معادلات التطور غير الخطية ، الوجود الكلي ، الإستقرار ، النظم غير المبددة ، طريقة كالاركين ، طريقة الفروق المحدودة ، طريقة المضاعفات.