135

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة أبي بكر بلقايد

– تلمســـان –

658-5-9/03

كلية العلوم الإقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية

مذكـــرة تخرج لنيل شهادة الماجستـــير في العلوم الإقتصادية

تخصص :إدارة العمليات والإنتاج

الموضـــــــــوع:

توحيد وحدات القياس في البرمجة الخطية بالأهداف

مع وضع نموذج رياضي للانحدار المتعلق بنظرية التقدير

من إعداد الطالب: موسليم حسين

تحت إشراف: أ.د بلمقدم مصطفى

أعضـــاء اللجنـــة المناقشـــة:

أ.د.بندي عبد اللــــه	أستاذ التعليم العالي	جامعة تلمسان	:رئيســـا
أ.د.بلمقدم مصطفى	أستاذ التعليم العالي	جامعة تلمسان	:مشرفـــا
د.بن بوزيـــان محمد	أستـــــاذ محاضـــر	جامعة تلمسان	:ممتحنـــا
د. تشوار خير الدين	أستـــــاذ محاضـــر	جامعة تلمسان	:ممتحنـــا

السنة الجامعية 2004-2005

إهـــــــــــداء:

أهدي هذا العمل المتواضع إلى كل أفراد عائلتي

و أخص بالذكر زوجتي و بنتاي أمينة و فيروز و

والداي الكريمين .

كما لاأنسى كل معلم قدير و كل أستاذ كريم

كان له الفضل في نجاحي.

و أخص بالذكر أيضا:

الأستاذ المؤطر:السيد بلمقدم مصطفى

و المساعد المؤطر: الدكتور بن بوزيان محمد.

فهــرس المـــحتويـــات

رقم الصفحة

قائمـــة الجـــــداول :

مقدمـــــــة عامـــــــة:

يعتبر علم بحوث العمليات من العلوم الحديثة نسبيا، وبالتالي أصبح يستعمل في الكثير من المجالات ، مما جعله من العلوم الأساسية التي لاغنى عنها لطلاب العلم في مختلف مجالاته : البحثية أو التطبيقية.

ولا شك أن معظم الجامعات أنشأت أقساما خاصة لبحوث العمليات أو ألحقت هدا العلم بأقسام أخرى كأقسام الإحصاء أو الأساليب الكمية وغيرها، وقد تشعب علم بحوث العمليات إلى عدة فروع في السنوات الأخيرة منها مايعرف بالبرمجة الخطية، البرمجة الديناميكية، والبرمجة غير الخطية، مما يعتبر دليلا على التطور الذي أحده هذا العلم، وتعتبر البرمجة الخطية والتي هي موضوع هذه الأطروحة من أكثر أساليب بحوث العمليات في الحياة العملية، بحيث أصبحت الوسيلة العامة لاتخاذ القرار للعمليات في المؤسسات.

إن عملية اتخاذ القرار هي شيء مهم جدا بالنسبة للمسيرين داخل المؤسسات.فعندما يريد مسير أن يتخذ قرارا، يجب عليه أن يتصل بخبراء في الميدان أو استعمال تقنيات بحوث العمليات. بالفعل الإنسان هو متخذ القرار، كل ما نفعله خلال حياتنا هو اتخاذ قرارات فالقرار مهم جدا و أساسي، فبمثابة أن يكون الشخص مسيرا داخل مؤسسة فاتخاذ القرار يصبح أساسيا في نفس الوقت للإنسان والمنظمة (**التسيير هو اتخاذ القرار**).

إن علوم التسيير أصبحت مهمة جدا في اتخاذ القرارات، حيث أعطت أسسا و نظريات لاتخاذ القرار العقلاني و الأحسن، إذ جلبت الكثير من الباحثين في هذا الميدان.

إن المشاكل الإدارية تميل إلى التعقيد الشديد بسبب وجود عدد كبير من الحقائق و المتغيرات في أي حالة واقعية.

فبعد اختيار العوامل الأساسية أو المتغيرات، يقوم متخذ القرار بإدماجها مع بعضها البعض بصورة منطقية لبناء نموذج لهذه المشكلة.

إذن النموذج ما هو إلا تمثيل بسيط للواقع العملي كما أنه يتضمن الخصائص الأساسية للمشكلة الواقعية.

العضو الحساس في النموذج هو **وحدة القياس** التي تمثل المعاملات التكنولوجية للمتغيرات.
ففي النموذج الذي يحتوي على تحقيق دالة هدف واحدة، فإن الحل الأمثل يبقى ثابتا لو غيرنا وحدة القياس للشروط (المعادلات)، بعكس النموذج الذي يحتوي على عدة أهداف فإن تغيير وحدة القياس للأهداف تؤثر على الحل المراد الوصول إليه (الحل الأمثل) رغم وجود نفس النموذج و إنما الذي تغير هو فقط وحدة القياس للأهداف، بحيث نجد عدة حلول مختلفة في هده الحالة.

وبالتالي **الإشكالية** المطروحة هنا هي:
مـــا هو النموذج الأحسن الذي يقودنا إلى الحل الأمثل عند تغيير وحدات القياس في البرمجة الخطية بالأهداف ؟ هل هو الذي يحتوي على وحدة القياس الأولى، أو الذي يحتوي على وحدة القياس الثانية بعد تغييرها ؟ فإذا أخدنا الأول سنجد حلا معينا، و إدا أخدنا الثاني سنجد حلا أخرا مختلفا عن الأول، وبالتالي هناك تناقض. هدا المشكل أجبرنا على أن نتحدث عما يسمى **(التوحيد لوحدات القياس في البرمجة الخطية بالأهداف)** ، الهدف من هذه الدراسة هو الوصول إلى نفس الحل كيفما كانت وحدة القياس المختارة من طرف المسير، إذن فاختيار وحدة قياس معينة في النموذج تؤثر بطريقة مباشرة على الحل المراد الوصول إليه(الأمثل).

و للتوضيح نستعين بالمثال التالي:

نفرض أنه لدينا النموذج التالي:

$$
\begin{aligned}
&MinZ = \sum_{i=1}^{4}(\delta_i^+ + \delta_i^-)\\
&x_1 + x_2 - \delta_1^+ + \delta_1^- = 400................(1)\\
&2x_1 + x_2 - \delta_2^+ + \delta_2^- = 500...............(2)\\
&0.4x_1 + 0.3x_2 - \delta_3^+ + \delta_3^- = 240.........(3)\\
&x_1 - \delta_4^+ + \delta_4^- = 300..........................(4)\\
&x_j \geq 0 (j = 1.2)\\
&\delta_i^- . \delta_i^+ \geq 0 (i = 1.2....4).
\end{aligned}
$$

الحل الأمثل لهذا النموذج باستعمال برنامج LINDO هو: $\begin{cases} x_1 = 250. \\ x_2 = 0. \\ z = 190 \end{cases}$

الآن نقوم بتغيير وحدة القياس لإحدى الأهداف، مثلا نعوض الدينار بالسنتيم أو الوحدة المعمول بها حاليا في فرنسا الأورو عوض الفرنك الفرنسي، فان الحل الجديد سنجده مختلفا عن الأول غير أنه من المفروض أن يبقى نفس الحل السابق .

مثلا لو نأخذ المعادلة رقم 3 و نعوض الدنانير بالسنتيم، ستتحول إلى المعادلة التالية :

$$40x_1 + 30x_2 - \delta_3^+ + \delta_3^- = 24000.$$

إن الحل للنموذج الجديد الذي يحتوي على المعادلة 3 بعد تغيير وحدة القياس لها هو:

$$\begin{cases} x_1 = 300 \\ x_2 = 400 \\ z = 800. \end{cases}$$

نلاحظ مما سبق أنه وجدنا حلين مختلفين لنفس النموذج، ادن السبب الذي جعل الحل يختلف هو تغيير وحدة القياس للأهداف فقط.

المشكل هنا هو مشكل تغيير وحدة القياس، و لهدا السبب سنقترح في هدا البحث صياغة جديدة لنموذج البرمجة الخطية بالأهداف تتعلق بتوحيد وحدة القياس للانحرافات الظاهرة في الدالة والأهداف.

هذه الطريقة التي تعتمد على مبادئ الانحدار المتعدد، الذي يمكن صياغته من جديد بالبرمجة الخطية بالأهداف عوض صياغته بطريقة المربعات الصغرى المعمول بها في السابق.

إن البحث يحتوي على أربعة فصول:

* في الفصل الأول: نتطرق لأهمية إتخاد القرار،و كيفية بنـــــاء النماذج الكمية مستعملا البرمجة الخطية في حالة تحقيق هدف واحد استنادا على طريقة simplexe .

* أما الفصل الثـــــاني: نعالج فيه البرمجة الخطية بالأهداف و جميع أنواعه المختلفة و كيفية الوصول إلى الحل الأمثل.

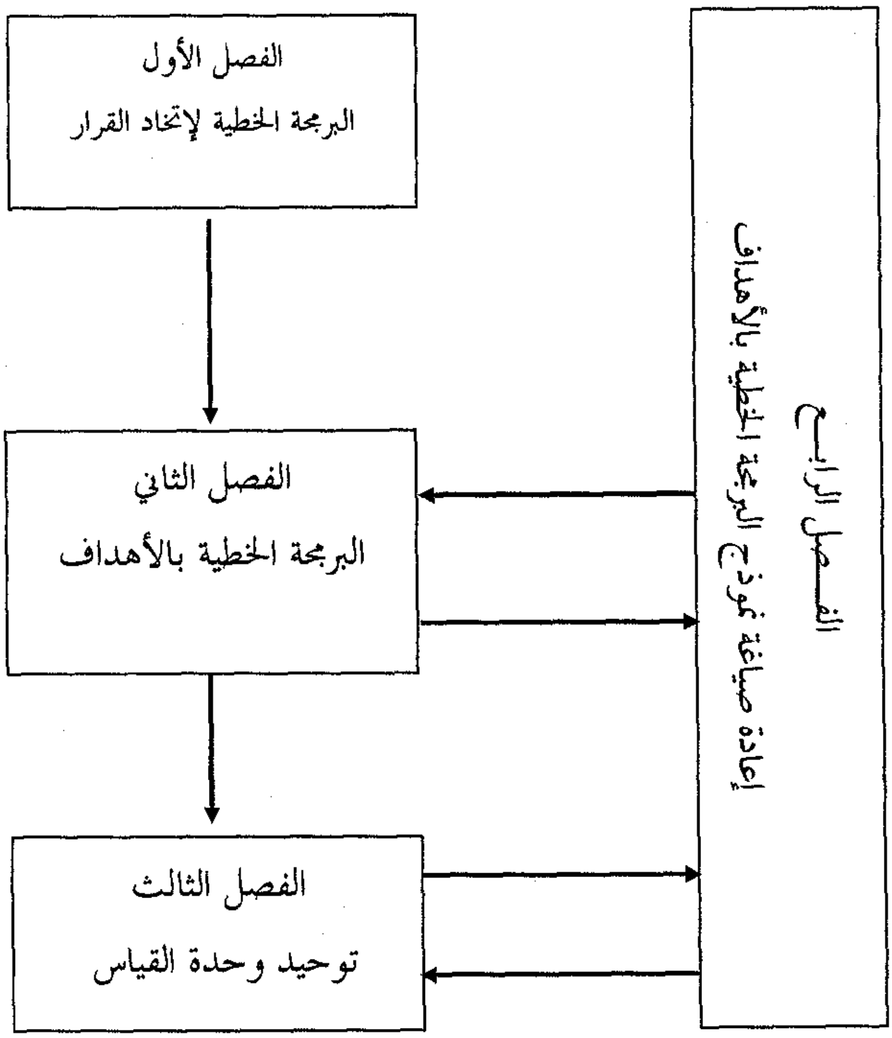
*ثم في الفصل الثالث : سنتطرق إلى المشاكل التي يتعرض لها بناء النموذج في حالة تحقيق عدة أهداف مما يؤدي إلى الحديث عن وحدة القياس المستعملة من طرف المسير و اللجوء إلى ما يسمى بـــ :[**التوحيد لوحدات القياس في البرمجة الخطية بالأهداف**].

*و أخيرا الفصل الرابع: نظرا لنقائص هذه الأنواع للتوحيد السابقة الذكر، سنقترح صياغة جديدة للتوحيد مستعينا بمبادئ الانحدار المتعدد والصياغة الجديدة له و التكلم عن نظرية التقدير للانحدار مستعينا بالبرمجة الخطية بالأهداف.

إذن هدفنا في هذه المذكرة هو البحث عن صياغة جديدة للدالة الاقتصادية التي تسمح بإيجاد نفس الحل الأمثل للنموذج في حالة تغيير وحدة القياس للأهداف في جميع الحالات، ويمكن تفسيرها اقتصاديا. أي لها معنى اقتصادي و رياضي.

المعنى الاقتصادي يكمن في أن الدالة الإقتصادية لديها تفسير اقتصادي، بعكس في حالة عدم التوحيد لوحدات القياس للقيود (الأهداف)، فإن التفسير الاقتصادي للدالة ليس له معنى، أما المعنى الرياضي يكمن في أن صياغة النموذج غير منطقية في حالة عدم تطبيق نظرية التوحيد لأنها تؤدي إلى حلول مختلفة متعددة بسبب تغيير وحدة القياس.

الشكل(1) يعبر عن العلاقة بين الفصول الأربعة لهذه المذكرة:



الشكل 1 : العلاقة بين الفصول التي تمثل

*** مخـــــــــطط البـــــحــــث ***

الفصـــــل الأول:

البرمجـــة الخطيـــة لاتخـــاذ القـــرار

1-1 مقدمـــــة :

ينسب اسم بحوث العمليات إلى استخدام الأساليب العلمية المتباينة في تخطيط وتنفيذ العمليات العسكرية. فبعد الحرب العالمية الثانية استغل عدد كبير من العاملين في مجال بحوث العمليات خبراتهم والأساليب المبتكرة لحل المشاكل الإدارية في مختلف المؤسسات الصناعية والتجارية وبالأخص في إعداد الخطط العلمية لنمو وتطور المؤسسات.[1]

فنادرا مانجد في عصرنا الحالي مؤسسة تعتمد على الأسلوب الحديث للتسيير في الإدارة دون أن يكون فيها قسم خاص أو مصلحة تقوم بدور بحوث العمليات.

يمكن القول بأن بحوث العمليات هي مجموعة الأساليب والتقنيات العلمية المستخدمة لدراسة وبحث مختلف الصعوبات التي تواجهها الإدارة، والمشاكل اليومية بتطبيق الوسائل المتوفرة في مختلف فروع العلم للوصول إلى الحل الأمثل أو القرار السليم.

وفي السنوات الأخيرة أخذت بحوث العمليات مكانها في إدارة وتسيير العمليات للمؤسسات، بحيث تفرعت إلى عدة فروع، من بينها البرمجة الرياضية سواء أكانت خطية أم غير خطية، إذ تعتبر البرمجة الخطية من أهم فروع بحوث العمليات لاتخاذ القرار السليم.

إن مسائل البرمجة الخطية تعالج مشكلة التعظيم أو التدنية لدالة معينة تسمى دالة الهدف أو الدالة الاقتصادية على أساس قيود أو معطيات محددة، التي تكون غالبا على شكل متراجحات أو معادلات. أما كلمة خطية تعني أن الدالة الاقتصادية والقيود هي دوال خطية، وأما المتغيرات التي تحتويها تسمى بـــ " متغيرات القرار "، وكلمة البرمجة ترادف كلمة تخطيط.[2]

---

[1]- د.أحمد فهمي جلال، (مقدمة في بحوث العمليات)، 1993، دار الفكر العربي، صفحة 12.

[2]- د.عبد الرحمن بن محمد أبو عمه، د.محمد أحمد العش،(البرمجة الخطية)، 1990، جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، صفحة 5.

2-1 تعريف القرار وأهميته:

كلما زادت درجة تعقيد البيئة التي تعمل فيها الإدارة كلما زادت أهمية عملية اتخاد القرار. والقرار يتعلق بالمستقبل، وبالطبع فإن المستقبل غير مؤكد. فكلما زادت درجة تغيير البيئة التي نعمل فيها كلما زادت درجة تعقيد عملية اتخاذ القرارت.

فعملية اتخاذ القرار هي عبارة عن اختيار أحد البدائل الذي يعد أحسن بديل من وجهة نظر متخذ القرار، ومما لاشك فيه أنه إذا أمكن تحديد البدائل، والنتائج المتوقعة من كل بديل، فإن عملية اتخاذ القرار تكون بسيطة وسهلة جدا.[1]

إن اتخاذ القرار هو شيء مهـــم جدا بالنسبة للمسيرين داخل المؤسسات، فعندما يريد مسير أن يتخذ قرارا ، يجب عليه أن يتصل بخبراء في الميدان أو أن يستعمل تقنيات بحـــوث العمليات .

فبمثابة أن يكون الشخص مسيرا داخل مؤسسة، فاتخاذ القرار يصبح أساسيا في نفس الوقت للإنسان و للمنظمة (التسيير هو اتخاذ القرار).

إن فائدة علوم التسيير في عصرنا الحالي أصبحت مهمة جدا في اتخاذ القرارات، حيث أعطت أسسا و نظريات لمساعدة المسيرين لاتخاذ القرار السليم والمنطقي.

[1] – د.أحمد فهمي حلال، (مقدمة في بحوث العمليات)، مرجع سابق، ص 11.

3-1 أنواع القرارات:

إن القرارات تصنف على حسب نوع المشكل الذي تعيشه المؤسسة و البحث عن حله.و قد اقترح (H.Igor Ansoff) ثلاثة أصناف من القرارات:

1-3-1 القرارات الاستراتيجية: استعمل الكاتب هذا المصطلح (الاستراتيجية)، و يقصد به العلاقة بين المؤسسة و المحيط الخارجي.

فالقرارات الاستراتيجية تخص العمليات الخارجية للمؤسسة و بالأخص اختيار المنتوج الذي يجب إنتاجه و تماشيه مع السوق.

2-3-1 القرارات الإدارية: هي القرارات الداخلية للمؤسسة التي تتعلق بكيفية تسيير الموارد المتاحة لتحقيق أكبر ربح أو لتحقيق أقل تكلفة، أي للحصول على الحل الأحسن (الأمثل).[1]

تعرف عملية اتخاذ القرارات الإدارية بأنها تلك العملية التي بمقتضاها تقوم الإدارة (حين تواجه إحدى المشاكل) باختيار حل واحد من بين مجموعة البدائل التي قد تحقق نفس الغرض و لكن بدرجات مختلفة من الكفاءة. وبسبب وجود عنصر عدم التأكد بالنسبة للمستقبل، فلا يمكن التأكد لحظة اتخاذ القرار من النتائج المترتبة على تنفيذه.

يحاول المدير أن يختار ذلك البديل الذي يحقق أقصى فعالية لتحقيق أهداف المنظمة، فلا بد من استخدام (وحدة القياس) للحكم على فعالية البدائل المختلفة. و تعتبر

---

[1] د.محمد صالح الحناوي، د.محمد توفيق ماضي، (بحوث العمليات في تخطيط ومراقبة الإنتاج)، 2000– 2001، جامعة

الوحدة النقدية أكثر وحدات القياس شيوعا بين رجال الأعمال، و لكن قد نجد أنه من غير المرغوب فيه في كثير من الأحيان استخدام وحدة القياس هذه.
كمـــا يواجه المدير العديد من المواقف التي تتطلب اتخاذ قرارات معينة. و لكن لأغراض دراستنا فأننا سنقوم بتقسيم القرارات إلى المجموعات المتباينة التالية:

1- القرارات في ظل ظروف التأكد، حيث أن جميع الحقائق معروفة بدقة كاملة أو قرارات في ظل ظروف عدم التأكد حيث أن الحدث المنتظر غير مؤكد و إن كان يمكن تخصيص نسب احتمالات مختلفة لكل الأحداث الممكنة .(stochastique)

2- القرارات التي تتخذ في فترة زمنية واحدة فقط (statique) أو قرارات تتخذ في صورة تتابع زمني معين (dynamique) .

3- القرارات التي يكون فيها الطرف الآخر هو الطبيعة، أو يكون فيها الطرف الآخر إنسان يتمتع بالقدرة على التفكير كما في حالة اتخاذ قرار بتحديد ميزانية الإعلان في الوقت الذي يجب أن نأخذ في الاعتبار تصرفات المنافسين.

3-3-1 القرارات العملية :

هي تلك القرارات التي تمكننا من الحصول على أكبر ربح باستغلال الموارد.
تتعلق بالضبط بتوزيع الموارد بين المصالح وخطوط الإنتاج، تخطيط العمليات و إدارة النشاطات و مراقبة العمليات الروتينية.

تعتبر قرارات الاستغلال تلك التي تتعلق بتخطيط وتنظيم وتوجيه ورقابة العمليات الإنتاجية الجارية للمؤسسة، وبالتالي ترتبط بتخطيط وتنسيق استخدام الموارد المتاحة للمؤسسة خلال فترة محاسبية لاحقة بما يكفل الحصول على أقصى منفعة منها بأقل تكلفة ممكنة.

والجدول التالي[1] يوضح أنواع القرارات المختلفة في المؤسسة:

الجدول 1-1: أنواع القرارات في المؤسسة

القرارات العملية	القرارات الإدارية	القرارارت الاستراتيجية	طبيعة القرارات
الإستغلال	التسيير	الاستراتيجية	مجال القرارات
قصيرة الأجل	قصيرة الأجل	متوسطة وطويلة المدى	المدى
الإستغلال في الشروط المثلى لمردودية رأس المال	بنية الموارد التي تؤمن النجاح الأحسن	اختيار المنتوجات و الأسواق التي تحقق الاستثمارات المثلى	المشكل
مراقبة العمليات	تنظيم، وتنمية الموارد	توزيع الموارد بين المنتوجات والأسواق	طبيعة المشكل

المصدر : Igor Ansoff بتصرف

(1) – د.محمد صالح الحناوي، د.محمد توفيق ماضي، مرجع سابق، ص 7.

4-1 عناصر اتخاذ القرار:

1-4-1 التجريد:

إن المشاكل الإدارية تميل إلى التعقيد الشديد ، بسبب وجود عدد كبير من الحقائق و المتغيرات في أي حالة واقعية ، بالإضافة إلى ذلك كل فعل محتمل (أو قرار محتمل) يبدأ بسلسلة يصعب التنبؤ بنقطة النهاية لها.[1]

على سبيل المثال إذا أخذنا مشكلة إنشاء مبنى جديد فإنه من المحتمل أن نقضي وقتا كبيرا للغاية في عملية تجميع المعلومات عن هذه الحالة. مثال عن هذه المعلومات :مكان المبنى،الصفات الطبيعية للمبنى، الظروف المناخية للمواقع المحتملة و أثرها على التكلفة و أخيرا مصادر التمويل و تكلفتها.

قد يجد متخذ القرار أنه من الضروري أن يدرس جميع الاستخدامات المحتملة للأموال المتوافرة لديه في الوقت الحالي و في المستقبل فإذا اتبع متخذ القرار منهج تجميع كل الحقائق قبل اتخاذ قرار معين، فلا يمكنه الانطلاق في أي نشاط لأن العقل البشري لا يمكنه أن يأخذ في الاعتبار أو يستوعب جميع جوانب المشكلة و أن يركز على تلك العوامل التي يعتبرها أكثر ارتباطا بالمشكلة التي يواجهها .

بالتالي يعتبر التجريد الخطوة الأولى و الضرورية في حل أي مشكلة إدارية.

---

[1] - د.محمد صالح الحناوي، د.محمد توفيق ماضي، مرجع سابق، ص: 37.

1-4-2 بناء النموذج:

يقوم متخذ القرار بعد اختيار العوامل الأساسية أو المتغيرات في الحالة الفعلية بإدماجها مع بعضها البعض بصورة منطقية بحيث تكون في النهايـــــة نموذجا لهذه المشكلة. والنموذج هو تمثيل مبسط للواقع العملي كما أنه يتضمن الخصائص الأساسية للمشكلة الواقعية. يمكن تلخيص مزايا النموذج البسيط كما يلي:

* يوفر في الوقت و الجهد العقلي .
* يمكن فهمه بسهولة وذلك بواسطة متخذ القرار و أيضا بواسطة منفذ القرار.
* في حالة الضرورة يمكن تعديل النموذج بسرعة و كفاءة .

كما أن متخذ القرار لا يهدف إلى بناء نموذج يشابه الحالة الواقعية في كل شيء بحيث أن ذلك سيتطلب وقتا طويلا للغاية و لربما يصعب على العقل البشري فهمه بعد ذلك.

1-4-3 حل المشكلة :

بعد بناء النموذج يمكن التوصل إلى عدة نتائج على سلوكه عن طريق استخدام التحليل المنطقي،كما يستعين متخذ القرار بهذه النتائج في التوصل إلى الحل فإذا كانت المتغيرات التي تم تجريدها تمثل الواقع أحسن تمثيلا، فإن حل النموذج ذاته يعتبر حلا فعالا للمشكلة الحقيقية .

1-4-4 الأخـــــطـــاء :

إن مصادر الخطأ في اتخاذ القرارات تتلخص في الآتي:

أولا: خطأ منطقي في عملية التوصل للأسباب ثم النتائج و أخيرا في الحلول من المقدمات أو الفروض. فقد يكون في إمكان الشركة أن تحصل على الأموال بتكلفة قدرها 8% في حين أنها قد تكون قررت سابقا عدم احتياجها إلى أي أموال إضافية. الفرضية تنص على استخدام سعر الفائدة ليمثل تكلفة الفرص البديلة هو فرض صحيح بدون شك ،و لكن استنتاج أن سعر الخصم هذا يطبق على جميع الاستثمارات إنما هو استنتاج خاطئ .

ثـــانيا: إن متخذ القرار قد يختار المتغيرات غير الصحيحة أو قد لا يستخدم متغيرات كافية لبناء النموذج. فهناك استحالة في استخدام جميع المتغيرات في النموذج الواحد، و بالتالي نستخدم فكرة التجريـــــد التي يصطحبها دائما احتمال الخطأ.

5-1 بنـــــاء النماذج الكميـــــة:

1-5-1 مشكلة بنـــــــاء النماذج:

هنـــــاك عدة أشكـــــال يمكن أن يتخذها النموذج، فعلى سبيل المثال في المشاكل البسيطة و المكررة فإن عملية اتخـــــاذ القرارات بأكملها تأخذ مكانها في عقل متخذ القرار بصورة غير رسمية. مثلا نحن نسير و نأكل و نفتح الأبواب كل يوم بدون الاستعانة بنموذج يساعدنا على حل المشكلـــة. و لكن إذا كانت المشكلـــة غير عـــادية أو أكثر تعقيدا فلسوف تأخذ وقتا أكثر للتفكير فيها كما سنقوم باختيار بعض العناصر الهامة فقط لكي نتولى فحصها و تجربتها.

و الواقع أن الأسلوب المناسب لوصف و ربط المتغيرات المختارة يعتمد على درجة كبيرة لطبيعة هذه المتغيرات. فإذا خضعت المتغيرات لنوع معين من القياس، بالأخص إذا كان يمكن التعبير عنها بصورة كمية، فإن ذلك يكون دافعا لاستخدام النموذج الرياضـــــي. فأولا نجد أن استخدام النموذج الرياضي يســـاعد على استخدام الأسلوب المنطقي في عملية التحليل حيث أنه يجب إتباع الدقة في تحديد المتغيرات المجردة وكذا تحديد العلاقات التي تربط بينها. وثــــانيـــــا.فإن الرياضيات تعتبر أسلوب قوي في التوصل إلى نتائج منطقية من الافتراضات الأساسية.
فلا شك أن الرياضيات تمكن من معالجة المشاكل الإدارية المعقدة و تسهل من عملية اتخاذ القرارات.

لقد شرع في استخدام الأساليب الكمية في حل مشاكل الإدارة بصورة كبيرة منذ الحرب العالمية الثانية، حيث بدأ انتشار لفظ:< **بحوث العمليات**>في ميدان الأعمال باعتباره أقوى الأساليب (بل و الأكثر فعالية) في حل المشاكل الإدارية المعقدة.
فالمسيرون يحتاجون إلى معرفة هذه الأساليب الكميـــة في حل مشاكلهم، مثل حاجتهم إلى معرفة التقارير المحاسبية.

إن الإداري لا يجب أن يكون أسيرا للنموذج الكمي و يطبق تلقائيا نتائج النموذج في اتخاذ القرارات الإدارية، لأن النتائج المستخلصة من النموذج تتضمن درجة من الخطأ بسبب عملية التجريد. و عملية تحديد درجة الخطأ (حتى يمكن تعديل النتائج) هي مسألة مهمة بالدرجة الأولى، ولا شك أن بحوث العمليـــــات تعتبر عملية مكملة للحكم الشخصي بالنسبة للإداري ، وهناك في الواقع العديد من المشاكل الإدارية التي

لا يمكن صياغتها رياضيـــــا و بالتالي يعتمد الإداري على النماذج غير الكمية في معالجة هذه المشاكل.

1-5-2 بنــــاء النموذج:

تعرف عملية اتخاذ القرارات الإدارية بأنها تلك العملية التي بمقتضاها تقوم الإدارة (حين تواجه إحدى المشاكل) باختيار حل واحد من بين مجموعة البدائل التي قد تحقق نفس الغرض و لكن بدرجات مختلفــة من الكفاءة. و بسبب وجود عنصر عدم التأكد بالنسبة للمستقبل، فلا يمكن التأكد لحظة اتخــــاذ القرار من النتائج المترتبة على تنفيذه.

نجد أن استخدام النموذج الرياضي يســاعد على استخدام الأسلوب المنطقي في عملية التحليل حيث أنه يجب إتباع الدقة في تحديد المتغيرات المجردة وكذا تحديد العلاقات التي تربط بينها

1-6 البرمجــــة الخطيــــة :

1-6-1 مقدمـــــة:

تعتبر البرمجة الخطية أكثر أساليب بحوث العمليات استخداما. في الكثير من الأحيان يجد مدير المؤسسة نفسه أمام عدة بدائل مختلفة، ولا يعرف ماهو البديل الأحسن. في العادة إن اختيار بديل معين له تأثير على التكلفة إذا كان الأمر يتعلق بتدنية التكاليف، أو على الربح إذا كان الأمر يتعلق بتعظيم الربح، ولذلك فإن الأسلوب الذي يستخدم في معرفة الحل الذي يؤدي إلى تعظيم الربح، أو تخفيض التكاليف يسمى بالبرمجة الخطية.[1]

---

[1] – د.عبد الرحمن بن محمد أبو عمه، د.محمد أحمد العش،(البرمجة الخطية)، 1990، جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، ص : 3-5.

إن أسلوب البرمجة الخطية هو أسلوب رياضي أُستُخدِم لمساعدة الإدارة في تخصيص مواردها المحدودة على الاستخدامات المختلفة، و يمكن تلخيص المشكلة التي يمكن استخدام البرمجة الخطية لحلها في الآتي: تعظيم الأرباح ، أو تخفيض التكاليف للدالة الاقتصادية، التي تعتبر دالة لعدد من المتغيرات، خاضعة لعدة قيود.

وغالبا في البرمجة الخطية نعتبر المتغير التابع هو هدف اقتصادي (الدالة الاقتصادية) التي تسمى في بحوث العمليات دالة الهدف، كالربح أو الإنتاج أو التكلفة،....
و بطبيعة الحال فإن الأرباح الكبيرة مفضلة على الأرباح القليلة، و التكلفة المنخفضة مفضلة على التكلفة المرتفعة..الخ و بالتالي فمن المناسب أن نعتبر أن أحد أهداف المنظمة الرئيسية هو تعظيم أو تخفيض الدالة الاقتصادية (بافتراض بقاء الأشياء الأخرى على حالها)، و العلاقة الخطية بين المتغير التابع و المتغيرات المستقلة(المحددات).

نعني بالبرمجة الخطية، أن دالة الهدف تأخذ شكلَ علاقة خطية، و كذا قيود النموذج يجب أن تأخذ علاقة خطية،لأن في كثير من الأحيان تعبر عن الواقع العملي إلى حد كبير،و تسهل العمليات الرياضية بدرجة كبيرة. هذا لا ينفي وجود البرمجة غير الخطية التي يصعب دراستها.[1]

و الواقع أن فكرة التعظيم أو التخفيض تكون بسيطة إلى حد كبير في حالة توافر عدد محدود من القيود. و قد اعتمد الإداريون لسنين طويلة على تجارهم و خبرتهم الشخصية في حل هذا النوع من المشاكل. غير أن تعقد المشاكل في العصر الحديث و ظهور عدد لاحصر له من المتغيرات المستقلة مما دفع برجال الإدارة إلى البحث عن وسائل حديثة

(1) – د.عبد الرحمن بن محمد أبو عمه، د.محمد أحمد العش، مرجع سابق، ص :5.

تساعدهم على اتخاذ القرارات . و البرمجة الخطية هي إحدى الوسائل التي يمكنها أن تحل مثل هذه المشاكل حتى في ظل وجود عدد كبير جدا من المتغيرات.

و يطبق أسلوب البرمجة الخطية على العديد من المشاكل في تنظيمات الأعمال الحديثة، و يمكن أن يستخدم بطريقة روتينية إذا استعنا ببرامج خاصة في الإعلام الآلي. و هذا الأسلوب هو أسلوب كمي يساعد الإدارة على حل مشاكل لم يكن لها أي حلول في الماضي القريب. و لكن إذا افترضنا مشكلة أكثر تعقيدا، في الواقع إن هذا النوع من المشاكل يتطلب استخدام البرمجة الخطية، فهناك عدة طرق لحل هذه المشاكل ، من بينها الطريقة التي عرفت شهرة كبيرة والتي طبقت في معظم المجالات، ألا و هي طريقة (simplexe) ، التي اكتشفت من طرف الباحث الأمريكي(B. Dantzig) [(1)].
و مع مرور الزمن و تعقد و توسع المشاكل الإدارية، و ظهور الإعلام الآلي أخذت البرمجة الخطية مكانها في هذا الميدان الذي يسهل الكثير من العمليـــــات، حيث اهتم أصحاب البرمجة الآلية بهذا الميدان لإعداد برامج خاصة لحل هذه النماذج المعقدة التي يصعب حلها يدويا، بل و تأخذ وقتا طويلا.

1-6-2 صياغة النموذج :

إن صياغة النموذج تنص على استعمال مجموعة من الدوال الرياضية، التي يمكن الوصول بها إلى حلول ممكنة، و بالتالي فإن الدالة الاقتصادية و القيود يجب أن تكون خطية.

و لمعرفة المراحل المتبعة لصياغة نموذج نستعين بالمثال التالي:

---

(1) - Boualem Benmazouz, «Recherche Opérationnelle de Gestion», atlas edition, Algerie, 1995, p : 54.

تصنع مؤسسة المنتوج Y بواسطة المنتجات نصف المصنعة (A,B,C)

الجدول**1-2** يبين الاستعمالات اليومية للمنتجات (A,B,C) لإنتاج المنتوجY.

الجدول1-2 الاستعمالات اليومية للمنتجات (A,B,C)

الكمية (كغ)	A	B	C
	18	12	36

المنتجات(A,B,C) تنتج بواسطة الآلة M1 أو الآلةM2 (A,B,C).

الكمية المنتجة ملخصة في الجدول التالي:

الجدول 1- 3 : الكمية المنتجة

نوع الآلة	M1	M2
A	9كغ	2كغ
B	3كغ	2كغ
C	6كغ	12كغ

مثلا إذا استعملت الآلة M1 لمدة 1ساعة فإنها تنتج 9كغ من المنتوج A، و 3كغ من المنتوجB ، و6كغ من المنتوج C .

- إن الآلتين M2,M1 تشتغلان 7 ساعات و 6ساعات على التوالي في اليوم .
- كلفة الساعة الواحدة للآلة M1 هو 100دج، و250دج للآلة M2.
- تريد المؤسسة تقليص التكاليف للآلتين لإنتاج المنتوج Y.

إن الصياغة الرياضية لهذا المشكل تتعلق بالمراحل التالية على الترتيب:

- تعيين متغيرات القرار.
- تعيين الدالة الاقتصادية (الهدف).
- تعيين القيود(المعادلات).

أ– تعيين المتغيرات:

يمثل X_1 : عدد ساعات العمل للآلة M1.

و X_2 : عدد ساعات العمل للآلة M2.

ب– الدالة الاقتصادية:

إن دالة تكلفة ساعات العمل للآلتين M2,M1 يمكن التعبير عنها كما يلي:

$$Z = 100x_1 + 250x_2$$

فيجب ايجاد القيمة الأدنى لهذه الدالة أي (Min Z)

ج– أما **جملة القيود** فهي كالتالي:

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 \geq 18 & :A\text{المنتوج} \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12 & :B\text{المنتوج} \\ 6x_1 + 12x_2 \geq 36 & :C\text{المنتوج} \\ x_1 \leq 7 & :M1\text{الآلة} \\ x_2 \leq 6 & :M2\text{الآلة} \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

و بالتالي الصياغة الرياضية لهذا المثال **1-1** هي كما يلي:

$$MinZ = 100x_1 + 250x_2$$

تحت القيود:

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 6x_1 + 12x_2 \geq 36 \\ x_1 \leq 7 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

3-6-1 طريقة السمبلكس (simplexe):

تعتبر طريقة السمبلكس التي قدمها الباحث الإمريكي (G.B.Dantzig) لحل مشاكل البرمجة الخطية أحد الإكتشافات الرياضية الهامة للقرن العشرين. فهي كطريقة عامة تعتبر أهم الطرق في هذا المجال وأكثرها كفاءة وفعالية.[1]

---

[1] – د.السيد عبد المقصود دبيان، د.كمال خليفة أبو زيد، (بحوث العمليات في المحاسبة)، 2001، كلية التجارة، جامعة الأسكندرية،مصر، ص: 93.

وتقوم طريقة السمبلكس على مبادئ ومفاهيم رياضية متقدمة ومعقدة. غير أنه يجب الإلمام بهذه المبادئ والمفاهيم لأغراض الإلمام بالطريقة ذاتها ومغزاها.

فهي طريقة ذات منهجية رياضية منتظمة ومنطقية ترتكن إلى مايسمى " نهج الاستبعاد الكامل " للباحثين (Gauss et Jordan)، وهذا النهج لايستلزم خلفية رياضية متقدمة لاستيعابه، بل يكفي الإلمام بقليل من القواعد الجبرية المتعلقة بالمصفوفات.

طريقة السمبلكس هي تقنية تسمح بإعطاء قيم للدالة الاقتصادية في النقاط العظمى من مجموعة الحلول الممكنة.

تعتمد طريقة السمبلكس لإيجاد قيم المتغيرات التي تكبر أو تصغر دالة الهدف على خطوات متتالية ومنتظمة. في كل خطوة من الخطوات يتم تقويم دالة الهدف عند أحد أركان منطقة الحلول الممكنة. ففي الخطوة الأولى نبدأ غالبا بتقويم دالة الهدف عند نقطة الأصل الصفر ثم ننتقل من نقطة الأصل إلى ركن مجاور من الأركان المحددة لمنطقة الحلول الممكنة ويتم تقويم دالة الهدف مرة أخرى. وتستمر عملية الإنتقال هذه من ركن إلى ركن مجاور وتقويم دالة الهدف مادامت قيمتها عند الركن المجاور أكبر من قيمتها عند الركن السابق. ويتم التعرف على الحل الأمثل إذا وصلنا إلى الركن الذي تبدأ عنده قيمة دالة الهدف بالتناقص.

أي يمكن معرفة المرحلة النهائية عندما تأخذ الدالة القيمة العظمى إذا كان الأمر يتعلق بتعظيم الدالة، أو القيمة الصغرى إذا كان الأمر يتعلق بتقليص الدالة.

إن مراحل تطبيق طريقة السمبلكس تتعلق بجداول، بحيث كل جدول يمثل قيمة أكبر من بين القيم العظمى، إلى أن نصل إلى القيمة المثلى.

يمكن تلخيص ما أوضحناه سابقا عن تطبيق طريقة السمبلكس لحل مسألة البرمجة الخطية بالخطوات التالية:

- إضافة متغيرات متممة للمتباينات لتحويلها إلى معادلات.
- اعتبار المتغيرات المتممة متغيرات أساسية وإيجاد قيم هذه المتغيرات وقيمة دالة الهدف وذلك بوضع قيم صفرية للمتغيرات غير الأساسية.
- الانتقال إلى حل أساسي جديد يكون عن طريق تحديد المتغير الداخل والخارج من الأساس.
- إيجاد قيم المتغيرات الأساسية وقيمة دالة الهدف عند هذا الحل الأساسي الجديد وفحص دالة الهدف لمعرفة ما إذا كان هذا الحل أمثل أم لا.

ولتوضيح خطوات السمبلكس، نقوم بتطبيقها على المثال التالي:

نفرض أنه لدينا النموذج التالي:

$$MinZ = 3x_1 + 5x_2$$

تحت القيود:

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

حيث X_2,X_1 هي الكمية المنتجة ،

و Z يمثل الربح.

إذن يمكن كتابة هذا البرنامج بطريقة مكافئة مع إدخال ثلاثة متغيرات تسمى متغيرات الانحرافات (X_3,X_4,X_5) المتعلقة بالقيود على التوالي، فنحصل على النموذج التالي:

$$MaxZ = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

تحت القيود:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 4; \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 12; \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 18; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, et x_5 \geq 0.$$

أما الدالة الاقتصادية فيمكن كتابتها كما يلي:

$$Z - 3x_1 - 5x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 = 0$$

جداول السمبلكس هي عبارة عن مراحل متتالية للوصول إلى الحل الأمثل، تتعلق بمبادئ المصفوفات، حيث يتم التنقل من جدول إلى الموالي على أساس قيمة (Z) ، أي تبدأ بقيمة الصفر انطلاقا من الجدول الأول إلى أن تصل إلى القيمة العظمى للجدول الأخير، فيمكن معرفة **المرحلة النهائية** عندما تأخذ كل المعاملات الحدية للجدول قيما موجبة إذا كان الأمر يتعلق بتعظيم الدالة، وقيما سالبة إذا كان الأمر يتعلق بتخفيض الدالة.

يمكن تلخيص ما سبق في جداول السمبلكس التالية:

الجدول 1-4 :

متغيرات الأساس	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	الطرف الأيمن	النسبة
X_3	1	0	1	0	0	4	$\frac{4}{0}=\infty$
X_4	0	2	0	1	0	12	$\frac{12}{2}=6\leftarrow$
X_5	3	2	0	0	1	18	$\frac{18}{2}=9$
Z	-3	-5 ↑	0	0	0	0	0

الجدول 1-5 :

متغيرات الأساس	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	الطرف الأيمن	النسبة
X_3	1	0	1	0	0	4	4
x_2	0	1	0	1/2	0	6	$\frac{6}{0}=\infty$
X_5	3	0	0	-1	1	6	$\frac{6}{3}=2\leftarrow$
Z	-3 ↑	0	0	5/2	0	30	

الجدول 1-6 :

متغيرات الأساس	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	الطرف الأيمن
X_3	0	0	1	1/3	-1/3	2
X_2	0	1	0	1/2	0	6
X_1	1	0	0	-1/3	1/3	2
Z	0	0	0	3/2	1	36

نلاحظ في **الجدول 1-6:** أن كل المعاملات الحدية المتعلقة بالسطر الأخير موجبة، ومنه نستنتج الحصول على الحل الأمثل الذي هو:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 6 \\ Z = 36 \end{cases}$$

أي يجب على المؤسسة أن تنتج وحدتين من المنتوج x_1، و ستة وحدات من المنتوج x_2 لتحقيق أكبر ربح ممكن المقدر بقيمة 36 دج.

7-1 خلاصـــــة:

مع مرور الوقت أصبحت إدارة المشروعات عملية معقدة في عالمنا المعاصر بسبب تعدد وتداخل المتغيرات المؤثرة والمتأثرة **بالقرار** المعين، مما أجبر الباحثين عن البحث على إيجاد أساليب علمية متطورة تتناسب مع طبيعة المشاكل المتعددة، ولذلك اتجهت الجهود إلى استخدام أساليب علمية متقدمة يطلق عليها اصطلاح **بحوث العمليات**.

فمن خلال هذا الفصل ظهر الدور الهام والكبير الذي تلعبه **البرمجة الخطية** في حل المشاكل المتعلقة بالمؤسسات التي تعتبر أسلوبا فعالا من ضمن أساليب بحوث العمليات في بناء النماذج وصياغتها رياضيا، والتي ترتكز على طريقة **السمبلكس**.

الفصـــــل الثـــاني:

البرمجـــة الخطيـــة بالأهـــداف

2-1- مقدمـــــة:

تناولنا في الفصل الأول كيفية التعامل مع تلك المشاكل التي تتميز بهدف واحد، أو ماتسمى بـــمشاكل وحيدة الهدف، والتي لها حل وحيد أمثل، ولذلك وجدنا أن الصياغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية كان يتضمن هدفا واحدا إما تعظيم الأرباح أو تخفيض التكاليف، عل أساس قيود يجب الالتزام بها .

ولكن في السنوات الأخيرة أثبتت التجربة للمؤسسات أنها لاتسعى لتحقيق هدف واحد، وإنما هي مجبرة عل تحقيق عدة أهداف، فمتطلبات الحياة العملية والظروف والضغوط التي تفرضها وكذلك واقع المؤسسة وظروفها الداخلية، كل ذلك جعل المؤسسة تسعى إلى تحقيق أهداف متعددة اقتصادية وغير اقتصادية.[1]

ونظرا للاهتمام بمشاكل دراسة الأهداف المتعددة، التي تتمثل في التعارض والتناقض فيما بينها، أي لايمكن أن نحقق في آن واحد كل الأهداف من تعظيم وتقليص، ونتيجة لقصور النماذج التقليدية للبرمجة الخطية في معالجة هذا النوع من المشاكل، آثرنا أن نخصص هذا الفصل لتناول واستعراض الطريقة التي يمكن أن نعالج بها مشاكل الأهداف المتعددة.[2]

هذه الطريقة التي تستخدم في معالجة هده النوعية من المشاكل يطلق عليها اصطلاح نموذج البرمجة الخطية بالأهداف، وبالتسمية الإنجليزية (Goal Programming Model).

إن نموذج البرمجة الخطية بالأهداف يسمح باعتبار في آن واحد عدة أهداف المراد الوصول إليها في إشكالية اختيار أحسن حل من ضمن الحلول الممكنة [3].

---

(1)- د.فريد عبد الفتاح، (بحوث العمليات وتطبيقاتها في حل المشاكل واتخاذ القرارات)، 1997 ، جامعة الزقازيق، ص : 297-295.

(2) - Schàrlig, A., «La Critique de l'Optimisation dans Décider sur Plusieurs Critères», Panorama de l'aide à la décision multicritère, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985, p :17-19.

(3) - Aouni, B. and O. Kettani, «Goal Programming Model: A Glorious History and a Promising Future », European Journal of Operational Research, 2001, p: (226-229).

هذا النموذج تم تطبيقه في عدة مجالات.

اكتشف هذا النموذج من طرف الباحثين المعروفين (Charnes et Cooper)، في شكله الخطي[1] أي الأهداف المراد الوصول إليها عبارة عن معادلات خطية، و قد كان هذا في سنة 1955م.

يمكن ذكر بعض المجالات التي طبقت فيها البرمجة الخطية بالأهداف كما يلي:

* مجال التسيير(تسيير الموارد البشرية و الموارد المالية).
* مجال المحاسبة.
* مجال التسويق.
* مراقبة الجودة.
* مجال الإنتاج.
* مجال النقل.
* مجال الفلاحة.

من هنا نلاحظ أن البرمجة الخطية عرفت تطبيقات كثيرة في المجالات المذكورة سابقا، لأنها سهلة الفهم، ويمكن الوصول الى الحل الأمثل بطريقة رياضية محضة ألا وهي طريقة simplex التي عرفت شهرة كبيرة في ميدان الرياضيات، وهناك طرق أخرى طبقت من قبل في هذه المجالات، و لكن في سنة 1947 العالم الأمريكي Dantzig مكتشف طريقة simplexe هو الذي غير النماذج الرياضية إلى برمجتها خطيا استنادا على هذه الطريقة.

---

(1) - Aouni, Belaid « le Modèle de Programmation Mathématique avec Buts dans un Environnement Imprécis » :sa formulation, sa résolution et une application. Thèse de doctorat (Ph.D.), faculté des sciences de l'administration, Université Laval (Canada), 1998, p : 17.

ومع مرور الزمن و كثرة التطبيقات في المحالات المختلفة، عرفت البرمجة الخطية بالأهداف عدة تغييرات من حيث النماذج. وذلك للظروف التي تعايشها المؤسسة مع المشاكل اليومية. نذكر منها: النمادج الخطية بالأهداف العادية، النمادج الخطية بالأهداف المرجحة،...

2-2- البرمجة الخطية بالأهداف العادية:

كما ذكرنا سابقا، هذا النموذج درس من قبل الأمريكيين : (Charnes et Cooper) على شكله التالي[1]:

النمودج 2-1:

$$\text{Minimiser} \quad \left| f_i(x) - g_i \right|$$

تحت القيود:

$$Cx \le c$$
$$x_j \ge 0 (j = 1.2.....n)$$

بحيث:

$f_i(x)$: تمثل الأهداف مع $\left[f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (i = 1.2.......p)\right.$ [2]

g_i : الهدف المراد الوصول إليه للهدف رقمi (i=1.2...p)

x_j : يمثل المتغير للقرار رقم n (j=1.2.....n)

a_{ij} : المعاملات التكنولوجية.

C_x: مصفوفة المعاملات المتعلقة بقيود النموذج.

c : شعاع الموارد المتاحة.

---

[1] - Charnes, A., Cooper, W. W., Devoe, J. K., Learner, D. B. and Reinecke« A Goal Programming Model for Media Planning Management Science »,1968, P: 425-427.

[2] - Martel J.-M. and Aouni, « Incorporating the Decision-Maker's Preferences in the Goal Programming Model », Journal of the Opération Research Society, 1990, P: (1122-1124).

هذا النموذج يمكن كتابته على شكله الخطي التالي[1] المعروف:

النمودج 2-2:

$$MinZ=\sum_{i=1}^{p}(\delta_i^{+}+\delta_i^{-})$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-\delta_i^{+}+\delta_i^{-}=g_i(i=1.2....p).$$

تحت القيود:

$$C_x\leq c$$

$$x_j\geq 0(j=1.2......n)$$

$$\delta_i^{+}et\delta_i^{-}\geq 0(i=1.2.......p).$$

حيث الجداء للانحرافات الموجبة و السالبة($\delta_i^{+}\times\delta_i^{-}=0$) معدوما،لأن الشعاعان $\delta_i^{-};\delta_i^{+}$ لا يمكن أن يتحققا معا. بمعنى آخر، بالنسبة لهدف i ، لا يمكن في آن واحد أن نصل إلى قيمة أصغر من الهدف g_i وقيمة أكبر من g_i.

و لفهم هذا المخطط للنموذج الخطي العادي، نستعين بالمثال التالي:

مثـــــــال 2-1 - (مشكل الاختيار):

بمناسبة حفل زفاف، تريد عائلة البحث عن قاعة الحفلات لهذه الليلة من ضمن 4 قاعات في مدينة تلمسان مثلا، هذه العائلة تريد تحقيق الخمسة أهداف.

- الهدف الأول: عدد المقاعد التي تحتويها القاعة يجب أن يساوي 300مقعد.
- الهدف الثاني: عدد الغرف لتبديل الثياب يجب أن يكون على الأقل 5.

[1]- Charnes A, Cooper, op.cit. p: 426-428.

- الهدف الثالث: المسافة بين القاعة وأقرب مسجد إليها يجب أن تكون على الأقل 500م لعدم إزعاج المصليين .
- الهدف الرابع: ساحة وقوف السيارات يجب أن تحتوي على الأقل 20 سيارة.
- الهدف الخامس: التكاليف لهذه الليلة يجب ألا تتعدى 50 ألف دج.

معطيات هذا المثال يمكن التعبير عنها في الجدول 2-1 التالي:

الجدول 2-1 : يمثل الأهداف الخمسة

الهدف / موقع القاعة	الأول عدد المقاعد	الثاني عدد الغرف	الثالث المسافة بين المسجد و القاعة	الرابع ساحة وقوف السيارات	الخامس التكاليف لليلة(بالألف دج)
x_1 (الكيفان)	250	7	600	18	60
x_2 (إمامة)	290	6	500	35	40
x_3 (باب وهران)	400	3	450	22	45
x_4 (بروانة)	340	4	300	10	80
الهدف المراد الوصول إليه	300	5	500	20	50

المصدر : من وضع الطالب

الصياغة لهذا البرنامج تأخذ الشكل التالي[1]:

$$\text{Min} \quad Z = \delta_1^+ + \delta_1^- + \delta_2^- + \delta_3^- + \delta_4^- + \delta_5^+$$

تحت القيود:

$$obj1: 250x_1 + 290x_2 + 400x_3 + 340x_4 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 300$$
$$obj2: 7x_1 + 6x_2 + 4x_4 + \delta_2^- - \delta_2^+ = 5$$
$$obj3: 600x_1 + 500x_2 + 450x_3 + 300x_4 + \delta_3^- - \delta_3^+ = 500$$
$$obj4: 18x_1 + 35x_2 + 22x_3 + 10x_4 + \delta_4^- - \delta_4^+ = 20$$
$$obj5: 60x_1 + 40x_2 + 45x_3 + 80x_4 + \delta_5^- - \delta_5^+ = 50$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1;$$
$$x_j = \{0,1\}(j = 1,\ldots 4);$$
$$\delta_i^+ et \delta_i^- \geq 0 (i = 1,\ldots 5).$$

δ_i^+ : الإنحراف الموجب

δ_i^- : الإنحراف السالب

لحل هذا البرنامج في الإعلام الآلي نستعمل أحد البرامج مثل: Lindo,Excel,Neos,.....

---

(1) - Romero C. « Handbook of Critical Issues in Goal Programming». Oxford: Pergamon Press, 1991, p: 26.

كتابة هذا البرنامج إذا استعملنا(Lindo) هو كما يلي:

Min p1+n1+n2+n3+n4+p5

St:

$$250x_1+290x_2+400x_3+340x_4+n_1-p_1=300$$

$$7x_1+6x_2+3x_3+4x_4+n_2-p_2=5$$

$$600x_1+500x_2+450x_3+300x_4+n_3-p_3=500$$

$$18x_1+35x_2+22x_3+10x_4+n_4-p_4=20$$

$$60x_1+40x_2+45x_3+80x_4+n_5-p_5=50$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1$$

end

(1) int x_1

int x_2

int x_3

int x_4

الحل للمثال 2-2 باستعمال برنامج (Lindo) هو كما يلي:

الجدول 2-2:

الدالة الاقتصادية	الانحرافات	متغيرات القرار
Z=10	$p_1=0;n_1=10$ $p_2=1;n_2=0$ $p_3=0;n_3=0$ $p_4=15;n_4=0;p_s=0;n_s=10$	$x_1=0$ $x_2=1$ $x_3=0$ $x_4=0$

(1) – الرمزint يعني المتغيرX يأخذ القيمة 1 أو الصفر.

حيث $n_i = \delta_i^- ; p_i = \delta_i^+$

التعليـــــــق:

من خلال هذا الجدول السابق نستنتج أن العائلة ستختار القاعة رقم x2 (قاعة إمامة) كحل أحسن لتحقيق جميع الأهداف الخمس.

القيمة (Z=10) تعني لو عوضنا المتغيرات Xj (j=1, 2, 3, 4) بالعددين 0 أو 1 في جميع 5 أهداف سنحصل في كل حالة على قيم الانحرافات ni, pi, و نعوض هذه الانحرافات في دالة الهدف (Z)، فإن أصغر قيمة تأخذها دالة الهدف عندما نعوض المتغيرات xj بالحل التالي: (x1=0, x2=1, x3=0, x4=0).

مثال 2-2- **(مشكل كمي)**

تريد مؤسسة الخزف الواقعة بضواحي مغنية (CERTAF) أن تضع نوعين من الأواني، النوع(أ) ذو جودة عالية، و النوع(ب)أقل جودة. بيع وحدة من النوع(أ) يعطي ربحا قدره40دج ، و بيع وحدة من النوع(ب) يعطي ربحا قدره30دج.

تريد المؤسسة تحقيق الأهداف التالية:

- لإنتاج وحدة من النوع (أ) تتطلب وقتا مضاعفا نسبة لوحدة من النوع (ب)، فإذا أنتجت كل الوحدات من النوع(أ) يجب أن لا تتعدى 500 ساعة.
- مجموع الإنتاج من (أ) و (ب) على الأقل يكون 400 وحدة .
- تريد تحقيق أقصى ربح ممكن قدره 24000 دج.
- كمية الإنتاج للنوع (أ) يجب ألا تتعدى 300 وحدة.

- الصياغة لهذا البرنامج هي كما يلي:

$$\text{Min } Z = \delta_1^+ + \delta_2^+ + \delta_2^- + \delta_3^- + \delta_4^-$$

تحت القيود:

$$obj1 : x_1 + x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 400$$
$$obj2 : 2x_1 + x_2 - \delta_2^+ + \delta_2^- = 500$$
$$obj3 : 40x_1 + 30x_2 - \delta_3^+ + \delta_3^- = 24000$$
$$obj4 : x_1 - \delta_4^+ + \delta_4^- = 300$$
$$x_j \geq 0 (j = 1,2);$$
$$\delta_i^+ et \delta_i^- \geq 0 (i = 1,....,4).$$

الحل للمثال 2-2 هو كالتالي:

الجدول 2-3: الحل الأمثل لمتغيرات القرار

متغيرات القرار x_j	متغيرات الانحرافات δ_i	الدالة الاقتصادية Z
X1=300 X2=400	$\delta_1^+ = 300; \delta_1^- = 0;$ $\delta_2^+ = 500; \delta_2^- = 0$ $\delta_3^+ = 0; \delta_3^- = 0$ $\delta_4^+ = 0; \delta_4^- = 0$	Z=800

التعليـــــــــــــق :

إذن الحل الأمثل هو إنتاج 300 وحدة من النوع (أ)، و 400 وحدة من النوع (ب)، بمعنى آخر إذا عوضنا x_2, x_1 بقيم مختلفة في جميع الأهداف الأربعة سنجد الانحرافات لكل هدف δ_i ، إما الموجب δ_i^+ أو السالب δ_i^- ، و نعوض من جديد هذه الانحرافات في الدالة الاقتصادية (Z) ، فإن أصغر قيمة تأخذها Z، هي عندما يكون $(x_2 = 400, x_1 = 300)$. و بالتالي الانحرافات في هذه الحالة كما هي موضحة في الجدول 2-2.

2-3 - البرمجة الخطية بالأهداف المرجحة: [1]

البرمجة الخطية المرجحة تنص على أن نعطي للانحرافات δ_i، معاملات w_i، تعبر عن نسبة مئوية تمثل الأولوية لبعض الأهداف على حسب معلومات جديدة يمكن أن تساعد المسير (المقرر).

إن الشكل التحليلي لهذا النموذج يكتب على الشكل التالي:

النموذج 2-2 :

$$MinZ = \sum_{i=1}^{p} (W_i^+ \delta_i^+ + W_i^- \delta_i^-)$$

$$\sum a_{ij} x_j - \delta_i^+ + \delta_i^- = g_i (i = 1,2,....,p)$$

$$C_x \leq c$$

$$x_j \geq 0 (j = 1,2,......,n)$$

$$\delta_i^+ et \delta_i^- \geq 0 (i = 1,2,.....,p)$$

(1) - Evans, G. W., «An Overview of Techniques for Solving Multiobjective Mathematical Programs », Managmnt Science, 1984, p : (1274-1276).
- Ignizio JP. A Review of Goal Programming: a Tool for Multi-Objective Analysis. Journal of the operational Research Society, 1978; p: 1112-1115.

عادة إن المسير يعطي أهمية مختلفة للأهداف، وبالتالي هذه المعاملات ذات الأهمية النسبية (W_i)، ترفق بالانحرافات δ_i في الدالة الاقتصادية Z لكل هدف i (i=1,2,……,p).

حسب (Martel, Aouni) كلما كانت النسبة المئوية ل: W_i أكبر كلما صغر الانحراف δ_i المتعلق بالقيدi. بحيث W_i^+ ترفق للانحراف الموجب δ_i^+، W_i^- ترفق للانحراف السالب δ_i^- . لفهم هذا النموذج نستعين بالمثال 2-2- السابق، بحيث نريد إعطاء أهمية (W_i) لكل قيد i ، 30 % للقيد (الهدف) الخامس $[W_5^i = 0,3]$ و الهدف الرابع $(W_4^- = 0,2)$أي 20% و الهدف الثالث $(W_3^- = 0.1)$ أي 10%، و الهدف الثاني 15% $(W_2 = 0,15)$، و الباقي للهدف الأول مع إضافة أهمية للانحراف δ_i^+ بـ:60% ، و 40% للانحراف δ_i^- أي إذا وجدنا في قاعة الحفلات أكثر من 300 مقعد أحسن من أقل من 300 مقعد بالنسبة المئوية المذكورة سابقا. إذن النسبة الباقية للهدف الأول هي25% حيث النسبة المئوية 60% للانحراف δ_1^+ من 25% للهدف الأول =0.10، و 40% للانحراف δ_1^-=0.15.

وبالتالي الدالة الاقتصادية Z في هذه الحالة تصبح كما يلي:

$$\boxed{MinZ = 0.1\delta_1^+ + 0.15\delta_1^- + 0.15\delta_2^- + 0.1\delta_3^- + 0.2\delta_4^- + 0.3\delta_5^+}$$

من خلال ما سبق، نستنتج أن البرمجة الخطية العادية هي حالة خاصة من البرمجة الخطية المرجحة في الحالة أين يكون:

$$\left.\begin{array}{l} W_i = W_j = 1(i = 1,2,....p),(j = 1,2,....p) \\ W_i^+ = W_i^- \end{array}\right\}$$

بمعنى آخر في البرمجة الخطية العادية، المسير لا يأخذ بعين الاعتبار الأهمية النسبية W_i للانحراف δ.

- Martel J.-M and B. Aouni, «Diverse Imprecise Goal Programming Model Formulations », Journal of Global Optimization, 1998, p: 133.
- Martel, J.-M. et B. Aouni, «Méthode Multicritère de Choix d'un Emplacement : le Cas d'un Aéroport dans le Nouveau Québec », Information Systems and Operational research, 1992, p 113.

2-4- البرمجة الخطية الليكسوكوغرافية:

إن هذا النموذج اقترح من طرف Romero, Tamis et Jones.

لقد طبق هذا النموذج في عدة مجالات مثل: المالية، التسيير للموارد البشرة، التخطيط الاقتصادي، الإنتاج، الاستثمار،.....

في هذا النموذج يعطي المسير أولويات للقيود.

إن المخطط الرياضي لهذا النموذج معرف كما يلي:

$$\text{Lex min } Z = \left[Z_1(\delta_1^+,\delta_1^-), Z_2(\delta_2^+,\delta_2^-), \ldots\ldots\ldots, Z_q(\delta_q^+,\delta_q^-)\right]$$

* الخطوة الأولى: سنقوم بإيجاد $MinZ = Z_1(\delta_1^+ \delta_1^-)$، أي نعطي الأولوية للهدف Z_1، و عندما نجد الحلول للخطوة الأولى، نعتبرها كقيود جديدة تضاف إلى القيود السابقة.

* الخطوة الثانية: سنقوم بحل $MinZ = Z_2(\delta_2^+,\delta_2^-)$، مع ظهور حلول الخطوة الأولى كقيود جديدة مع القيود السابقة، و هكذا إلى أن نصل الخطوة الأخيرة

$MinZ = Z_q(\delta^+,\delta^-)$

و لفهم هذا النموذج نستعين بالمثال التالي (2-3):

$$\begin{aligned}
&Lex\min Z = \left[(\delta_1^+),(\delta_2^+),(\delta_3^-),(\delta_4^+),(\delta_5^+)\right]\\
&obj1: x_1 + x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 10;\\
&obj2: 5x_1 - 10x_2 + \delta_2^- - \delta_2^+ = 50;\\
&obj3: 2x_1 + x_2 + \delta_3^- - \delta_3^+ = 25; \qquad\qquad \text{Sc1}\\
&obj4: x_1 + \delta_4^- - \delta_4^+ = 8;\\
&obj5: x_2 + \delta_5^- - \delta_5^+ = 3;\\
&x_1, x_2 \geq 0\\
&\delta_i^-, \delta_i^+ \geq 0 (i = 1,2,\ldots.5)
\end{aligned}$$

- Romero C. Handbook of critical issues in goal programming, op.cit. p: 30.
- Tamiz M, Jones DF, El-Darzi E. A review of goal programming and its applications. Annals of Operations Research, 1995; p: 44-46
- Tamiz, M., D. Jones and C. Romero, « Goal Programming for Decision- Making : An Overview of the Current State-of-the-Art », Européen Journal of Opération Research, 1998, p: (570-572).

لدينا 5 أهداف:

*الخطوة الأولى: سنقوم بإيجاد الحل فقط للهدف الأول أي:

$$Lex\min Z = \delta_1^+$$

تحت القيود السابقة الذكر(Sc1):

الحل هو: $0 = \delta_5^+ = \delta_4^+ = \delta_3^+ = \delta_2^+ = \delta_1^+ = x_2 = x_1$

$3 = \delta_5^-$ ، $8 = \delta_4^-$ ،$25 = \delta_3^-$ ، $50 = \delta_2^-$ ، $10 = \delta_1^-$

نجد: $\delta_1^+ = 0$، و بالتالي Lex min Z =0

*الخطوة الثانيــــــة:

$$LexMinZ = \delta_2^+$$

تحت القيود:

$$\begin{cases} Sc1 \\ \delta_1^+ = 0 \end{cases}$$

الحــــل هــــــو: $0 = \delta_5^+ = \delta_4^+ = \delta_3^+ = \delta_2^+ = \delta_1^+ = x_2 = x_1$

$.3 = \delta_5^-$ ، $8 = \delta_4^-$ ، $25 = \delta_3^-$ ، $50 = \delta_2^-$ ، $10 = \delta_1^-$

*الخطوة الثالثـــة :

$$\text{Lex } Z = \delta_3^-$$

تحت القيــــود:

$$\begin{cases} Sc1 \\ \delta_1^+ = 0 \\ \delta_2^+ = 0 \end{cases}$$

الحـــــــــــل هو:

$$0=\delta_5^+=\delta_4^-=\delta_3^+=\delta_2^-=\delta_1^-=\delta_2^+=\delta_1^+=x_2,10=x_1$$
$$0=\delta_5^+,2=\delta_4^+,5=\delta_3^-.$$

الخطوة الرابعة: (الأخيرة) لأننا وصلنا الى الهدفين الأخيرين (p_4,p_5)

$$LexMinZ=\delta_4^+ +\delta_5^+$$

تحت القيود:

$$\begin{cases} sc1 \\ \delta_1^+=0 \\ \delta_2^+=0 \\ \delta_3^-=5 \end{cases}$$

$$0=x_2,10=x_1$$

الحل هو: $0=\delta_5^+=\delta_4^-=\delta_3^+=\delta_2^-=\delta_2^+=\delta_1^-=\delta_1^+$

$$3=\delta_5^-,2=\delta_4^+,5=\delta_3^-$$

إذن الحل النهائي هو:

$$Z^*=\left[(\delta_1^+)^*;(\delta_2^+)^*;(\delta_3^-)^*;(\delta_4^+ +\delta_5^+)^*\right]$$

أي الحل هو:

$$\delta_1^+=0,\delta_2^+=0,\delta_3^-=5,\delta_4^+ +\delta_5^+=2$$

2-5- البرمجة الخطية الكمبرومازية:

العبارة التحليلية الرياضية لهذا النموذج[1] هي كما يلي:

$$g_i=\begin{cases} g_i^*=Maxf_i(x),x\in F \\ g_i^*=M\inf_i(x),x\in F \end{cases}$$

(1) - Ignizio JP. A review of goal programming, op.cit. p: 1112-1115.

- Romero C. Multi-objective and goal programming approaches as a Distance function model. Journal of the Operational Research Society 1985; p: 249-251.

- Tamiz, M., D. Jones and C. Romero, « Goal Programming for Decision- Making : An Overview of the Current State-of-the-Art », Européen Journal of Opération Research, 1998, p: (987-990).

أي لدينا هدفين $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ بحيث تعظيم $f_1(x)$ ،و تقليص $f_2(x)$ تحت قيود معينة و لفهم هذا النموذج نستعين بالمثال التالي (2-4):

$$
\begin{aligned}
& f_1(x) = x_1 + 2x_2 \rightarrow && \text{البحث عن الحد الأقصى} \\
& f_2(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow && \text{البحث عن الحد الأدنى} \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& -x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1 - x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

الخطوة الأولى:

يجب حساب g_2^*, g_1^*

$$
\begin{aligned}
& g_1^* : Max f_1(x) = x_1 + 2 x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& -x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1 - x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

الحل الأمثل هو: $g_1^* = 7$

$$g_2^* : M\inf_2(x) = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 4$$

$$-x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 - x_2 \le 1$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

الحل الأمثل هو: $g_2^* = 0$

الخطوة الثانية (الصياغة):

إعادة كتابةالنموذج كما يلي:

$$MinZ = \delta_1^- + \delta_2^+$$

$$x_1 + 2x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 7;$$

$$2x_1 + x_2 + \delta_2^- - \delta_2^+ = 0;$$

$$x_1 + x_2 \le 4;$$

$$-x_1 + x_2 \le 2;$$

$$x_1 - x_2 \le 1;$$

$$x_1, x_2 \ge 1;$$

$$\delta_i^-, \delta_i^+ \ge 0 (i = 1,2)$$

و باستعمال (LINDO) نحصل على الحل الأمثل التالي:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 3, \\ Z = 5 \end{cases}$$

2-6- البرمجة الخطية باستعمال دوال الكفاءة:

اقترح هذا النموذج من طرف الباحثين (Martel, Aouni)و قد عرف هذا النموذج عدة تغييرات في البرمجة الخطية السابقة الذكر، و من ايجابيات هذا النموذج، يمكن للمسير أن يتحكم في معطياته التي يريد أن يضيفها للنموذج، فقد طبق في عدة مجالات مختلفة، كما تلقى نجاحا كبيرا.

لقد اعتمد الباحثين هنا على طريقة العالم (Brans) بما تسمى PROMETHEE لتطبيقها في البرمجة الخطية بالأهداف، حيث تعرف هذه الطريقة في البرمجة الخطية استنادا على ما يسمى بــ:(دوال الكفاءة).
طريقة Brans تتعلق بتعدد الخاصيات أما طريقة Martel et Aouni تطبق في البرمجة الخطية بالأهداف.

حيث يعرف نموذج البرمجة الخطية استنادا لدوال الكفاءة كما يلي:

$$MaxZ = \sum_{i=1}^{p}\left[W_i^+ F_i^+\left(\delta_i^+\right) + W_i^- F_i^-\left(\delta_i^-\right)\right]$$

S.c:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \delta_i^+ + \delta_i^- = g_i$$

$$Cx \le c;$$

$$\delta_i^+, \delta_i^- \le \alpha_{iv} (i = 1,2,\dots p);$$

$$\delta_i^+, \delta_i^-, x_j \ge 0 (i = 1,2,\dots p), (j = 1,2,\dots n)$$

حيث:

- Martel J.-M. and Aouni, « Incorporating the Decision-Maker`s Preferences in the Goal Programming Model », op.cit. p: 1125-1130.
- Brans, J.-P. L'Elaboration d'Instruments et Perspectives d'Avenir. nadeau, R. et M Landry ,Les presses de l'univrsité Laval, 1986, p : 199-203.
- Bertrand Mareschal, «Méthodes d`Aide à la Decision » ,Université Libre de Bruxelles, Belgique, 2001, p : 22.

$F_i^+(\delta_i^+)$: تمثل دالة الكفاءة المتعلقة بالانحراف الموجب (δ_i^+) للهدف i (obj i)

$F_i^-(\delta_i^-)$: تمثل دالة الكفاءة المتعلقة بالانحراف السالب (δ_i^-) للهدف i (obj i)

α_{iv} : عتبة فيتو (Seuil de veto)

نأخذ مثالا كي نفهم مبدأ حل هذا النموذج:

لنأخذ المثال(2-1) السابق:

الهدف / القاعة	الأول عدد المقاعد	الثاني عدد الغرف	الثالث المسافة بين المسجد و القاعة	الرابع ساحة وقوف السيارات	الخامس التكاليف لليلة
x_1 (الكيفان)	250	7	600	18	60
x_2 (إمامة)	290	6	500	35	40
x_3 (باب وهران)	400	3	450	22	45
x_4 (بروانة)	340	4	300	10	80
الهدف المراد الوصول إليه	$300=g_1$	$5=g_2$	$500=g_3$	$20=g_4$	$50=g_5$

المصدر : من وضع الطالب

المطلوب هو ما هي قاعة الحفلات التي تختارها العائلة من بين الأربع قاعات للاحتفال بهذه الليلة (حفل زفاف) مستعملا دوال الكفاءة، للوصول الى الحل الأحسن الذي يحقق جميع الأهداف.

دوال الكفاءة تعتمد على 3 عناصر مهمة:

- عتبة فيتو $[\alpha_v]$(Seuil de veto)
- عتبة الكفاءة المعدومة $[\alpha_0]$ (Seuil de satisfaction nulle)
- عتبة عدم المقارنة المتعلقة بكل هدف $[\alpha_q]$ (Seuil d'indifférence relatif à chaque objectif)

سنتطرق إلى فهم هذه العناصر من خلال هذا المثال:

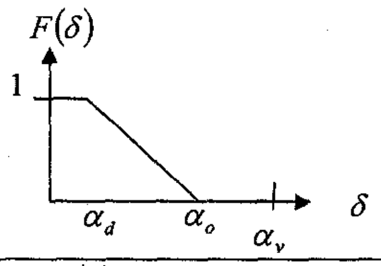
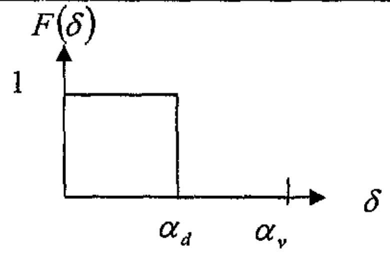
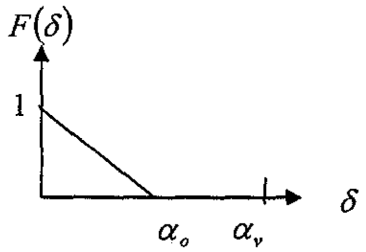
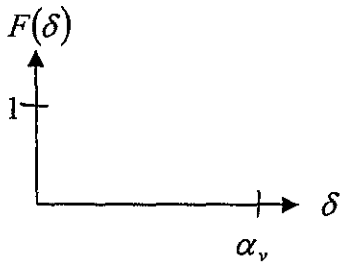
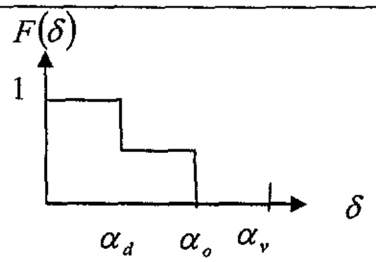
المرحلة الأولى: نبحث عن مصفوفة الانحرافات

	$\delta_1 = g_1 - x_j$	$\delta_2 = g_2 - x_j$	$\delta_3 = g_3 - x_j$	$\delta_4 = g_4 - x_j$	$\delta_5 = g_5 - x_j$
بالنسبة: x1	50	2	100	2	10
بالنسبة: X2	10	1	0	15	10
بالنسبة: X3	100	2	50	2	5
بالنسبة: x4	40	1	200	10	30

نلاحظ في الهدف الأول (Obj1) أن عدد المقاعد التي تحتويها القاعة بالنسبة ل: X1 (الكيفان) هو 250 مقعدا، أما الهدف المراد الوصول إليه (but) هو 300 مقعدا ، إذن الفرق بينهما هو 300-250=50 الذي يظهر في العمود الأول من المصفوفة بالنسبة ل x1 ، و هكذا إلى أن نصل إلى ملأ المصفوفة بكاملها لجميع المتغيرات xj.

المرحلة الثانية: إعداد شكل دالة الكفاءة للأهداف الخمس على طريقة PROMETHEE

نفرض أن أشكال الدوال الخمسة في المثال تأخذ الشكل التالي:

نوع الشكل	دالة الكفاءة
الشكل 1	
الشكل 2	
الشكل 3	
الشكل 4	
الشكل 5	

- Aouni, Belaid « le modèle de programmation mathématique avec buts dans un environnement imprécis » :sa formulation, sa résolution et une application. Thèse de doctorat (Ph.D.), faculté des sciences de l'administration, Université Laval (Canada), 1998.
- Martel J.-M. and Aouni, « Incorporating the Decision-Maker's Preferences in the Goal Programming Model », op.cit. p: 1129.
- Ben Amor, Martel, and Aouni, «Partage des Economies à la Quantité d'Escompte», Laval, Canada, 2001, p : 935.

أي نمثل كل هدف على شكل دالة كفاءة، فمثلا إذا أخذنا الهدف الأول على الشكل 1 فإن :

- المجال [0،30] يعني لو كان الفرق بين g_1، و قيمة x_j ينتمي إلى هذا المجال فإن $f(\delta_1)=1$ (انظر شكل الدالة أعلاه).
- المجال [30،100]يعني لو كان الفرق بين g_1، و قيمة x_j ينتمي إلى هذا المجال فإننا نعوض الفرق في الدالة التي تأخذ الشكل $f(\delta_1)=\frac{100-\delta_1}{100-30}$ ، فنجد في هذه الحالة $\left(f(\delta_1)=\frac{100-50}{100-30}=\frac{5}{7}\right)$ بالنسبة ل: x_1
- أما المجال]100،150[فيعني لو كان الفرق بين g_1، و قيمة Xj ينتمي إلى هذا المجال فإن $f(\delta_1)=0$.

* العدد 30 يمثل عتبة عدم المقارنة (α_d)

*العدد 100 يمثل الكفاءة المعدومة(α_0)

*و العدد 150 يمثل عتبة فيتو(α_v).

إن عتبة فيتو(veto) يعني لو كان الفرق أو الانحراف(δ) المتغيرXj للهدف المراد الوصول إليه (g_i) يفوق عتبة فيتو(α_v) في إحدى الأهداف الخمس، فإن اختيار هذا المتغيرXj يعتبر مرفوضا كالنقطة الأدنى في الامتحانات، حتى لو كان هذا المتغير أحسن اختيار في جميع الأهداف الباقية الأخرى و هذا من بين مزايا دوال الكفاءة، فإن المسير آخذ القرار يتحكم في إعطاء قيمة لعتبة فيتو في كل هدف على حسب ظروفه التي يراها مناسبة لدراسة النموذج، حتى يكون الاختيار للمتغير Xj أحسن اختيار ، عكس النماذج السابقة الذكر ، لا يمكن إدخال اختيارات المسير و التحكم في النموذج، إذن عتبة فيتو هو عنصر مهم جدا في اختيار المتغير Xj من بين عدة متغيرات.

المرحلة الثالثة: نبدأ بتعويض انحرافات (δ) كل متغير Xj في جميع الدوال الخمس لنحسب قيمة Z المعرفة كما يلي:

$$Z=\sum_{i=1}^{5} f(\delta_i)=f(\delta_1)+f(\delta_2)+f(\delta_3)+f(\delta_4)+f(\delta_5)$$

فالقيمة الكبرى التي تأخذهاً بالنسبة ل: X_j هو للمتغير الذي نختاره و قبل تعويض الانحرافات لكل متغير في الدوال الخمس، نأخذ كمثال على الدالة الأولى و نحسب $f(\delta_1)$ لكل متغيرX_j ، إذن لدينا عمود الانحرافات كما يلي:

الإنحراف δ_1	المتغيرات
50	X_1
10	X_2
100	X_3
40	X_4

نبدأ بتعويض انحراف (X_1-50) في الدالة، إن العدد 50 ينتمي [30−100]. و بالتالي نعوض في الدالة $f(\delta_1)=\frac{100-\delta_1}{100-30}$ ، أي $\left(f(\delta_1)=\frac{100-50}{100-30}=\frac{5}{7}\right)$.

- ثم بالنسبة ل: X_2 (الانحراف =10) ينتمي [0−30] $\Longleftarrow f(\delta_1)=1$
- ثم بالنسبة ل: X_3 (الانحراف =100) ينتمي [100−150] $\Longleftarrow f(\delta_1)=0$
- أما بالنسبة ل:X_4 (الانحراف=40) ينتمي [30−100] $\Longleftarrow \left(f(\delta_1)=\frac{100-40}{100-30}=\frac{6}{7}\right)$

و نتبع نفس الطريقة بالنسبة لكل دالة على حسب شكلها التي تأخذه، أي هل هي من الشكل:1، 2، 3، 4، 5،أو 6 (أشكال دوال PROMETHEE)

الآن نبدأ بتعويض انحرافات كل متغيرX_j في جميع الدوال الخمس:

بالنسبة ل: X_1 :

	Obj1	Obj2	Obj3	Obj4	Obj5
x_1	250	7	600	18	60
الهدف g_i	300	5	500	20	50
$g_i - x_j = \delta_i$	50	2	100	2	10
$f(\delta_i)$	5/7	0	1/2	1	1

إذنً $$Z_{x1} = \frac{5}{7} + 0 + \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{45}{14}$$

بالنسبة ل: X_2

	Obj1	Obj2	Obj3	Obj4	Obj5
x_2	290	6	500	35	40
g_i	300	5	500	20	50
δ_i	10	1	0	15	10
$f(\delta_i)$	1	1-1/2	1	؟	1

إذن الاختيار ؟ مرفوضا لـــ: X_2 $Z_{x2} = 1 + (1 - \frac{1}{2}) + ? + 1$

إن الرمز(؟) الموجود في عمود(obj4) يعني في الدالة الرابعة عندما نعوض δ_4 الذي يساوي 15 نجده أكبر من عتبة فيتو التي تساوي 10، إذن هذا المتغير لا يعتبر حلا للنموذج و بالتالي نرفضه رغم انه حسب في الدوال الأخرى، فبقي علينا الاختيار بين المتغيرات X_4, X_3, X_1 الباقية فقط.

- Martel J.-M and B. Aouni, «Diverse Imprecise Goal Programming Model Formulations » Journal of Global Optimization, 1998, p: (129-132).

بالنسبة ل: X_3

	Obj1	Obj2	Obj3	Obj4	Obj5
X_3	400	3	450	22	45
g_i	300	5	500	20	50
δ_i	100	2	50	2	5
$f(\delta_i)$	0	0	1	1	1

إذن $Z_{x3}=0+0+1+1+1=3$

بالنسبة ل: X_4

	Obj1	Obj2	Obj3	Obj4	Obj5
x_2	340	4	300	10	80
g_i	300	5	500	20	50
δ_i	40	1	200	10	30
$f(\delta_i)$	$\frac{100-40}{100-30}$	1-1/2	0	1	0

إذن: $Z_{x4}=\frac{100-40}{100-30}+(1-\frac{1}{2})+0+1+0=\frac{33}{14}$

خلاصة: نلاحظ أن أكبر قيمة ل: Z هي بالنسبة للمتغير X_1 : $\left(Z_{x1}=\frac{45}{14}\right)$

إذن العائلة سوف تختار القاعة X_1 (الكيفان) كاختيار يحقق جميع الأهداف الخمس، بعكس ما وجدناه في البرمجة الخطية بالأهداف العادية، حيث وجدنا أحسن اختيار هو القاعة X_2 (إمامة). فهذا هو مبدأ البرمجة الخطية باستعمال دوال الكفاءة في حالة وجود مشكل متعلق بالاختيار.

و زيادة على مزايا عتبة فيتو فإن التفسير الاقتصادي للدالة (Z) لديها معنى اقتصادي عكس (GPS) ، بما أن هناك 5 أهداف فإن أعظم قيمة تأخذها Z هي5

Z=1+1+1+1+1=5

obj1 obj2 obj3 obj4 obj5

في مثالنا وجدنا أكبر قيمة ل: Z هي $\frac{45}{14}$ أي (....,3) مع اختيار X_1 ، إذن يمكن القول بأن مستوى الكفاءة للمسير هو $\frac{45}{14}$ من5 ، أي بالنسبة المئوية ما تعادل (%64.2)،

- فإن الهدف الأول تحقق ب:100% (بما أنه $f(\delta_1=1)$)
- و الهدف الثاني تحقق ب:50% (بما أنه $f(\delta_2)=0.5$)
- و الهدف الرابع تحقق ب:50% (بما أنه $f(\delta_3)=0.5$)
- و الهدف الخامس تحقق ب:100% (بما أنه $f(\delta_5)=1$)

إذن الامتياز لدوال الكفاءة يكمن في شيئين :

1* الدالة الإقتصادية (Z) لديها تفسير اقتصادي، بعكس البرمجة الخطية العادية ، ليس لديها تفسير اقتصادي [لو نأخذ المثال السابق، وجدنا Min Z=10 .العدد 10 هو عبارة عن خليط من وحدات القياس للأهداف (مقاعد و غرف و البعد و التكاليف) ، عدة وحدات قياس مختلفة] .

2* لا نحتاج إلى معلومات كثيرة، نأخذ فقط 3 عناصر التي ذكرناها سابقا (عتبة فيتو، عتبة عدم المقارنة، عتبة الكفاءة المعدومة).

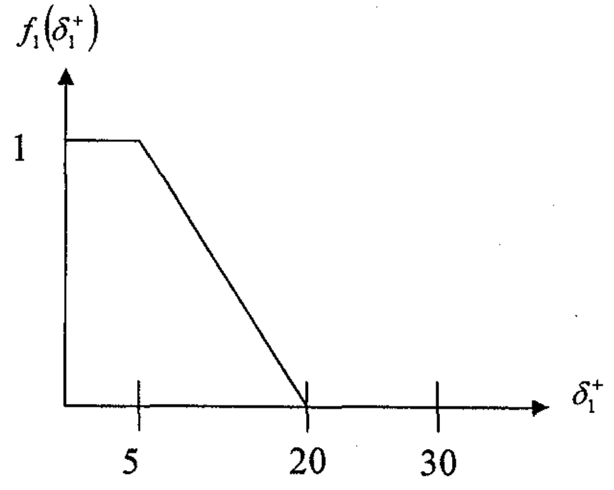
أما بالنسبة لكيفية إعداد النموذج استنادا على دوال الكفاءة ، فهو معقد شيئا ما، و طويل، لأنه كما قلنا سابقا، فكل هدف يجب أن ننشئ له نموذجا، و في الأخير نقوم بجمع كل النماذج الجزئية، للحصول على النموذج النهائي، ليس هذا هو موضوع بحثنا، و لكن سنأخذ مثالا على كيفية إعداد نموذج يتعلق بهدف واحد.

نفرض أنه لدينا دالة الكفاءة التالية $f(\delta_1^+)$:

- العدد 30: يمثل عتبة فيتو(α_v)

- العدد 20: يمثل عتبة الكفاءة المعدومة (α_0)

- والعدد5: يمثل عتبة عدم المقارنة (α_α).



الشكل 2-1

-العبارة التحليلية هي:

$$F_1(\delta_1^+)=\begin{cases}1, si\,\delta_1^+ \le 5.\\ \dfrac{20-\delta_1}{20-5}, si 5 \le \delta_1^+ \le 20\\ 0, si 20 \le \delta_1^+ \le 30.\end{cases}$$

-النموذج الخطي هو:

$$F(\delta_1^+)= \lambda_1 f_1(\delta_1^+)+ \lambda_2 f_2(\delta_1^+)+ \lambda_3 f_3(\delta_1^+)$$

بحيث

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \{0,1\}$$

إذن لدينا

$$\begin{cases}F_1(\delta_1^+)= 1, si\,\delta_1^+ \le 5.\\ F_2(\delta_1^+)= 1{,}332 - 0{,}0666\, \delta_1^+, si 5 \le \delta_1^+ \le 30\\ F_3(\delta_1^+)= 0, si\, 20 \le \delta_1^+ \le 30\end{cases}$$

بحيث:

$$5\lambda_2 + 20\lambda_3 - \delta_1^+ \leq 0.$$

إذن

$$\delta_1^+ - 5\lambda_1 - 20\lambda_2 - 30\lambda_3 \leq 0$$

$$F_1(\delta_1^+) = \lambda_1 + \lambda_2(1{,}33 - 0{,}666\delta_1^+) + \lambda_3(0)$$

$$F_1(\delta_1^+) = \lambda_1 + 1{,}332\lambda_2 - 0{,}666\lambda_2\delta_1^+$$

إن العبارة ($0{,}666\lambda_2\delta_1^+$) غير خطية، إذن يجب إيجاد عبارة خطية مكافئة لهذه العبارة غير الخطية تحت القيود:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$5\lambda_2 + 20\lambda_3 - \delta_1^+ \leq 0$$

$$\delta_1^+ - 5\lambda_1 - 20\lambda_2 - 30\lambda_3 \leq 0$$

إذن لدينا: $D_1(\delta_1^+) = 0{,}0666\lambda_2\delta_1^+$

$D_1^-(\delta_1^+) = 0{,}0666 \times 1 \times 5 = 0{,}333$ ← الحد الأدنى

$D_1^+(\delta_1^+) = 0{,}0666 \times 1 \times 20 = 1{,}332.$ ← الحد الأقصى

نعلم أن : $\text{Max}(Z) = M(-Z)$

إذن: $\text{Max}(-0.666\,\lambda_2\delta_1^+) = \text{Min}(0.0666\,\lambda_2\delta_1^+)$

وبالتالي: $\text{Min } Z = 0.333\,\delta_1^+ + \xi_1$

$$\xi_1 \geq 0.0666\delta_1^+ - 0.333\delta_1^+ - 1.332(1 - \delta_1^+)$$

$$\xi_1 \geq 0.$$

إذن النموذج الخطي الموافق هو كما يلي:

$$MaxF(\delta_1^+) = \lambda_1 + 1.332\lambda_2 + 0.333\delta_1^+ + \xi_1$$

(1) - Oral M, Kettani O. A linearization Procedure for Quadratic and Cubic Mixed Integer Problems. Operations Research, 1992; p: 5110-5114.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$5\lambda_2 + 20\lambda_3 - \delta_1^+ \le 0$$

$$\delta_1^+ - 5\lambda_1 - 20\lambda_2 - 30\lambda_3 \le 0$$

$$-\xi_1 + 1.0656\delta_1^+ \le 1.332$$

$$\xi_1, \delta_1^+ \ge 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, et \lambda_3 = \{0,1\}$$

2-7- تحويل العبارات التربيعية إلى عبارات خطية:

هناك عدة طرق استعملت لتحويل العبارات غير الخطية إلى عبارات خطية، و بالأخص (Oral et Kettani) اقترحا طريقة التحويل الخطي أكثر فعالية من طريقة (Glover) .
استعملا طريقة Glover لحساب الحد الأقصى و الأدنى من أجل تحويل العبارات غير الخطية إلى عبارات خطية. إن صياغة نموذج البرمجة الخطية يمكن أن تأخذ شكل النماذج غير الخطية أين يصعب حلها بالبرمجة الرياضية العادية، و بالتالي يجب استعمال تقنيات للوصول إلى عبارات خطية التي يسهل حلها.
اقترحت طريقة حقيقية تسمح بالحصول على صياغة خطية للنموذج الذي يكافئ النموذج غير الخطي ، هذه الطريقة أحسن من الطرق السابقة.

- Oral M, Kettani O. A linearization Procedure for Quadratic and Cubic Mixed Integer Problems. op.cit. p: 5112-5116.
- Hwang, C. L., Lee, H. B., Tilman, F. A. and Lie, C. H. Nonlinear Integer Goal Programming Applied to Optimal System Reliability. IEEE Transaction on reliability,1984, p : 431-434.

طريقة التحويل الخطي:

إن العبارات غير الخطية تأخذ الشكل التالي:

البرنامج P_1: $Min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_ix_j$

$L(x) \quad X_i,x_j = 0\ ,1 \quad i, j=1,\ldots\ldots \quad n.$

حيث x_i,x_j متغيرات ثنائية 1،0.

$L(x)$ مجموعة القيود الخطية.

النموذج الخطي المكافئ للنموذج غير الخطي هو كالتالي:

البرنامج P_2 : $Min\sum_{i=1}^{n}(D_i^- x_i + \xi_i)$

$$\xi_i \geq D_i(x) - D_i^- x_i - D_i^+(1-x_i);$$
$$L(x)\ ;$$
$$X_i,x_j = 0\ ,\ 1, \qquad (i,j=1,\ldots\ldots n)$$
$$\xi_i \geq 0 (i=1,\ldots. n.)$$

حيث: $D_i(x) = \sum_j d_{ij}x_j$

$$D_i^- \leq D_i(x) \leq D_i^+.$$

$$\left.\begin{array}{l} D_i^+ = \sum_j d_{ij}^+ \\ D_i^- = \sum_j d_{ij}^- \end{array}\right\} \longrightarrow \text{حسب Glover}$$

حيث:

d_{ij}^+ : المعاملات الموجبة بالنسبة للعبارات غير الخطية.

d_{ij}^- : المعاملات السالبة بالنسبة للعبارات غير الخطية.

حيث:

$$\begin{cases} D_i^+ = Max\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^+ x_j \\ D_i^- = Min\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^- x_j \end{cases}$$

النموذج الخطي المكافئ للنموذج غير الخطي السابق هو كما يلي:

$$Min\sum_{i=1}^{n}(D_i^- x_i + \xi_i)$$

$$\xi_i \geq D_i(x) - D_i^- x_i - D_i^+(1 - x_i);$$

$$L(x);$$

$$\xi_i \geq 0;$$

$$X_i, x_j = 0, 1 \qquad (i,j=1,\ldots\ldots n)$$

$$D_i(x) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{j;}$$

$$D_i^- \leq D_i(x) \leq D_i^+.$$

$$D_i^+ = \sum_j d_{ij}^+$$

$$D_i^- = \sum_j d_{ij}^-$$

مثال 1 :

لدينا النموذج غير الخطي التالي:

$$\begin{aligned}\text{Min } Z=&x_1(-5x_1+10x_2-9x_3-3x_4+10x_5)+\\&x_2(5x_1+10x_2+4x_3-9x_4+10x_5)+\\&x_3(-9x_1-5x_2+6x_3-2x_4-10x_5)+\\&x_4(4x_1-5x_2-5x_3+2x_4-6x_5)+\\&x_5(-8x_1+8x_2-10x_3-3x_4-9x_5)\end{aligned}$$

تحت القيود:

$$\begin{aligned}&-10x_1+8x_2+10x_3-3x_4-3x_5\geq 5\ ;\\&6x_1-9x_2-6x_3+7x_4+x_5\geq -2\ ;\\&3x_1+2x_2+7x_3-8x_4-6x_5\geq -6\ ;\\&5x_1-2x_2+10x_3-4x_4-2x_5\geq -6\ ;\\&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2\ ;\\&x_j=\{0,1\}\quad (j=1,\dots.5).\end{aligned}$$

القيم الموافقة للحدين الأقصى (D_i^+) و الأدنى (D_i^-) موضحة في الجدول التالي:

الجدول-1-

i	D_i^+	D_i^-
1	7	-12
2	1	-5
3	4	-7
4	-3	-3
5	5	-13

(1) - Aouni,B., «Linéarisation des Expressions Quadratiques en Programmation Mathématique : des Bornes Plus Efficaces », Administrative Sciences Association of Canada, Management Science, 1996, p : (40-44).

بواسطة القيم الموجودة في الجدول أعلاه الموافقة للحدين D_i^- ، D_i^+ فإن النموذج الخطي الموافق للنموذج غير الخطي السابق يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$\text{Min } Z=-12x_1-5x_2-7x_3-3x_4-13x_5+\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4+\xi_5$$

$$-10X_1+8x_2+10x_3-3x_4-3x_5 \geq 5 ;$$

$$6X_1-9x_2-6x_3+7x_4+x_5 \geq -2 ;$$

$$3X_1+2x_2+7x_3-8x_4-6x_5 \geq -6 ;$$

$$5X_1-2x_2+10x_3-4x_4-2x_5 \geq -6 ;$$

$$X_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2 ;$$

$$\xi_1 \geq 14x_1+10x_2-9x_3-3x_4+10x_5-7;$$

$$\xi_2 \geq 5x_1+16x_2+4x_3-9x_4+10x_5-1;$$

$$\xi_3 \geq -9x_1-5x_2+17x_3-2x_4-10x_5-4;$$

$$\xi_4 \geq 4x_1-5x_2-5x_3+2x_4-6x_5+3;$$

$$\xi_5 \geq -8x_1+8x_2-10x_3-3x_4+9x_5-5;$$

$$x_j=\{0,1\}(j=1,....5);$$

$$\xi_i \geq 0(i=1,......5).$$

ملاحظة: إن القيم المحصل عليها للحدين D_i^+ ، D_i^- للجدول -1- وجدت كما يلي:

I	D_i^+	D_i^-
1	$Max(-5x_1+10x_2-9x_3-3x_4+10x_5)$	Min (1)
2	$Max(5x_1+10x_2+4x_3-9x_4+10x_5)$	Min(2)
3	$Max(-9x_1-5x_2+6x_3-2x_4-10x_5)$	Min(3)
4	$Max(4x_1-5x_2-5x_3+2x_4-6x_5)$	Min(4)
5	$Max(-8x_1+8x_2-10x_3-3x_4-9x_5)$	Min(5)

أما طريقة Glover لتعيين الحدين الأقصى و الأدنى هو كما يلي:

I	D_i^+	D_i^-
1	20	-17
2	29	-9
3	6	-26
4	6	-16
5	8	-30

بواسطة القيم الموجودة أعلاه للحدين D_i^+ ،D_i^-، فإن النموذج الخطي الموافق للنموذج غير الخطي السابق هو كما يلي:

$$MinZ = -17x_1 - 9x_2 - 26x_3 - 16x_4 - 30x_5 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$$

تحت القيود:

$$-10x_1 + 8x_2 + 10x_3 - 3x_4 - 3x_5 \ge 5;$$
$$6x_1 - 9x_2 - 6x_3 + 7x_4 + x_5 \ge -2;$$
$$3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 8x_4 - 6x_5 \ge -6;$$
$$5x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 4x_4 - 2x_5 \ge -6;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2;$$
$$\xi_1 \ge 32x_1 + 10x_2 - 9x_3 - 3x_4 + 10x_5 - 20;$$
$$\xi_2 \ge 5x_1 + 58x_2 + 4x_3 - 9x_4 + 10x_5 - 29;$$
$$\xi_3 \ge -9x_1 - 5x_2 + 38x_3 - 2x_4 - 10x_5 - 6;$$
$$\xi_4 \ge 4x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 24x_4 - 6x_5 - 6;$$
$$\xi_5 \ge -8x_1 - 8x_2 - 10x_3 - 3x_4 - 29x_5 - 8;$$
$$x_j = \{0,1\}(j = 1,\dots,5);$$
$$\xi_i \ge 0(i = 1,\dots,5)$$

كلا الطريقتين تؤديان إلى نفس الحل الأمثل بحيث:

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = x_3 = x_5 = 0 \\ x_2 = x_4 = 1 \\ Z = -2 \end{cases}}$$

مثـــــال 2:

$$
\begin{aligned}
&MinZ = x_1(2x_1+5x_2+3x_3-6x_4)+\\
&x_2(4x_1+10x_2+6x_3-12x_4)+\\
&x_3(6x_1+15x_2+9x_3-18x_4)+\\
&x_4(-2x_1-5x_2-3x_3+6x_4)\\
&\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4 \geq 4;\\ x_1+x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}\\
&x_j=\{0,1\}(j=1,..4)
\end{aligned}
$$

القيم الموافقة للحدين الأقصى D_i^+، و الأدنى D_i^- لهذا المثال موضحة في الجدول التالي :[حسب Glover]:

i	D_i^+	D_i^-
1	10	-6
2	20	-12
3	30	-18
4	6	-10

إن العدد 10 الظاهر في عمود D_i^+ وجدناه كما يلي: من العبارة غير الخطية الأولى المضروبة في x_1 $(2x_1+5x_2+3x_3)$ انظر أعلاه في الدالة Z و بالتالي:

$$D_1^+ = 2+5+3=10.$$

و هكذا إلى أن نصل إلى العبارة الأخيرة المتعلقة بـــ x_4.

$$MinZ = -6x_1 - 12x_2 - 18x_3 - 10x_4 +$$
$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$$

تحت القيود:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 4;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2;$$
$$\xi_1 \geq 18x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 6x_4 - 10;$$
$$\xi_2 \geq 4x_1 + 42x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 20;$$
$$\xi_3 \geq 6x_1 - 15x_2 + 57x_3 - 18x_4 - 30;$$
$$\xi_4 \geq -2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 22x_4 - 6;$$
$$x_j = \{0,1\}(j = 1,...,4);$$
$$\xi_i \geq 0(i = 1,....,4)$$

أما تعيين الحدين هي كما يلي:

i	D_i^+	D_i^-
1	$Max(2x_1 + 5x_2 + 3x_3)$	$Min - 6x_4$
2	$Max(4x_1 + 10x_2 + 6x_3)$	$Min - 12x_4$
3	$Max(6x_1 + 15x_2 + 9x_3)$	$Min - 18x_4$
4	$Max(6x_4)$	$Min - 2x_1 - 5x_2 - 3x_3$

كل برنامج جزئي يتعلق بنفس القيود:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 4;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2;$$
$$x_j = \{0,1\}(j = 1,...,4)$$

الجدول التالي يمثل القيم المحصل عليها باستعمال برنامج Lindo للحدين الأقصى D_i^+، و الأدنى D_i^-

i	D_i^+	D_i^-
1	5	-6
2	10	-12
3	15	-18
4	6	-5

استنادا لهذه القيم للحدين D_i^+ ،و D_i^- ،فإن النموذج الخطي الجديد المكافئ هو:

$$MinZ = -6x_1 - 12x_2 - 18x_3 - 5x_4 +$$
$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$$

تحت القيود:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 4;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2;$$
$$\xi_1 \geq 13x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 6x_4 - 5;$$
$$\xi_2 \geq 4x_1 + 32x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 10;$$
$$\xi_3 \geq 6x_1 + 15x_2 + 42x_3 - 18x_4 - 15;$$
$$\xi_4 \geq -2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 17x_4 - 6;$$
$$x_j = \{0,1\}(j = 1,...,4);$$
$$\xi_i \geq 0(i = 1,....,4)$$

كلا الطريقتين تؤديان إلى نفس الحل الأمثل كما يلي:

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = x_4 = 1 \end{cases}}$$

إن هذه الطريقة فعالة في إيجاد الحدين في حالة وجود متغيرات كثيرة و قيود كثيرة ، فإنها سريعة بالنسبة لطريقة Glover للوصول إلى الحل الأمثل.

ملاحظة:

إن دوال الكفاءة تؤدي إلى نماذج غير خطية ، و بالتالي يجب استعمال طريقة تحويل العبارات غير الخطية إلى عبارات خطية (أنظر في الفصل الثاني بالنسبة لنموذج البرمجة الخطية بالأهداف استنادا على دوال الكفاءة).

2-8 خلاصـــــة :

تطرقنا في هذا الفصل إلى أن دراسة **البرمجة الخطية لهدف واحد** لاتعكس الواقع التي تعيشه المؤسسة، وبالتالي اللجوء إلى دراسة **عدة أهداف** مما يصعب صياغتها رياضيا، ولكنها موضوعية اقتصاديا، بحيث تعكس حقيقية محيط المؤسسة التي تعيشه يوميا، إذ يلجأ المسير في كل حالة إلى تغيير نمودج **البرمجة الخطية بالأهداف** على حسب نوع المشكل المراد دراسته. فتعرفنا على كيفية **صياغة** هذه النماذج المختلفة باستعمال البرمجة الخطية بالأهداف، وأشكالها المختلفة.

الفصـــل الثـــالـــث

توحيد وحدات القياس للأهداف

3-1 مقدمـــة :

إن صياغة النماذج في حالة البرمجة الخطية بالأهداف، التي تطرقنا إليها في الفصل الثاني لازالت غامضة شيئا ما في كون أن تغيير وحدة القياس للأهداف لنفس النموذج تعطينا حلول مختلفة، أي يتأثر الحل الأمثل للنموذج بعد تغيير وحدة القياس.

وبالتالي تلعب وحدة القياس للأهداف دورا كبيرا في إيجاد الحل الأمثل للنموذج، بحيث إذا قمنا بتغيير وحدة القياس للأهداف سنجد حلول مختلفة لنموذج واحد مما ينتج عنه تناقض، وبالتالي سنقترح في هذا الفصل طرقا تؤدي إلى نفس الحل عند تغييرها.

هذا المشكل الذي يدفعنا إلى التحدث على مايسمى **بتوحيد وحدات القياس للأهداف**[1]، كأن الأهداف تقاس بوحدة قياس واحدة. الهدف من هذه العملية هو إيجاد نفس الحل في حالة تغيير وحدة القياس.

(1)- Romero C. Handbook of Critical Issues in Goal Programming., op.cit. p: 34.

3-2- صياغة نموذج البرمجة الخطية بالأهداف العادية:

إن الدالة الاقتصادية لتحقيق عدة أهداف تكتب على الشكل التالي :

$$Min\sum_{i=1}^{k}(\delta_i^+ + \delta_i^-)$$

أما كل هدف من القيود يأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \delta_i^+ - \delta_i^- = g_i$$

حيث g_i : يمثل الهدف

الآن نتكلم عن أشكال الدالة الاقتصادية بالنسبة للانحرافات الموجبة و السالبة ،بمعنى آخر ما هو الانحراف الذي يظهر في الدالة الاقتصادية لكل هدف ،هل هو الموجب(δ_i^+)، او السالب (δ_i^-) أو معا($\delta_i^+ + \delta_i^-$)، إذن هناك ثلاث حالات:

- الحالة الأولى: إذا كان القيد من الشكل ($f_i(x) \le g_i$)،أي أصغر أو يساوي من g_i فإن الانحراف لهذا القيد المتعلق بالدالة الاقتصادية (MinZ) هو الانحراف δ_i^+.
- الحالة الثانية: إذا كان القيد من الشكل($f_i(x) \ge g_i$) أي أكبر أو يساوي من g_i، فإن الانحراف الذي سيظهر في الدالة الاقتصادية(MinZ) هو الانحراف السالب δ_i^-.
- الحالة الثالثة: أما إذا كان القيد من الشكل ($f_i(x) = g_i$) فإن الانحراف لهذا القيد الذي يتعلق بالدالة الاقتصادية هوكل من الانحراف الموجب والسالب($\delta_i^+ + \delta_i^-$).

يمكن تلخيص كل هذا في الجدول التالي[1]:

الجدول 3-1 : الانحرافات المتعلقة بالدالة الاقتصادية

نوع القيد	المعادلة التي يأخذها القيد	الانحراف الذي يظهر في الدالة الاقتصادية (Z)
$f_i(x) \le g_i$	$f_i(x) - \delta_i^+ + \delta_i^- = g_i$	δ_i^+
$f_i(x) \ge g_i$	$f_i(x) - \delta_i^+ + \delta_i^- = g_i$	δ_i^-
$f_i(x) = g_i$	$f_i(x) - \delta_i^+ + \delta_i^- = g_i$	$\delta_i^+ + \delta_i^-$

[1]- Erwin Kalve Gan, «Solving Multi-Objective Models with Gams», GAMS Development Corp, Washington، 2000, p: 3.

مثال: إذا كان لدينا القيود التالية:

Obj 1 : $4x_1 + x_2 - \delta_1^+ + \delta_1^- = 600$

Obj2 : $100x_1 + x_2 - \delta_2^+ + \delta_2^- = 1200$

حيث الهدف الأول يمثل:الربح.

والهدف الثاني يمثل :المواد الأولية المتاحة.

و(x_1,x_2) : تعبر عن الكمية المنتجة.

إن الدالة الاقتصادية يمكن أن تأخذ عدة أشكال وفق **الجدول 3-2**:

Min Z	الانحراف الذي يظهر في الدالة Z	نوع القيد	الحالة
$\delta_1^+ + \delta_2^+$	δ_1^+	$\leq$	1
	δ_2^+	$\leq$	
$\delta_1^- + \delta_2^-$	δ_1^-	$\geq$	2
	δ_2^-	$\geq$	
$\delta_1^+ + \delta_2^-$	δ_1^+	$\leq$	3
	δ_2^-	$\geq$	
$\delta_1^- + \delta_2^+$	δ_1^-	$\geq$	4
	δ_2^+	$\leq$	
$\delta_1^+ + (\delta_2^+ + \delta_2^-)$	δ_1^+	$\leq$	5
	$\delta_2^+ + \delta_2^-$	$=$	
$\delta_1^- + (\delta_2^+ + \delta_2^-)$	δ_1^-	$\geq$	6
	$\delta_2^+ + \delta_2^-$	$=$	
$(\delta_1^+ + \delta_1^-) + (\delta_2^+ + \delta_2^-)$	$\delta_1^+ + \delta_1^-$	$=$	7
	$\delta_2^+ + \delta_2^-$	$=$	

المصدر : من وضع الطالب بتصرف

3-3- صياغة نموذج البرمجة الخطية بالأهداف المرجحة :

أي في الحالة التي تأخذ فيها الدالة الاقتصادية الشكل التالي:

$$MinZ = \sum_{i=1}^{p}(w_i^+\delta_i^+ + w_i^+\delta_i^-)$$

فإذا أخذنا القيود التالية:

على الأكثر (≤) $objectif\,1 : x_1 + x_2 - \delta_1^+ + \delta_1^- = 3$

على الأقل (≥) $objectif\,2 : 2x_1 + x_2 - \delta_2^+ + \delta_2^- = 6$

بحيث نعطي أهمية للقيد الثاني بثلاث مرات بالنسبة للقيد الأول، فإن الدالة الاقتصادية في هذه الحالة تأخذ الشكل التالي[1]: $Minz = 3\delta_1^- + \delta_2^+$

أي نرجح العدد 3 للانحراف المتعلق بالقيد الأول ، والعدد 1 للقيد الثاني في الدالة الاقتصادية.

و إذا أردنا أن نغير المعاملات w_i على شكل نسبة مئوية في الدالة الإقتصادية للانحرافات (MinZ) نستعمل العملية الثلاثية التالية :

لدينا %100 ⟵ (1+3)

س ⟵ 3

س= $\frac{3}{4}$ *%100 = %75 بالنسبة لـــ: δ_1^-.

وبالتالي تبقى %25 بالنسبة لـــ: δ_2^+.

فتصبح الدالة الاقتصادية $(MinZ = 3\delta_1^- + \delta_2^+)$ تكافئ الدالة الاقتصادية التالية:

$(MinZ = 0,75\delta_1^- + 0,25\delta_2^+)$.

- أما بالنسبة لقيد واحد من الشكل (=) أي كل من الانحراف الموجب δ_i^+ و الانحراف السالب يظهران في الدالة الاقتصادية، يمكن أن يأخذ الانحراف الموجب أهمية بمرتين بالنسبة للانحراف السالب، و بالتالي الانحرافين لهذا القيد سيظهران في الدالة الاقتصادية كما يلي:

(1)- Romero C, Suteliffe C, Board J, Cheshire P, « Naïve Weighting in Non Pre-Emptive Goal Programming», viewpoint and reply, Journal of the Operational Research Society , 1985; p:647-649.
- Evans, G. W. op.cit. p: (1270-1272).

$$MinZ = (\delta_i^+ + 2\delta_i^-)$$

فمثلا إذا أخذنا القيد التالي:

$$\begin{cases} 485x_1 + 510x_2 - \delta_1^+ + \delta_1^- = 500 \\ x_1, x_2 = \{0,1\} \end{cases}$$

حيث القيمة 500 : تمثل البعد بالأمتار بين المترل و قاعة الحفلات.

X_1: قاعة الحفلات بحي إمامة (و هي تبعد عن المترل بـــ:485 متر)

X_2 : = = = بروانة (وهي تبعد عن المترل بـــ:510 متر).

و العائلة تفضل اختيار القاعة التي يكون البعد بينها و بين المترل يقارب حوالي 500متر، أي يمكن أن يكون أكبر أو أصغر من هذه المسافة بحيث الأولوية للقاعة التي تبعد عن المترل بأقل من 500متر بمرتين بالنسبة للقاعة التي تبعد عن المترل بأكثر من 500متر.

إذن حسب القيد أعلاه سنختار القاعة x_2 في حالة عدم إعطاء الأولوية، و لكن في هذه الحالة سنختار x_1 بما أنه الفرق بين 510 و500 هو10 ،وبين485 و 500هو15 و العدد 15أصغر من (2*10=20)، وبالتالي ستختار العائلة القاعة x_1 التي تبعد عن المترل بـــ:485م أي أنها بعيدة عن الهدف بـــ:15م رغم أن x_2 تبعد عن المترل بـــ:500م ،أي 10م عن الهدف .

وبالتالي الدالة الاقتصادية تأخذ الشكل التالي :

$$MinZ = 3\delta_1^+ + (\delta_2^+ + 2\delta_2^-)$$

يعني أنه لدينا قيدين (obj1, obj2) بحيث :

- obj1 : من الشكل ≥، أي على الأكثر، بما أنه يتعلق فقط بالانحراف الموجب (δ_1^+).

- وأما Obj2 :من الشكل $(f(x_{ij})=g_i)$ ، بما أنه يتعلق بكلا الانحرافين الموجب (δ_2^+)،و السالب (δ_2^-) .
- و القيد الثاني (obj2) له أولوية بـــ 3مرات من القيد الأول (obj1) (أنظر إلى الدالة الاقتصادية أعلاه).

ملاحظة متعلقة بالقيود[1]:

نعتبر النموذج التالي: (p1)

$$MinZ = \delta_1^+ + \delta_2^-$$

تحت القيود:

$$\begin{cases} obj1: x_1 + 5x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 25 \\ obj2: 4x_1 + x_2 + \delta_2^- - \delta_2^+ = 100 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \end{cases}$$
$$x \geq 0$$
$$\delta^+, \delta^- \geq 0.$$

الحل الأمثل لهذا النموذج هو كما يلي: $(x_1 = 15), (x_2 = 0)$

الآن نعتبر النموذج التالي (p2):

$$MinZ = \delta_1^+ + \delta_2^-$$

تحت القيود:

$$\begin{cases} obj1: x_1 + 5x_2 - \delta_1^+ = 25 \\ obj2: 4x_1 + x_2 + \delta_2^- = 100 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \end{cases}$$
$$x \geq 0$$
$$\delta^+, \delta^- \geq 0.$$

الحل الأمثل هو: $(x_1 = 12.5), (x_2 = 2.5)$

---

(1)- Romero C. « Handbook of Critical Issues in Goal Programming», op.cit. p: 32.

نلاحظ هنا أن النموذج (p1)يختلف عن النموذج (p2) في القيود و ليس في الدالة الاقتصادية، أي بالنسبة للنموذج (p2)، اعتبرنا فقط الانحرافات الظاهرة في الدالة الاقتصادية، بحيث القيد الأول يحتوي فقط على الانحراف (δ_1^+) ولا يحتوي على الانحراف (δ_1^-)، و القيد الثاني يحتوي فقط على (δ_2^-) ولا يحتوي على الانحراف (δ_2^+).

في هذه الحالة إذا أخذنا القيد الأول (obj1) فإنه لا يمكن إيجاد قيمة للانحراف السالب (δ_1^-)، بما أنه لا يظهر في القيد فهو معدوم ، بقي الآن فقط أن يأخذ (δ_1^-) قيمة غير معدومة و ذلك رغم وجود (δ_1^+) في الدالة الاقتصادية[1].

3-4 تأثير وحدة القياس على الحل الأمثل:

إن تغيير وحدة القياس للقيود تؤثر مباشرة على الحل الأمثل، لنفس النموذج، أي إذا غيرنا وحدة القياس لإحدى القيود، فالحل الذي سنحصل عليه يختلف عن الحل السابق المحسوب بوحدة القياس السابقة لنفس النموذج[2]، و لفهم هذا نستعن بالمثال التالي:

لدينا النموذج P_1:

$$MinZ = \delta_1^+ + (\delta_2^+ + \delta_2^-) + \delta_3^- + \delta_4^-$$
$$\begin{cases} obj1: x_1 + x_2 - \delta_1^+ + \delta_1^- = 400 \\ obj2: 2x_1 + x_2 - \delta_2^+ + \delta_2^- = 500 \\ obj3: 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 - \delta_3^+ + \delta_3^- = 240 \\ obj4: x_1 - \delta_4^+ + \delta_4^- = 300 \\ x_j \geq 0 (j = 1,2) \end{cases}$$
$$\delta_i^+ et \delta_i^- \geq 0 (i = 1,2,\ldots,4).$$

الحل لهذا البرنامج(p1) هو كما يلي:

$$\begin{cases} X_1=250 \\ X_2=0 \\ Z=190 \end{cases}$$

(1)- Romero C. « Handbook of Critical Issues in Goal Programming», op.cit. p: 36.

(2)- Aouni, Belaid « le Modèle de Programmation Mathématique avec Buts dans un Environnement Imprécis », op.cit. p : 29.

إن القيمة (Z=190) هي خليط من وحدات القياس (الدينار،عدد الساعات،..)،و بالتالي ليس لها تفسير إقتصادي.

الآن سنغير وحدة القياس لإحدى القيود، مثلا نأخذ القيد 3 (obj 3)، و نعوض وحدة القياس الدينار بوحدة قياس جديدة (السنتيم)، أو الوحدة المعمول بها في فرنسا حاليا الأورو عوض الفرنك الفرنسي، فإن الحل الجديد لنفس النموذج (p1) بعد تغيير وحدة القياس سيختلف عن الحل السابق بحيث:

يصبح القيد 3 كما يلي:

$$40x_1 + 30x_2 + \delta_3^+ + \delta_3^- = 24000$$ [1]

إن الحل لهذا النموذج (p2) الذي يحتوي على هذا القيد 3 هو كما يلي:

$$\begin{cases} X_1=300 \\ X_2=400 \\ Z=800 \end{cases}$$

نلاحظ أن الحل للنموذج (P1) يختلف عن الحل للنموذج(P2) ، إذن المشكل هنا هو مشكل تغيير وحدة القياس، فهي تؤثر بشكل مباشر على الحل الأمثل، فهذا السبب يؤدي إلى الحديث على ما يسمى: (**توحيد وحدة القياس**).

3-5- توحيد وحدة القياس:

يقصد بتوحيد وحدة القياس، إختيار وحدة قياس واحدة في جميع القيود، و الدالة الاقتصادية، أي لا يمكن القول أن القيد الأول محسوب بالدينار ، و القيد الثاني بالساعات،......، فجميع القيود محسوبة بوحدة قياس عادية(standard) .

[1] - Martel J.-M. and Aouni, « Incorporating the Decision-Maker`s Preferences in the Goal Programming Model », op.cit. p: 1128.

3-6- أنواع توحيد وحدة القياس :

3-6-1 التوحيد الإقليدي (La normalisation Euclidienne) :

ينص هذا التوحيد على أن نقسم كل المعاملات التكنولجية a_{ij} للمتغيرات x_{ij} ، و الأهداف g_i على العدد $\sqrt{\sum a_{ij}^2}$(1)، و بالتالي النموذج(p1) يأخذ الشكل التالي(2):

$$MinZ = (\delta_1^+)' + \left[(\delta_2^+)' + (\delta_2^-)'\right] + (\delta_3^-)' + (\delta_4^-)'$$

$$Obj1: \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} - (\delta_1^+)' + (\delta_1^-)' = \frac{400}{\sqrt{1^2+1^2}};$$

$$Obj2: \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} x_2 - (\delta_2^+)' + (\delta_2^-)' = \frac{500}{\sqrt{2^2+1^2}};$$

$$Obj3: \frac{0,4}{\sqrt{(0,4)^2+(0,3)^2}} x_1 + \frac{0,3}{\sqrt{(0,4)^2+(0,3)^2}} x_2 - (\delta_3^+)' + (\delta_3^-)' = \frac{240}{\sqrt{(0,4)^2+(0,3)^2}};$$

$$Obj4: \frac{1}{\sqrt{1^2}} - (\delta_4^+)' + (\delta_4^-)' = \frac{300}{\sqrt{1^2}};$$

$$x_j \geq 0 (j=1,2)$$

$$(\delta_i^+)', (\delta_i^-)' \geq 0 (i=1,....,4)$$

و بالتالي الدالة الاقتصادية (MinZ) تصبح كمايلي بعد عملية تعويض الانحرافات الجديدة بالانحرافات الأولى:

$$MinZ = \frac{\delta_1^+}{\sqrt{1^2+1^2}} + \frac{\delta_2^+}{\sqrt{2^2+1^2}} + \frac{\delta_2^-}{\sqrt{2^2+1^2}} + \frac{\delta_3^-}{\sqrt{(0,4)^2+(0,3)^2}} + \frac{\delta_4^-}{\sqrt{1^2}}$$

---

(1)- Hannan, E. L. « The Application of Goal Programming Techniques to The CPM Problem. Socio- Economic Planning Sciences», 1978, p :267-270 .

(2)- Romero C, Suteliffe C, Board J, Cheshire P. « Naïve Weighting in Non Pre-Emptive Goal Programming», viewpoint and reply. Journal of the operational Research Society 1985; P: 647-649.

- Romero C. « Handbook of Critical Issues in Goal Programming», op.cit. p : 36.

إن الحل للنموذج p1 هو كما يلي:

$$\begin{cases} x_1 = 300 \\ x_2 = 54.59 \\ Z = 274.60 \end{cases}$$

3-6-2- التوحيد المئوي[1] (La Normalisation par pourcentage):

مبدأ هذا التوحيد ينص على أن نقسم المعاملات التكنولوجية a_{ij} على الهدف g_i ، و نضرب في 100، أي ($g_i = 100$)، وبالتالي الانحرافات الجديدة يمكن حسابها على أساس الانحرافات الأولى[2] كمايلي :

$$\begin{cases} \delta_i'^{+} = \dfrac{\delta_i^{+}}{g_i} \times 100 \\ \delta_i'^{-} = \dfrac{\delta_i^{-}}{g_i} \times 100 \end{cases}$$

إذن(p1) بعد تحويله، أي بعد قسمة وحدات القياس للأهداف على الهدف وضربه في 100 يصبح كمايلي :

(1) - Romero C. « Handbook of Critical Issues in Goal Programming», op.cit. p : 35.

(2) - Evans, G. W., «An Overview of Techniques for Solving Multiobjective Mathematical Programs », Managmnt Science, 1984, p: (1270-1273).

$$MinZ = \delta_1^+ + (\delta_2^+ + \delta_2^-) + \delta_3^+ + \delta_4^+$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \delta_1^+ + \delta_1^- = 500 \\ 2x_1 + x_2 - \delta_2^+ + \delta_2^- = 400 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 - \delta_3^+ + \delta_3^- = 240 \\ x_1 - \delta_4^+ + \delta_4^- = 300 \end{cases} \qquad (\text{P1})$$

$$MinZ = \frac{\delta_1^+}{500} + \left(\frac{\delta_2^+ + \delta_2^-}{400}\right) + \frac{\delta_3^+}{240} + \frac{\delta_4^+}{300}$$

$$\begin{cases} \frac{100}{500}x_1 + \frac{100}{500} - \delta_1^+ + \delta_1^- = 100 \qquad (1) \\ \frac{200}{400}x_1 + \frac{100}{400}x_2 - \delta_2^+ + \delta_2^- = 100 \\ \frac{40}{240}x_1 + \frac{30}{240}x_2 - \delta_3^+ + \delta_3^- = 100 \\ \frac{100}{300}x_1 - \delta_4^+ + \delta_4^- = 100 \end{cases} \qquad (\text{p2})$$

$$x \geq 0, \delta_i^+, \delta_i^- \geq 0$$

إن كتابة هذا النموذج(p2) على هذا الشكل لا يقبله Lindo لأنه يقبل العبارات الخطية فقط لكل من القيود و الدالة الاقتصادية، و بالتالي نكتبه كما يلي:

---

(1) - Romero C. Multi-Objective and Goal Programming Approaches as a Distance Function Model. Journal of the Operational Research Society 1985; P: 249-251.

$$MinZ = 0{,}002\delta_1^+ + 0{,}0025\delta_2^+ + 0{,}0025\delta_2^- + 0{,}0025\delta_2^- + 0{,}0041\delta_3^+ + 0{,}0033\delta_4^+$$

$$MinZ = 0{,}2\delta_1^+ + 0{,}25\delta_2^+ + 0{,}25\delta_2^- + 0{,}41\delta_3^+ + 0{,}33\delta_4^+$$

$st:$

$$0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 - \delta_1^+ + \delta_1^- = 100 \_\_\_\_\_ (1)$$

$$0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 - \delta_2^+ + \delta_2^- = 100 \_\_\_\_\_\_\_\_ (2)$$

$$0{,}16x_1 + 0{,}125x_2 - \delta_3^+ + \delta_3^- = 100 \_\_\_\_\_\_\_\_ (3)$$

$$0{,}33x_1 - \delta_4^+ + \delta_4^- = 100 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (4)$$

الحل لهذا النموذج هو كما يلي:

$$\begin{cases} x_1 = 200 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

الآن لو نغير وحدة القياس لإحدى القيود و نقوم بعملية التحويل سنجد نفس النموذج (p2)، الذي يقودنا إلى نفس الحل $\begin{cases} x_1 = 200 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

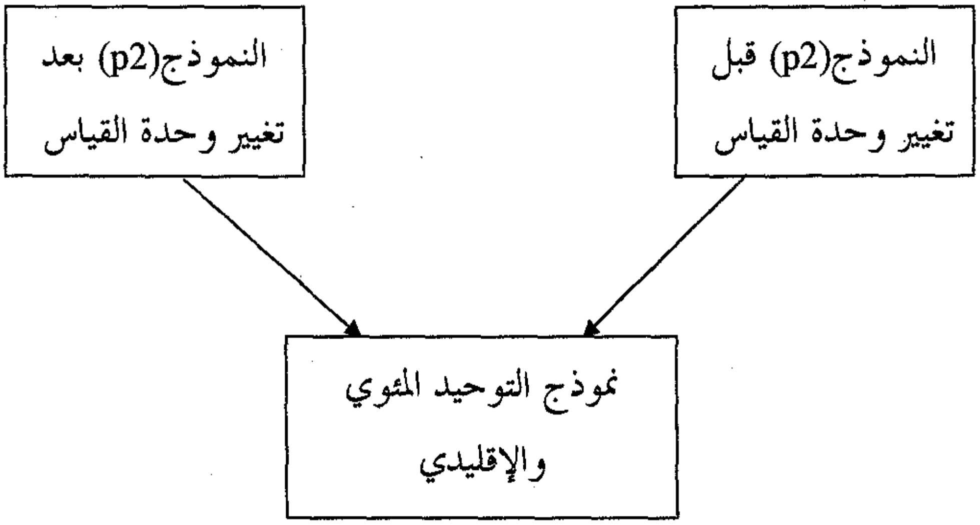
مثلا لو نأخذ القيد رقم(3) و نختار وحدة القياس **السنتيم** عوض **الدينار**،إذن القيد رقم (3) يصبح: $40x_1 + 30x_2 - \delta_3^+ + \delta_3^- = 24000$

و بعد استعمال التوحيد المئوي تصبح (3) كما يلي:

$$0{,}16x_1 + 0{,}125x_2 - \delta_3^+ + \delta_3^- = 100$$

أي نفس القيد الذي ظهر في النموذج(p2)، مع نفس الدالة الاقتصادية(MinZ).

إذن يمكن تلخيص كل هذا في الشكل التالي:



نلاحظ أن كلا النموذجين (p2) قبل عملية التغيير ، و(p2) بعد عملية التغيير يؤديان إلى نفس النموذج الموحد. هذا هو مبدأ التوحيد الإقليدي والمئوي.

3 – 7 - التوحيد في حالة دالة هدف واحدة:

الآن سنرى هل تغيير وحدة القياس بالنسبة لدالة هدف واحدة ستؤثر على الحل الأمثل أم لا، أي عند تغيير وحدة القياس للقيود هل تؤدي بنا إلى حل مختلف عن الحل الأمثل السابق المحسوب بوحدة القياس الأولى.

نفرض أنه لدينا النمودج (M1) التالي:

$$Min, Max(Z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

تحت القيود: :(M1)

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_j \leq b_i \_\_\_\_\_\_(1)$$

$$x_j \geq 0.$$

الآن نفرض أن وحدة القياس a_{ij} للقيود تغيرت بحيث رُجّحت بوحدة قياس a'_{ij}،

أي:
$$\begin{cases} a'_{ij} = \alpha_i a_{ij} \\ b'_i = \alpha_i b_i \end{cases}$$

نتحصل على النموذج (M2) التالي:

$$Min, Max(Z') = \sum_{j=1}^{n} c'_j\ x_j$$

(M2) تحت القيود:

$$\sum_{i=1}^{k} a'_{ij}\ x_j \le b'_i$$

و بعد عملية التعويض نحصل على:

$$Min, Max(Z) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_i c_j x_j$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{ij} x_j \le \alpha_i b_i \_\_\_\_(2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \alpha_i \left(\sum a_{ij} x_j \right) \le \alpha_i b_i$$

$$\Leftrightarrow \sum a_{ij} x_j \le b_i$$

أي أهداف النمودج (M1) تكافئ أهداف النمودج (M2) ،أي تغيير وحدة القياس لم تؤثر على القيود. أما بالنسبة للدالة الاقتصادية، فليست لها علاقة مع تغيير وحدة القياس فهي دائما تعبر عن تعظيم الأرباح أو تقليص التكاليف بوحدة قياس واحدة، سواء كانت دينار أو سنتيم، فإنها لا تؤثر على الحل الأمثل، الذي يبقى ثابتا حتى و لو تغيرت وحدة القياس لجميع القيود، وبالتالي فهي موحدة دائما.

مثال : لدينا النموذج التالي:

$$MinZ = 100x_1 + 250x_2$$

تحت القيود:

$$\left\{\begin{array}{l} 9x_1 + 2x_2 \geq 18;\_\_\_\_\_\_(1) \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12;\_\_\_\_\_\_(2) \\ 6x_1 + 12x_2 \geq 36;\_\_\_\_\_\_(3) \\ x_1 \leq 7;\_\_\_\_\_\_(4) \\ x_2 \leq 6;\_\_\_\_\_\_(5) \end{array}\right. \qquad (M1)$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

عند استعمال Lindo نجد الحل الأمثل التالي:

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

الآن سنقوم بتغيير وحدة القياس للقيد الأول، و الثاني بحيث القيد الأول نرجحه بالعدد 100 أي نأخذ السنتيم عوض الدنانير، أما القيد الثاني نرجحه بالعدد 60 ، أي نأخذ وحدة القياس لهذا القيد بالدقائق عوض الساعات، و بالتالي سنحصل على النموذج (M2) التالي:

$$Min\,100x_1 + 250x_2$$

تحت القيود:

$$\begin{cases} 900x_1 + 200x_2 \geq 18000 \\ 180x_1 + 120x_2 \geq 720 \\ 6x_1 + 12x_2 \geq 36 \\ x_1 \leq 7 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

الحل الأمثل لهذا النموذج (M2) هو: $\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

وجدنا نفس الحل السابق للنمودج (M1) ، وبالتالي في حالة دالة واحدة، فإن تغيير وحدة القياس لا تؤثر على الدالة(Z)، أي لا يتأثر الحل الأمثل، فيبقى دائما ثابتا.

8-3 خلاصـــة:

عالجنا في هذا الفصل البرمجة الخطية بالأهداف العادية والمرجحة والتي لا تؤدي إلى نفس الحل الأمثل في حالة تغيير وحدة القياس للأهداف، أي نصل إلى حلول مختلفة رغم وجود نفس الأهداف للنموذج، مما يطرح سؤالا : ماهو النموذج الأحسن الذي نختاره في حالة تغيير وحدة القياس للأهداف، والذي يقودنا إلى الحل الأمثل؟

نظرا لهذا التناقض، تطرقنا إلى ذكر بعض الطرق المعمول بها في البرمجة الخطية بالأهداف، المتعلقة بتغيير الأهداف الأصلية للنموذج، للوصول إلى نفس الحل الأمثل مهما تغيرت وحدة القياس للأهداف، التي تسمى **بتوحيد وحدات القياس للأهداف**.

كما يجب الإشارة إلى أن وحدات القياس للقيود في البرمجة الخطية لدالة هدف واحدة هي موحدة، أي تغيير وحدة القياس للقيود لا تؤثر على الحل الأمثل الذي يبقى دائما ثابتا.

الفصـــــل الرابـــــع

إعادة صياغة نموذج البرمجة الخطية بالأهداف

4-1- مقدمـــــة :

إن الطريقتين اللتين سبق ذكرهما في الفصل الثالث(أي طريقتي التوحيد الإقليدي، و المئوي) لا تعطيان تفسيرا رياضيا و اقتصاديا للنموذج، فمن الناحية الرياضية نجد أن النموذج بعد عملية التوحيد غير موضوعي و منطقي، لأن كل الأهداف أصبحت تحتوي على وحدة قياس أحادية (standard) ، أي وحدة القياس المستعملة في الهدف الأول، هي نفسها الموجودة في جميع الأهداف الأخرى، و هذا ما يتناقض مع المعطيات الأصلية للنموذج، يستحيل أن تكون الأهداف بدون وحدة قياس، أو مقاسة بوحدة قياس واحدة، فمنها من يعبر عن العملة وأخرى عن الوزن أو الوقت،...

إضافة إلى ذلك فالنموذج الأصلي يتغير إلى نموذج آخر، كأننا نقوم بحل نموذج مختلف عن الأول.

أما من الناحية الاقتصادية، فإن الدالة الاقتصادية لا يمكن أن تفسر اقتصاديا لأنه لم تؤخذ بعين الاعتبار وحدات القياس في الأهداف، و لهذا سنقترح في هذا الفصل صياغة جديدة لنموذج البرمجة الخطية بالأهداف، مع ضبط وحدات القياس.

4-2- إعادة صياغة نموذج البرمجة الخطية بالأهداف العادية :

إن هذا النموذج معرف كمايلي :

(M1):

$$MinZ = (n_1 + p_1) + ... + (n_k + p_k).$$

تحت القيود :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - n_1 + p_1 = g_1; \_\_\_(1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - n_2 + p_2 = g_2; \_\_\_(2)$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n - n_k + p_k = g_k; \_\_\_(k)$$
$$x_j \geq 0 (j = 1,..n);$$
$$n_i, p_i \geq 0 (i = 1,..k).$$

نغير الآن وحدات القياس لأهداف النموذج (M1)، أي نرجح الأهداف بوحدات قياس مختلفة عن وحدات القياس الأولى لنفس النموذج، وبالتالي نحصل على:

$$MinZ' = (n_1' + p_1') + ... + (n_k' + p_k').$$

تحت القيود:

$$a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1n}x_n - n'_1 + p'_1 = g'_1;$$
$$a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n - n'_2 + p'_2 = g'_2;$$

(M2)

$$a'_{k1}x_1 + a'_{k2}x_2 + ... + a'_{kn}x_n - n'_k + p'_k = g'_k;$$
$$x_j \geq 0 (j = 1,..n);$$
$$n'_i, p'_i \geq 0 (i = 1,..k).$$

$$\text{بحيث}\quad \begin{cases} a'_{ij} = \alpha_i a_{ij} \\ n'_i = \alpha_i n_i \\ p'_i = \alpha_i p_i \\ g'_i = \alpha_i g_i \end{cases}$$

و بعد تعويض كل من n'_i، p'_i، g'_i و a'_{ij} بقيمها نحصل على النموذج التالي:

$$MinZ' = (\alpha_1 n_1 + \alpha_1 p_1) + (\alpha_2 n_2 + \alpha_2 p_2) + ... + (\alpha_k n_k + \alpha_k p_k).$$

تحت القيود :

$$\alpha_1 a_{11} x_1 + \alpha_1 a_{12} x_2 + ... + \alpha_1 a_{1n} x_n - \alpha_1 n_1 + \alpha_1 p_1 = \alpha_1 g_1; \_\_\_\_(1)$$

$$\alpha_2 a_{21} x_1 + \alpha_2 a_{22} x_2 + ... + \alpha_2 a_{2n} x_n - \alpha_2 n_2 + \alpha_2 p_2 = \alpha_2 g_2; \_\_\_(2) \qquad (M3)$$

$$\alpha_k a_{k1} x_1 + \alpha_k a_{k2} x_k + ... + \alpha_k a_{kn} x_n - \alpha_k n_k + \alpha_k p_k = \alpha_k g_k; \_\_\_\_\_(k)$$

$$x_j \geq 0 (j = 1,...n);$$

$$n_i, p_i \geq 0 (i = 1,..k).$$

و بعد تطبيق خواص المصفوفات المتعلقة بجميع الأهداف، و الدالة الاقتصادية نحصل على:

$$MinZ'=\alpha_1(n_1+p_1)+\alpha_2(n_2+p_2)+......+\alpha_k(n_k+p_k).$$

$$\alpha_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+.......+a_{1n}x_n-n_1+p_1)=\alpha_1 g_1;$$

$$\alpha_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+.......+a_{2n}x_n-n_2+p_2)=\alpha_2 g_2;$$

$$\alpha_k(a_{k1}x_1+a_{k2}x_k+..........+a_{kn}x_n-n_k+p_k)=\alpha_k g_k;$$

$$x_j\geq 0(j=1,..n);$$

$$n_i,p_i\geq 0(i=1,...k).$$

نلاحظ أن أهداف النموذج (M3) تكافئ دائما أهداف النموذج (M1). أما الدالة الاقتصادية للنموذج (M3) فتختلف عن الدالة الاقتصادية للنموذج (M1) أي $Z'\neq Z$. و بالتالي فإن حل النموذج (M1) سيختلف عن حل النموذج (M3)، إلا في الحالة التي تكون فيها α_i متساوية في جميع الأهداف أي $(\alpha_1=\alpha_2=.......=\alpha_k)$.

هناك تناقض ما دام هناك نفس النموذج. إن الذي غير الحل هو فقط تغيير وحدة القياس. إذن الخلل يكمن في صياغة الدالة الاقتصادية و ليس في الأهداف، أي تغيير وحدة القياس تؤثر عل الدالة الاقتصادية، وليس على أهداف النموذج (القيود).

و لهذا سنقترح صياغة جديدة للدالة الإقتصادية Z بحيث تؤدي إلى نفس الحل كيفما كانت وحدة القياس للأهداف، كما يمكن تفسيرها إقتصاديا.

نعتقد أن التناقض الذي استنتجناه سابقا هو ناجم عن كون الإنحرافات المستعملة في الدالة هي **مطلقة** واستعملت كذلك في الدراسات السابقة[1]: (Charnes et Cooper).

(1) - Charnes A, Cooper WW. «Goal Programming and Multiple Objective Optimizations», European Journal of Operational Research, 1977; p: 42-46.

حسب رأينا من الأفضل استعمال ما يسمى دالة **الانحرافات النسبية للأهداف** بدلا من دالة **الانحرافات المطلقة**.

على هذا الأساس نقترح الصياغة التالية لنموذج البرمجة الخطية بالأهداف:

$$\boxed{MinZ = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n_i + p_i}{g_i}\right)} \qquad (M4)$$

أي:

$$MinZ = \left(\frac{n_1 + p_1}{g_1}\right) + \left(\frac{n_2 + p_2}{g_2}\right) + \dots\dots + \left(\frac{n_k + p_k}{g_k}\right)$$

نحسب مجموع الانحرافات النسبية للأهداف عوض مجموع الانحرافات المطلقة السابقة الذكر.

عند استعمال هذه الصياغة الجديدة ، فإن تغيير وحدة القياس للأهداف، تؤدي دائما إلى نفس الحل، بالإضافة إلى إمكان تفسيرها اقتصاديا.

لنتحقق من ذلك:

نفرض أنه لدينا النموذج (M4) كمايلي:

$$MinZ = \left(\frac{n_1 + p_1}{g_1}\right) + \left(\frac{n_2 + p_2}{g_2}\right) + \dots\dots + \left(\frac{n_k + p_k}{g_k}\right).$$

تحت القيود:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n - n_1 + p_1 = g_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n - n_2 + p_2 = g_2;$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{kn}x_n - n_k + p_k = g_k;$$

$$x_j \geq 0 (j = 1, \dots n);$$

$$n_i, p_i \geq 0 (i = 1, \dots k).$$

الآن نرجح كل هدف بوحدة قياس أخرى، فنحصل على النموذج التالي:

$$MinZ' = \left(\frac{n_1' + p_1'}{g'_1}\right) + \dots\dots + \left(\frac{n_k' + p_k'}{g'_k}\right). \qquad (M5)$$

تحت القيود:

$$a'_{11}\, x_1 + a'_{12}\, x_2 + \dots\dots + a'_{1n}\, x_n - n'_1 + p'_1 = g'_1;$$

$$a'_{21}\, x_1 + a'_{22}\, x_2 + \dots\dots + a'_{2n}\, x_n - n'_2 + p'_2 = g'_2;$$

$$a'_{k1}\, x_1 + a'_{k2}\, x_2 + \dots\dots\dots + a'_{kn}\, x_n - n'_k + p'_k = g'_k;.$$

بحيث:

$$\begin{cases} n'_i = \alpha_i n_i \\ p'_i = \alpha_i p_i \\ g'_i = \alpha_i g_i \\ a`_{ij} = \alpha_i a_{ij} \end{cases}$$

سبق و أن برهنا من قبل أن وحدة القياس لا تؤثر على الأهداف أي أهداف النموذج (M4) تكافئ أهداف النموذج (M5) ، بعد تغيير وحدة القياس لها.

الآن سنرى هل الدالة الاقتصادية Z للنموذج (M4) تتغير أم لا، عند تغيير وحدة القياس للأهداف.

بعد تعويض n'_i، p'_i ، g'_i، و$a`_{ij}$ بقيمها في الدالة $Z`$، نحصل على:

$$MinZ' = \left(\frac{\alpha_1 n_1 + \alpha_1 p_1}{\alpha_1 g_1}\right) + \left(\frac{\alpha_2 n_2 + \alpha_2 p_2}{\alpha_2 g_2}\right) + \ldots + \left(\frac{\alpha_k n_k + \alpha_k p_k}{\alpha_k g_k}\right).$$

$$MinZ' = \frac{\alpha_1 (n_1 + p_1)}{\alpha_1 g_1} + \frac{\alpha_2 (n_2 + p_2)}{\alpha_2 g_2} + \ldots + \frac{\alpha_k (n_k + p_k)}{\alpha_k g_k}$$

$$MinZ' = \frac{n_1 + p_1}{g_1} + \frac{n_2 + p_2}{g_2} + \ldots + \frac{n_k + p_k}{g_k}$$

إذن تأكدنا من أن: $\boxed{MinZ' = MinZ}$

و بالتالي نستنتج أن الدالة الاقتصادية التي تأخذها **Z** يجب أن تكون على الشكل التالي:

$$MinZ = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n_i + p_i}{g_i}\right)$$

أي

$$MinZ = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\delta_i^+}{g_i} + \frac{\delta_i^-}{g_i}\right)$$

تعبر عن مجموع الانحرافات النسبية ، و ليس الانحرافات المطلقة بدليل البرهان السابق، و زيادة على ذلك فإن التفسير الاقتصادي لدالة الانحرافات المطلقة $\left[MinZ = \sum (n_i + p_i)\right]$ ليس له معنى لأنها خليط من وحدات القياس (الدينار، كلغ، ساعة،...)، بعكس دالة الانحرافات النسبية $\left[MinZ = \sum\left(\frac{n_i + p_i}{g_i}\right)\right]$، فلها تفسير اقتصادي واضح، سنوضحه في مثال سنأخذه فيما بعد.

3-4- إعادة صياغة نموذج البرمجة الخطية بالأهداف المرجحة:

لدينا النموذج (M1) المعرف كمايلي:

$$MinZ = \sum_{i=1}^{k}(w_i n_i + w_i p_i)$$

تحت القيود:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j) - n_i + p_i = g_i$$

$$x_j \geq 0, n_i, p_i \geq 0$$

الآن نرجح الأهداف بوحدات قياس أخرى، حيث نرفق لكل هدف بوحدة قياس a'_{ij}

أي:

$$\begin{cases} a'_{ij} = \alpha_i a_{ij} \\ g'_i = \alpha_i g_i \\ n'_i = \alpha_i n_i \\ p'_i = \alpha_i p_i \end{cases}$$

إذن النموذج (M2) المرجح بوحدة القياس الجديدة a'_{ij} يأخذ الشكل التالي:

$$MinZ' = (\alpha_1 w_1 n_1 + \alpha_1 w_1 p_1) + (\alpha_2 w_2 n_2 + \alpha_2 w_2 p_2) + \ldots + (\alpha_k w_k n_k + \alpha_k w_k p_k)$$

تحت القيود:

(M2)

$$\sum_{j=1}^{k} a'_{ij}\, x_j - n'_i + p'_i = g'_i;$$

$$x_j \geq 0, n'_i, p'_i \geq 0.$$

فبعد التعويض نحصل على:

$$MinZ' = \alpha_1 (w_1 n_1 + w_1 p_1) + \alpha_2 (w_2 n_2 + w_2 p_2) + \ldots + \alpha_k (w_k n_k + w_k p_k)$$

$S.à:$

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_i (a_{ij} x_j - n_i + p_i) = \alpha_i g_i; \_\_\_\_\_\_ (2)$$

الأهداف (2) تكافئ $\alpha_i \sum_{j=1}^{k} (a_{ij} x_j - n_i + p_i) = \alpha_i g_i$

فنحصل على النموذج (M2) كما يلي:

$$MinZ' = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (w_i n_i + w_i p_i)$$

تحت القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - n_i + p_i = g_i$$

$$x_j \geq 0, (n_i, p_i) \geq 0$$

كما نلاحظ أعلاه أن الأهداف تبقى كما هي، أي تغيير وحدة القياس لا تؤثر على الأهداف، و لكن الدالة الاقتصادية هي التي تتأثر بتغيير وحدة القياس بحيث الدالة(Z) أصبحت مرجحة بالعدد α_i،و بالتالي لا نحصل على نفس الحل للدالة Z' أي $(MinZ \neq MinZ')$ في ظل نفس الأهداف.

حتى في حالة **البرمجة الخطية بالأهداف المرجحة**، وجدنا أن الحل مختلف للنموذجين (M1) و (M2)، و بالتالي الدالةZ في هذه الحالة غير منطقية لكون أن شكلها يعبر عن **الإنحرافات المطلقة** كما أشرنا سابقا، و إضافة إلى ذلك ليس لها تفسير اقتصادي، لإنها تحتوي على خليط من وحدات القياس.

الآن نعتبر الدالة(Z) على الشكل التالي:

$$(M3) \qquad MinZ = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{w_i n_i + w_i p_i}{g_i} \right)$$

سنرى الآن هل تغيير وحدة القياس ستؤثر على الدالة Z أم لا.

قد علمنا من قبل أن الأهداف لا تتأثر بتغيير وحدة القياس، بقي الآن أن نتحقق هل تتغير الدالة Z أم لا .

لنغير وحدة القياس للأهداف، سنحصل على الدالة Z كما يلي:

$$MinZ=\frac{w_1\alpha_1 n_1+w_1\alpha_1 p_1}{\alpha_1 g_1}+\frac{w_2\alpha_2 n_2+w_2\alpha_2 p_2}{\alpha_2 g_2}+\ldots+\frac{w_k\alpha_k n_k+w_k\alpha_k p_k}{\alpha_k g_k}$$

بإخراج العدد α_i في المقام و البسط نحصل على:

$$MinZ'=\alpha_1\left[\frac{w_1 n_1+w_1 p_1}{\alpha_1 g_1}\right]+\alpha_2\left[\frac{w_2 n_2+w_2 p_2}{\alpha_2 g_2}\right]+\ldots+\alpha_k\left[\frac{w_k n_k+w_k p_k}{\alpha_k g_k}\right]$$

$$MinZ'=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{w_i n_i+w_i p_i}{g_i}\right]$$

إذن توصلنا إلى أن: $\boxed{MinZ=MinZ'}$

على ضوء ما سبق تم التأكد من أن الدالة الاقتصادية (Z) في البرمجة الخطية بالأهداف يجب أن تعبر عن مجموع الانحرافات النسبية، و ليست مجموع الانحرافات المطلقة في كلا الحالتين (البرمجة الخطية بالأهداف العادية، و البرمجة الخطية بالأهداف المرجحة)، أي أنه يجب على الدالة الاقتصادية أن تأخذ شكل النموذج (M3).

كما يجب الإشارة الى أن دالة الانحرافات المطلقة: $(MinZ=w_i n_i+w_i p_i)$ ، عندما تأخذ فيها جميع الأهداف نفس وحدة القياس، ففي هذه الحالة فإن تغيير وحدة القياس للأهداف لا تأثير له على الدالة Z أي أنه يؤدي إلى نفس الدالة و بالتالي إلى نفس الحل، و زيادة على

ذلك فإن التفسير الاقتصادي لهذه الدالة له معنى مادامت الدالة Z لا تحتوي على وحدة القياس.

التفسير الإقتصادي :

هذه الدالة لها معنى إقتصادي مادامت تعبر عن نسبة مئوية : بحيث لا تحتوي على وحدة قياس .

بما أنه لدينا في هذا المثال 4 أهداف : فإن قيمة الدالة الإقتصادية تكون محصورة بين العدد 0 ، والعدد 4 .

إذا كانت قيمة الدالة Z معدومة، هذا يعني أن الأهداف تحققت بـ 100%
وإذا كانت قيمة الدالة = 4 ، هذا يعني أن الأهذاف لم تتحقق.

في هذا المثال وجدناقيمة الدالة = 0.692 ، هذا يعني أن الأهذاف تحققت بـ :(4-0.692) ، بالنسبة للأهداف الأربعة، أي تحققت بمعدل :

$$\boxed{\frac{4-0.692}{4} = 3.308/4 \times 100 = 82.7\%}$$

مثال 4-3:

نفرض أنه لدينا النموذج (M1) كمايلي:

$$MinZ = n_1 + n_2 + p_2 + p_3 + p_4$$

تحت القيود:

$$(M1) \quad \begin{aligned} &Obj1: x_1 + x_2 - n_1 + p_1 = 400 \\ &Obj2: 2x_1 + x_2 - n_2 + p_2 = 500 \\ &Obj3: 0,4x_1 + 0,3x_2 - n_3 + p_3 = 240 \\ &Obj4: x_1 - n_4 + p_4 = 300 \\ &x_j \geq 0 (j = 1,2) \\ &n_i, p_i \geq 0 (i = 1,...4) \end{aligned}$$

كنا رأينا في الفصل الثالث أن هذا المثال أدى إلى الحل التالي:
$$\begin{cases} x_1 = 250 \\ x_2 = 0 \\ Z = 190 \end{cases}$$

و أثناء تغيير وحدة القياس للهدف الثالث (Obj 3)، نتحصل على النموذج(M2)

بحيث (obj3) $40x_1 + 30x_2 - n'_3 + p'_3 = 24000 \Leftrightarrow$

وجدنا الحل للنموذج(M2):
$$\begin{cases} x_1 = 300 \\ x_2 = 400 \\ Z = 800 \end{cases}$$

نلاحظ أن الحل قد اختلف عن الأول، لأنه كما قلنا أن الخلل يكمن في شكل الدالة(Z) التي تعبر عن مجموع **الانحرافات المطلقة**.

الآن نستعمل الدالة (Z) على أساس مجموع **الانحرافات النسبية** و ليست مجموع **الانحرافات المطلقة**، أي النموذج $(M3)$ يأخذ الشكل التالي:

$$MinZ = \frac{n_1}{400} + \frac{n_2}{500} + \frac{p_2}{500} + \frac{p_3}{240} + \frac{p_4}{300}$$

تحت القيود:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - n_1 + p_1 = 400 \\ 2x_1 + x_2 - n_2 + p_2 = 500 \\ 0,40x_1 + 0,30x_2 - n_3 + p_3 = 240 \\ x_1 - n_4 + p_4 = 300 \end{cases}$$

$$x_j, n_i, p_i \geq 0$$

إن الحل باستعمال Lindo هو:

$$\begin{cases} x_1 = 300 \\ x_2 = 0 \\ Z = 0.692 \end{cases}$$

الآن سنغير وحدة القياس للهدف الثالث $(obj\ 3)$ ، بحيث نأخذ السنتيم عوض الدينار إذن القيد الثالث يصبح كما يلي: $40x_1 + 30x_2 - n'_3 + p'_3 = 24000$

أما الدالة الاقتصادية في هذه الحالة تأخذ الشكل التالي:

$$MinZ = \frac{n_1}{400} + \frac{n_2}{500} + \frac{p_2}{500} + \frac{p'_3}{24000} + \frac{p_4}{300} \qquad (M4)$$

إن الحل لهذا النموذج $(M4)$ هو نفس الحل للنموذج $(M3)$ أي:

$$\begin{cases} x_1 = 300 \\ x_2 = 0 \\ Z = 0.692 \end{cases}$$

وحتى قيمة Z فهي ثابتة في جميع الحالات، كما أن لها تفسير اقتصادي.

نستنتج مما سبق أنه في البرمجة الخطية بالأهداف، يجب أن نستعمل دالة الانحرافات **النسبية** لسببين :

أولا: لأنها تعطينا دائما نفس الحل كلما غيرنا وحدة القياس.

وثانيا: لأن التفسير الاقتصادي لدالة الانحرافات له معنى.

بعكس دالة الانحرافات **المطلقة** لا تعطينا نفس الحل عندما نغير وحدة القياس وأيضا ليس لها معنى اقتصادي لأنها خليط من وحدات القياس (دينار، ساعات، كلغ،...).

4-4- دراسة حالة (الانحدار) :

يمكن تطبيق البرمجة الخطية بالأهداف على نظرية تقدير الانحدار.

4-4-1طريقة المربعات الصغرى:

ليكن النموذج الخطي للانحدار البسيط التالي : $Y = aX + bU + \varepsilon$ ، حيث:

y: المتغير التابع معلوم.

X : المتغير المستقل معلوم.

U: الشعاع الأحادي.

ε : المتغير الخطأ، مجهول، يمثل الفرق بين القيمة المشاهدة والقيمة التقديرية (النظرية).

أما الثابتان (a,b) ، يمثلان قيمتين مجهولتين.

ليكن ($\hat{a},\hat{b}$) قيمتا (a,b) ، التي تحقق مجموع مربع الانحرافات للمتغير ε أقل مايمكن.

إذن النموذج المقدر هو كمايلي: $\hat{Y} = \hat{a}X + \hat{b}U$

الثابتان $\hat{a},\hat{b}$ ، نتحصل عليهما بطريقة تسمى **المربعات الصغرى.**

إن هذه الطريقة تنص على أن نحسب مجموع مربع المسافة بين القيمة المشاهدة و القيمة المقدرة (النظرية) للمتغير التابع(y) ، والذي يجب أن يحقق القيمة الأدنى.

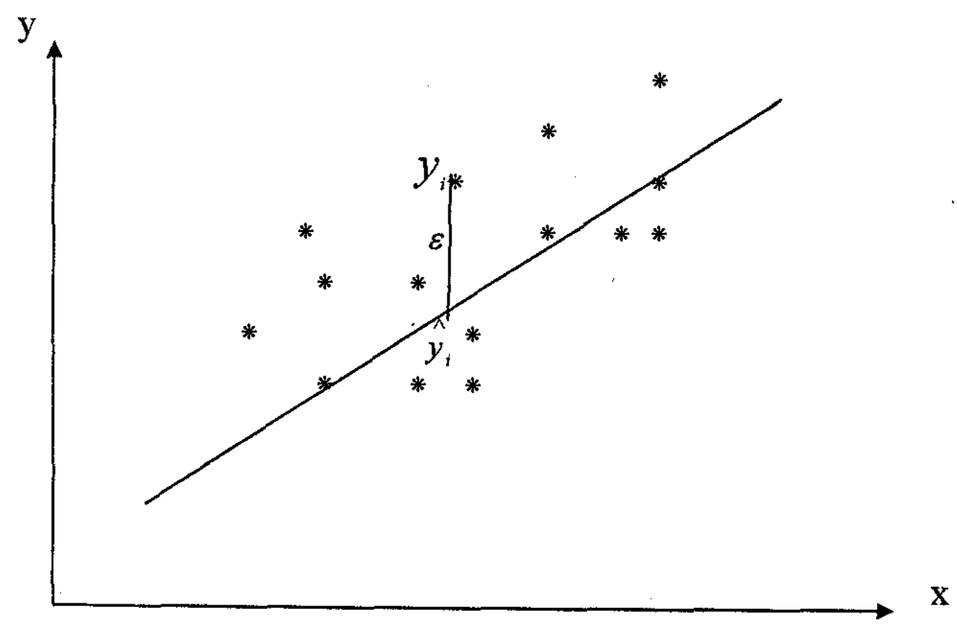
(1) - Christian Labrousse, « Statistique, Exercices Corrigés avec Rappels de Cours», Tome 3, Sciences Economiques, 3e année, Dunod, 1977, p : 122.

إن طريقة المربعات الصغرى [1] للانحدار المتعدد تأخذ الشكل التالي(M1) :

$$MinZ = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad \text{(M1)}$$

حيث:
$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^{n}\hat{\beta}_j x_{ij}$$

و $\left[\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_j (j=1...n)\right]$ تمثل الثوابت التي يجب تقديرها، و بالتالي فإن الحل لهذا النموذج يؤدي إلى حل جمل من المعادلات(القيود) بحيث تحقق أصغر مربع انحرافات القيم المشاهدة بالنسبة للقيم المقدرة.



2-4-4 طريقة القيم النسبية الصغرى:

إن مبدأ هذه الطريقة ينص على أن نحسب بالقيمة المطلقة، الفرق بين القيمة المشاهدة و القيمة المقدرة للمتغير التابع (y).

أي هذا الفرق يمكن التعبير عنه رياضيا بالدالة التالية:

$$MinZ = \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \hat{y} \right|$$
$$MinZ = \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - (B_0 + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} B_j) \right| \quad \text{(M2)}$$

إن البرنامج (M2) يمكن صياغته باستعمال البرمجة الخطية بالأهداف، بحيث يأخذ الشكل التالي:

$$MinZ = \sum_{i=1}^{n} (n_i + p_i)$$

تحت القيود: $S.à$:

$$B_0 + B_1 x_{11} + ... + B_m x_{1m} + n_1 - p_1 = y_1;$$
$$B_0 + B_1 x_{21} + ... + B_m x_{2m} + n_2 - p_2 = y_2; \quad \text{(M3)}$$

$$B_0 + B_1 x_{n1} + ... + B_m x_{nm} + n_n - p_n = y_n;$$
$$n_i, p_i \geq 0 (i = 1,...n), (j = 1,...m).$$

كما ورد عن (Aouni, B., O. kettani and J.-M. Martel) بأن هذه الطريقة لها امتياز بالنسبة لطريقة المربعات الصغرى، في تعيين الثوابت B_j، غير أننا نرى مشكلا آخرا يكمن في أثر تغير وحدة القياس على B_j بحيث إذا قمنا بتغيير وحدة القياس للقيود أي للقيم x_{ij}، فإن إيجاد الثوابت B_j للبرنامج (M2) يختلف عن الثوابت B'_j للبرنامج (M3) المحسوب

Aouni, B., O. kettani and J.-M. Martel, «Estimation through Imprecise Goal programming Model ». Advances in Multiple Objective and Goal Programming, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 1997 (122-126).

بوحدات قياس أخرى، كنا قد تكلمنا عن هذا من قبل، أي هنا الدالة (Z) محسوبة بمجموع الانحرافات المطلقة التي لا تؤدي إلى نفس الحل عند تغيير وحدة القياس،و بالتالي يجب استعمال دالة الانحرافات النسبية لايجاد نفس الثوابت B_j عند تغيير وحدة القياس في جميع القيود، أي نستعمل الدالة التالية (M3):

$$MinZ = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n_i}{y_i} + \frac{p_i}{y_i}\right)$$

تحت القيود:

$$\begin{aligned}
&S.à:\\
&B_0 + B_1x_1 + \ldots + B_m x_{1m} + n_1 - p_0 = y_1\\
&B_0 + B_1x_2 + \ldots + B_m x_{2m} + n_2 - p_2 = y_2\\
&\\
&B_0 + B_1x_n + \ldots + B_m x_{nm} + n_n + p_n = y_n\\
&n_i, p_i \geq 0
\end{aligned}$$

في هذا البرنامج تمثل الثوابت $(B_0, B_1 \ldots B_m)$ متغيرات القرار $(x_1 x_2, \ldots x_n)$ بالنسبة للبرمجة الخطية بالأهداف ، و القيم x_{ij} في قيود الانحدار تمثل المعاملات التكنولوجية a_{ij}.

مثال 4-4:

إن الجدول التالي يبين العلاقة بين رقم الأعمال و التكاليف لمؤسسة:

الجدول 4-1 : العلاقة بين رقم الأعمال و التكاليف

السنوات	رقم الأعمال x	التكاليف Y
2000	110	109
2001	103	104
2002	92	92
2003	100	101
2004	105	104

المصدر : من وضع الطالب

إن خط الانحدار يأخذ العلاقة التالية : $y = ax + b\cup + \varepsilon$

حيث: y: المتغير التابع.

x : المتغير المستقل.

$\cup$: الشعاع الأحادي.

ε : المتغير الخطأ.

يمكن صياغة هذا النموذج على الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix}109\\104\\92\\101\\104\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}110\\103\\92\\100\\105\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\end{pmatrix}$$

إن تطبيق طريقة المربعات الصغرى لتعيين خط الانحدار تعطينا:

$$\begin{cases}\hat{a} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 5\bar{x}^2} = 0.932584 \\ \\ \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} = 6.876432\end{cases}$$

الآن نريد إيجاد الثابتين (a,b) بطريقة دالة الانحرافات النسبية، إذن يمكن كتابة النموذج السابق على الشكل التالي:

$$MinZ = \sum_{i=1}^{5}\left|y_i - \hat{y}\right|$$

تحت القيود:

$$\begin{aligned}
110a + b + \delta_1^- - \delta_1^+ &= 109\\
103a + b + \delta_2^- - \delta_2^+ &= 104\\
92a + b + \delta_3^- - \delta_3^+ &= 92\\
100a + b + \delta_4^- - \delta_4^+ &= 101\\
105a + b + \delta_5^- - \delta_5^+ &= 104
\end{aligned} \qquad (M2)$$

و بالتالي (M1) يمكن كتابته على شكل البرمجة الخطية بالأهداف كما يلي:

$$MinZ = \sum_{i=1}^{5} (\delta_i^+ + \delta_i^-) \qquad (M3)$$

$$MinZ = (\delta_1^+ + \delta_1^-) + (\delta_2^+ + \delta_2^-) + (\delta_3^+ + \delta_3^-) + (\delta_4^+ + \delta_4^-) + (\delta_5^+ + \delta_5^-).$$

تحت القيود:

$$110a + b + \delta_1^- - \delta_1^+ = 109$$

$$104a + b + \delta_2^- - \delta_2^+ = 104$$

$$92a + b + \delta_3^- - \delta_3^+ = 92$$

$$100a + b + \delta_4^- - \delta_4^+ = 101$$

$$105a + b + \delta_5^- - \delta_5^+ = 104$$

الحل لهذا النموذج (M3) هو كما يلي:

$$\boxed{\begin{cases} a = 0.944444 \\ b = 5.111111 \end{cases}}$$

نلاحظ مما سبق أن الثابتين (a,b) للنموذج (M3) المحسوبين بطريقة البرمجة الخطية بالأهداف، يختلف عن الثابتين (a,b) المحسوبين للنموذج(M1) بطريقة المربعات الصغرى.
الآن نقوم بتغيير وحدة القياس لكل من رقم الأعمال و التكاليف، بحيث نستعمل وحدة القياس السنتيم عوض الدنانير، سنحصل على النموذج التالي :

$$MinZ' = \sum_{i=1}^{5} (\delta_i^+ + \delta_i^-) \qquad \text{(M4)}$$

تحت القيود:

$$11000a + 100b + \delta_1^- + \delta_1^+ = 10900$$

$$10400a + 100b + \delta_2^- + \delta_2^+ = 10400$$

$$9200a + 100b + \delta_3^- - \delta_3^+ = 9200$$

$$10000a + 100b + \delta_4^- - \delta_4^+ = 10100$$

$$10500a + 100b + \delta_5^- - \delta_5^+ = 10400$$

فالحل لهذا النموذج (M4) هو:

$$\begin{cases} a = 0{,}94444 \\ b = 5{,}11111 \\ Z = 333{,}3333 \end{cases}$$

نلاحظ أن الحل لهذا النموذج (M4) مساوي للحل الموافق للنموذج السابق (M3) لأنه إذا كان النموذج يحتوي على نفس وحدة القياس في جميع القيود، فإن الحل لا يتأثر بتغيير وحدة القياس، أي يبقى ثابتا.
و في هذه الحالة ، فإن الدالة المحسوبة بالانحرافات المطلقة مكافئة للدالة المحسوبة بالانحرافات النسبية، أي سواء نستعمل دالة الانحرافات المطلقة أو النسبية، سنجد دائما

نفس الحل، أي في الحالة التي يكون فيها جميع قيود النموذج تحتوي على نفس وحدة القياس. أي حتى و لو استعملنا الصياغة الجديدة (4-2) التي اقترحناها في الفصل الرابع

أي $$MinZ = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta_i^+}{y_i} + \frac{\delta_i^-}{y_i}\right)$$

سنجد نفس الحل السابق للنموذج (M4) أو (M3) أي:

$$\begin{cases} a = 0{,}94444 \\ b = 5{,}11111 \end{cases}$$

على ضوء ما سبق، نستنتج أن الصياغة للنموذج المحسوبة بالانحرافات المطلقة تكون مكافئة للصياغة للنموذج المحسوبة بالانحرافات النسبية، إلا في الحالة التي يأخذ فيها جميع القيود نفس وحدة القياس، أما في الحالة العكسية أي إذا كانت القيود تحتوي على وحدات قياس مختلفة، فإن الصياغة لنموذج البرمجة الخطية بالأهداف، يجب أن تحسب بالانحرافات **النسبية** لكي يبقى الحل ثابتا و أيضا يمكن تفسيرها اقتصاديا.

5-4 خلاصـــــة:

تطرقنا في هذا الفصل على أن نعيد النظر في إعادة صياغة نموذج البرمجة الخطية بالأهداف،وذلك لأن عملية التوحيد الإقليدي والمئوي ماهي إلا طرق تستعمل لإيجاد نفس الحل فقط في حالة تغيير وحدات القياس للأهداف. ولكن النموذج يفقد خصائصه الإقتصادية مما جعلنا نعيد النظر في كيفية إعادة صياغته باستعمال مايسمى **دالة الإنحرافات النسبية** للأهداف، وليس **دالة الإنحرافات المطلقة** بدليل البرهان الواضح في هذا الفصل.

والأهم في هذا الفصل، بالإضافة إلى ذلك هو تقديم صياغة جديدة لنظرية **التقدير للانحدار** مستعملا البرمجة الخطية بالأهداف، عوض طريقة المربعات الصغرى المستعملة من قبل، على أساس الصياغة الجديدة ، أي دالة الانحرافات النسبية بدلا من دالة الانحرافات المطلقة.

وفي الأخير نشير إلى أنه يمكن أن تكون دالة الانحرافات النسبية مكافئة لدالة الانحرافات المطلقة، أي يؤديان إلى نفس الحل، وكلاهما يفسران اقتصاديا إلا في الحالة أين تأخذ جميع الأهداف للنموذج نفس وحدة القياس.

الخلاصة العامة والأبحاث المستقبلية:

ترتكز البرمجة الخطية على الطريقة العلمية كأساس ومنهج في البحث والدراسة، وهي بطبيعة الحال أحسن الطرق كفاءة وفاعلية إذا ما اتبعها متخذ القرار في كل ما يواجهه من مشكلات. إذ تعتبر البرمجة الخطية أكثر أساليب بحوث العمليات في الحياة العملية، بحيث أصبحت الوسيلة العامة لاتخاذ القرار للعمليات في المؤسسات.

تقتضي الطريقة العلمية في حل المشاكل السير في أربعة خطوات محددة، أولها التحديد الدقيق للمشكلة وتحديد كافة أبعادها، ثم تأتي الخطوة الثانية متمثلة في تكوين مجموعة الفروض التي تعطي تفسيرا ممكنا لأبعاد المشكلة، أما الخطوة الثالثة فهي اختيار صحة تلك الفروض واستعراض البدائل التي تسهم في حل المشكلة على ضوء الفروض الصحيحة، ثم بعد ذلك تأتي الخطوة الرابعة والمتمثلة في اختيار الحل الأمثل من مجموعة الحلول البديلة ووضعه موضع التنفيذ ومتابعة نتائج التنفيذ، والبرمجة الخطية تعتمد على هذه الخطوات الأربعة عند معالجة ما تواجهه الإدارة من مشاكل وذلك هو الذي يكسبها خاصية هامة وهي ارتكازها على المنهج العلمي في البحث والدراسة المتعلق ببناء النماذج لاتخاذ القرار.

تعتمد عملية بناء النماذج المتعلقة بعدة أهداف على كيفية اختيار وحدة القياس، التي تعتبر العضو الحساس في النموذج، والتي تعبر عن المعاملات التكنولوجية لمتغيرات القرار، بحيث ركزنا في هذه المذكرة، على أن **تغيير وحدة القياس** للقيود في البرمجة الخطية بالأهداف تلعب دورا كبيرا في إيجاد الحل الأمثل المناسب للنموذج، بحيث الصياغة السابقة المحسوبة بالانحرافات المطلقة لاتعكس حقيقة النموذج في حالة تغيير وحدة القياس للقيود.

في رأينا نعتبر هذه الصياغة السابقة الذكر غير منطقية أي لاتعبر عن الخصائص التي يتميز بها النموذج من معنى اقتصادي ورياضي، بدليل البرهان الواضح في الفصل الرابع، ولهذا حاولنا أن نقترح صياغة جديدة لهذا النموذج بحيث يعكس حقيقة النموذج من الناحية الرياضية والاقتصادية بالدلائل والأمثلة الواضحة في الفصل الأخير، أي أردنا أن نقول أن وحدة القياس التي يختارها المسير يجب أن لاتؤثر على النموذج، أي على الحل الأمثل، بالإضافة إلى التفسير الإقتصادي للدالة.

فالنموذج الذي لايمكن تفسير دالته الإقتصادية فهو غير منطقي وموضوعي، مادام أنه يعبر عن المشكل الذي نريد إيجاد حل له، والذي يتغير بتغيير وحدة القياس للقيود.

تكلمنا عن نظرية التوحيد الإقليدي والمئوي، التي تؤدي إلى نفس الحل لنفس النموذج، عند تغيير وحدة القياس للأهداف. ولكن تفسيره الاقتصادي غير واضح، بحيث يتحول إلى نموذج آخر بدون وحدة قياس مما يتناقض مع الصياغة الحقيقية له، أي يصبح نموذجا يحتوي على قيود بدون وحدة قياس لا يمكن تفسيرها اقتصاديا.

الهدف من هذه الأنواع لتوحيد وحدة القياس هو فقط الحصول على نفس الحل في حالة تغيير وحدة القياس، ولكن النموذج يفقد معناه الإقتصادي.

أجبرنا هذا المشكل على أن نعيد النظر في إعادة صياغة النموذج الموضح في الفصل الرابع، بحيث ركزنا كثيرا على كيفية إعادة صياغته باستعمال مايسمى **دالة الإنحرافات النسبية** للأهداف، وليس **دالة الإنحرافات المطلقة** بدليل البرهان الواضح في هذا الفصل الأخير.

والأهم في هذه المذكرة هو تقديم صياغة جديدة لنظرية **التقدير للإنحدار** مستعملا البرمجة الخطية بالأهداف على أساس الصياغة الجديدة ، عوض طريقة المربعات الصغرى المستعملة من قبل، ، أي دالة الإنحرافات **النسبية** بدلا من دالة الإنحرافات **المطلقة**.

يمكن أن تكون دالة الإنحرافات النسبية مكافئة لدالة الإنحرافات المطلقة، أي تؤديان إلى نفس الحل، وكلاهما يفسران اقتصاديا إلا في الحالة أين تكون جميع القيود للنموذج تحتوي على نفس وحدة القياس.

وعلى أساس هذه الصياغة الجديدة لنموذج البرمجة الخطية بالأهداف، يمكن أن نستغلها في الدراسات والأبحاث المستقبلية في حالة أخذ الأهداف قيما غير مؤكدة أي غير ثابتة، التي تؤدي إلى دراسة النماذج الرياضية بالأهداف في حالة عدم التأكد من قيمة الهدف للقيد، التي تعبر عن مجال وليس قيمة ثابتة(**GP imprécis**) . يمكن ذكر على سبيل المثال المجالات المتعلقة **بمراقبة الجودة** التي لايمكن تحديد الهدف بدقة، وكذلك **نظرية التقدير للانحدار**، معتمدا على استعمال برامج الإعلام الآلي التي تلعب دورا كبيرا في تسهيل العمليات الحسابية في هذا المجال وخاصة النماذج المعقدة.

المراجـــع المستعملـــــة:

المراجـــع باللغة العربية :

1- د.عبد الحي مرعي، المعلومات المحاسبية وبحوث العمليات في اتخاذ القرارت، الدار الجامعية،1988.

2 – د.فريد عبد الفتاح، بحوث العمليات وتطبيقاتها في حل المشاكل واتخاذ القرارات ، جامعة الزقازيق، 1997.

3 – د.أحمد فهمي جلال، مقدمة في بحوث العمليات، دار الفكر العربي،1993.

4 – د.عبد الرحمن بن محمد أبو عمه، د.محمد أحمد العش، البرمجة الخطية، جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، 1990.

5 – د.محمد صالح الحناوي، د.محمد توفيق ماضي، بحوث العمليات في تخطيط ومراقبة الإنتاج، جامعة الأسكندرية، الدار الجامعية، 2000- 2001.

6 – د.عبد الحميد مصطفى أبو ناعم، إدارة المشروعات الصغيرة، كلية التجارة – جامعة القاهرة، 2002.

7 – د.محمد توفيق ماضي، إدارة الإنتاج والعمليات، مدخل اتخاذ القرارات، الدار الجامعية، مصر، 1996.

8 – د.موسى حسب الرسول، الأساليب الرياضية لنظرية إتخاذ القرارات، كلية الإقتصاد والإدارة، الإسكندرية، 2000.

9 – د.السيد عبد المقصود دبيان، د.كمال خليفة أبو زيد، بحوث العمليات في المحاسبة، كلية التجارة، جامعة الإسكندرية، 2001.

المراجع باللغة الأجنبية:

1- Aouni,B., «Linéarisation des expressions quadratiques en programmation mathématique : des Bornes plus efficaces », Administrative Sciences Association of canada, Management Science, vol. 17, N0.2, 1996 (38-46)

2- Aouni, B., O. kettani and J.-M. Martel, «Estimation through Imprecise Goal programming Model ». Advances in Multiple Objective and Goal Programming, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 455, Spinger-Verlag, 1997 (120-130).

3- Aouni, Belaid « le modèle de programmation mathématique avec buts dans un environnement imprécis » :sa formulation, sa résolution et une application. Thèse de doctorat (Ph.D.), faculté des sciences de l'administration, Université Laval (Canada), 1998.

4- Aouni, B and J.-M. Martel, «Real Estate Estimation through an Imprecise Goal Programming Model », Methods and heuristics for decision Making, the International Conference on Artificial and Computational Intelligence for Decision, Control and Automation in Engineering and Industrial Applications, 2000 (1-6).

5- Aouni, B. and O. Kettani, « Goal Programming Model : A Glorious History and a Promising Future », Européen Journal of Opération Research, Vol. 133, no. 2, 2001 (1-7).

6- Aouni, B., Introduction à la méthodologie d'aide multicritère à la décision, Laurentian University, Sudbury (Canada), 2002.

7 - Bazaraa MS,Shetty CM. Nonlinear programming, theory and algorithms. New York: Wiley, 1979.

8 - Ben Amor, Martel, and Aouni, «Partage des Economies à la Quantité d'Escompte», Laval, Canada, 2001.

9 - Bertrand Mareschal, «Méthodes d'Aide à la Decision » ,Université Libre de Bruxelles, Belgique, 2001.

10 - Brans, J.-P., L'élaboration d'instruments et perspectives d'avenir, nadeau, R. et M Landry (éds), Les presses de l'univrsité Laval, 1986.

11-- Boualem Benmazouz, .Recherche Opérationnelle de Gestion., Atlas Edition,Algerie, 1995.

12- Charnes A, Cooper WW, Ferguson R. Optimal estimation of executive compensation by linear programming. Management Science 1955; 1(2): 138-51.

13- Charnes A, Cooper WW. Management models and industrial applications of linear programming. New York: Xiley, 1961.

14- Charnes A, Cooper WW. Goal programming and multiple objective optimizations. European Journal of Operational Research 1977;1:39-54.

15- Charnes, A., Cooper, W. W., Devoe, J. K., Learner, D. B. and Reinecke, W. (1968). A goal programming model for media planning. Management science, 14, 423-430 (D,XVIII).

16- Charnes, A., Cooper, W. W., Harrarld, J K. and Wallace, W. (1976). A goal programming interval programming model for resource allocation in a marine environmental protection program. Journal of Environmental Economic and Management, 3, 347-362 (H,XXVI).

17- Clayton, E, R. and Moor, L. J. (1972). Goal vs linear programming. Journal of systems Management, November, 26-31 (B, XXII).

18- Christian Labrousse, .Statistique, Exercices Corrigés avec Rappels de Cours., Tome 3, Sciences Economiques , 3e année, Dunod, 1977.

19- Erwin Kalve Gan, «Solving Multi-Objective Models with Gams», GAMS Development Corp, Washington, 2000.

20 - Evans, G. W., «An Overview of Techniques for Solving Multiobjective Mathematical Programs », Managmnt Science, Vol. 30 (11), 1984 (1268-1282).

21- Flavell RB.A new goal programming formulation. Omega 1976;4(6):731-2.

22 - Georges Rottier, .Econométrie Appliquée, Modéles de Consommation., dunod, 1987.

23 - Hannan, E. L. (1978). The application of goal programming techniques to the CPM problem. Socio- Economic Planning Sciences, 12, 267-270 (B, XX).

24 - Hwang, C. L., Lee, H. B., Tilman, F. A. and Lie, C. H. (1984).Nonlinear integer goal programmingapplied to optimal system reliability. IEEE Transaction on reliability, VR-33,431-438 (C, D, VI).

25 - Ignizio, J. P. (1976). An approach to the capital budgeting problem with multiple objectives. The Engineering Economist, 21, 259-272 (B, C, XII).
26 - Ignizio, J. P. (1978). The development of cost estimating relationships via goal programming. The Engineering Economist, 24, 37-47 (L, VI).
27 - Ignizio, J. P. (1981). Antenna array beam pattern synthesis via goal programming. European Journal of Operational Research, 6, 286-290 (B, XIX).
28 - Ignizio JP. A review of goal programming: a tool for multi-objective analysis. Journal of the operational Research Society 1978;29(11):1109-19.
29 - Ignizio JP. Linear-programming in single and multiple-objctive systems. Englewwood Cliffs. NJ: Prentice-Hall, 1982.
30- Kornbluth J. A survey of goal programming. Omega 1973;1(1):193-205.
31- Lee, S. M and D. L. Olson, «Goal programming », in Multicriteria Decision Making: Advances in MCDM Models, Algorithms, Theory and Applications, Gal, T,T.-J.Stewart And T. Hanne (eds.), Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.
32 - Lee SM. Goal programming for decision analysis. Philadelphia: Auerbach Publishers Inc., 1972.
33 - Lee SM. Goal programming for decision analysis of multiple objectifs. Sloan Management Review1973;14:11-24.
34 - Lin XT. A survey of goal programming applications. Omega 1980;(1):115-7.
35- Martel J.-M. and Aouni, « Incorporating the Decision-Maker's Preferences in the Goal Programming Model », Journal of the Opération Research Society, vol. 41 (12), 1990 (1121-1132).
36- Martel, J.-M. et B. Aouni, «Méthode multicritère de choix d'un emplacement : le cas d'un aéroport dans le nouveau québec », Information Systems and Operational research, Vol 30, No. 2, 1992 (97-117).
37- Martel J.-M and B. Aouni, «Diverse Imprecise Goal Programming Model Formulations » Journal of Global Optimization, Vol. 12, 1998 (127-138).
38- Min H, Storbeck J. on the origan and persistence of misconceptions in goal programming. Journal of the Oparational Research Society 1991;42:301-12.
39- Oral M, Kettani O. A linearization procedure for quadratic and cubic mixed integer problems. Operations Research 1992;40(1):5109-16.
40- P.AZOULAY , P.DASSONVILLE , RECHERCHE OPERATIONNELLE DE GESTION, PRESSES UNIVERSITAIRES DE France, 1976.
41- Romero C. Handbook of critical issues in goal programming. Oxford: Pergamon Press, 1991.
42- Romero C. Multi-objective and goal programming approaches as a distance function model. Journal of the Operational Research Society 1985;36:249-51.
43 - Romero C, Suteliffe C, Board J, Cheshire P. Naïve Weighting in non pre-emptive goal programming, viewpoint and reply. Journal of the operational Research Society 1985;36:647-9.
44- Roy B, Mousseau V. A theoretical framework for analysing the notion of elative importance of criteria. Journal of Multi- criteria Decision Analysis 1996;5(3)

45- Schàrlig, A., «La critique de l'optimisation, » dans Décider sur plusieurs critères : Panorama De l'aide à la décision multicritère, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1985, 15-33.
46- Schniederjans MJ. Goal programming. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers. 1995.
47- Tamiz, M., D. Jones and C. Romero, « Goal Programming for Decision- Making : An Overview of the Current State-of-the-Art », Européen Journal of Opération Research, Vol. 111, 1998 (569-581).
48- Tamiz, M.and D. Jones, « Algorithmic Improvements to the Method of Martel and Aouni »,Journal of the Operational Research Society, Vol. 45, 1995 (254-257).
49 - Tamiz M, Jones DF, El-Darzi E. A review of goal programming and its applications. Annals of Operations Research 1995;58:39-53.
50- Wodhelm WB. Extentions of goal programming models. Omega 1981;9:212-224.
51 - Zeleny M. Multiple criteria decision making. New York: McGraw-Hill, 1982.