



République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Aboubekr Belkaid– Tlemcen
Faculté de Technologie
Département De génie mécanique

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de magistère en génie mécanique
Option : Dynamique des machines

Thème

MODÈLE ÉLÉMENT FINI DE COQUE VALABLE POUR L'ANALYSE LINÉAIRE DES STRUCTURES MÉCANIQUES

Réalisé par :

Mr. SARI Mohammed

Soutenu le : 2010

Devant le jury composé de :

Président :	Dr. BOURDIM Abdelghafour	<i>Maître de conférences Université de Tlemcen</i>
Examineur :	Dr. AID Abdelkrim	<i>Maître de conférences Université de Mascara</i>
Examineur :	Dr. MEFTAH Khouane	<i>Maître de conférences Université de Tlemcen</i>
Encadreur :	Dr. HAMMADI Fodil	<i>Maître de conférences Université de Bechar</i>
Co Encadreur:	Dr. HADJOUI Abdelhamid	<i>Maître de conférences Université de Tlemcen</i>

Table des matières

Notations	4
Liste des Figures.....	6
Liste des Tableaux.....	7
Chapitre I. Introduction générale.....	8
I.1. Contexte	8
I. 2. Objectifs et plan du mémoire	9
1.2.1 Objectifs	9
1.2.2 Plan du mémoire.....	10
Chapitre II. Etude et modélisation des milieux continus.....	11
II.1. Introduction	11
II.2. Formulation générale de la mécanique des milieux continus.....	11
II.2.3. Propriétés métriques : dilatations et déformations	14
II.2.4. Expression de $[E]$ en fonction des déplacements	14
II.2.5. Hypothèses des petits déplacements et petites déformations.....	15
II.2.6. Contraintes et équations d'équilibre :	16
II.2.6.1. Contrainte de Cauchy :	16
II.2.6.2. Équation d'équilibre:	17
II.2.7. Principe des travaux virtuels et loi de comportement.....	18
II.2.7.1. Expressions du Principe des travaux virtuels (P.T.V).....	18
II.2.7.2. Loi de comportement.....	20
II.3. Discrétisation par éléments finis.....	21
II.3.1. Introduction	21
II.3.2. Modélisation par éléments finis.....	21
Chapitre III. Modèle élément fini de coque SHELL16	23
III.1. Élément fini de membrane Q4WT	23
III.1.1. Introduction	23
III.1.2. Bibliographie des éléments finis de membrane.....	23
III.1.3. Matrice de rigidité et vecteur force de l'élément Q4WT	24
III.1.3.1. Champs de déplacement :	25
III.1.3.2. Matrice $[k_m]$ et le vecteur $\{f_{nm}\}$:	25
III.1.3.3. Conditions à satisfaire pour Q4WT:.....	27
III.1.3.4. Remarque:	28

III.2. Elément fini de plaque DKQ8 ([3], [4]).....	28
III.2.1. Introduction	28
III.2.2. Bibliographie des éléments finis de plaque.....	29
III.2.3. Elément fini de plaque en flexion DKQ8.....	31
III.2.4. Matrice de rigidité de l'élément de plaque DKQ8	31
III.3. Elément fini de coque plan SHELL16	36
III.3.1. Bibliographie des éléments finis des plaques/coque	36
III.3.2 Matrice de rigidité et vecteur des charges équivalentes de l'élément SHELL16..	37
Chapitre IV. Application numérique	41
IV.4.1. Hémisphère sous charges diamétralement opposées.	42
IV.4.2. Panneau cylindrique soumis à son poids propre.	47
IV.4.3. Cylindre pincé avec diaphragmes	52
Chapitre V. Conclusion	57
Références bibliographiques	59

Notations

[E]	Tenseur de Green Lagrange
$[\sigma]$	Tenseur de contrainte de Cauchy
C^0	Configuration initiale
C	Configuration à l'instant t
x, y, z	Coordonnées
u, v, w	Composantes cartésiennes
\vec{u}	Vecteur déplacement
[F]	Tenseur gradient de déformation
[I]	Matrice identité
[L]	Tenseur gradient déplacement
[D]	Tenseur déformation
{D}	Vecteur déformation
[W]	Tenseur rotation
[Q]	Matrice rotation
$u_{,x}, v_{,y}, w_{,z}$	Dérivée partielle suivant x, y et z
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Rotation autour des axes x, y et z
[ε]	Tenseur déformation
{ ε }	Vecteur déformation
\vec{n}	Norme d'un point
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	Base cartésienne du repère global fixe
S	Frontière
V	Volume
P.T.V	Principe des travaux virtuels
\forall	Quel que soit
W	Travail virtuel global
W_{int}	Travail virtuel interne
W_{ext}	Travail virtuel externe
div	Divergence
tr	Trace de la matrice
\vec{f}_v, \vec{f}_s	Vecteur de forces volumique et de surface

[H]	Matrice de comportement élastique
[B]	Matrice reliant les déformations aux variables nodales
[C]	Matrice de souplesse
$\{\sigma\}$	Vecteur de contrainte
E	Module de Young
ν	Coefficient de poisson
N_i	Fonction d'interpolation
P_i	Polynôme
α	Paramètre du mode quadratiques
[J ₀]	Matrice jacobienne
V^e	Volume élémentaire
[K]	Matrice de rigidité globale
[k]	Matrice de rigidité élémentaire
[K] ^e	Matrice de rigidité élémentaire
< >	Matrice ligne
[]	Matrice
[] ⁻¹	Matrice inverse
[] ^T	Matrice transposé
{ }	Vecteur
N_i	Fonction de forme
ddl	Degrés de liberté
NDLT	Nombre de ddl total
∂f	Dérivée partielle
$d\vec{x}$	Vecteur élémentaire
β_x et β_y	Champs de rotation
M_x, M_y	Moments
CT	Cisaillement transverse

Liste des figures

Figure I. 1: Structures minces de types coque.....	9
Figure II. 1: Mouvement d'un corps dans un système cartésien.....	12
Figure II. 2 : Vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}^0$	12
Figure II. 3 : Facette de normale n	16
Figure II. 4 : Composante du tenseur $[\sigma]$	17
Figure II. 5 : Vecteur contrainte sur S_f	18
Figure III. 1 : Élément Q4WT.....	25
Figure III. 2 : Géométrie de l'élément DKQ8.....	32
Figure III. 3 : Élément de plaque/coque SHELL16.....	38
Figure IV. 1 : Deux types de maillages A et B pour éléments triangulaires.....	42
Figure IV. 2 : Hémisphère pincé - Données.....	43
Figure IV. 3 : Hémisphère pincé – convergence de $U_A (=V_B)$ en fonction de N	45
Figure IV. 4 : Hémisphère pincé – convergence de $U_A (=V_B)$ en fonction de NDL_{Total}	45
Figure IV. 5 : Hémisphère pincé – Déformée.....	46
Figure IV. 6 : Panneau cylindrique soumis à son poids propre.....	47
Figure IV. 7 : Convergence de W_B et W_C en fonction de nombre d'éléments.....	50
Figure IV. 8 : Convergence de W_B et W_C en fonction de NDL total.....	51
Figure IV. 9 : Cylindre pincé avec diaphragmes.....	52
Figure IV. 10 : Convergence de W_C et V_D en fonction du nombre d'éléments.....	55
Figure IV. 11 : Convergence de W_C et V_D en fonction du $NDLT$	56

Liste des tableaux

Tableau IV 1 : Déplacement $U_A (= V_B)$	44
Tableau IV 2 : Déplacement W au point B	48
Tableau IV 3 : Déplacement W au point C	49
Tableau IV 4 : Efforts N_y au point B et M_x au point C	49
Tableau IV 5 : Déplacement W_C (W_C (référence) = 164.24)	53
Tableau IV 6 : Déplacement VD (VD (référence) = 4.114).....	54
Tableau IV 7 : Efforts N_x au point C - (valeur de référence $N_{xC} = -RN_{xC}/P$, $N_{xC} = 18.6$ [49]).	54

Introduction générale

I.1. Contexte

S'il est un domaine qui a connu des bouleversements importants depuis plusieurs années, c'est bien celui du calcul scientifique et du calcul des structures en particulier. Jusqu'à la fin des années 60, la règle à calcul est l'unique outil, associé aux tables logarithmiques et de trigonométrie, les aides mémoires et ouvrages de référence sur la résistance des matériaux et des structures. Au milieu des années 1960, apparaissent les premières publications sur la méthode des éléments finis. Depuis cette époque, la méthode n'a cessé de se développer en symbiose avec l'évolution des moyens informatiques. Tous les secteurs industriels (automobile, ferroviaire, aéronautique, génie civil,...) sont concernés par les techniques de modélisation par éléments finis.

Les analyses effectuées sont toujours plus complexes non seulement dans les domaines technologiques avancés, mais dans tous les secteurs industriels. Ces études approfondies se justifient par la nécessité:

- d'améliorer la réalisation de nouvelles conceptions, la définition des structures, la prévision et l'exploitation des essais,
- d'aider à l'élaboration et à l'optimisation des procédés de fabrication industrielle,
- de mettre en place des outils de simulation relatifs aux lois de comportement des structures impliquant des non linéarités diverses (grands déplacements, grandes déformations, contact,...)
- de mettre en place des outils de modélisation relatifs aux développement et l'évaluation des nouveaux modèles impliquant des méthodes pour le calcul des structures de types poutres, plaques et coques isotropes ou composites en présence de la linéarité et la non linéarité (géométriques ou matérielles).

Le développement d'éléments finis simples et efficaces a connu un essor considérable dans le domaine de la mécanique. Ce développement a pour but d'analyser le comportement des structures complexes, en particulier les structures minces de type coques (Figure I.1) qui constituent une grande partie des constructions industrielles (mécaniques, civiles, aéronautiques,..).

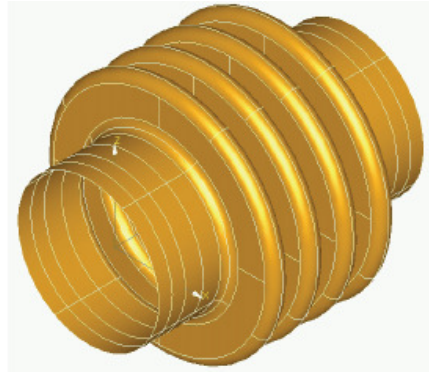


Figure I. 1: Structures minces de types coque.

Des progrès considérables, aussi bien théoriques que pratiques, sont accomplis ainsi un très grand nombre d'éléments, ont été développés pour l'analyse des structures dans le milieu statique et dynamique, linéaire ou non-linéaire.

Si ce domaine de modélisation a atteint une maturité certaine il n'en demeure pas moins que des améliorations demeurent possibles et que les travaux de recherche restent importants (estimations d'erreurs, améliorations de la robustesse, de l'efficacité, de la précision et des possibilités de modélisation,...). C'est dans cet esprit que nous avons mené une étude de nature théorique et numérique en s'inspirant des travaux existants pour porter une contribution significative. Notre travail portera, par la suite, sur la présentation et l'évaluation d'un modèle élément fini de type coque valable pour l'analyse linéaire statique des structures de types plaques et coques isotropes en petites déformations.

1. 2. Objectifs et plan du mémoire

1.2.1 Objectifs

La formulation des éléments finis de plaque/coque est un sujet très important. Un très grand nombre d'articles sur les éléments finis de plaque/coque a été publié [3], [4], [49],...

Les éléments finis de coque se classent en trois types :

- éléments courbes géométriquement surbaissés ou non (approche curviligne)
- éléments isoparamétriques dégénérés (approche 3D dégénérée) ;
- éléments plats (approche par facettes planes).

Plusieurs éléments finis de coques et de plaques ont été proposés à partir de 1968 permettant d'obtenir des solutions numériques des problèmes de plaques minces en accord avec les

hypothèses de Kirchhoff. C'est dans ce contexte que notre travail se situe et qui s'articule autour de la formulation et la validation d'un modèle élément fini de coque (**Un éléments quadrilatère à 8 nœuds dans chaque noeud 3 ddl de type translations aux nœuds sommets et un ddl de type rotation aux nœuds milieux**), nommé SHELL16). Ce modèle est basé sur une approche dite facette plane, et obtenue par juxtaposition d'un élément de membrane de Wilson et Taylor nommé Q4WT ([16] et [134]) et d'un élément de plaque de Batoz et al. nommé (DKQ8 ([3] et [4])). La formulation adaptée, dans notre étude, est basée sur la théorie des plaques du premier ordre en utilisant les hypothèses de Kirchhoff sous formes discrètes (Cisaillement transverse négligeable).

1.2.2 Plan du mémoire

Le mémoire résumant ce travail est structuré en cinq chapitres. L'introduction générale, ainsi que l'objectif, ont été traitées dans le présent chapitre.

Dans le second chapitre, on s'appliquera à présenter, de façon aussi générale que possible les équations vérifiées par les milieux continus. On introduira les différents tenseurs associés aux mesures cinématiques et mécaniques et qui seront nécessaires à notre étude. Dans ce chapitre on présentera aussi les démarches suivies pour la modélisation éléments finis des milieux continus.

En s'inspirant des relations établies dans le chapitre deux, un modèle élément fini quadrilatère de type coque a huit nœud, nommé SHELL16, a été mis place dans le chapitre trois. Ce chapitre comporte trois parties : La première est consacrée à la présentation d'un modèle élément fini de membrane noté Q4WT, la deuxième est destinée à la formulation d'un élément quadrilatère de plaque DKQ8 publié récemment par Batoz et al. [3] et la dernière comporte la nouvelle construction de l'élément de coque SHELL16.

Le quatrième chapitre est destiné à la vérification de la formulation théorique et l'évaluation des caractéristiques de convergence, les performances, l'efficacité et la précision pour la validation du modèle présenté au chapitre précédent par application d'une série de tests standards issue de la littérature. Des résultats relatifs à la rapidité de convergence seront aussi donnés et des comparaisons seront faites avec d'autres éléments.

Enfin, le cinquième chapitre dégage les conclusions générales sur quelques points de ce travail en indiquant les aspects qui peuvent faire l'objet de recherches futures. Nous terminons par une liste bibliographique qui demeurera par la suite aux chercheurs intéressés par ce domaine.

Etude et modélisation des milieux continus

II.1. Introduction

Ce chapitre est destiné à poser les bases importantes de la mécanique des milieux continus, les lois de comportement élastiques et la modélisation par éléments finis des milieux continus.

II.2. Formulation générale de la mécanique des milieux continus

De nombreux ouvrages traitent la mécanique des milieux continus [134, 137,...]. Notre exposé qui suit est largement inspiré du cours de mécanique des milieux continus de S. Dubigeon [136] et des travaux de magistère de W. Anane [135].

Cette partie débute par la description du problème de mécanique des milieux continus qui nous conduit à la définition de plusieurs tenseurs parmi lesquels le tenseur de Green Lagrange $[E]$ et le tenseur de contrainte de Cauchy $[\sigma]$. L'introduction de ces tenseurs dans la loi fondamentale de la statique fait apparaître l'équation d'équilibre locale de la structure. On déduit l'expression du Principe des Travaux Virtuels qui traduit le milieu continu.

Soit un solide qui se déplace dans un système de coordonnées cartésiennes (Figure II.1) et soit un point p^o de ce solide dans la configuration C^o (de coordonnées x^o, y^o, z^o) et un point p (de coordonnées x, y, z) dans la configuration C .

Entre ces deux points nous avons la relation suivante :

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u} \quad (2.1)$$

Sous forme matricielle :

$$\{x\} = \{x_0\} + \{u\}$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Où u, v et w sont les composantes cartésiennes du vecteur déplacement entre C^o et C .

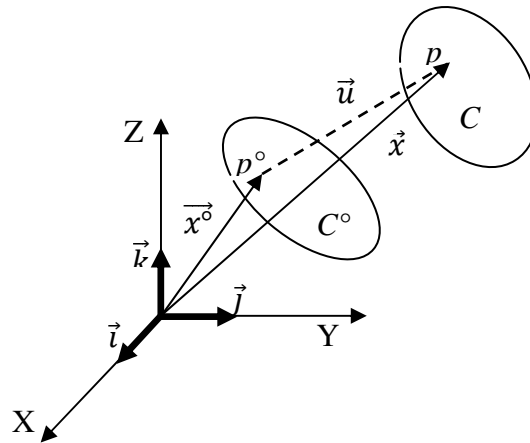


Figure II. 1: Mouvement d'un corps dans un système cartésien

Dans le repère global, on définit le tenseur gradient de transformation [F] par la relation qui permet d'associer à un vecteur élémentaire dx , dans la configuration C , un vecteur élémentaire dx° , dans la configuration initiale.

Considérons une particule $q^\circ \in C^\circ$ infiniment voisine de p° et q sa position à l'instant t , nous avons (Figure II.2) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Op^\circ} &= \overline{x^\circ} & \overrightarrow{Op} &= \overline{x} \\ \overrightarrow{Oq^\circ} &= \overline{x^\circ} + d\overline{x^\circ} & \overrightarrow{Oq} &= \overline{x} + d\overline{x} \end{aligned}$$

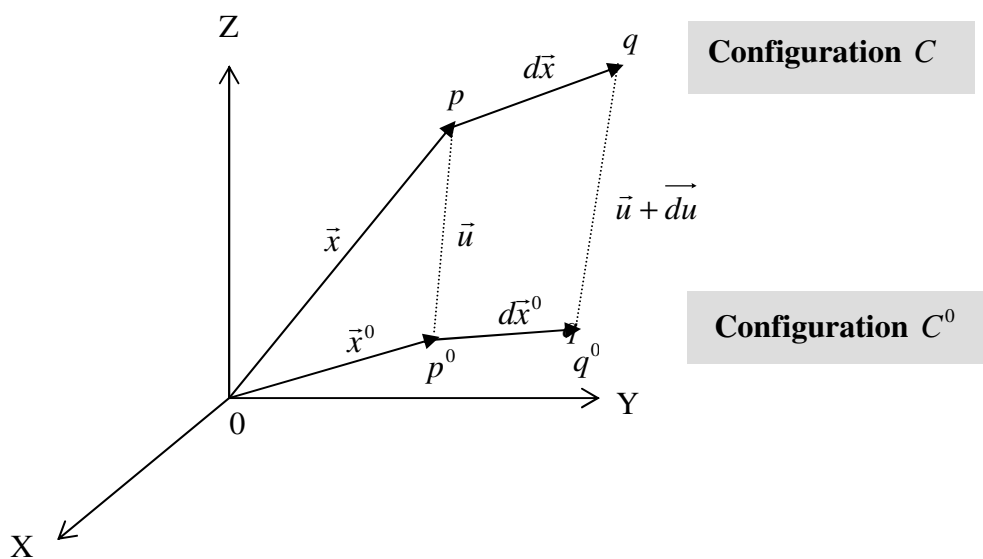


Figure II. 2 : Vecteurs $d\overline{x}$ et $d\overline{x}^\circ$

La relation qui relie le vecteur élémentaire $d\vec{x}$ au vecteur $d\vec{x}^\circ$ est :

$$\{dx\} = [F] \{dx^\circ\} \quad (2.2)$$

Avec :

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^\circ} & \frac{\partial x}{\partial y^\circ} & \frac{\partial x}{\partial z^\circ} \\ \frac{\partial y}{\partial x^\circ} & \frac{\partial y}{\partial y^\circ} & \frac{\partial y}{\partial z^\circ} \\ \frac{\partial z}{\partial x^\circ} & \frac{\partial z}{\partial y^\circ} & \frac{\partial z}{\partial z^\circ} \end{bmatrix}; \langle dx \rangle = \langle dx \ dy \ dz \rangle; \langle dx^\circ \rangle = \langle dx^\circ \ dy^\circ \ dz^\circ \rangle$$

En utilisant la relation (2.1), [F] peut s'écrire :

$$[F] = [I] + \left[\frac{\partial u}{\partial x^\circ} \right] \begin{bmatrix} 1 + u_{,x^0} & u_{,x^0} & u_{,z^0} \\ v_{,x^0} & 1 + v_{,y^0} & v_{,z^0} \\ w_{,x^0} & w_{,y^0} & 1 + w_{,z^0} \end{bmatrix} = [I] + [L] \quad (2.3)$$

Avec [L] est le tenseur gradient de déplacement :

$$[L] = \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}^\circ} \right] \quad (2.4)$$

Cette matrice peut être décomposée en une matrice symétrique [D] et une matrice antisymétrique [W], à savoir :

$$[L] = \frac{1}{2} ([L] + [L]^T) + \frac{1}{2} ([L] - [L]^T) = [D] + [W] \quad (2.5)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} u_{,x^0} & \frac{1}{2}(u_{,y^0} + v_{,x^0}) & \frac{1}{2}(u_{,z^0} + w_{,x^0}) \\ & v_{,y^0} & \frac{1}{2}(v_{,z^0} + w_{,y^0}) \\ \mathbf{sym} & & w_{,z^0} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_x \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

[D] est le tenseur de déformations réelles. [W] est le tenseur des rotations réelles θ_x , θ_y et θ_z caractérisent les rotations infinitésimales autour des axes x, y et z et ne produise aucune déformation dans le cas des petits déplacements (cas linéaire).

II.2.1. Propriétés métriques : dilatations et déformations

Deux particules distantes de $ds^\circ = \|\mathbf{d}\vec{x}^\circ\|$ dans l'état non déformé deviennent distantes de $ds = \|\mathbf{d}\vec{x}\|$ dans l'état déformé.

En utilisant l'équation (2.2), deux relations peuvent être obtenues à partir des distances ds° et ds :

$$(ds)^2 = \langle \mathbf{d}\mathbf{x} \rangle \{ \mathbf{d}\mathbf{x} \} = \langle \mathbf{d}\mathbf{x}^\circ \rangle [\mathbf{F}]^T [\mathbf{F}] \{ \mathbf{d}\mathbf{x}^\circ \} \quad (2.8)$$

Le changement de la longueur de l'élément $\mathbf{d}\vec{x}^\circ$ est :

$$(ds)^2 - (ds^\circ)^2 = \langle \mathbf{d}\mathbf{x}^\circ \rangle ([\mathbf{F}]^T [\mathbf{F}] - [\mathbf{I}]) \{ \mathbf{d}\mathbf{x}^\circ \} \quad (2.9)$$

Cette quantité fournit une mesure de la déformation du corps au point p :

- Si $(ds)^2 - (ds^\circ)^2 = 0$ les déformations au point p sont nulles, la fibre $\mathbf{d}\vec{x}^\circ$ a subi un mouvement de corps rigide (translation et rotation) caractérisé par une matrice de rotation $[\mathbf{Q}]$.
- Si $(ds)^2 - (ds^\circ)^2 \neq 0$ la fibre $\mathbf{d}\vec{x}^\circ$ a subi une rotation et une élongation qui caractérise l'état de déformation au point p .

La quantité $(ds)^2 - (ds^\circ)^2 \neq 0$ définit ainsi une mesure de déformation au point p , dite déformation de Green Lagrange :

$$(ds)^2 - (ds^\circ)^2 = 2 \langle \mathbf{d}\mathbf{x}^\circ \rangle [\mathbf{E}] \{ \mathbf{d}\mathbf{x}^\circ \} \quad (2.10)$$

avec
$$[\mathbf{E}] = \frac{1}{2}([\mathbf{F}]^T [\mathbf{F}] - [\mathbf{I}]) \quad (2.11)$$

$[\mathbf{E}]$ est la fonction linéaire et quadratique des gradients de déplacements.

II.2.2. Expression de $[\mathbf{E}]$ en fonction des déplacements

Le déplacement \vec{u} de la particule p° est défini par la (figure II.2) :

$$\vec{u} = \overrightarrow{p^\circ p} \quad (2.12)$$

Il est possible d'exprimer le tenseur gradient de déformation $[\mathbf{F}]$ et le tenseur de Green Lagrange $[\mathbf{E}]$ à partir de tenseur gradient de déplacement $[\mathbf{L}]$, on a en effet :

$$\{dx\} = \{dx_0\} + \{du\} = [I] \{dx^\circ\} + [L] \{dx^\circ\} \quad (2.13)$$

En utilisant les relations (2.3) et (2.11), le tenseur de Green Lagrange [E] devient:

$$[E] = \frac{1}{2}([L]^T + [L]) + [L]^T[L] \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} E_{xx} &= u_{,x^\circ} + \frac{1}{2}((u_{,x^\circ})^2 + (v_{,x^\circ})^2 + (w_{,x^\circ})^2) \\ E_{yy} &= u_{,y^\circ} + \frac{1}{2}((u_{,y^\circ})^2 + (v_{,y^\circ})^2 + (w_{,y^\circ})^2) \\ E_{zz} &= u_{,z^\circ} + \frac{1}{2}((u_{,z^\circ})^2 + (v_{,z^\circ})^2 + (w_{,z^\circ})^2) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} E_{xy} &= \frac{1}{2}(u_{,y^\circ} + v_{,x^\circ}) + \frac{1}{2}(u_{,x^\circ} u_{,y^\circ} + v_{,x^\circ} v_{,y^\circ} + w_{,x^\circ} w_{,y^\circ}) \\ E_{xz} &= \frac{1}{2}(u_{,z^\circ} + w_{,x^\circ}) + \frac{1}{2}(u_{,x^\circ} u_{,z^\circ} + v_{,x^\circ} v_{,z^\circ} + w_{,x^\circ} w_{,z^\circ}) \\ E_{yz} &= \frac{1}{2}(v_{,z^\circ} + w_{,y^\circ}) + \frac{1}{2}(u_{,y^\circ} u_{,z^\circ} + v_{,y^\circ} v_{,z^\circ} + w_{,y^\circ} w_{,z^\circ}) \end{aligned}$$

[E] est une fonction linéaire et quadratique des gradients des déplacements.

II.2.3. Hypothèses des petits déplacements et petites déformations

L'hypothèse des petites déformations est vérifiée si les termes de la matrice-associée $[L]^T[L]$ de l'équation (2.14) sont petits devant l'unité, c'est-à-dire:

$$(u_{,x})^2, (u_{,x} \cdot u_{,y^\circ}), \dots \approx \Delta^2 \ll 1.$$

En tenant compte de ces hypothèses (petites déformations et des rotations infinitésimales), l'équation (2.14) devient :

$$[E] \approx [D] = \frac{1}{2}([L]^T + [L]) \quad (2.16)$$

La matrice [E] est symétrique et s'annule pour tout mouvement de corps rigide.

$$[E] \approx [D] = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ \mathbf{sym} & E_{yy} & E_{yz} \\ & & E_{zz} \end{bmatrix} ; \quad \{E\} = \{D\} = \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ E_{xy} \\ E_{xz} \\ E_{yz} \end{Bmatrix}$$

Pour la suite de notre étude, les matrices [D] et {D} seront notées par [ε] et {ε}.

II.2.4. Contraintes et équations d'équilibre :

Cette partie est relative à la description de l'état de contraintes d'une configuration C soumise à des sollicitations surfaciques ou volumiques, statiques et dynamiques. Les contraintes et les équations d'équilibre en coordonnées cartésiennes sont présentées.

II.2.4.1. Contrainte de Cauchy :

Considérant la force $\Delta \vec{f}$ qui s'exerce sur un élément de surface Δs de normale \vec{n} au point p dans la configuration C (figure II.3).

Le vecteur des contraintes au point p est défini par le postulat de Cauchy :

$$\vec{\sigma} (p, \vec{n}) = \vec{\sigma} (\vec{n}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{f}}{\Delta s} \right) \quad (2.17)$$

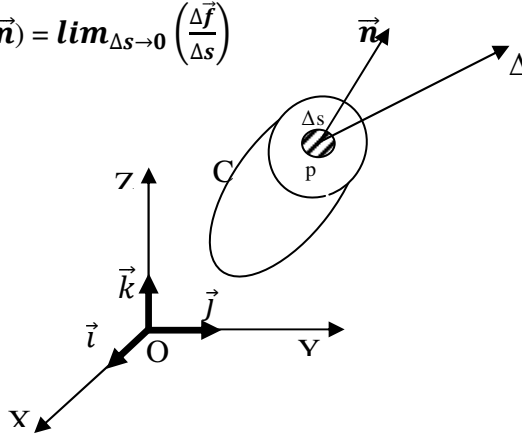


Figure II. 3 : Facette de normale \vec{n}

Soit $\vec{\sigma}(\vec{i})$, $\vec{\sigma}(\vec{j})$ et $\vec{\sigma}(\vec{k})$ les vecteurs contraints agissant sur les facettes de normale \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} du repère cartésien X, Y et Z.

Leurs composantes sont définies de la manière suivante en coordonnées cartésiennes.

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(\vec{i}) &= \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{yx}\vec{j} + \sigma_{zx}\vec{k} \\ \vec{\sigma}(\vec{j}) &= \sigma_{xy}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{zy}\vec{k} \\ \vec{\sigma}(\vec{k}) &= \sigma_{zx}\vec{i} + \sigma_{yz}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le tenseur de contrainte de Cauchy au point p est défini par (figure II.4)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = [\vec{\sigma}(\vec{i}) \quad \vec{\sigma}(\vec{j}) \quad \vec{\sigma}(\vec{k})] \quad (2.19)$$

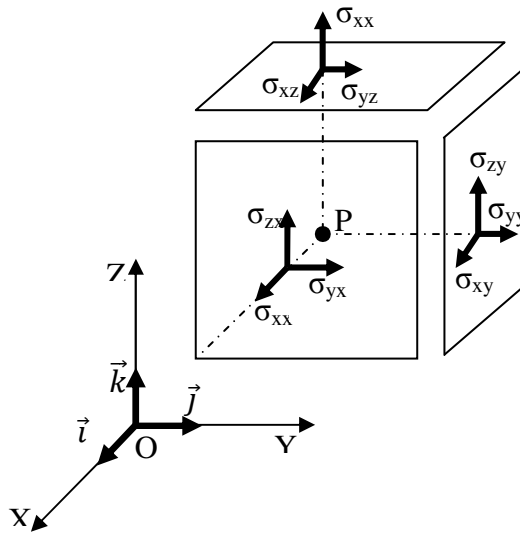


Figure II. 4 : Composante du tenseur $[\sigma]$

Les composantes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} sont appelées contraintes normales, et les composantes σ_{xy} , σ_{yx} , σ_{zx} , σ_{xz} , σ_{zy} et σ_{yz} sont les contraintes de cisaillement.

II.2.4.2. Équation d'équilibre:

Le solide dans la configuration C est soumis à l'action de forces \vec{f}_v et de force d'accélération $\rho\vec{\ddot{x}}$ et définies par unité de volume.

En considérant l'équilibre d'un élément de volume dV au voisinage du point p, on obtient en coordonnées cartésiennes (Figure II.5):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + f_x &= \rho\ddot{x} \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + f_y &= \rho\ddot{y} \\ \sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z} + f_z &= \rho\ddot{z} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Où encore, sous forme matricielle:

$$\{\text{div}[\sigma]^T\} + \{f_v\} = \rho\{\ddot{x}\} \quad (2.21)$$

Avec $\langle f_v \rangle = \langle f_x \ f_y \ f_z \rangle$, $\{\ddot{x}\} = \left\{ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right\}$ et ρ la masse volumique.

Nous définissons ainsi le vecteur $\langle \sigma \rangle$ à six (6) composantes :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz} \rangle \quad (2.22)$$

En chaque point de la frontière S du volume V, le vecteur contraint $\vec{\sigma}(\vec{n})$ représente soit les forces imposées $\vec{f}_s(\vec{n})$, soit les réactions associées aux liaisons où les déplacements sont imposés. S_f est la partie du contour où les forces sont imposés et S_u celle où les déplacement sont imposés.

$$\partial V = S = S_u \cup S_f \quad (2.23)$$

Ainsi sur S_f :

$$[\sigma]\{n\} = \{f_s\} ; \langle f_s \rangle = \langle f_{sx} \quad f_{sy} \quad f_{sz} \rangle \quad (2.24)$$

Où \vec{n} représente la normale orientée vers l'extérieur, f_{sx} , f_{sy} et f_{sz} sont les sollicitations surfaciques suivant X, Y et Z (Figure II.5)

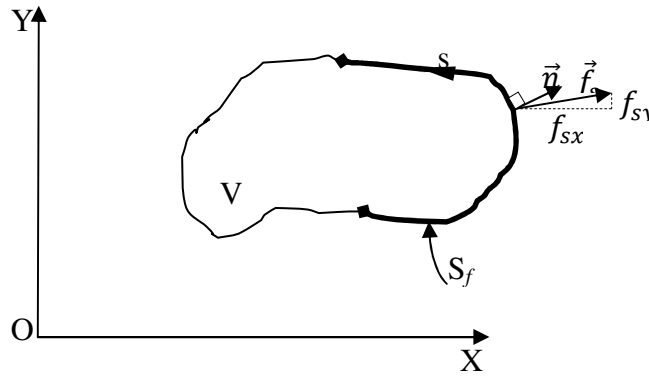


Figure II. 5 : Vecteur contrainte sur S_f

II.2.5. Principe des travaux virtuels et loi de comportement

Lorsque le solide est soumis à l'action de sollicitations surfaciques, les expressions du principe des déplacements (ou vitesses) virtuelles sont présentées pour les coordonnées cartésiennes, cylindriques et paramétriques.

II.2.5.1. Expressions du Principe des travaux virtuels (P.T.V)

Une forme variationnelle associée aux relations d'équilibre (2.21) est obtenue par la méthode des résidus pondérés est :

$$\begin{aligned} W = & - \int_V (u^* (\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + f_x - \rho \ddot{x}) \\ & + v^* (\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + f_y - \rho \ddot{y}) \\ & + w^* (\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + f_x - \rho \ddot{x})) dV \end{aligned} \quad (2.25)$$

Soit

$$W = - \int_V (\langle u^* \rangle (\{\text{div} [\sigma]\} + \{f_v\} - \rho \{\ddot{x}\})) dV = 0$$

Pour tout champ de déplacements virtuels \vec{u}^* (x, y, z), les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned}\sigma_{xn} &= \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = f_{sx} \\ \sigma_{yn} &= \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z = f_{sy} \\ \sigma_{zn} &= \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z = f_{sz}\end{aligned}\quad (2.26)$$

En intégrant (2.25) par partie et en représentant (2.26) sous forme variationnelle nous obtenons la forme faible W :

$$W = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = 0 \quad \forall \vec{u}^*(x, y, z)$$

Avec

$$\begin{aligned}W_{\text{int}} &= \int_V (u_{,x}^* \sigma_{xx} + v_{,y}^* \sigma_{yy} + w_{,z}^* \sigma_{zz} + (u_{,y}^* + v_{,x}^*) \sigma_{xy} \\ &\quad + (u_{,z}^* + w_{,x}^*) \sigma_{xz} + (v_{,z}^* + w_{,y}^*) \sigma_{yz}) dV\end{aligned}\quad (2.27)$$

$$W_{\text{ext}} = \int_V \langle u^* \rangle \{ \{ f_v \} - \rho \{ \ddot{x} \} \} dV + \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{ f_s \} ds + \int_{S_u} \langle u^* \rangle \{ \sigma(n) \} ds \quad (2.28)$$

Où $\langle u^* \rangle = \langle u^* \ v^* \ w^* \rangle$, $\langle f_v \rangle = \langle f_x \ f_y \ f_z \rangle$, $\langle \ddot{x} \rangle = \langle \ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z} \rangle$
 $\langle \sigma(n) \rangle = \langle \sigma_{xn} \ \sigma_{yn} \ \sigma_{zn} \rangle$, $\langle f_s \rangle = \langle f_{sx} \ f_{sy} \ f_{sz} \rangle$

Sur la Frontière S_u (où les déplacements sont imposés), les composantes de $\{ \sigma(n) \}$ représentent les réactions dues aux liaisons. Si nous considérons un champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible, c'est - à - dire tel que :

$$\vec{u}^*(x \ y \ z) = 0 \text{ sur } S_u$$

$$W_{\text{ext}} = \int_V \langle u^* \rangle \{ f_v \} dV + \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{ f_s \} ds + \int_V \langle u^* \rangle \rho \{ \ddot{x} \} dV \quad (2.29)$$

Par ailleurs W_{int} (équation 2.27) peut s'écrire sous différentes formes en utilisant les quantités $\langle \varepsilon^* \rangle$, $[\varepsilon^*]$, $[L^*]$, $\langle \sigma \rangle$ et $[\sigma]$ définies par (2.26) et (2.22) :

$$W_{\text{int}} = \int_V \text{tr}([L^*][\sigma]) dV = \int_V \text{tr}([\varepsilon^*][\sigma]) dV = \int_V \langle \varepsilon^* \rangle \{ \sigma \} dV \quad (2.30)$$

L'expression du principe des travaux virtuels (P.T.V), s'écrit finalement:

$$W = \int_V \langle \varepsilon^* \rangle \{ \sigma \} dV - \int_V \langle u^* \rangle \{ f_v \} dV - \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{ f_s \} ds + \int_V \langle u^* \rangle \rho \{ \ddot{x} \} dV = 0 \quad (2.31)$$

$$\forall \{ u^* \} \text{ avec } \{ u^* \} = \{ 0 \} \text{ sur } S_u$$

Avec, en coordonnées cartésiennes : (suivant x, y, z) $dV = dx dy dz$

$$\langle u^* \rangle = \langle u^* \quad v^* \quad w^* \rangle$$

$$\langle \varepsilon^* \rangle = \langle u_{,x}^* \quad v_{,y}^* \quad w_{,z}^* \quad u_{,y}^* + v_{,x}^* \quad u_{,z}^* + w_{,x}^* \quad w_{,y}^* + v_{,z}^* \rangle$$

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \rangle$$

$$\langle f_v \rangle = \langle f_x \quad f_y \quad f_z \rangle, \quad \langle f_s \rangle = \langle f_{sx} \quad f_{sy} \quad f_{sz} \rangle$$

Notre étude s'articule autour de l'élastostatique, pour cela on peut exclure les forces d'inertie donc (2.31) devient :

$$W = \int_V \langle \varepsilon^* \rangle \langle \sigma \rangle dV - \int_V \langle u^* \rangle \langle f_v \rangle dV - \int_s \langle u^* \rangle \langle f_s \rangle ds = 0 \quad (2.32)$$

II.2.5.2. Loi de comportement

Pour les matériaux dits élastiques linéaires, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations. Ces relations se traduisent sous la forme générale:

$$\sigma_{ij} = H_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.33)$$

où les composantes H_{ijkl} font intervenir les caractéristiques physiques du matériau. Les tenseurs $[\sigma]$ et $[\varepsilon]$ étant symétriques, nous avons :

$$H_{ijkl} = H_{jikl} \text{ et } H_{ijkl} = H_{ijlk} \quad (2.34)$$

Nous écrivons ainsi :

$$\{\sigma\} = [H].\{\varepsilon\} \quad (2.35)$$

$$\{\varepsilon\} = [C].\{\sigma\} \quad (2.36)$$

Avec $[H]$ étant la matrice (6 x 6) appelée matrice de comportement élastique, $[C]$ la matrice de souplesse, $\{\varepsilon\}$ le vecteur des déformations linéaires et $\{\sigma\}$ le vecteur de contraintes.

En élasticité tridimensionnelle, la matrice de comportement d'un matériau élastique linéaire homogène et isotrope est de la forme suivante:

$$[H] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

E : le module d'Young

ν : le coefficient de Poisson.

L'étude qui va suivre se base sur l'hypothèse des petits déplacements et petites déformations en utilisons la loi de comportement citée ci-dessus.

II.3. Discrétisation par éléments finis

II.3.1. Introduction

La méthode des éléments finis est devenue un outil puissant pour la simulation numérique d'un grand nombre de problème d'ingénieur. Son principe consiste à discrétiser une région continue et complexe en éléments géométriques simples et qui sont appelés « éléments finis ». C'est une méthode de discrétisation qui remplace la forme intégrale par une somme de formes intégrales élémentaires, puis discrétise celle-ci en utilisant une approximation par éléments finis, ceci conduit à la définition des matrices élémentaires et globale.

II.3.2. Modélisation par éléments finis

La modélisation par éléments finis est alors basée sur la formulation du principe des travaux virtuels (P.T.V) écrit de la façon suivante :

$$W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = \int_V \langle \varepsilon^* \rangle [H] \{ \varepsilon \} dV - W_{\text{ext}} = 0 \quad (2.38)$$

Le domaine V est d'abord discrétisé de sorte que l'on ait $V = \sum V^e$. On discrétise alors l'expression (2.38) en utilisant le découpage introduit sur le domaine, ce qui nous permet d'avoir

$$W_{\text{int}} = \sum W_{\text{int}}^e \quad (2.39)$$

Ensuite, on approxime sur chaque volume élémentaire V^e le champ des déplacements réels en utilisant des fonctions d'interpolation $[N_i]$, définies sur ce volume élémentaire, telles que

$\{u\} = [N_i]\{u_n^e\}$. Les vecteurs $\{u_n^e\}$ étant les vecteurs des degrés de liberté réels impliqués dans le calcul du travail virtuel sur l'élément e considéré.

De la même manière, on approxime le champ des déplacements virtuels par $\{u^*\} = [N_i]\{u_n^{*e}\}$. Les vecteurs $\{u_n^e\}$ et $\{u_n^{*e}\}$ sont une restriction des vecteurs $\{u_n\}$ et $\{u_n^*\}$ contenant l'ensemble des degrés de liberté, réels et virtuels, impliqués dans le problème complet.

Avec les interpolations introduites, on a alors la possibilité d'écrire sur le volume V^e :

$$\{\varepsilon\} = [B^e]\{u_n^e\} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon^*\} = [B^e]\{u_n^{*e}\} \quad (2.40)$$

L'expression du travail interne élémentaire est exprimée comme suit :

$$W_{int}^e = \langle u_n^{*e} \rangle \underbrace{\int_{V^e} [B^e]^T [H] [B^e] dV}_{\text{matrice de rigidité}} \{u_n^e\} \quad (2.41)$$

Cette expression fait apparaître une matrice carrée symétrique $[K]^e$ appelé matrice de rigidité élémentaire. En utilisant les mêmes fonctions d'interpolation, on évalue sur chaque domaine élémentaire des travaux virtuels des forces extérieures par :

$$W_{ext}^e = \langle u_n^{*e} \rangle \{F^e\} \quad (2.42)$$

Cette écriture nous amène à introduire le vecteur force élémentaire $\{F^e\}$ calculé par :

$$\{F^e\} = \int_{dV} [N_i]^T \{f_v\} dV + \int_{dS} [N_i]^T \{f_s\} dS \quad \text{avec} \quad \{u^*\} = [N_i]\{u_n^*\} \quad (2.43)$$

La méthode des éléments finis s'appuie finalement sur l'écriture matricielle du (P.T.V)

$$W_{int} - W_{ext} = \langle u_n^* \rangle ([K]\{u_n\} - \{F\}) = 0 \quad (2.44)$$

Où $[K]$ est la matrice de rigidité globale, obtenue par assemblage des matrices élémentaires $[K]^e$ avec $\{F\}$ le vecteur force, obtenu par assemblage des vecteurs $\{F^e\}$. L'énoncé du (P.T.V) fait intervenir la condition $\forall \{u^*\}$, notre système s'écrit :

$$[K]\{u_n\} = \{F\} \quad (2.45)$$

Où la matrice $[K]$ est indépendante des inconnus $\{u_n\}$, le système à résoudre est donc linéaire :

$$\{u_n\} = [K]^{-1} \{F\} \quad (2.46)$$

Modèle élément fini de coque SHELL16

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle construction d'élément (SHELL16), dans le même esprit que les éléments à facettes planes, en associant un élément de membrane Q4WT [16] à un élément de flexion DKQ8. Une étude exhaustive de la formulation de l'élément DKQ8 avec son champ de déplacements et de déformations est détaillée et exposée dans les travaux de Batoz & al. [3] et [4].

III.1. Élément fini de membrane Q4WT

III.1.1. Introduction

Le premier élément de membrane quadrilatéral isoparamétrique (Q4WT) a été développé par Taig et Kerr [14]. Cet élément de type déplacements est compatible, mais il est trop rigide surtout dans le cas de flexion dominante à cause de la mauvaise présentation de la déformation de cisaillement dans le plan de l'élément.

III.1.2. Bibliographie des éléments finis de membrane

Depuis 1965, beaucoup d'efforts ont été faits pour améliorer l'élément de Taig en utilisant des principes variationnels variés ou en utilisant des champs de déplacements incompatibles. Une contribution importante a été faite par Wilson et al [18] qui ont introduit deux modes incompatibles supérieurs pour améliorer l'élément Q4, mais cet élément ne passe les patch-tests de déformations constantes que dans le cas de maillages réguliers. Taylor et al [16] ont proposé une modification de l'élément de Wilson afin de passer les patch-tests quand le maillage est distordu. L'avantage d'éléments incompatibles mais convergents a alors été prouvé.

Le premier élément de type mixte hybride a été proposé par Pian [10]. Bergan et Hanssen [5] ont présenté l'approche appelée "Individual Element Test" (IET) où les conditions de patch-tests décrites par Irons et Razzaque [8] ont été utilisées pour une formulation directe de la matrice de rigidité. Bergan et Nygard [6] ont étendu l'approche IET qui a conduit à la formulation libre (FF) (Free Formulation). Park et Stanley [9] ont décrit et évalué la formulation naturelle ANS (Assumed Natural elements). Tang et al [15] ont formulé des éléments "quasi-conformes". Pian et al [11] ont présenté une nouvelle formulation d'élément de type mixte hybride. Simo et al [13] ont proposé l'élément EAS (Enhanced Assumed Strain element) basé sur un principe variationnel généralisé. Chen et Cheung [7] ont présenté un autre

principe variationnel mixte basé sur la théorie de Pian et Sumihara [12] et proposé l'élément de type hybride en contraintes où les approximations des contraintes et des déformations sont choisies telles qu'une condition d'orthogonalité soit satisfaite. Par cette approche, les éléments classiques de type hybride en contraintes sont simplifiés. Zhao et al [19] ont donné une autre formulation généralisée de l'élément Q4 et l'équivalence avec un élément de type hybride en contraintes a été prouvée sous certaines conditions. Très récemment, Zhong et Zeng [20] ont présenté un autre élément quadrilatéral appelé "Rational Element". Dans la formulation, les champs de déplacements u , v sont décrits par une combinaison de huit solutions de base pour le problème d'élasticité plane dans un élément. L'approximation des déplacements est incompatible, mais avec des modifications cet élément peut passer les patch-tests de contraintes constantes et une précision en contraintes et en déplacements supérieure à celle de l'élément Q4 de base peut être observée.

Maus [21] a présenté aussi trois types d'éléments quadrilatéraux où les mêmes champs de déplacements sont utilisés pour obtenir les vecteurs des forces et les vecteurs des déplacements correspondant aux variables nodales. La matrice de rigidité élémentaire est établie directement par la multiplication des vecteurs des forces et des déplacements. Une procédure assurant la symétrie de la matrice de rigidité est décrite dans l'article. Ces éléments ont une formulation un peu compliquée.

Dans l'article historique sur les éléments finis, Turner et al [17] ont décrit un élément rectangulaire incompatible où un champ de déplacements quadratiques est obtenu à partir d'un champ de contraintes linéaires à 5 paramètres. Les équations d'équilibre et l'équation de compatibilité pour le problème d'élasticité en contraintes planes sont satisfaites dans un élément qui peut ainsi être vu comme un élément hybride en contraintes à déplacements incompatibles.

III.1.3. Matrice de rigidité et vecteur force de l'élément Q4WT

Considérons l'élément quadrilatéral de (la figure III.1) Nous supposons un matériau isotrope avec un module de Young E et un coefficient de Poisson ν .

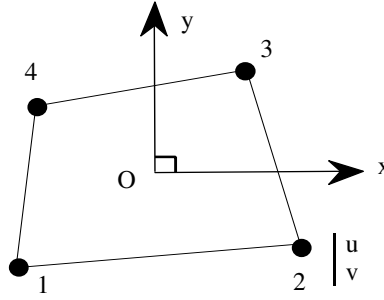


Figure III. 1 : Elément Q4WT

III.1.3.1. Champs de déplacement :

$$\{u\} = ([N_u] \ ; \ [N_\alpha]) \left\{ \frac{U_n}{\alpha} \right\}; \langle u \rangle = \langle u \ v \rangle \quad (3.1)$$

$$\langle u_n \rangle = \langle \dots \ u_i \ v_i \ \dots \ i = 1, 4 \rangle; \langle \alpha \rangle = \langle \alpha_1 \ \dots \ \alpha_4 \rangle \quad (3.2)$$

$$\begin{bmatrix} N_u \\ 2 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & N_i & 0 & \dots \\ & 0 & N_i & \dots \end{bmatrix} \ i = 1, 4; \begin{bmatrix} N_\alpha \\ 2 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & P_i & 0 & \dots \\ & 0 & P_i & \dots \end{bmatrix} \ i = 1, 2 \quad (3.3)$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta): \text{ Comme pour le Q4}$$

$$P_1 = 1 - \xi^2 \text{ et } P_2 = 1 - \eta^2: \text{ Modes quadratiques incompatibles}$$

α_1 et α_4 Sont des paramètres associés aux modes quadratiques. Sur le côté 1-2 ($\eta = -1$ et $-1 \leq \xi \leq 1$) nous avons:

$$u(\xi) = \frac{1-\xi}{2} u_1 + \frac{1+\xi}{2} u_2 + (1 - \xi^2) \alpha_1 \quad (3.4)$$

$$v(\xi) = \frac{1-\xi}{2} v_1 + \frac{1+\xi}{2} v_2 + (1 - \xi^2) \alpha_2 \quad (3.5)$$

III.1.3.2. Matrice $[k_m]$ et le vecteur $\{f_{nm}\}$:

Le vecteur déformation $\{\varepsilon\}$ s'écrit:

$$\{\varepsilon\} = [B_u] \{u_n\} + [B_\alpha] \{\alpha\} \quad (3.6)$$

$$[B_u] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & & \\ \dots & 0 & N_{i,y} & \dots \\ N_{i,y} & N_{i,x} & & \end{bmatrix} \ i = 1, 4; [B_\alpha] = \begin{bmatrix} P_{1,x} & 0 & P_{2,x} & 0 \\ 0 & P_{1,y} & 0 & P_{2,y} \\ P_{1,y} & P_{1,x} & P_{2,y} & P_{2,x} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$P_{1,x} = \frac{1}{j}(P_{i,\xi}J_{22} - P_{i,\eta}J_{12}) ; P_{1,y} = \frac{1}{j}(-P_{i,\xi}J_{21} + P_{i,\eta}J_{11}) \quad (3.8)$$

$$N_{1,x} = \frac{1}{j}(N_{i,\xi}J_{22} - N_{i,\eta}J_{12}) ; N_{1,y} = \frac{1}{j}(-N_{i,\xi}J_{21} + N_{i,\eta}J_{11}) \quad (3.9)$$

$$J = J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} \quad (3.10)$$

Pour un élément, avec un vecteur sollicitation {f}, nous avons:

$$W^e = \int_A \langle \varepsilon^* \rangle [H] \{ \varepsilon \} dV - \int_A \langle u^* \rangle \{ f \} dA \quad (3.11)$$

D'où, en tenant compte de (3.1) ,(3.2) et (3.6)

$$W^e = \langle u_n^* \dots \alpha^* \rangle \left(\begin{bmatrix} [k_{uu}] & [k_{\alpha u}]^T \\ [k_{\alpha u}] & [k_{\alpha\alpha}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ \alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{nu} \\ f_{n\alpha} \end{Bmatrix} \right) \quad (3.12)$$

Avec

$$[k_{uum}] = \int_{Ae} [B_u]^T [H] [B_u] dA \quad (3.13)$$

$$[k_{\alpha um}] = \int_{Ae} [B_\alpha]^T [H] [B_u] dA \quad (3.14)$$

$$[k_{\alpha\alpha m}] = \int_A [B_\alpha]^T [H] [B_\alpha] dA \quad (3.15)$$

$$\{ f_{num} \} = \int_A [N_u]^T \{ f \} dA \quad (3.16)$$

$$\{ f_{n\alpha m} \} = \int_A [N_\alpha]^T \{ f \} dA \quad (3.17)$$

Comme les α_i constituent des paramètres locaux (définis sur chaque élément), l'application du PTV au niveau globale conduit à :

$$\langle \alpha^* \rangle ([k_{\alpha um}] \{ u_n \} + [k_{\alpha\alpha m}] \{ \alpha \} - \{ f_{n\alpha m} \}) = 0 \quad \forall \{ \alpha^* \} \quad (3.18)$$

D'où

$$\{ \alpha \} = [k_{\alpha\alpha m}]^{-1} (\{ f_{n\alpha m} \} - [k_{\alpha um}] \{ u_n \}) \quad (3.19)$$

L'introduction de (3.18) dans (3.12) donne :

$$W^e = \langle u_n^* \rangle ([k_m] \{ u_n \} - \{ f_{nm} \}) \quad (3.20)$$

Avec

$$[k_m] = [k_{uum}] - [k_{\alpha um}]^T [k_{\alpha\alpha m}]^{-1} [k_{\alpha um}] \quad (3.21)$$

$$\{ f_{nm} \} = \{ f_{num} \} - [k_{\alpha um}]^T [k_{\alpha\alpha m}]^{-1} \{ f_{n\alpha m} \} \quad (3.22)$$

L'élément étant non conforme, la bonne représentation de l'état de déformation constante (qui constitue une condition nécessaire de convergence) n'est pas, a priori, garantie lorsque l'on considérera un assemblage d'éléments.

III.1.3.3. Conditions à satisfaire pour Q4WT:

Les relations (3.6) et (3.18) donnent:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_n\} + [B_\alpha][k_{\alpha am}]^{-1}\{f_{nam}\} \quad (3.23)$$

Avec

$$[B] = [B_u] - [B_\alpha] [k_{\alpha am}]^{-1}[k_{\alpha um}] \quad (3.24)$$

Cette relation sert au calcul des contraintes en un point ξ, η .

Soit $\{u^c\}$ le champ de déplacement en accord avec un état de déformations constantes $\{\varepsilon^c\}$. Le vecteur des ddl $\{u_n^c\}$ représente les valeurs de $\{u^c\}$ aux nœuds. Pour la convergence, $[B]$ doit être telle que :

$$[B] \{u_n^c\} = [B_u] \{u_n^c\} - [B_\alpha] [k_{\alpha am}]^{-1}[k_{\alpha um}] \{u_n^c\} = \{u^c\} = \text{const} \quad (3.25)$$

(Un état de déformations constantes est associé à $\{f_m\} = \{0\}$ et ainsi $\{f_{nam}\} = \{0\}$).

Pour l'élément conforme Q4, nous avons: $[B_u] \{u_n^c\} = \{\varepsilon^c\}$ (3.26)

Ainsi (3.25) sera satisfait si :

$$[k_{\alpha um}] \{u_n^c\} = \int_A [B_\alpha]^T [H] [B_u] \{u_n^c\} dA = \int_A [B_\alpha]^T [H] \{\varepsilon^c\} dA = \{0\} \quad (3.27)$$

Cette relation est satisfaite (pour $[H]$ constant) si

$$\int_A [B_\alpha] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\alpha] J d\xi d\eta = [0] \quad (3.28)$$

$P_{i,\xi}$ et $P_{i,\eta}$ (éq (3.6)) étant linéaires en ξ et η , la relation ci-dessus sera vérifiée pour un élément quadrilatéral si, pour la définition de $[B_\alpha]$ (éq (3.6)), on utilise une matrice $[J]$ constante ($[J] = [J_0]$ évaluée en $\xi = \eta = 0$).

$$[J_0] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_{21} + x_{34} & y_{21} + y_{34} \\ x_{41} + x_{32} & y_{41} + y_{32} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Pour définir la matrice de rigidité $[k_m]$ et le vecteur $\{f_{nm}\}$ de l'élément Q4WT on utilise ainsi les relations (3.23) $[B_a]$ est définie avec $[J_0]$ (éq (3.29)). Pour le calcul de $[k_{uum}]$ on utilise une intégration numérique uniforme 2×2 .

III.1.3.4. Remarque:

- Si l'équation (3.27) est vérifiée, alors (éq (3.23)) nous permet d'écrire:

-

$$\langle u_n^c \rangle [k] \{u_n^c\} = \langle u_n^c \rangle [k_{uu}] \{u_n^c\} = A^e \langle \varepsilon^c \rangle [H] \{ \varepsilon^c \} \quad (exact) \quad (3.30)$$

On a également :

$$[k_m] \{u_n^c\} = [k_{uum}] \{u_n^c\} = \{f_{int}^c\} \quad (3.31)$$

L'élément Q4 étant un élément conforme, lorsqu'on assemble plusieurs éléments Q4, les composantes de $\{F_{int}^c\}$ au nœud interne i sont nulles.

Comme l'élément incompatible Q4WT permet d'obtenir le même résultat (éq. 3.30), on dit qu'il passe le patch-test cinématique.

La relation (3.28) est toujours satisfaite pour un élément rectangulaire ou pour un parallélogramme, car dans ces cas $[J]$ est constant.

III.2. Élément fini de plaque DKQ8 ([3], [4])

III.2.1. Introduction

Un très grand nombre d'éléments finis de plaque en flexion a été développé. Les éléments finis de plaque peuvent se classer en trois types : éléments de type Kirchhoff, éléments de type Reissner/Mindlin, éléments de type Kirchhoff discret.

A cause de l'exigence de continuité C^1 , les éléments de plaque de type Kirchhoff sont relativement difficiles à formuler. Le premier élément de plaque triangulaire de type Kirchhoff à un déplacement w et deux rotations aux nœuds sommets a été proposé par Bazeley et al [22]. Mais cet élément ne peut pas passer les patch-tests parce que la continuité de la rotation normale n'est pas satisfaite. Des modifications par Bergan [23] et Specht [24] ont été proposées pour surmonter cet inconvénient.

III.2.2. Bibliographie des éléments finis de plaque

Afin d'éviter la difficulté de la continuité C^1 , beaucoup de chercheurs ont formulé des éléments de plaque basés sur la théorie de Reissner/Mindlin où la continuité C^0 est seulement requise pour l'approximation des déplacements et rotations [119,120].

Les éléments de plaque isoparamétriques basés sur la théorie de Reissner/Mindlin donne une mauvaise solution quand l'intégration de Gauss complète est employée. Cela est dû à la mauvaise représentation des déformations de cisaillement transversal (ce qui conduit au blocage en cisaillement transversal).

Des traitements pour éviter le blocage en cisaillement transversal ont été proposés :

- Introduction des modes incompatibles supérieurs (Taylor et al.[16]).
- Intégration réduite ou sélective (Zienkiewicz et al. [25], Pugh et al.[26]).
- Construction de champ de déformation de cisaillement de substitution (Hinton et Huang [27], Donea et Lamain [28], Bathe et Dvorkin [67]).

Les éléments de plaque de type Kirchhoff discret ont été formulé par Dhatt [32], Stricklin et al. [37], Wempner et al. [29], Fried et Yang [38] et Batoz et al. [39] depuis 1968. L'énergie de cisaillement transversal est ignorée et l'hypothèse de Kirchhoff est introduite de façon discrète (en certains points, sur les côtés d'un élément ou sur l'aire d'un élément). Beaucoup d'autres auteurs ont également apporté leurs contributions à ce type d'élément tels Bathe et al.[51, 52], Garnet et Pifko [53], Gallagher et al. [54], Carpenter et al. [55] et Talbot et Dhatt [56].

Un grand nombre d'éléments de plaque triangulaires à 9 degrés de liberté (ddl) a été formulé tels DKT (Discrete Kirchhoff Triangle), HSM (Hybrid Stress Model), HCT (Hsieh-Clough-Toucher), SRI (Mindlin Selective Reduced Integration) [Batoz et al. 41], les éléments proposés par Wu [57], et par Bergan et al. [6] et Felippa et al. [117, 118] où la formulation libre FF (Free Formulation) s'emploie, l'élément MIN3 par Tessler [59] et par Tessler et Hughes [60], l'élément A-9 par Razzaque [61] et Fricker [62], les éléments TRUNC et TRUMP par Argyris et al [63] basés sur l'approche naturelle, l'élément TRIA3 par MacNeal [64] et l'élément DST par Batoz et Lardeur [44], etc.

L'élément TLLL [65] (dit aussi "Morley Triangle") à 6 ddl est établi en utilisant la théorie de Kirchhoff et un champ de déplacement quadratique. Cet élément est incompatible mais convergent. Il peut être vu comme l'élément de plaque triangulaire le plus simple. La matrice de rigidité élémentaire de l'élément TLLL est identique à celle de l'élément HSM et de l'élément DKT6 (voir Batoz et Dhatt [1]).

Un nombre également important d'éléments de plaque quadrilatéraux à 12 ddl a été présenté. L'élément de type Kirchhoff Discret DKQ est formulé par Batoz et Ben Tahar [40]. L'élément de type hybride en contraintes HSQK1 (Hybrid Stress Quadrilateral) est formulé par Sze et Chow [66]. Des éléments basés sur la théorie de Reissner/Mindlin sont présentés par Bathe et Dvorkin [67], par Pugh, Hinton et Zienkiewicz [26], par MacNeal [68], par Saleeb et Chang [69], par Donea et Lamain [28], par Prathap et al. [70] et par Ibrabimbegovic [71].

La plupart des éléments triangulaires de plaque de type Kirchhoff Discret (DK) est présentée dans le Tableau 2.1. L'élément le plus simple DKT6 a été formulé par Batoz [72, 73, 1]. La formulation de la matrice de rigidité de l'élément DKT9 peut être obtenue par des approches différentes (voir [39, 41, 43, 48, 49, 74]). La vitesse de convergence a été étudiée théoriquement dans [75, 76]. Des auteurs ont proposé des modifications pour améliorer l'élément DKT9 au prix d'une plus grande complexité de la formulation ou par l'introduction de coefficients ajustables [77, 78, 79, 41]. Un autre élément à 9 ddl est formulé dans [45] en utilisant des modes orthogonaux incompatibles. En 1986 Dhatt et al. [34, 35] ont développé l'élément DKTP ayant 12 ddl (w aux nœuds milieux et w, θ_x, θ_y aux nœuds sommets). Des autres éléments avec les nœuds appelés Loof ont été proposés par Irons [80], par Meek et Tan [82] et par Poulsen et Damkilde [83].

La plupart des éléments quadrilatéraux de plaque de type DK est présentée dans le Tableau 2.2. Le plus populaire est certainement l'élément à 12 ddl (4 nœuds, 3 ddl par nœud) DKQ12 présenté en 1981 par Batoz et Ben Tahar [40, 41] qui ont généralisé un élément rectangulaire appelé QC proposé par Dhatt en 1971 [36]. Des auteurs tels que Lyons [84], Crisfield [85, 74] ont aussi développé des éléments quadrilatéraux de type DK à 12 ddl. Comme pour l'élément triangulaire DKT9 des auteurs ont proposé des améliorations [79, 86]. L'élément DKQP à 16 ddl (w aux nœuds milieux) a été formulé en 1986 par Dhatt et al. [35]. Une version de plaque de "Semiloof shell element" de Irons [80] peut aussi être définie. Il a un déplacement w aux

nœuds sommets et aux nœuds milieux et deux rotations tangentielles sur chaque côté. L'élément de plaque quadrilatéral du type de DKT6 (ou Morley) semble ne pas avoir été formulé sauf la version de plaque de l'élément de coque SLICK [87].

Nous devons indiquer que la plupart des éléments de plaque de type DK sont des cas particuliers d'éléments plus généraux basés sur des formulations mixtes ou sur des formulations avec déformations de substitution en tenant compte du cisaillement transverse (utilisant la théorie de plaque de Reissner-Mindlin). Si l'effet de cisaillement transverse est négligé les éléments appelés DST-BL dans [44], DKMT dans [88], DMT dans [89], DRM dans [92, 93], TLQL dans [90, 91] dégénèrent tous vers l'élément DKT9 [94]. Les éléments appelés DMQ dans [89], DKQT dans [88], QLQL dans [90, 91] dégénèrent tous vers l'élément DKQ12 [40]. L'élément TLLL [90, 92] conduit à l'élément DKT6 [1].

III.2.3. Élément fini de plaque en flexion DKQ8

Dans ce chapitre nous présentons un élément de plaque quadrilatère nommé DKQ8 à 8 nœuds et à 8 degrés de liberté (ddl) qui est du même type que l'élément triangulaire de Morley. Cet élément DKQ8 basé sur une formulation rationnelle (Rational Formulation) et les hypothèses de Kirchhoff Discret a été développé récemment par Batoz & al [3] et [4].

III.2.4. Matrice de rigidité de l'élément de plaque DKQ8

Les variables nodales de DKQ8 sont le déplacement normal w aux nœuds sommets et la rotation autour du côté au nœud milieu (Figure III.2). Le vecteur de variables nodales est alors :

$$\langle W_n \rangle = \langle W_1 \quad \theta_{s5} \quad W_2 \quad \theta_{s6} \quad W_3 \quad \theta_{s7} \quad W_4 \quad \theta_{s8} \rangle \quad (3.32)$$

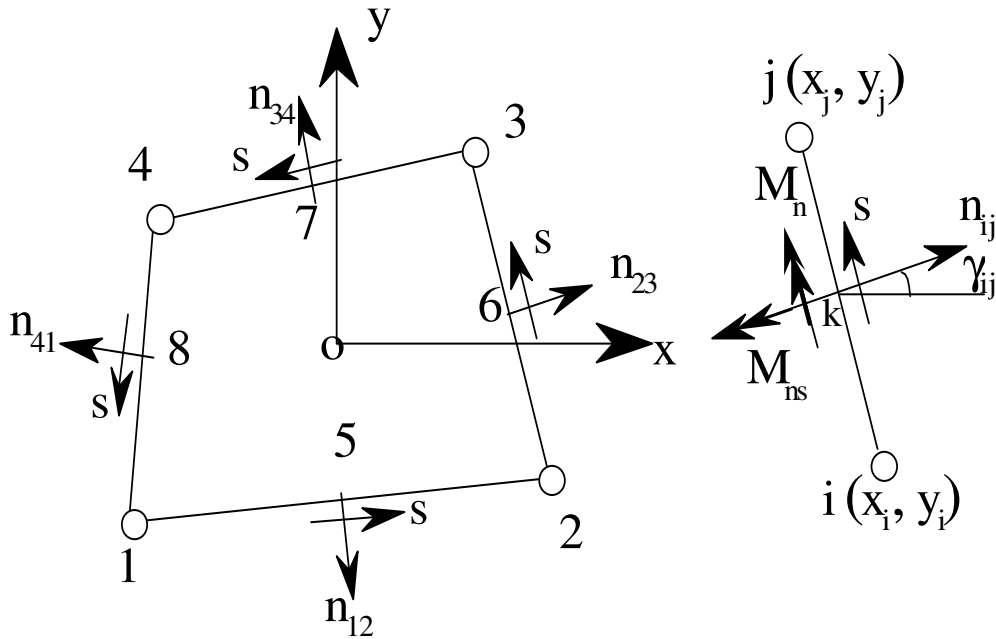


Figure III. 2 : Géométrie de l'élément DKQ8

Les champs de rotations β_x et β_y sont exprimés comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = [N]\{\alpha_n\} \quad (3.33)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y & x & -vx & y/2 & -xy & (vx^2 + y^2)/2 \\ 0 & 1 & -x & -vy & y & x/2 & (x^2 + vy^2)/2 & -xy \end{bmatrix} \text{ et } \langle \alpha_n \rangle = \langle \alpha_i, i = 1,8 \rangle$$

$\alpha_i, i=1,8$ sont les huit paramètres généralisés inconnus.

v est le coefficient de Poisson

En substituant les valeurs des coordonnées des quatre nœuds aux milieux 5~8 dans (3.33), nous définissons $[T_f]$ telle que :

$$\{\beta_n\} = [T_f]\{\alpha_n\} \quad (3.34)$$

Où

$$\langle \beta_n \rangle = \langle \beta_{xi}, \beta_{yi}, i = 5,8 \rangle \quad (3.35)$$

L'inversion de (3.34) donne :

$$\{\alpha_n\} = [T_f]^{-1}\{\beta_n\} \quad (3.36)$$

Selon la théorie de Reissner/Mindlin, les courbures sont :

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

En utilisant (3.33) :

$$\{\chi\} = [B_{\alpha f}]\{\alpha_n\} \quad (3.38)$$

Où $[B_{\alpha f}]$ est identique à $[B_{cm}]$ (3.7) et peut être décomposée similairement dans $[B_{\alpha f}]_c$ et $[B_{\alpha f}]_h$.

En substituant (3.36) dans (3.38):

$$\{\chi\} = [B_{\alpha f}][T_f]^{-1}\{\beta_n\} \quad (3.39)$$

Sur le côté ij, les rotations β_x et β_y peuvent être exprimées en fonction des rotations autour de la direction tangentielle et normale dirigée vers l'extérieur β_n et β_s par:

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = [Q]_k \begin{Bmatrix} \beta_s \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ S_k & -C_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_s \\ \beta_n \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

avec $C_k = \cos \gamma_{ij}$, $S_k = \sin \gamma_{ij}$, $\gamma_{ij} = (x, n_{ij})$, $k = 5, 8$.

L'hypothèse de Kirchhoff est imposée aux nœuds milieux sous la forme directe :

$$\gamma_{sk} = W_{,sk} + \beta_{sk} = 0$$

Soit :

$$W_{,sk} = -\beta_{sk} \quad (3.41)$$

Considérant une variation linéaire de w sur les côtés, alors:

$$W_{,sk} = \frac{W_j - W_i}{L_k} \quad (3.42)$$

L_k est la longueur du côté k de noeuds i et j (Figure 3.2).

De (3.41) et (3.42) on déduit:

$$\beta_{sk} = \frac{w_j - w_i}{L_k} \quad (3.43)$$

et on définit (changement de rotation) :

$$\beta_{nk} = \theta_{sk} \quad (3.44)$$

soit: $\langle \beta_{sn} \rangle = \langle \beta_{sk}, \beta_{nk}, k = 5, 8 \rangle$ (3.45)

En utilisant (4.40) pour les quatres côtés, nous pouvons obtenir:

$$\{\beta_n\} = [Q_{f1}]\{\beta_{sn}\} \quad (3.46)$$

Avec

$$[Q_{f1}] = \begin{bmatrix} [Q]_5 & & & & & & & & \\ & [Q]_6 & & & & & & & \\ & & [Q]_7 & & & & & & \\ & & & [Q]_8 & & & & & \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

De (3.44), (3.45), (3.45) et (3.32), nous pouvons établir la relation suivante:

$$\{\beta_{sn}\} = [Q_{f2}]\{w_n\} \quad (3.48)$$

Avec:

$$[Q_{f2}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_5} & 0 & -\frac{1}{L_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_6} & 0 & -\frac{1}{L_6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_7} & 0 & -\frac{1}{L_7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En substituant (3.46) et (3.48) dans (3.39), les courbures seront définies par:

$$\{\chi\} = [B_{\alpha f}][T_f]^{-1}[Q_{f1}][Q_{f2}]\{W_n\} \quad (3.49)$$

Dans la formulation des éléments de plaque de type Kirchhoff discret, l'énergie de cisaillement transverse est négligée. Seule la partie de déformation de flexion du modèle de Reissner/Mindlin est considérée:

$$U_f^e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \langle \chi \rangle [H_f] \{\chi\} dA \quad (3.50)$$

Avec:

$$[H_f] = \frac{h^3}{12} [H] \quad (3.51)$$

En substituant (3.49) dans (3.50), nous pouvons obtenir la matrice de rigidité comme suit:

$$[k_f]^e = [Q_{f2}]^T [Q_{f1}]^T [T_f]^T [k_{\alpha f}] [T_f]^{-1} [Q_{f1}] [Q_{f2}] \quad (3.52)$$

Où

$$[k_{\alpha f}] = \int_{A_e} [B_{\alpha f}]^T$$

$$[k_{\alpha f}] = \int_{A_e} [B_{\alpha f}]^T [H_f] [B_{\alpha f}] dA \quad (3.53)$$

$$[k_{\alpha f}] = \frac{h^2}{12} [k_{\alpha m}] \quad (3.54)$$

Elle peut aussi être décomposée en $[k_{\alpha f}]_c$ et $[k_{\alpha f}]_h$, soit:

$$[k_{\alpha f}]_c = \frac{h^2}{12} [k_{\alpha m}]_c \quad (3.55)$$

$$[k_{\alpha f}]_h = \frac{h^2}{12} [k_{\alpha m}]_h \quad (3.56)$$

Pour passer les patch-tests de courbures constantes, l'opération suivante est employée :

- Pour les trois états de moments constants: $M_x = 1$, $M_y = 1$ et $M_{xy} = 1$, les vecteurs des forces nodales sont définis par :

$$\langle f_{Mx} \rangle = \langle y_{21} \quad 0 \quad y_{32} \quad 0 \quad y_{43} \quad 0 \quad y_{14} \quad 0 \rangle \quad (3.57)$$

$$\langle f_{My} \rangle = \langle 0 \quad x_{12} \quad 0 \quad x_{23} \quad 0 \quad x_{34} \quad 0 \quad x_{41} \rangle \quad (3.58)$$

$$\langle f_{Mxy} \rangle = \langle x_{12} \quad y_{21} \quad x_{23} \quad y_{32} \quad x_{34} \quad y_{43} \quad x_{41} \quad y_{14} \rangle \quad (3.59)$$

- Introduisant la matrice $[f_M]$:

$$[f_M] = [\{f_{Mx}\} \quad \{f_{My}\} \quad \{f_{Mxy}\}] \quad (3.60)$$

On substitue la partie constante de $[B_{\alpha f}]$ (3.38) par l'expression suivante:

$$[B_{\alpha f}]_c^T = \frac{1}{A_e} [T_f]^T [f_M] \quad (3.61)$$

Par analogie avec (3.21), nous définissons la matrice de rigidité de l'élément :

$$[k_f]^e = [Q_{f2}]^T [Q_{f1}]^T [\overline{k_f}] [Q_{f1}] [Q_{f2}] \quad (3.62)$$

Avec

$$[\overline{k_f}] = \frac{1}{A_e} [f_M] [H_f] [f_M]^T + [T_f]^{-T} [k_{\alpha f}]_h [T_f]^{-1} \quad (3.63)$$

Les courbures et les moments sont déterminés par:

$$\{\chi\} = \left(\frac{1}{A_e} [f_M]^T + [B_{\alpha f}]_h [T_f]^{-1} \right) [Q_{f1}] [Q_{f2}] \{w_n\} \quad (3.64)$$

$$\{M\} = \left(\frac{1}{A_e} [H_f] [f_M]^T + [H_f] [B_{\alpha f}]_h [T_f]^{-1} \right) [Q_{f1}] [Q_{f2}] \{w_n\} \quad (3.65)$$

Où $\langle M \rangle = \langle M_x \quad M_y \quad M_{xy} \rangle$

III.3. Élément fini de coque plan SHELL16

III.3.1. Bibliographie des éléments finis des plaques/coque

La formulation des éléments finis de plaque/coque est un sujet très important et relativement difficile. Un très grand nombre d'articles sur les éléments finis de plaque/coque a été publié [49].

Les éléments finis de coque se classent en trois types : éléments courbes géométriquement surbaissés ou non (approche curviligne), éléments isoparamétriques dégénérés (approche 3D

dégénérée) et éléments plats (approche par facettes planes).

Les éléments basés sur les théories de coque classiques peuvent donner une meilleure approximation de la forme réelle des coques et présenter le couplage de membrane-flexion dans un élément. Mais des difficultés importantes doivent être surmontées pour la représentation correcte des mouvements de corps rigide et éviter les problèmes de blocage en membrane et en cisaillement transverse au moins pour les champs de déplacements et rotations de bas degré. Ce type d'éléments et leurs applications en milieu industriel sont assez limitées en comparaison avec les éléments en description cartésienne des déplacements.

L'approche tridimensionnelle dégénérée (Approche Cartésienne) a été proposée par Ahmad, Irons et Zienkiewicz [98]. Elle permet de discrétiser directement les équations tridimensionnelles de la mécanique des solides, en introduisant généralement les mêmes hypothèses que celles utilisées dans la théorie classique de coque de type Reissner/Mindlin (les normales à la surface moyenne restent droites, et on tient compte de l'hypothèse des contraintes planes).

Un très grand nombre d'articles et documents a été publié sur les éléments de coque dits isoparamétriques ou tridimensionnels dégénérés.

Différentes techniques telles que l'intégration sélective ou réduite, la substitution des déformations de membrane et de cisaillement transverse, les modèles mixtes ont été proposés pour éviter le blocage en membrane et en cisaillement [115].

La première analyse des coques par éléments finis a été réalisée par un assemblage d'éléments de coque à facettes planes. La matrice de rigidité est obtenue par combinaison d'éléments de membrane et de plaque au niveau élémentaire. Le couplage membrane-flexion est mis en évidence après transformation des variables nodales locales dans le repère global. La convergence de ce type d'éléments a été analysée dans [99, 81, 106, 107, 108].

Compte tenu de la simplicité de la formulation, l'efficacité de calcul et la flexibilité pour les applications (coques et plaques plissées), les éléments de coque à facettes planes sont très utilisés en pratique.

III.3.2 Matrice de rigidité et vecteur des charges équivalentes de l'élément SHELL16

Par superposition de l'élément de membrane Q4WT et de l'élément de flexion DKQ8, un élément de coque à facette plane à 16 degrés de liberté baptisé ici SHELL16 peut être établi. Ce modèle a trois déplacements U, V, W à chacun des nœuds sommets et une rotation à chacun des nœuds milieux.

L'élément Q4WT et l'élément DKQ8 sont formulés dans le système de coordonnées locales x y z avec l'origine au centre de gravité. Pour construire l'élément SHELL16, nous devons

assembler les deux éléments dans un système de coordonnées globales XYZ (figure III.3).

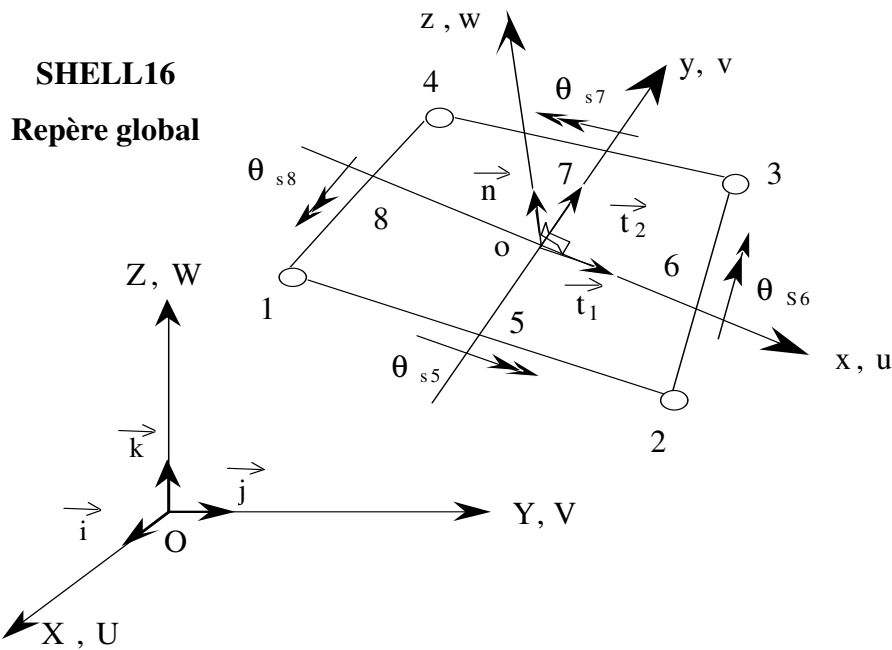
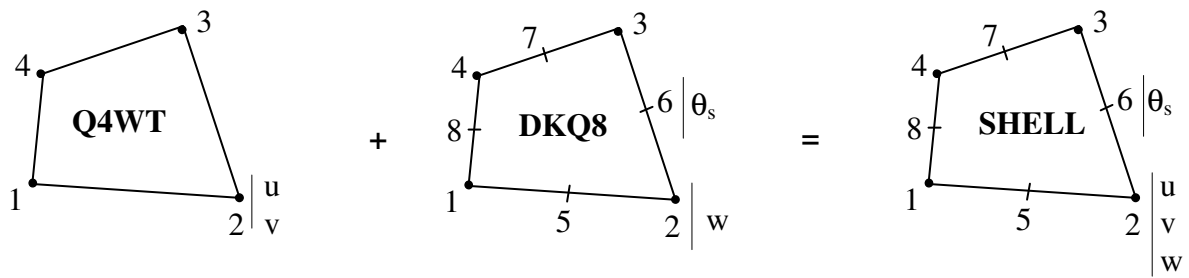


Figure III. 3 : Elément de plaque/coque SHELL16

Dans le système global XYZ, le vecteur des variables nodales de SHELL16 est :

$$\langle u_n \rangle = \langle U_1 \ V_1 \ W_1 \ U_2 \ V_2 \ W_2 \ U_3 \ V_3 \ W_3 \ U_4 \ V_4 \ W_4 \ \theta_{s5} \ \theta_{s6} \ \theta_{s7} \ \theta_{s8} \rangle \quad (3.72)$$

Les déplacements locaux u, v, w et les déplacements globaux U, V, W sont reliés par:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{1Y} & t_{1Z} \\ t_{2X} & t_{2Y} & t_{2Z} \\ n_X & n_Y & n_Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

où $t_{1X} = \vec{t}_1 \cdot \vec{i}$, etc.

Pour la partie membrane de Q4WT, les variables nodales sont :

$$\langle u_n \rangle_m = \langle u_i, v_i, i = 1, 4 \rangle \quad (3.74)$$

De (3.73), nous avons :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{1Y} & t_{1Z} \\ t_{2X} & t_{2X} & t_{3X} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [Q_m] \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

En utilisant (3.75) aux noeuds 1 à 4, et considérant (3.74), nous pouvons obtenir:

$$\{u_n\}_m = [Q_m]\{u_n\} \quad (3.76)$$

Avec $[Q_m]$:

$$[Q_m] = \begin{bmatrix} [Q_{m1}] & & & & [0]_{2 \times 4} \\ & [Q_{m1}] & & & [0]_{2 \times 4} \\ & & [Q_{m1}] & & [0]_{2 \times 4} \\ & & & [Q_{m1}] & [0]_{2 \times 4} \end{bmatrix}$$

où $[Q_{m1}] = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{1Y} & t_{1Z} \\ t_{2X} & t_{1Y} & t_{1Z} \end{bmatrix}$

Pour la partie flexion de DKQ8, les variables nodales sont :

$$\langle w_n \rangle = \langle w_1 \theta_{s5} w_2 \theta_{s6} w_3 \theta_{s7} w_4 \theta_{s8} \rangle \quad (3.77)$$

De (3.75), nous avons :

$$w = \langle n_X \quad n_Y \quad n_Z \rangle \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \langle n \rangle \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

En utilisant (3.78) aux noeuds 1 à 4, et en considérant (3.74), nous obtenons :

$$\{w_n\} = [Q_f]\{u_n\} \quad (3.79)$$

Avec $[Q_f]$:

$$[Q_f] = \begin{bmatrix} [T] & & & [O_1] \\ & [T] & & [O_2] \\ & & [T] & [O_3] \\ & & & [T] & [O_4] \end{bmatrix}$$

Où

$$[T] = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et

$$\begin{aligned} [O_1] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [O_2] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [O_3] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & [O_4] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Appliquant (3.76) à l'élément Q4WT et (3.79) à l'élément DKQ8, nous pouvons superposer les deux éléments à établir la matrice de rigidité de l'élément SHELL16 :

$$[k]^e = [Q_m]^T [k_m]^e [Q_m] + [Q_f]^T [k_f]^e [Q_f] \quad (3.80)$$

Avec $[k_m]^e$ et $[k_f]^e$ exprimées par (3.21) et (.63).

Application numérique

Nous avons utilisés un logiciel de calcul par éléments finis écrit en FORTRAN, appelé RE_FLEX (Recherche et Enseignement en modélisation des structures FLEXibles)

Il comprend l'ensemble des opérations fréquemment effectuées en éléments finis

- Préparation des tables de coordonnées, connectivités, propriétés élémentaires, conditions aux limites et sollicitations (commande DATA).
- Calcul des matrices et vecteurs élémentaires (forme explicite ou intégration numérique).
- Assemblage des matrices et vecteurs.
- Résolution des systèmes d'équations linéaires par triangularisation de la matrice globale (commande LINR).
- Evaluation des efforts résultants, contraintes et réactions.

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus pour différents tests choisis dans la littérature ([178], [179] [49], [180], [181], [182], [183], [173], [165], [184], [185]) pour examiner les performances de précision et de convergence de l'élément développé précédemment Shell16. La plupart des problèmes classiques traités dans cette section concernent les plaques et les coques discrétisées par facettes planes. Ces tests sont utilisés entre autres pour vérifier la formulation, la mise en évidence de la vitesse de convergence (précision) en fonction du nombre d'éléments (ou nombre de degré de liberté total) et de comparer les performances obtenues en discrétisant des coques avec un ensemble d'éléments quadrilatéraux.

On considère des coques isotropes, d'épaisseur constante et un état de contraintes ou de déformations initiales nulles. Les coques considérées, pour l'évaluation de l'élément SHELL16, sont un cylindre pincé, un panneau cylindrique, un hémisphère, une plaque plissée, donc des coques de formes variées qui sont soumises à des charges concentrées ou des charges réparties et les conditions aux limites sont également variées (encastremets, bords libres, diaphragmes).

La liste des éléments ainsi que l'abréviation utilisée sont :

- **DKT12** (Discrete Kirchhoff) est un élément de coque plat à 6 nœuds et 12 ddl (U, V, W aux sommet et θ_s aux milieux des côtés) obtenu en superposant l'élément de membrane CST (u, v aux nœud sommets) à l'élément de flexion DKT6 [49] (w aux sommet et θ_s aux

milieux des côtés). La matrice de rigidité est définie explicitement sans intégration numérique.

- **DKQ24** (Discrete Kirchhoff) est un élément à quatre noeuds et six ddl/noeud, de type facette plane, obtenu en superposant l'élément de membrane Q4 classique à l'élément de flexion DKQ [40]. L'intégration numérique est uniforme avec deux points de Gauss suivant ξ et η .
- **SHELL16** formulé et présenté précédemment.

Pour chaque test, nous ferons une description de la géométrie et des conditions aux limites et nous donnerons le but du test et les solutions de références utilisées. Dans les tests dans lesquels nous avons employé un maillage régulier avec l'élément triangulaire, nous désignerons par (A) et (B) les deux types de maillages obtenus selon l'orientation des triangles illustrés sur (la figure IV.1). Tous les tests, où n'apparaissent pas d'unités, sont étudiés dans un système d'unités cohérent.

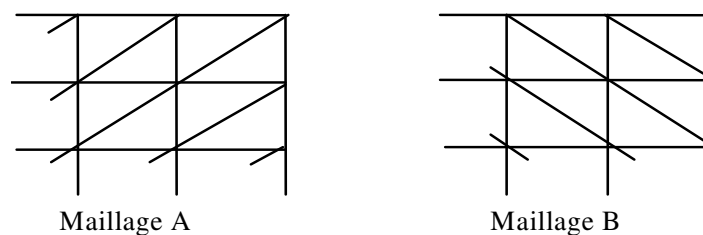


Figure IV. 1 : Deux types de maillages A et B pour éléments triangulaires

IV.4.1. Hémisphère sous charges diamétralement opposées.

Un des problèmes fréquemment traités pour évaluer les performances d'un élément de coque est celui d'un hémisphère mince soumis à la base libre à quatre charges radiales concentrées. Le rayon de l'hémisphère est de 10 m et son épaisseur 0.04 m ($R/h = 250$). Les caractéristiques mécaniques et les conditions aux limites utilisées sont présentées sur la figure 4.2. Dans cet exemple, l'hémisphère subit d'importantes rotations de corps rigides et des déformations de flexion sans extension. Ce problème sert par conséquent d'excellent test pour vérifier l'absence de blocage en membrane et la bonne représentation des mouvements de corps rigide. Vu la symétrie du problème, seul le quart de la structure est discrétisé en N éléments réguliers par côté ($N = 2$ à 16). Nous reportons dans (le tableau IV.1) les résultats obtenus pour le déplacement $U_A = -V_B$ en considérant différents types d'éléments. Pour l'élément triangulaire deux types de maillages A et B sont considérés. Le maillage de type B est utilisé pour évaluer la performance l'élément triangulaire.

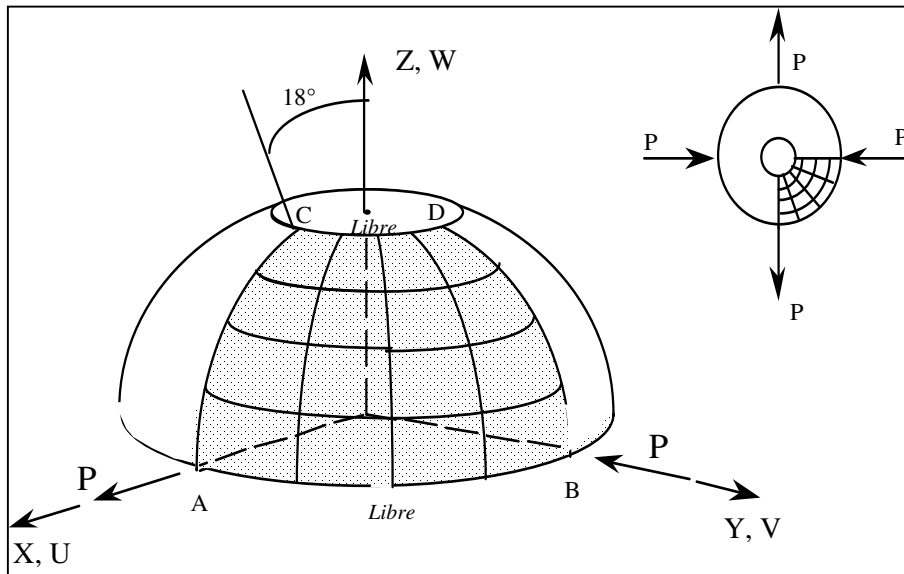


Figure IV. 2 : Hémisphère pincé - Données

$$R = 10 \text{ m} ; h = 0.04 \text{ m}$$

$$R/h = 250 , P = 2 \text{ N}$$

$$E = 6.825 \times 10^7 \text{ Pa} ; \nu = 0.3$$

Conditions de symétrie :

$$V = \theta_X = \theta_Z = 0 \text{ sur AC}$$

$$U = \theta_Y = \theta_Z = 0 \text{ sur BD}$$

Conditions aux limites :

$$W = 0 \text{ en B}$$

Valeur de référence [122] :

$$U_A = - V_B = 0.094 \text{ m}$$

La courbe de convergence par raffinement de maillage (nombre d'éléments) du déplacement radial au point d'application de l'une des charges concentrées est donnée sur (la figure IV.2). Sur (la figure IV.3) sont regroupés tous les résultats mais en terme de NDLT. La valeur de référence classiquement utilisée, proposée par MacNeal & Harder [122], est $U_A = -V_B = 0.094$ m.

Les valeurs de déplacement U_A obtenues par différents types d'éléments sont aussi présentées dans (le tableau IV.1).

Une performance remarquable est observée l'élément SHELL16 avec des résultats corrects converge vers la valeur de référence. A nombre d'éléments identiques, cet élément donne des résultats presque identiques à ceux obtenus par l'élément DKQ24. Si on introduit le nombre de degré de liberté total comme paramètre de la discrétisation (figure IV.4), l'élément SHELL16 se comporte de la même façon et converge plus vite que les éléments qui ont six variables nodales pour un nombre de ddl total (NDLT) > 300.

N	DKQ24	SHELL16	DKT12
2	96	96	121
4	98	99	108
6	96	97	102
8	95	96	99
10	94	95	98
12	94	94	96
16	94	94	

Tableau IV 1 : Déplacement $U_A (= V_B)$

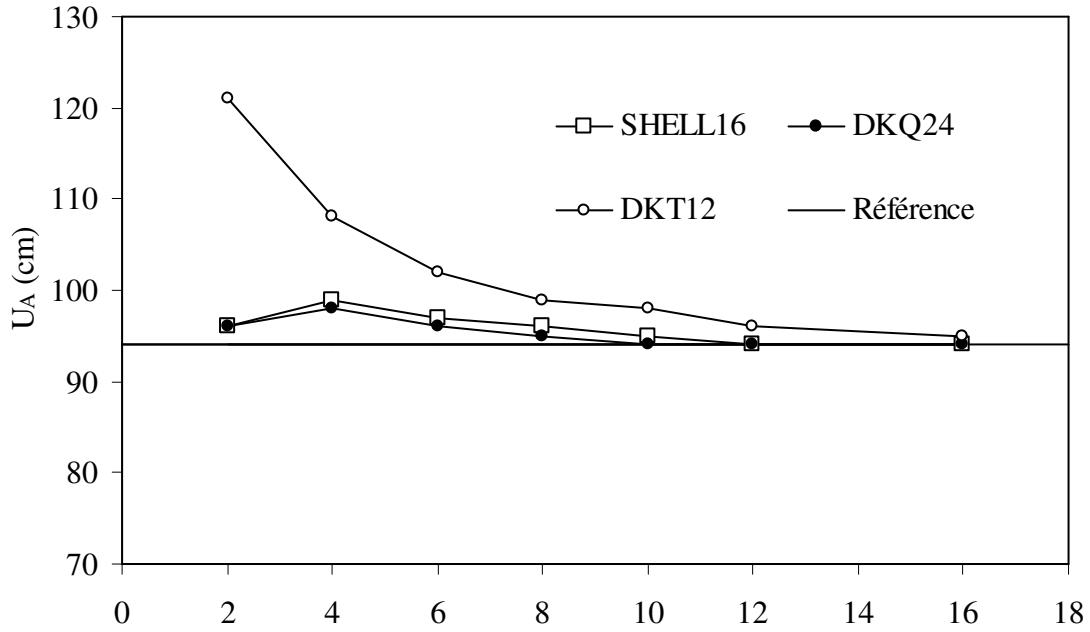


Figure IV. 3 : Hémisphère pincé - convergence de $U_A (=V_B)$ en fonction de N .

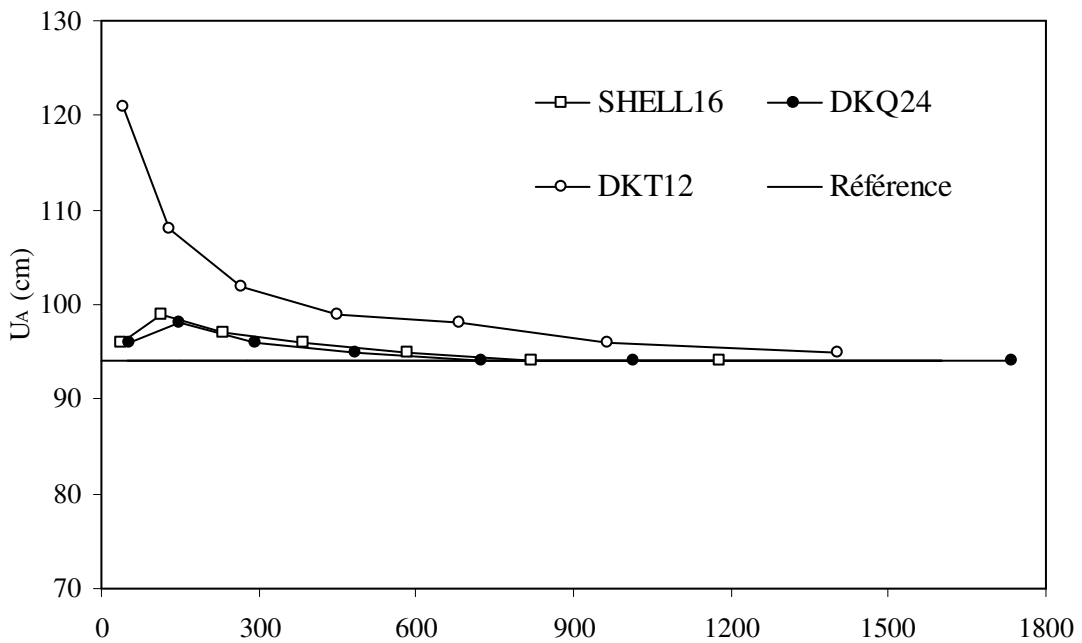


Figure IV. 4 : Hémisphère pincé - convergence de $U_A (=V_B)$ en fonction de NDL_{Total} .

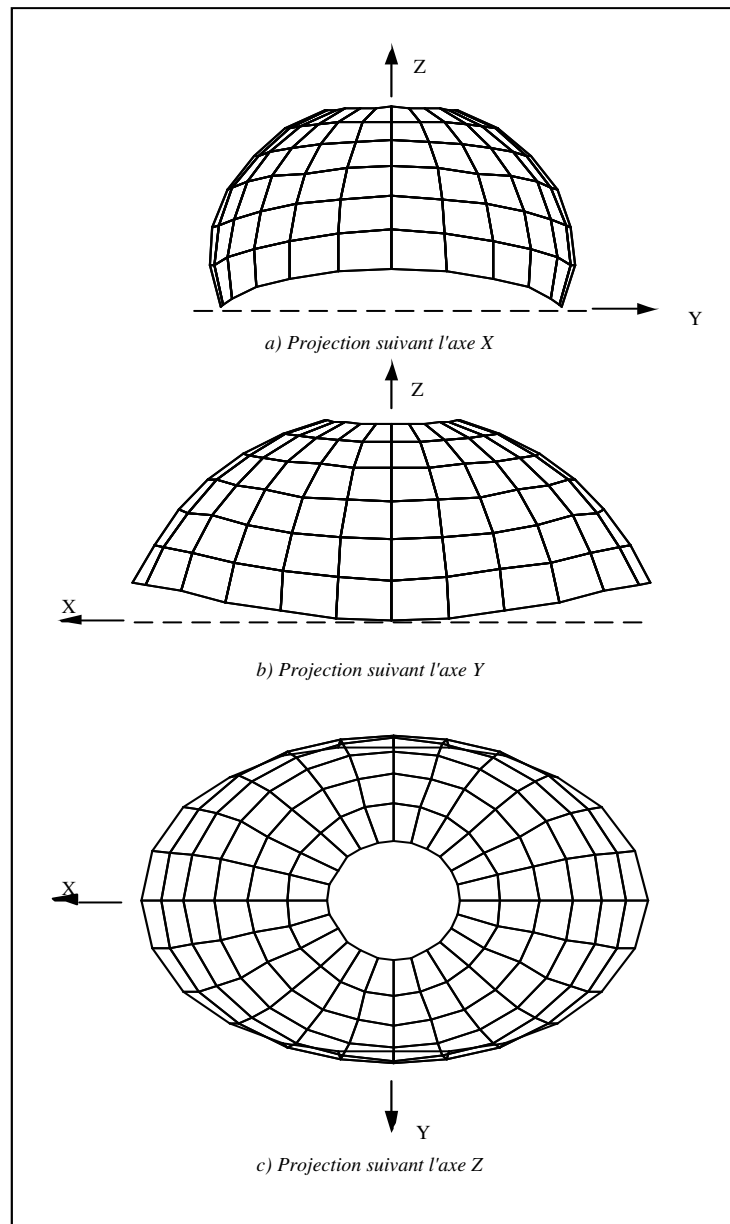


Figure IV. 5 : Hémisphère pincé – Déformée

IV.4.2. Panneau cylindrique soumis à son poids propre.

Le problème représenté à (la figure IV.6) est sans aucun doute le problème qui a été le plus étudié pour vérifier les formulations et comparer les performances d'éléments plats ou courbés, triangulaires, cylindriques ou isoparamétriques. Il s'agit d'un panneau cylindrique dont les bords rectilignes sont libres et dont les côtés courbés reposent sur des diaphragmes rigides dans leur plan. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont indiquées sur (la figure IV.6).

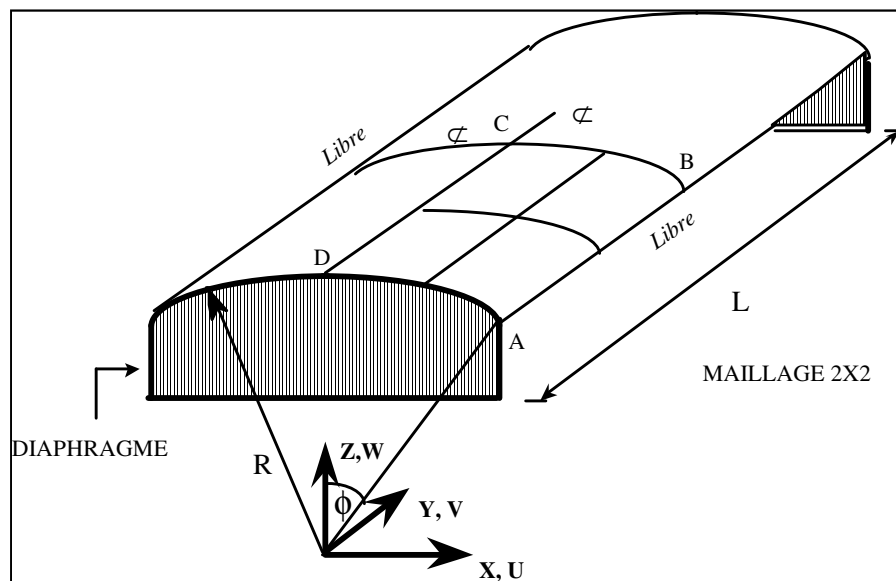


Figure IV. 6 : Panneau cylindrique soumis à son poids propre

Données

$$L = 6 \text{ m} ; R = 3 \text{ m} ; h = 0.03 \text{ m} ; \phi = 40^\circ ;$$

$$E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa} ; \nu = 0 ; f_z = - 0.625 \times 10^4 \text{ Pa}$$

Conditions aux limites :

$$U = W = \theta_Y \text{ sur AD}$$

Conditions de symétrie :

$$U = \theta_Y = \theta_Z = 0 \text{ sur CD}$$

$$V = \theta_X = \theta_Z = 0 \text{ sur CB}$$

Valeurs de référence (théorie des coques "profondes") :

$$W_B = - 3.61 \text{ cm} ; W_C = 0.541 \text{ cm}$$

Solution analytique (théorie des coques surbaissées) :

$$W_B = - 3.703 \text{ cm} ; W_C = 0.525 \text{ cm}$$

La coque est soumise à une charge verticale de gravité (poids propre) de $f_z = - 0.625 \times 10^4$ Pa. Ce problème décrit dans plusieurs références [98, 105, 133, 104, 49, 103, 123, 121], sert à tester l'aptitude d'un élément à simuler des états de déformations et de contraintes complexes avec une certaine domination de la partie membrane. Les rapports $L/h = 200$ et $R/h = 100$ sont importants et les déformations de cisaillement transverse sont négligeables. Les déformations de membrane sont importantes par rapport à celles de flexion, d'où un grand risque de blocage en membrane et en cisaillement.

Dans la littérature, deux solutions sont proposées. L'une est basée sur la théorie des coques surbaissées [97], l'autre est obtenue en considérant une théorie des coques profondes. La différence entre les deux théories est de l'ordre de 3%.

Nous avons considéré le quart de la structure à cause de la double symétrie en considérant des maillages réguliers avec $N = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ et 16 éléments suivant AB et BC. L'orientation des éléments triangulaires est indiquée sur (la figure IV.1). Le maillage de type B est utilisé pour évaluer les performances des éléments triangulaires. Les résultats de déplacements obtenus avec les éléments considérés sont reportés dans (les tableaux IV.2 et IV.3 en fonction du nombre de divisions.

L'évolution des déplacements verticaux au point B (milieu du bord libre), et au point C qui est le centre de la structure par raffinement du maillage est présentée sur les figures 4.7a et 4.7b. Nous avons procédé à la juxtaposition de toutes les courbes sur la figure IV.7a pour W_B et sur la figure IV.7b pour W_C afin de comparer l'évolution de chaque courbe par rapport à l'autre en terme de NDLT. Nous notons que les différents éléments finis présentés convergent vers la solution des coques "profondes". Selon le tableau IV.2 et IV.3 tous les éléments présentent une convergence raisonnable en fonction du nombre de division N. Les résultats d'efforts N_{yB} et M_{xC} obtenus avec l'élément SHELL16 sont présentés dans le tableau IV.4.

N	DKQ24	SHELL16	DKT12
2	-4.39	-6.065	-3.773
4	-3.42	-3.934	-2.499
6	-3.48	-3.738	-2.882
8	-3.53	-3.677	-3.129
10	-3.55	-3.651	-3.275
12	-3.57	-3.637	-3.365
16	-3.58	-3.624	

Tableau IV 2 : Déplacement W au point B

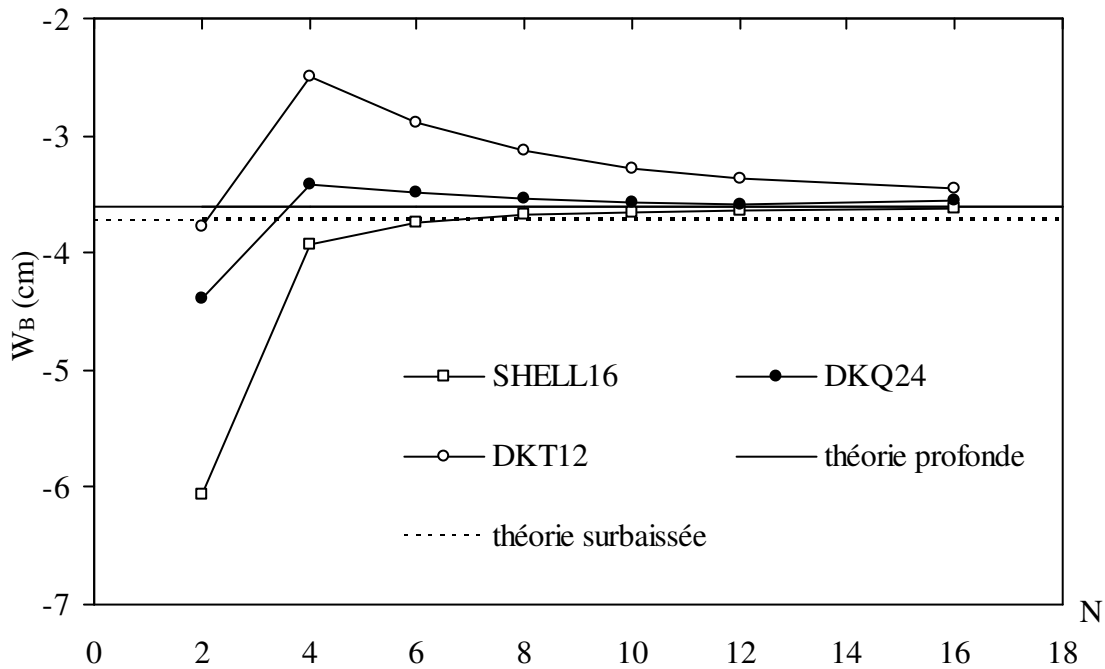
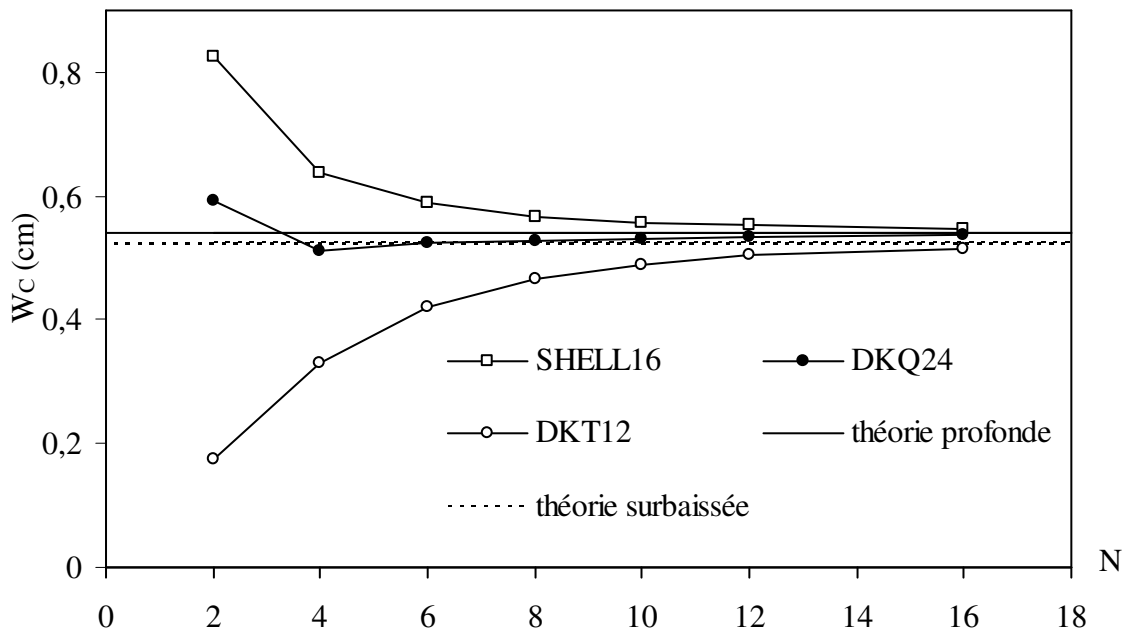
N	DKQ24	SHELL16	DKT12
2	0.593	0.825	0.175
4	0.513	0.638	0.330
6	0.523	0.588	0.42
8	0.529	0.568	0.465
10	0.530	0.558	0.489
12	0.535	0.553	0.504
16	0.537	0.548	0.516

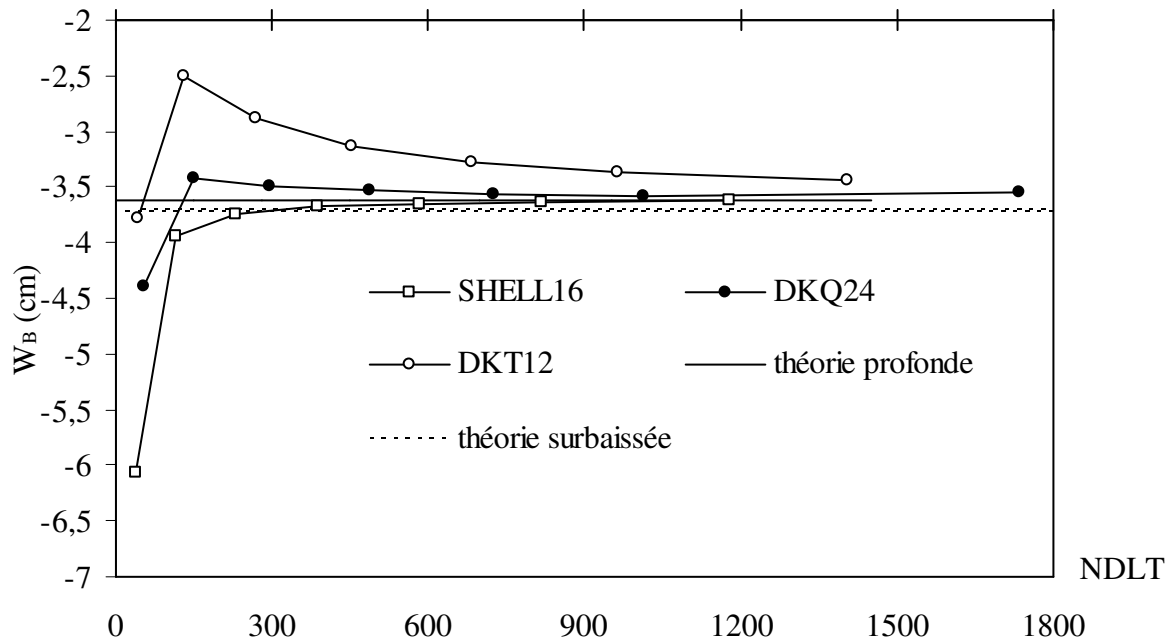
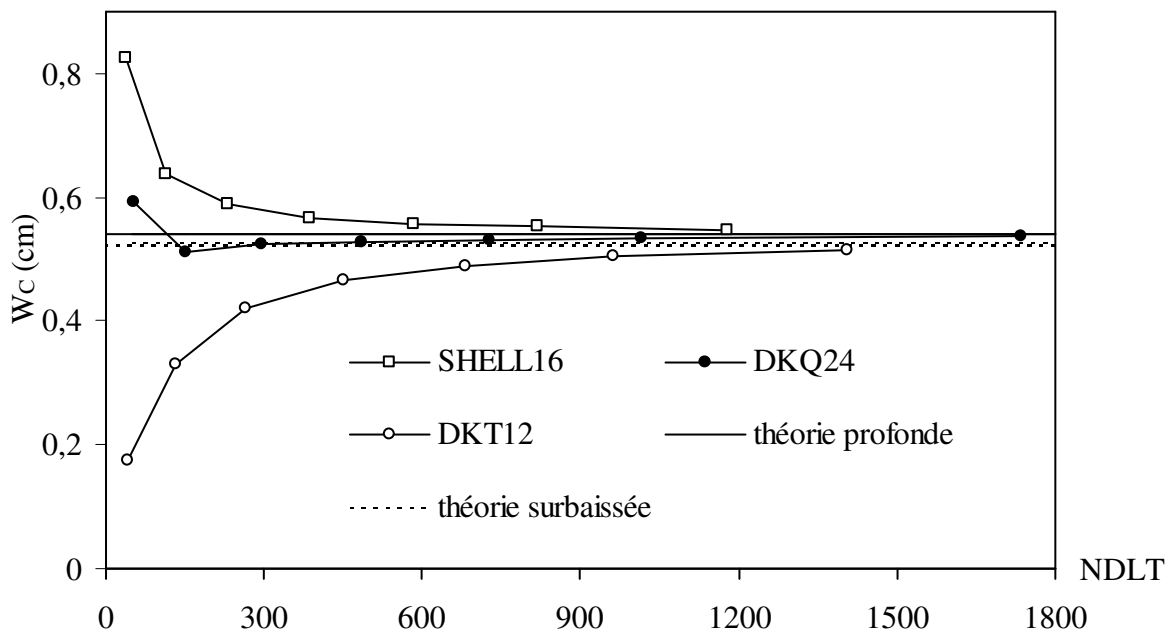
Tableau IV 3 : Déplacement W au point C

SHELL16	N = 2	N = 4	N = 6	N = 8	N = 10	N = 12	N = 16
N_{yB} (kN/m)	398	590	613	621	624	626	628
ε	37.91	7.96	4.37	3.12	2.65	2.34	2.03
Solution analytique (théorie des coques surbaissées) $\underline{N}_{yB} = 641$ kN/m [49]							
M_{xC} (kNm/m)	1.58	1.78	1.91	1.97	2.00	2.02	2.04
ε	22.66	13.42	7.1	4.18	2.72	1.75	0.78
Solution analytique (théorie des coques surbaissées) $\underline{M}_{xC} = 2.056$ kNm/m [49]							

Tableau IV 4 : Efforts N_y au point B et M_x au point C

Selon les figures IV.7a et IV.7b, nous remarquons la supériorité des éléments à quatre noeuds par rapport à ceux à trois noeuds. En termes de NDLT du problème (Figure IV.8a et IV.8b), l'élément SHELL16 converge plus vite vers la solution de la théorie des coques profondes et donne de meilleurs résultats. Des maillages très fins, comme le montre le tableau 4.4, sont nécessaires pour réduire l'erreur sur les efforts résultants aux points B et C.

a) Convergence du déplacement W au bord libre Bb) Convergence du déplacement W au centre C.**Figure IV. 7 : Convergence de W_B et W_C en fonction de nombre d'éléments**

a) Convergence du déplacement W au bord libre Bb) Convergence du déplacement W au centre C.**Figure IV. 8 : Convergence de W_B et W_C en fonction de NDL total**

IV.4.3. Cylindre pincé avec diaphragmes

Un des cas-tests populaires pour les problèmes de coque est celui d'un cylindre soumis à deux charges concentrées diamétralement opposées et qui repose à ses extrémités sur deux diaphragmes rigides dans leur plan pour empêcher la distorsion de la section. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans (la figure IV.9).

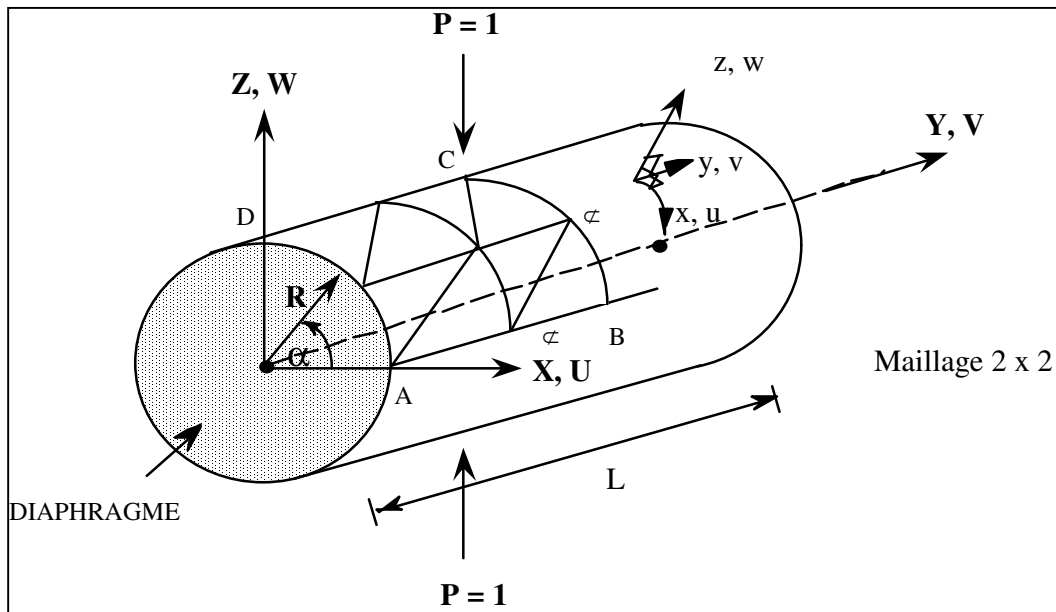


Figure IV. 9 : Cylindre pincé avec diaphragmes

Données

$$L = 6 \text{ m} ; R = 3 \text{ m} ; h = 0.03 \text{ m}$$

$$\nu = 0.3 ; E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

Condition de symétrie :

$$W = \theta_Y = \theta_X = 0 \text{ sur AB} ; V = \theta_X = \theta_Z = 0 \text{ sur BC}$$

$$U = \theta_Y = \theta_Z = 0 \text{ sur CD}$$

Conditions aux limites :

$$U = W = \theta_Y = 0 \text{ sur AD}$$

$$\text{Sollicitation en C} : F_Z = - 0.25 \text{ N}$$

Ce test de coque mince ($R/h = 100$) constitue un des tests les plus sévères pour étudier la capacité d'un élément de coque à décrire des champs de déformations de membrane complexes avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne, notamment au niveau des zones sollicitées (point C).

Nous étudions un huitième de la coque à cause des symétries en considérant des éléments quadrilatéraux SHELL16 et DKQ24 et triangulaires DKT12. Nous présentons les performances des éléments du point de vue vitesse de convergence pour des maillages réguliers avec $N = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ et 16 éléments suivant AB et BC. Les résultats de déplacements obtenus en utilisant les différents types d'éléments sont respectivement reportés dans les tableaux IV.5 et IV.6. Les résultats d'effort N_{XC} sont présentés dans le tableau 4.7. Sur les figures IV.10a et IV.10b sont présentées les courbes de convergence en fonction de N , pour respectivement, des déplacements W_C et V_D . Les figures IV.11a et IV.11b sont celles relatives aux courbes de convergences en termes de NDLT.

La solution analytique basée sur la théorie des coques minces (théorie de Kirchhoff) a été présentée par Lindberg et al. [73] selon Batoz et Dhatt [49].

N	DKQ24	SHELL16	DKT12
2	14.07	12.576	8.91
4	101.24	69.97	103.03
6	138.02	115.671	183.8
8	154.84	145.944	205.53
10	164.95	164.019	214.31
12	166.41	173.211	216.88
16	162.04	178.384	

Tableau IV 5 : Déplacement W_C (W_C (référence) = 164.24)

N	DKQ24	SHELL16	DKT12
2	1,950	1,696	0,8
4	5,960	4,184	4,12
6	4,800	4,284	5,94
8	4,47	4,238	5,00
10	4,326	4,202	4,59
12	4,274	4,179	4,42
16	4,200	4,153	-

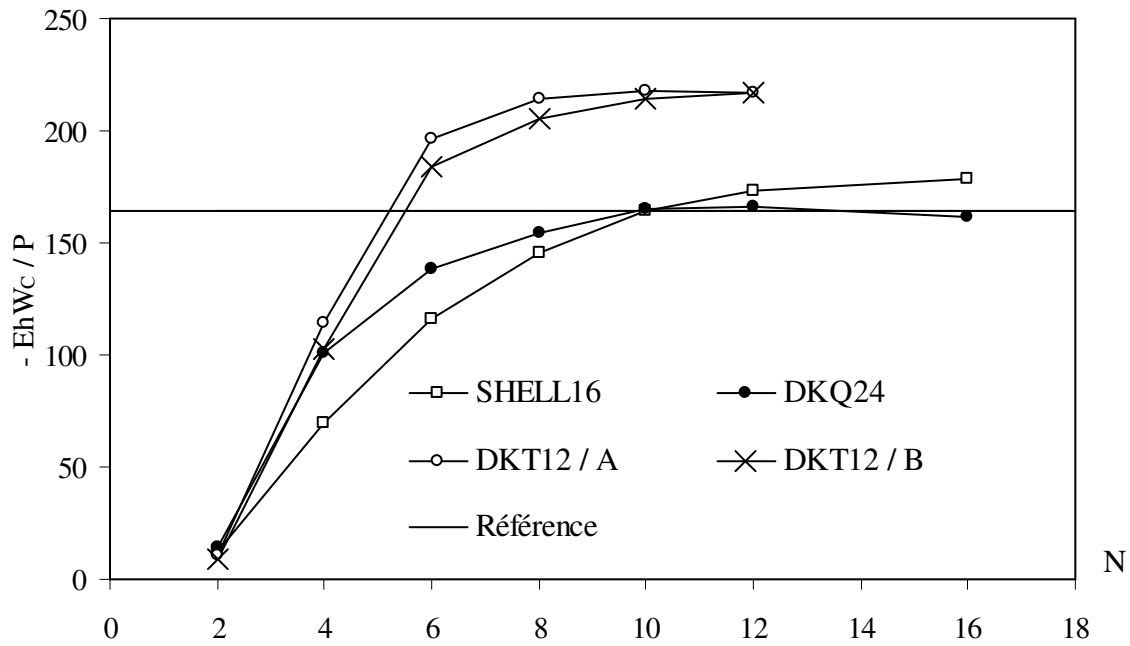
Tableau IV 6 : Déplacement VD (VD (référence) = 4.114)

Eléments	N= 2	N = 4	N = 6	N = 8	N = 10	N = 12	N = 15
DKQ24	2.47	8.83	14.06	17.65	-	20.32	20.83
SHELL16	2.697	9.36	13.26	15.63	16.98	17.70	18.18 (N=16)

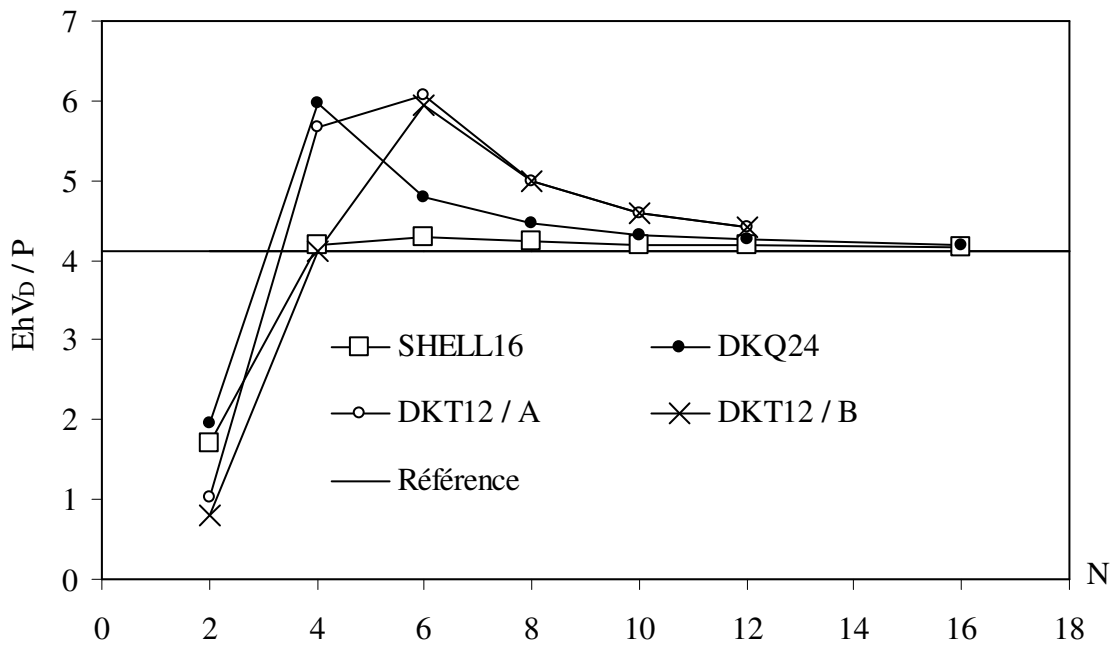
Tableau IV 7 : Efforts N_x au point C - (valeur de référence $N_{xc} = -RN_{xc}/P$, $N_{xc} = 18.6$ [49])

Les résultats indiqués sur les figures IV.10 et IV.11 suscitent les commentaires suivants :

- Les différents types d'éléments convergent de façon monotone vers la solution de référence dans le cas de WC. Contrairement aux tests précédents, nous remarquons dans celui-ci, une convergence lente au début pour tous les éléments et un raffinement de maillage est nécessaire pour obtenir de bons résultats. Ce comportement peut être expliqué par la grande variation des champs de membrane et de flexion au voisinage du point C.
- Ce test est marqué par la supériorité des éléments de type Kirchhoff-Discret et en particulier les éléments quadrilatéraux.
- En terme de NDLT, de bons résultats ont été obtenus avec l'élément SHELL16. Il présente une bonne vitesse de convergence comparativement aux autres modèles.
- De bonnes estimations des efforts résultants \bar{N}_x au point C sont obtenues avec l'élément SHELL16. Les résultats correspondants sont présentés sur le tableau IV.7.

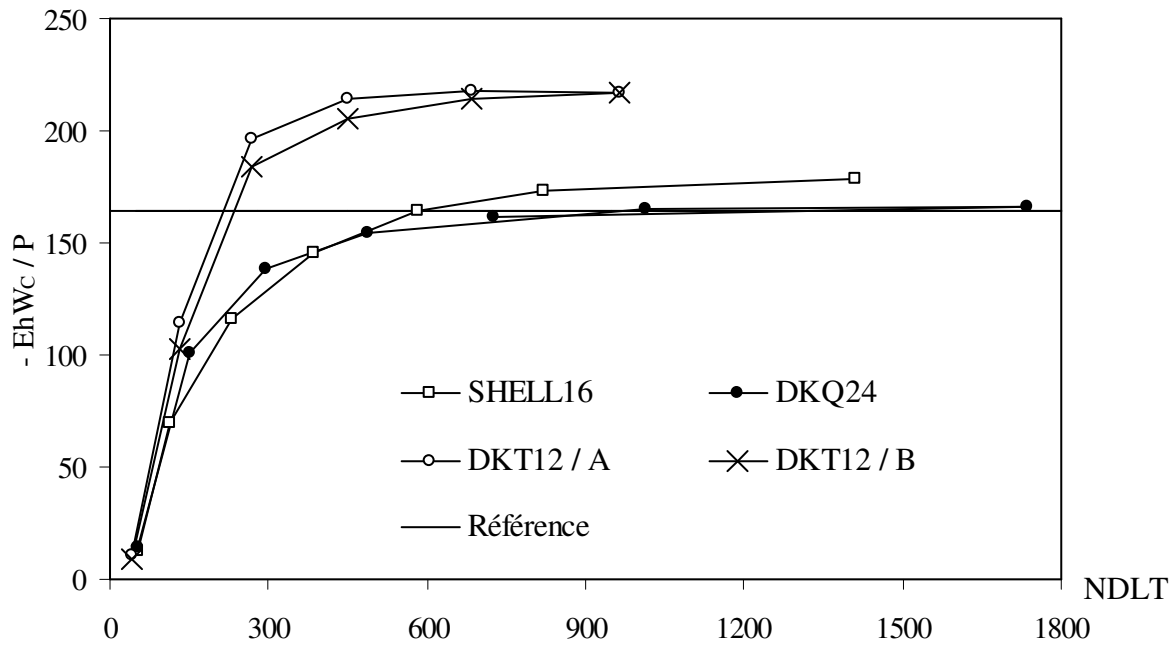
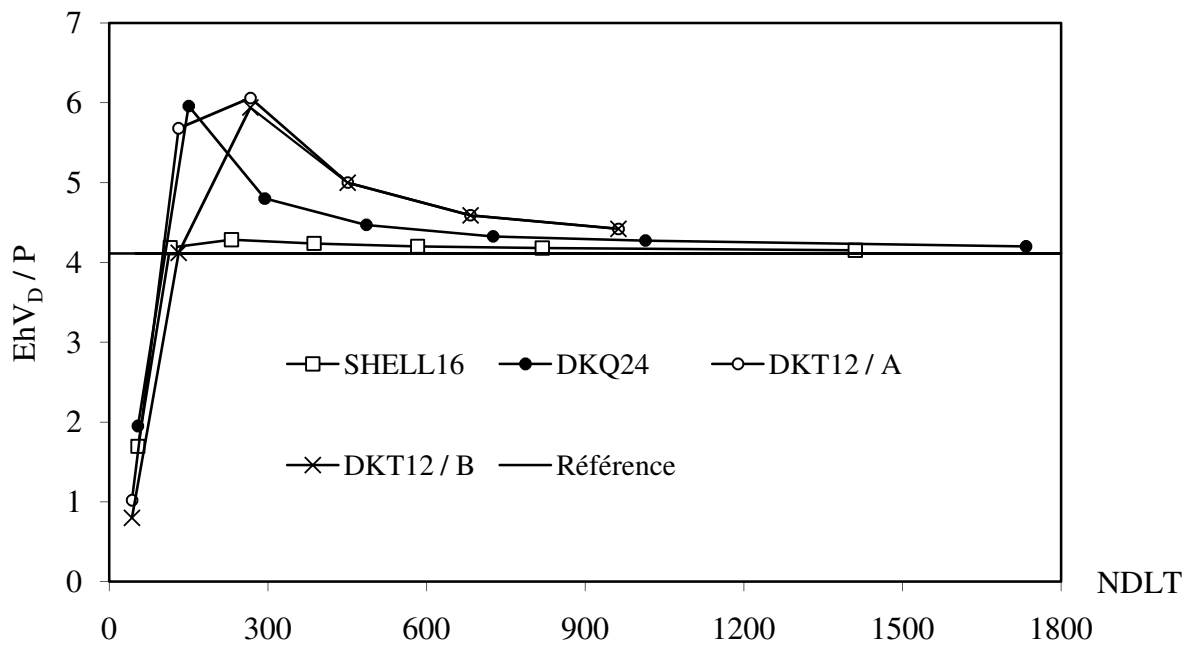


a) Convergence de W_c .



b) Convergence de V_d .

Figure IV. 10 : Convergence de W_c et V_d en fonction du nombre d'éléments.

a) Convergence de W_c .b) Convergence de V_d .Figure IV. 11 : Convergence de W_c et V_d en fonction du NDLT

Conclusion

Le comportement et le calcul des structures est une opération de recherche très liée à celle des méthodes numériques et principalement à la méthode des éléments finis. Cette opération a fait l'objet de nombreux articles et communications depuis plusieurs années et comporte essentiellement deux aspects à savoir :

- L'aspect Modélisation relatif au développement et l'évaluation de nouveaux modèles, outils et méthodes pour le calcul des structures de types poutres, plaques et coques isotropes ou anisotropes (composites) en présence de non-linéarités géométriques ou matérielles.
- L'aspect Simulation relatif aux applications des outils de modélisation pour l'étude du comportement des structures impliquant des non-linéarités diverses (grands déplacements, grandes déformations, conditions aux limites évolutives) et pour la simulation de la mise en forme de produits à parois minces.

La formulation et l'évaluation des modèles éléments finis pour l'analyse des structures constituent l'un des axes de recherches importants de la modélisation des solides et des structures. C'est dans cet esprit, que notre travail se situe et se veut une contribution supplémentaire à cet effort de compréhension et de maîtrise des modèles éléments finis. Dans ce travail nous avons mené une étude, de nature théorique et numérique, relative à la formulation et l'évaluation d'un élément de coque à facette plane. L'élément est baptisé dans ce travail SHELL16. C'est un élément fini quadrilatère de type coques, dédié à l'analyse linéaire statique des structures de type plaques et coques en membrane/flexion. Il se caractérise par la présence de 3 degrés de liberté (ddl) de translation U , V , W aux nœuds sommets et par une rotation θ_s aux milieux des cotés. L'élément est obtenu en utilisant l'approche géométrique par facettes planes (éléments plans résultant de la superposition classique des effets de membrane et de flexion). L'élément de membrane Q4WT est superposé à l'élément de plaque DKQ8 dans le repère local. Les effets de Cisaillement Transverse (CT) sont négligés (comme pour les éléments DKT et DKQ). Les rotations sont d'abord définies aux milieux des côtés avant d'introduire les hypothèses de Kirchhoff sous forme de collocation aux milieux des côtés. Le couplage membrane-flexion est mis en évidence après transformation des variables locales dans le repère global. Les matrices de

rigidité sont obtenues de façon exacte sans recourir à l'intégration numérique pour la partie plaque. L'évaluation de ce modèle SHELL16 est faite suivant un certain nombre de critères dont la plupart sont ceux proposés dans la littérature.

A travers les résultats obtenus, dans le cas de l'analyse linéaire statique, nous pensons que cet élément SHELL16 a un comportement globalement correct par comparaison à d'autres résultats (analytiques ou références). Notre élément converge rapidement vers la solution analytique en le comparant au autre éléments.

Ce travail ne prétend pas être complet pour résoudre tous les problèmes d'analyse des plaques et coques. Pour améliorer davantage le travail présenté et le rendre plus fructueux, il est recommandé d'approfondir davantage les thèmes suivants :

- prise en compte du gauchissement pour l'élément de coque SHELL16 (analyse des structures de formes quelconques ou gauchies) ;
- analyse non-linéaire géométrique avec grands déplacements et grandes rotations ;
- étendre la validité du modèle au cas des grandes déformations (prise en compte de la plasticité).

Références bibliographiques

- [1] Batoz, J.L. et Dhatt. G., Modélisation des Structures par Éléments Finis. Vol. 2, Poutres et Plaques, Hermès, Paris (1992).
- [2] Batoz, J.L., Hammadi, F., Zheng, C.L. and Zhong, W.X., “On the linear analysis of plates and shells using a new sixteen dof flat shell element”, Advances in Finite Element Procedures and techniques Edited by B.H.V. Topping, Civil-Comp press, Edinburgh, Scotland, UK, 31-41 (1998) (publié dans Computers & Structures)
- [3] Batoz, J.L., Zheng, C.L., Hammadi, F., “Formulation, evaluation and application of new triangular, quadrilateral, pentagonal and hexagonal Discrete Kirchhoff Plate/Shell elements”, ‘International Journal for Numerical Methods in Engineering’, Vol. 52, Issue: 5-6, pp. 615-630, October 2001 (Published online 16 August 2001)
- [4] Batoz, J.L., Hammadi, F., Zheng, C.L. and Zhong, W.X., “On the linear analysis of plates and shells using a new sixteen dof flat shell element”, International Journal of Computers and Structures, Vol. 78, Issue: 1-3, pp. 11-20, September 2000.
- [5] Solomon L., Elasticite linéaire, Masson, 1968.
- [6] Bergan, P.G. and Nygard, M.K., “Finite elements with increased freedom in closing shape functions”, IJNME, 20, 643-664 (1984).
- [7] Chen, W. and Cheung, Y.K. (1987), “A new approach for the hybrid element method”, IJNME, 24, 1697-1709.
- [8] Irons, B.M. and Razzaque, A. (1972), “Experiences with the patch test for convergence of finite elements”, The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to partial Differential Equations, Edition A.K. Aziz, Academic press, NewYork, 551-587.
- [9] Park, K.C. and Stanley, G.M. (1986), “A curved C^0 shell element based on assumed natural-coordinate strains”, Journal of Applied Mechanics, 53, 51-54.
- [10] Pian, T.H.H. (1964), “Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions”, AIAA J-2, 1333-1376.
- [11] Pian, T.H.H. and Chen, D.P. (1982), “Alternative ways for formulation of hybrid stress elements”, IJNME, 18, 1679-1684.
- [12] Pian, T.H.H. and Sumihara, K. (1984), “Rational approach for assumed stress finite element”, IJNME, 20, 1685-1695.
- [13] Simo, J.C. and Rifai, M.S. (1990), “A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes”, IJNME, 29, 1595-1638.

-
- [14] Taig, I.C. and Kerr, R. (1964), "Some problems in the discrete element representation of aircraft structure", *Matrix Method of the Structural Analysis*, Pergamon Press, London, 267-315.
- [15] Tang, L.M., Chen, W.J. and Liu, Y.X. (1984), "Formulation of quasi-conforming element and Hu-Washizu principle", *Computers & Structures*, 19, 247-250.
- [16] Taylor, R.L., Beresford, P.J. and E.L. Wilson, (1976), "A non-conforming element for stress analysis", *IJNME*, 10, 1211-1219.
- [17] Turner, M., Clough, R., Martin, H. and Topp, L. (1956), "Stiffness and deflection analysis of complex structures", *J. Aeronaut. Sci.*, 23, 1805-1823.
- [18] Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P. and Ghaboussi, J. (1973), "Incompatible displacement models", *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Academic Press, New York, 43-57.
- [19] Zhao, P., Pian, T.H.H. and Sheng, T. (1997), "A new formulation of isoparametric finite elements and the relationship between hybrid stress element and incompatible element", *IJNME*, 40, 15-27.
- [20] Zhong, W.X. and Zeng, J. (1996), "Rational Finite Elements", *Journal of computational structural mechanics and application*, 13, 1-8.
- [21] Maus, S.T., A simple method of stiffness matrix formulation based on single element test, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.7, No.2, (1999), 203-216.
- [22] Bazeley, G.P., Cheung, Y.K., Irons, B.M. and Zienkiewicz., O.C. (1965), "Triangular elements in plates bending-conforming and non-conforming solutions", *Proc. Conf. On Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDL-TR-66-80, Wright-Patterson Air Force Base, 547-576.
- [23] Bergan, P.G. (1980), "Finite elements based on energy orthogonal functions", *IJNME*, 15, 1541-1555.
- [24] Specht, B. (1988), "Modified shape functions for the three nodes plate bending element passing the patch-test", *IJNME*, 26, 705-715.
- [25] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Too, J.M., (1971), "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", *IJNME*, 3, 275-290.
- [26] Pugh, E.D.L., Hinton, E. and Zienkiewicz, O.C.,(1978), "A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration", *IJNME*, 12, 1059-1079.
- [27] Hinton, E. and Huang, H.C., (1986), "A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields", *Computers & Structures*, 23, 409-431.
- [28] Donea, J., and Lamain, L. G., (1987), "A modified representation of transverse shear in C^0 quadrilateral plate elements", *CMAME*, 63, 183-207.

-
- [29] Wempner, G.A., Oden, J.T., and Kross, D.A.: "Finite element analysis of thin shells". Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, EM6, 94, (1968), 1273-1294
- [30] Lemaitre J., Chaboche J. L., Mécanique des matériaux solides, Dunod, 1986.
- [32] Dhatt, G.: "Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchhoff hypothesis". Proc. ASCE Symp. on Applications of FEM in Civil Engineering, Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn.,(1967), 13-14
- [33] Dhatt, G.: "An efficient triangular shell element". AIAA Journal, 8, (1970), 2100-2102
- [34] Dhatt, G., Marcotte, L., and Matte, Y.: "A new triangular discrete Kirchhoff plate shell element". IJNME, 23, (1986), 453-470
- [35] Dhatt, G., Marcotte, L., Matte, Y. and Talbot, M.: "Two new discrete Kirchhoff plate shell elements". 4th Symp. on Num. Meth. in Eng., Atlanta, Georgia, (1986), 599-604
- [36] Dhatt, G. and Venkatasubbu: "Finite element analysis of containment vessels". Proc. 1st Conf. SMIRT, Berlin, Germany, 5, (1971), paper J 3/6
- [37] Stricklin, J.A., Haisler, W., Tisdale, P. and Gunderson, R.: "A rapidly converging triangular plate element". AIAA journal, 7,(1969), 180-181.
- [38] Fried, I., and Yang, S.K.: "Triangular nine-degree-of-freedom C^0 plate bending element of quadratic accuracy". Quarterly Journal of Applied Mathematics, 31, (1978) 303-312
- [39] Batoz, J.L., Bathe, K.J. and Ho, L.W.: "A study of three-node triangular plate bending elements". IJNME, 15, (1980), 1711-1812
- [40] Batoz, J.L. and Tahar, M. Ben: "Evaluation of a new thin plate quadrilateral element". IJNME, 18, (1982), 1665-1678
- [41] Batoz, J.L. and Dhatt, G.: "An evaluation of two simple and effective triangular and quadrilateral, plate bending elements". New and Future Developments in Commercial Finite Method, Los Angeles, (1981), 352-368
- [42] Dhatt G. S., Touzot G., Une présentation de la méthode des éléments finis, 2^e édition, Maloine S. A. éditeur, 1984.
- [43] Germain P., Mécanique. Tome 1&2. Ecole Polytechnique. Ellipses, 1986.
- [44] Batoz, J.L. and Lardeur, P.: "A Discrete Shear Triangular Nine dof Element for the Analysis of Thick to Thin Plates". IJNME, 28, (1989), 533-560
- [45] Batoz, J.L. and Katili, I.: "On a simple triangular Reissner/Mindlin plate element based on incompatible modes and discrete constraints". IJNME, 35, (1992), 1603-1632

- [46] Salençon J., Mécanique des milieux continus. Tome 1 : Concepts généraux, p.343-349. Ed, Lavoisier, 1998.
- [47] Salençon J., Mécanique des milieux continus. Tome 1 : Concepts généraux, p.343-349. Ed, Lavoisier, 1998.
- [48] Valid R., La mécanique des milieux continus et le calcul des structures. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France. Ed, Eyrolles, 1977.
- [49] Batoz, J.L. and Dhatt, G.: "Modélisation des structures par éléments finis". Vol. 3, Coques, (1992), Hermes Editeur, Paris
- [50] Batoz J.L., Zheng C. L., Hammadi F., Formulation et évaluation d'éléments finis de coques à cinq et six cotés, 14^{ème} Congrès Française de Mécanique AUM-AFM, 30 aout-3 sept, Toulouse, 1999, France. 6 pages (CD-ROM).
- [51] Bathe, K.J. and Ho, L.W.: "A simple and effective element for the analysis of general shell structures". Computers and Structures, 13, (1981), 673-681
- [52] Bathe, K.J., Dvorkin E. and Ho, L.W.: "Our discrete Kirchhoff and isoparametric shell elements for non-linear analysis". An assessment. Computers and Structures, 16, (1983), 89-98
- [53] Garnet. H. and Pifko, A.B. "An efficient triangular plate bending finite element for crash simulation", Computers & Structures., 16, (1983), 371-379
- [54] Bhashyam, G.R. and Gallagher, R.H. " A triangular shear flexible finite for moderately thick laminated composite plates". CMAME, 40, (1983), 309-326
- [55] Carpenter, N., Stolarski H. and Belytschko, T.: "A flat triangular shell element with improved membrane interpolation". CMAME, 1, (1985), 161-168
- [56] Talbot, M. and Dhatt, G.: "Three discrete Kirchhoff elements for shell analysis, with large geometrical non linearities and bifurcations". Engineering Computations, 4, (1987), 15-22
- [57] Wu, C.C. "Some problems of a plate bending hybrid model with shear effect", IJNME, 18, (1982), 1077-1089
- [58] Batoz, J.-L., Zheng, C. L., Hammadi, F.: Formulation et évaluation d'éléments finis de coques pentagonaux et hexagonaux, 4^{ème} Colloque National en Calcul des Structures, 643-648, Giens, mai, 1999, France
- [59] Tessler, A. " Shear deformable bending elements with penalty relaxation", Finite Element Methods for Plate and Shell Structures, Vol. I, Pineeridge Press, Swansea, (1986), 226-290
- [60] Tessler A. and Hughes, T.J.R. "A three-node Mindlin plate element with improved transverse shear", CMAME, 50, (1985), 71-101

-
- [61] Razzaque, A. "Program for triangular bending elements with derivative smothing", IJNME, 6, (1973), 333-343
- [62] Fricker, A.J. "An improved three-noded triangular element for plate bending", IJNME, 21, (1985), 105-114
- [63] Argyris, J.H., Haase, M., Mlejnek, H.P. and Schmolz, P.K., TRUNC for shell - An element possibly to the taste of Bruce IRONS . IJNME, 22, (1986), 93-115.
- [64] MacNeal, R.J., The evolution of lower order plate and shell elements in MSC/Nastran, Finite Element Methods for Plate and Shell Structures, Vol. I, Pineridge Press, Swansea, (1986), 85-127
- [65] Morley, L.S.D., The constant moment plate bending element. Journal of Strain Analysis, 1971, 6, 20-24.
- [66] Sze, K.Y. and Chow, C.L., An efficient hybrid quadrilateral Kirchhoff plate bending element. IJNME, 32, (1991),149-169.
- [67] Bathe, K.J. and Dvorkin, E.H., A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate bending theory and mixed interpolation , IJNME, 21, (1985), 367-383
- [68] MacNeal, R., A simple quadrilateral shell element. Computers and Structures, 8, (1978), 175-183.
- [69] Saleeb, A.F. and Chang, T.Y., An efficient quadrilateral element of plate bending analysis. IJNME, 24, (1987), 1123-1155.
- [70] Prathap, G. and Wiswanath, S., An optimally integrated four node quadrilateral plate bending element. . IJNME, 19, (1983), 831-840.
- [71] Ibrahimbegovic, A., Quadrilateral finite elements for thick and thin plates. CMAME, 110, (1993), 195-209.
- [72] Bernadou M., Ducatel Y. & Trouvé P., Approximations of general shell problems by flat plate elements, Computational Mechanics, Part 1, Vol. 5, p. 175-208, 1989.
- [73] Lindberg G.M., Olson M.D. & Cowper G.R., New development in the finite element analysis of shells, Q. Bull Div. Mech. Eng. And Nat. Aeronautical Establishment, National Reseach Council of Canada, Vol.4, 1969.
- [74] Crisfield M.A.: Finite elements and solution procedures for structural analysis. Pineridge Press, Swansea, U-K., (1986)
- [75] Bernadou M.: Finite element methods for thin shell problems. John Wiley, (1996).
- [76] Kikuchi F.: On a mixed method related to the discrete Kirchhoff assumption. Hybrid and mixed finite element methods, Ed. Atluri et al., John Wiley, (1983), 137-154

-
- [77] Jeyachandrabose C. and Kirkhope J.: An alternative explicit formulation for the DKT plate bending element. *IJNME*, 21, (1985), 1289-1293
- [78] Jeyachandrabose C. and Kirkhope J.: Construction of new efficient three node triangular thin plate bending elements. *Computers and Structures*, 23, (1986), 587-603
- [79] Jeyachandrabose C., Kirkhope J. and Meckisho L.: an improved discrete Kirchhoff quadrilateral thin plate bending element. *IJNME*, 24, (1987), 635-654
- [80] Irons B.M.: The semi-loof shell elements. *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*, Aswell and al. Eds, Wiley, N-Y, (1976), 197-222
- [81] Irons B.M. and S. Ahmad, *Techniques of Finite Elements*. Ellis Horwood, Chichester, (1980).
- [82] Meek J.L. and Tan H.S.: a Discrete Kirchhoff plate bending element with loof nodes . *Computers and Structures*, 21, (1985), 1197-1212
- [83] Poulsen P.N. and Damkilde L.: A flat triangular shell element with loof modes. *IJNME*, 39, (1996), 3867-3887
- [84] Lyons L.P.R.: A general finite element system with special reference to the analysis of cellular structures. Ph.D. Thesis, Imperial College, London, (1977).
- [85] Crisfield M.A.: A four-noded thin plate bending element using shear constraints - a modified version of Lyons element. *CMAME*, 38, (1983), 93-120
- [86] Chen Wanji and Cheung Y.K: Refined Quadrilateral Discrete Kirchhoff thin plate bending element. *IJNME*, 40, (1997), 3937-3953
- [87] Nagtegaal J.G. and Slater J.G.: A simple non-compatible thin shell element based on Discrete Kirchhoff Theory. *Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells*, ASME, AMD, 48, (1981), 167-192
- [88] Katili I.: A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields Part 1: An extended DKT element for thick plate bending analysis. *IJNME*, 36, (1993), 1859-1883, Part 2: An extended DKQ element for thick plate bending analysis. *IJNME*, 36, (1993), 1885-1908
- [89] Aalto J.: From Kirchhoff to Mindlin plate elements. *Communication in Applied Numerical Methods*, 4, (1988), 231-241
- [90] Onate E.: A review of some finite element families for thick and thin plate and shell analysis. *Recent Developments in Finite Element Analysis*, Hughes et al., Eds, CIMNE, Barcelona, Spain, (1994), 98-111
- [91] Onate E. and Castro J.: Derivation of plate elements shear strain fields. In *New Advances in Computational Structural Mechanics*, Ladvèze and Zienkiewicz, Eds, Elsevier, (1992), 273-288

- [92] Onate E., Zarate F. and Flores F.: A simple triangular element for thick and thin plate and shell analysis. *IJNME*, 37, (1994), 2569-2582
- [93] Zienkiewicz O.C., Taylor R., Papadopoulos P. and Onate E.: Plate bending elements with discrete constraints: new triangular elements. *Computers and Structures*, 35, (1990), 505-522
- [94] Ayad R., Batoz J.L., Dhatt G. and Katili I.: A study of recent triangular elements for thin and thick plates. in *New Advances in Computational Structural Mechanics*, Ed. P. Ladevèze and O.C. Zienkiewicz, (1992), Elsevier, 259-271
- [95] Boudi E.M., Beckers P. and Zhong H.G.: Estimateurs d'erreur pour les éléments de plaques basés sur la théorie discrétisée de Kirchhoff. *STRUCOME*, Paris, (1994), 600-611
- [96] Hinton E., Ozakca M. and Rao N.V.R.: Adaptive analysis of thin shells using facet elements. *IJNME*, 32, (1991), 1283-1301.
- [97] Scordelis A.C. & Lo K.S., Computer analysis of cylindrical shells, *J. Amer. Concrete Institute*, Vol. 61, p. 539-561, 1969.
- [98] Ahmad, S., Irons, B.M., and Zienkiewicz, O.C., Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, *IJNME*, (1970), 2, 419-451
- [99] Bernadou, M., Ducatel, Y., and Trouvé, P., Approximations of general shell problems by flat plate elements, *Computational Mechanics*, Part 1, (1989), 5, 175-208
- [100] Dawe D.J.: Shell analysis using a simple facet element. *Journal for Strain Analysis*, 7, (1972), 226-270
- [101] Clough, R.W. and Johnson, C.P., A finite element approximation for the analysis of thin shell. *IJSS*, 1968, 4, 43- 60.
- [102] Horrigmoe, G., Finite element instability analysis of free-form shells. Report N°77-2, N.I.T, University. of Trondheim, Norway, (1977)
- [103] Bouabdallah M.S. & Batoz J.L., Adaptation d'éléments finis volumiques pour l'analyse des plaques et coques, Rapport interne, LG2MS/UTC, Novembre 1994.
- [104] Frey F., Shell finite elements with six degrees of freedom per node, *Analytical and Computational Models of Shells*, Noor, Belytschko & Simo (eds), CED Vol.3, ASME, P. 292-316, 1989.
- [105] Batoz J.L., Développements de nouveaux éléments simples courbés pour le calcul des coques minces surbaissées, Thèse de Maîtrise, Université Laval, Québec, 1971.
- [106] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.: *The FEM. 4th Edition* , Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non linearity, Mac Graw Hill, Vol 2, (1991)

-
- [107] Samuelsson A.: The global constant strain condition and the patch test. *Energy Methods in Finite Element Analysis*, John Wiley, (1979), 47-52
- [108] Felippa C.A., Haugen B. and Militello C.: From the individual element test to finite element templates: evolution of patch test. *IJNME*, 38, (1995), 199-229
- [109] Noor A.K.: Bibliography of monographs and surveys on shells. *Applied Mech. Review*, 43, (1990), 223-224
- [110] Hughes T.J.R. and Hinton E.: *Finite element methods for plate and shell structures*. Element Technology, Pineridge Press International, vol 1 and 2, (1986).
- [111] Noor A.K.: T.Belytschko and J.C.Simo: Eds, *Analytical and computational models of shells*. ASME, CED-vol. 3, (1989)
- [112] Hrabok M.M. and Hrudey T.M.: A review and catalogue of plate bending finite elements. *Computers & Structures*, 19, (1984), 479-495
- [113] Casadei F.: A bibliographic study of finite elements for elasto-plastic analysis of 3D shell like structures subjected to static and dynamic loading. Technical report N° 1-06-C. Commission of the European Communities, Joint Research Center, Ispra, Italy, (1986), 86-79
- [114] Yang H.T.Y., Saigal S. and Liaw D.G.: Advances of thin shell finite elements and some applications – version: 1. *Computers and Structures*, 35, (1990), 481-504
- [115] Kerber T.: Revue des éléments finis de coques au travers des phénomènes de verouillage et de leurs remèdes. *La Recherche Aérospatiale*, (1990), 45-76
- [116] Peng X. and Crisfield M.: A consistent corotational formulation for shells using the constant stress/constant moment triangle. *IJNME*, 35, (1992), 1829-1847
- [117] Felippa C.A. and Bergan P.G.: A triangular bending element based on an energy-orthogonal free formulation. *CMAME*, 61, (1987), 129-160
- [118] Felippa C.A. and Militello C.: Developments in variational methods for high performance plate and shell elements. In *Analytical and Computational Models for Shells*, CED, ASME, Eds Noor et al., 3, (1989), 191-215
- [119] Destuynder P. and J.C. Nedelec: Approximation numérique du cisaillement transverse dans les plaques minces en flexion. *Numer. Math.*, 48, (1986), 281-302
- [120] Papadopoulos P. and Taylor R.: A triangular element based on Reissner-Mindlin plate theory. *IJNME*, 30, (1990), 1029-1049
- [121] Hammadi F., Formulation et évaluation d'éléments finis à continuité C^0 de la géométrie pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1998.
- [122] MacNeal, R. and Harder, R.L., A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Element Analysis Design*, (1985), 1, 3-20

- [123] Domissy E., Formulation et évaluation d'éléments finis volumiques pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1997.
- [124] Katili I., Formulation et évaluation de deux nouveaux éléments finis pour l'analyse linéaire des plaques et coques de forme quelconque, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1993.
- [125] Ayad R., Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1993.
- [126] Pol P., Modélisation du comportement élastoplastique de coques minces par éléments finis, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 20/10/92.
- [127] Polit O., Développement d'éléments finis de plaques semi-épaisses et de coques semi-épaisses à doubles courbures, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1992.
- [128] Liu W.K., Law E.S., Lam D. & Belytschko T., Resultant-stress degenerated-shell element, CMAME, Vol. 55, P. 259-300, 1986.
- [129] Belytschko T., Stolarski H. & Carpenter N., A C^0 triangular plate element with one-point quadrature, IJNME, Vol. 20, p. 787-802, 1984.
- [130] Dammak F., Formulation isoparamétrique généralisée en analyse linéaire et non linéaire des coques par éléments finis, Thèse (Ph.D.) Université Laval Québec, 1996.
- [131] Fafard M., Dhatt G. & Batoz J.L., A new discrete Kirchhoff plate/shell element with updated procedures, Computers & Structures Vol. 31, p. 591-606, 1989.
- [132] Ibrahimbegovic A., Stress resultant geometrically exact shell theory for finite rotations and its finite element implementation, Applied Mechanics Review, Vol. 50, N° 4, p. 199-226, April 1997.
- [133] Batoz J.L., Analyse non linéaire des coques minces élastiques de formes arbitraires par éléments triangulaires courbés, Thèse de Doctorat es sciences, Département de Génie Civil, Université Laval, Québec, Mars 1977.
- [134] Batoz, J.L. et Dhatt. G., Modélisation des Structures par Éléments Finis. Vol. 1, Solides élastique, Hermès, Paris (1990).
- [135] Anane W., "Modèle volumique adapté pour l'analyse des coques minces", Thèse de magistère, Centre Universitaire de Bechar, 2007 – Algérie.
- [136] S. Dubigeon. Mécanique des milieux continus. Ecole Centrale de Nantes, 1992.
- [137] P. Germain. Mécanique. Tome 1 & 2. Ecole Polytechnique. Ellipses. 1986.