A la mémoire de mon pére

Mohammed DIB

Remerciements

Mes remerciements vont particulièrement à:

Mon encadreur Monsieur le Professeur M. YEBDRI pour son aide morale et ses précieux conseils qui m'ont aidée à determiner ce travail.

Monsieur le professeur M. BOUCHEKIF d'avoir bien vouloir accepter la présidence de jury.

Monsieur le professeur A. LAKMECHE,

Monsieur le professeur S. M. BOUGUIMA,

Madame le maitre de conférence N. MERZAGUI,

Monsieur le maitre de conférence B. ABDELLAOUI, qui ont accepté de se pencher sur l'évaluation de mon travail.

Monsieur le chef de département de mathématiques B. MEBKHOUT, et à tous les enseignants qui ont participé à ma formation.

A tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont apportée leur soutien, notamment ma famille DIB - MOUSLIM et mes amies.

Enfin, à Monsieur A. R. LEGGAT pour le grand soin apporté à la pésentation de ce mémoire.

Table des Matières

Introduction

Les équations différentielles à retard sont des équations différentielles dans lesquelles la dérivée à un moment t dépend de la fonction (et de la dérivée dans le cas des équations de type neutre) à des moments antérieurs $t - r_i$, $r_i \in \mathbb{R}^+$. Autrement dit ces équations tiennent compte de l'effet du passé dans la prédiction du futur (pour plus de détails voir [15]).

Les systèmes d'équations différentielles à retard occupent désormais une place de première importance dans tous les domaines de la science, en particulier dans la modélisation des phénomènes biologiques telle que: la dynamique de la population, l'épidémiologie, etc...

Un outil trés puissant dans l'étude des équations différentielles ordinaires ainsi que les équations différentielles aux dérivées partielles est la méthode variationnelle.

L'origine de cette méthode remonte à P. Fermat, à qui l'on doit les fondements du calcul variationnel, et à ses successeurs Newton et Leibniz etc..,qui ont été motivés par des problèmes d'optimisation (pour plus de détails voir [16]).

Cette méthode consiste à la construction d'une fonctionnelle réelle définie sur un espace de Banach convenable, les points critiques de cette fonctionnelle constituent les solutions de l'équation différentielle associée.

Cependant, elle est trés peu utilisée dans l'étude des équations différentielles à retard.

Ce mémoire est consacré à l'étude des solutions presque-périodiques de l'équation différentielle à retard de type neutre suivante:

$$
\begin{aligned}
& D_1L(x(t-r),x(t-2r),x'(t-r),x'(t-2r),t-r) \\
& +D_2L(x(t),x(t-r),x'(t),x'(t-r),t) \\
= \; & \frac{d}{dt}\left[D_3L(x(t-r),x(t-2r),x'(t-r),x'(t-2r),t-r)\right. \\
& \left.+D_4L(x(t),x(t-r),x'(t),x'(t-r),t)\right]
\end{aligned} \tag{1}
$$

où $L : (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable, $D_j\ L \quad j = 1,..,4$ représente la différentielle partielle par rapport au j^{eme} vecteur variable définie par :

$$
\begin{aligned}
D_jL \quad (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R} &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\
(X,t) &\mapsto D_jL(X,t),
\end{aligned}
$$

et $r \in (0,\infty)$ une constante positive fixée.

Notre approche est basée sur une méthode variationnelle qui est conçue spécialement pour la recherche des solutions presque-périodiques. Elle consiste à minimiser une fonctionnelle réelle(dite d'action moyenne) sur un espace de Hilbert de fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch noté $\mathbf{B}^{1,2}$. J. Blot [5] l'a utilisé pour un système d'équations ordinaires, en s'inspirant de ce travail et celui de M. Ayachi et J. Blot [2], on propose dans ce mémoire de faire une généralisation de de cette méthode à la classe d'équations différentielles à retard de type neutre ci-dessus.

L'organisation de notre mémoire est la suivante: dans le premier chapitre, on rappelle les définitions et propriétés des méthodes variationnelles. Dans le second chapitre, on rappelle toutes les notions préliminaires nécessaires pour le développement de notre travail, on donne également la construction de l'espace $\mathbf{B}^{1,2}$. Dans le troisième chapitre, on pose un formalisme pour les solutions presque-périodiques au sens de Bohr, on ennonce également des résultats sur la structure de l'ensemble de ces solutions. Le quatrième chapitre est consacré au formalisme variationnel pour les solutions presque-périodiques au sens de Besicovitch qui nous permet d'ennoncer un résultat principal sur l'existence et l'unicité de la solution. Enfin, dans le cinquième chapitre on étudie un exemple en donnant un résultat d'existence de solutions Bohr-presque-périodiques pour un ensemble dense de forces extérieures presque-périodiques.

Chapitre 1

Méthodes variationnelles

Dans ce chapitre, nous définissons les méthodes variationnelles, nous rappelons également leurs propriétés et leurs différentes techniques.

1.1 Rappels:

Commençons d'abord par donner quelques définitions et résultats connus nécessaires pour le developpement de cette partie.Pour plus de détails, se référer à [8], [11], [12], [17], [19] et [23].

Définition 1.1 *Soit F une fonction différentiable définie de $\mathbf{X}$ dans $\mathbb{R}$.Un point $u \in \mathbf{X}$ est dit point critique pour F si et seulement si $DF(u) = 0$, où DF est la différentielle de F.*

Définition 1.2 *Soit $\mathbf{X}$ un espace de Banach, soit $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$ un sous-ensemble convexe, une fonctionelle $F : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur $\mathbf{K}$ si pour tous $u, v \in \mathbf{K}$ et $t \in [0, 1]$ on a:*

$$F(tu + (1-t)v) \leq tF(u) + (1-t)F(v).$$

La fonctionelle F est dite strictement convexe sur $\mathbf{K}$ si pour tous $u, v \in \mathbf{K}$, $u \neq v$ et

$t \in (0,1)$ *on a:*

$$F(tu+(1-t)v) < tF(u)+(1-t)F(v).$$

Proposition 1.1 *[17] Soit* $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$ *un convexe et* $F : \mathbf{K} \to \mathbb{R}$ *une fonction G-différentiable, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) F *est convexe.*

ii) Pour tous $u, v \in \mathbf{K}$ *on a:* $F(v) \geq F(u) + \langle DF\ (u), u-v \rangle$.

Théorème 1.1 *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace de Banach et* $F \in C\ ^1(\mathbf{X}, \mathbb{R})$ *convexe.Alors* $u \in \mathbf{X}$ *est un minimum de* F *si et seulement si* u *est un point critique de* F, *c'est à dire:*

$$F(u) = \inf_{v \in \mathbf{X}} F(v) \Leftrightarrow DF(u) = 0$$

Preuve: Il faut montrer que si $DF(u) = 0$ alors $F(u) \leq F(v)$ $\forall v \in \mathbf{X}$.

Or, d'aprés la proposition précédente on a:

$$F(v) \geq F(u) + DF(u)(v-u) = F(u)$$

et ceci $\forall v \in \mathbf{X}$. ■

Définition 1.3 *Une fonction* $F : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) si pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *l'ensemble* $[F \leq \lambda] = \{x \in X\ ; F(x) \leq \lambda\}$ *est fermé.*

Définition 1.4 *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace de Banach et soit* $\mathbf{J}$ *l'injection canonique de* $\mathbf{X}$ *dans* $\mathbf{X}''$ *(le bidual de* $\mathbf{X}$ *) définie par:*$\forall x \in \mathbf{X}$,$\forall f \in \mathbf{X}'$;*(*$\mathbf{X}'$ *est le dual de* $\mathbf{X}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{J} : \mathbf{X} &\to \mathbf{X}'' \\ \langle \mathbf{J}x, f \rangle_{\mathbf{X}'',\mathbf{X}'} &= \langle f, x \rangle_{\mathbf{X}',\mathbf{X}} \end{aligned}$$

On dit que $\mathbf{X}$ est réflexif si

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}''$$

Lorsque $\mathbf{X}$ est réflexif on identifie implicitement $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}''$(à l'aide de l'isomorphisme $\mathbf{J}$).

1.2 Méthodes variationnelles:

Soit une équation différentielle (E) (ordinaire, aux dérivées partielles ou à retard), on veut l'étudier par une approche variationnelle. Les solutions sont alors cherchées comme points critiques d'une fonctionnelle réelle F définie sur un espace de Banach $\mathbf{X}$ bien précis telle que:

i) F est au moins Gateaux-différentiable.

ii) L'équation d'Euler correspondante: $DF(u) = 0$ est équivalente à (E).

Dans le cas où F est minorée (respectivement majorée), il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum (respectivement le maximum) est atteint.

Pour les fonctionnelles convexes, un résultat classique est donné par le théorème suivant:

Théorème 1.2 *[8] Soit une fonctionnelle réelle F définie sur un espace de Banach réflexif $\mathbf{X}$. Supposons que:*

i) F *est semi-continue inférieurement,*

ii) F *est convexe,*

iii) F *est coercive, i.e.*

$$\lim_{\|x\|_{\mathbf{X}} \to +\infty} F(x) = \infty.$$

Alors F atteint son minimum, i.e. $\exists u \in \mathbf{X}$ tel que :

$$F(u) = \min_{v \in \mathbf{X}} F(v).$$

Preuve: Elle est basée sur le fait que les ensembles fermés, bornés et convexes d'un espace de Banach réflexif sont compacts par rapport à la topologie faible (voir[8] pour plus de détails). ■

Si F n'est pas convexe il n'est pas nécessaire qu'elle atteigne son infimum; le résultat suivant de Ekeland [12] montre l'existence de points qui sont presque des minimas.

Théorème 1.3 *[12] Soit* $\mathbf{X}$ *un espace métrique complet et* F *semi-continue inférieurement sur* $\mathbf{X}$ *et minorée. Alors il existe* $x_0 \in \mathbf{X}$ *tel que:*

$$F(x) > F(x_0) - dist(x, x_0), \qquad \forall x \in \mathbf{X}, x \neq x_0.$$

Une condition de compacité jouant un rôle trés important dans l'approche variationnelle est: la condition de Palais-Smale notée (P-S).

(P-S): "Toute suite $(x_n) \in \mathbf{X}$ telle que $|F(x_n)|$ est bornée et $F'(x_n)$ converge vers 0 en norme dans $\mathbf{X}'$(espace dual de $\mathbf{X}$) admet une sous-suite fortement convergente dans $\mathbf{X}$."

Proposition 1.2 *Soit* F *une fonction réelle de classe* C^1*sur un espace de Banach vérifiant (P-S), minorée et coercive. Alors* F *atteint son minimum local.*

Pour une fonction qui n'est pas bornée (ni majorée, ni minorée), chercher ses points critiques revient à chercher des points selles. Ces points sont déterminés par des arguments de type minimax. Ce qui nous ramène à l'utilisation du théorème du col et ses différentes versions.

Les méthodes variationnelles ont été utilisées pour prouver l'existence de solutions périodiques pour des systèmes Hamiltoniens par A. Bahri et H. Berestycki [3], P.-H. Rabinowitz [20] et Y. Long [18].

Combinées avec la théorie du genre, ces méthodes ont été utilisées pour prouver l'existence et la multiplicité de solutions périodiques pour des systèmes d'équations à retard par: Z. Guo et J. Yu [14], et par: X.-B. Shu et Y.-T. Xu [22].

Chapitre 2

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, on reprend toutes les notions: définitions et résultats nécessaires pour la suite de notre travail. Pour plus de détails nous proposons de consulter les références [1], [4], [5], [9], [10], [11], [13], [21] et [24].

2.1 Fonctions presque périodiques:

La théorie des fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach a été developpée initialement par H. Bohr,S. Bochner, J. Von Neumann.

Nous rappelons des résultats bien connus dans la littérature et qui sont utiles pour notre travail.

Définition 2.1 *Un sous-ensemble S de $\mathbb{R}$ est relativement dense s'il existe un nombre ℓ positif tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a:* $[a, a+\ell] \cap S \neq \varnothing$.

Notation

Pour toute fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}$ étant un espace de Banach, et $\varepsilon > 0$ on définit l'ensemble

$$E(f,\varepsilon) = \left\{\tau \in \mathbb{R}\,;\left|f(t+\tau) - f\ (t)\right|_{\mathbf{X}} \leq \varepsilon\ \forall t \in \mathbb{R}\right\}.$$

où $|.|_{\mathbf{X}}$ représente la norme de l'espace $\mathbf{X}$.

Définition 2.2 *On dit qu'une fonction continue f est presque-périodique au sens de Bohr ou bien simplement Bohr-presque-périodique si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $E(f, \varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.Autrement dit:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ell(\varepsilon) > 0,\ \forall a \in \mathbb{R} :\ \exists \tau \in [a, a + \ell(\varepsilon)]$$

tel que:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)|_X \leq \varepsilon.$$

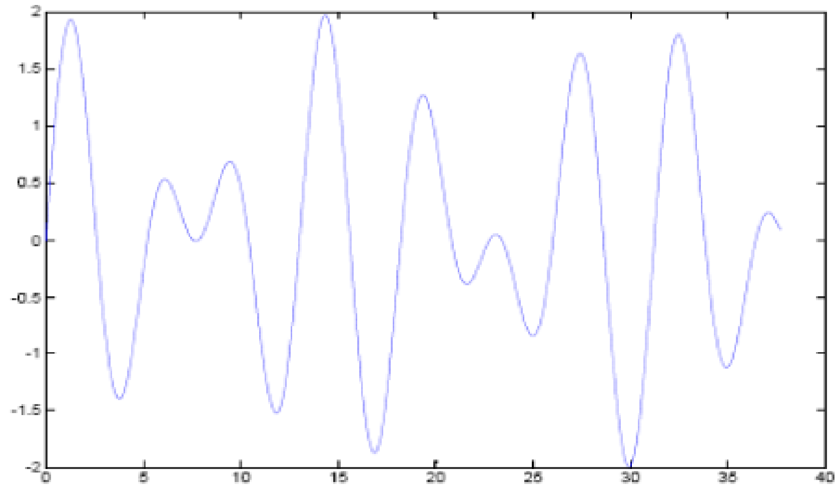
Le nombre τ est appelé $\varepsilon - presque - période$ de f.

Remarque 2.1 *Cette définition est l'extension de la définition de Bohr pour les fonctions numériques à des fonctions vectorielles.*

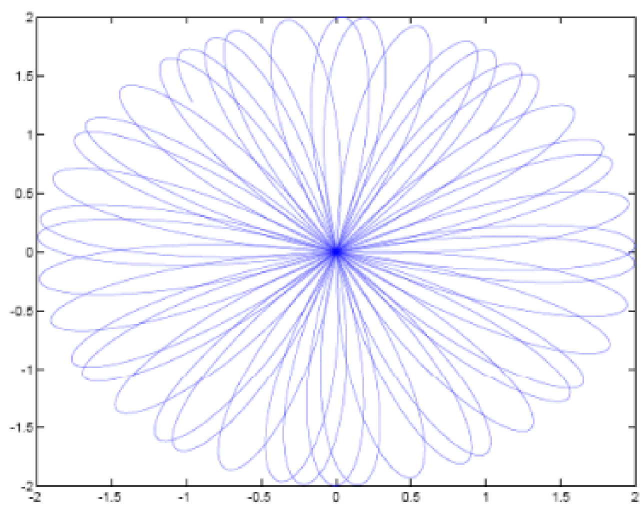
2.1.1 Exemples:

i) Une fonction continue périodique est presque-périodique. Sa période et ses multiples sont les presque-périodes.

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = \sin t + \sin \sqrt{2} t$ est presque-périodique bien qu'elle ne soit pas périodique.



iii) Nous donnons aussi un exemple de courbe paramétrée avec fonctions presque-périodiques: $\begin{cases} x(t) = \sin t + \cos \sqrt{2}t \\ y(t) = \cos t + \sin \sqrt{2}t \end{cases}$



2.1.2 Propriétés:

i) Si f est Bohr-presque-périodique, alors l'image de f (Im f) est relativement compacte.

Dans le cas où $\mathbf{X} = \mathbb{R}$, ceci signifie qu'une fonction presque-périodique est bornée.

ii) Une fonction f presque- périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

iii) Si f_n est presque périodique pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si la suite (f_n) converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$ alors f est presque-périodique.

iv) La somme de deux fonctions presque-périodiques est une fonction presque-périodique.

v) Le produit d'une fonction vectorielle presque-périodique par une fonction numérique presque-périodique est une fonction vectorielle presque-périodique.

vi) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors on a l'équivlence suivante: f est presque-périodique si et seulement si de toute suite (s_n) on peut extraire une sous-suite (s_{n_k}) telle que $f(t + s_{n_k})$ converge uniformément.

2.1.3 Presque périodicité par rapport à une norme

Soit$\|.\|$ une norme définie sur un espace de fonctions continues. On dit qu'une fonction f est presque périodique au sens de la norme$\|.\|$si:

1) f est continue,

2) $\|f\|$ est finie,

3) il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un l_ε tel que tout intervalle de longueur l_ε contient une ε-presque période τ telle que :

.

$$\|f - f_\tau\| \leq \varepsilon \quad \text{où } f_\tau(t) := f(t + \tau)$$

Selon le choix de la norme, on obtient ainsi plusieurs notions différentes de presque-périodicité. Les choix les plus courants sont:

1) La norme du sup:

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$$

qui donne la presque-périodicité au sens de Bohr.

2) La norme de Stepanoff:

$$\|f\|_{S_T^p} := \sup_{y \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{T} \int_y^{y+T} |u(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

qui donne la presque-périodicité au sens de Stepanof pour les nombres T et p.

3) La semi-norme de Weyl:

$$\|f\|_{W^p} := \limsup_{T \to \infty} \|f\|_{S_T^p}$$

qui définit la presque périodicité au sens de Weyl.

4) La semi-norme de Besicovitch:

$$\|f\|_{B^p} := \left[\limsup_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}}$$

qui donne la presque-périodicité au sens de Besicovitch.

Toutes ces autres définitions de La presque-périodicité impliquent celle de Bohr (autrement dit, ces autres définitions sont plus générales). Celle de Weyl implique celle de Stepanoff pour le même p.

Notations

- On note par $AP^0(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions Bohr-presque-périodiques définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.
- Si $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $AP^k(\mathbb{R}^n) := \{x \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \forall j \in \{1, ..., k\}, \frac{d^{\,j} x}{d\,t^{\,j}} \in AP^0(\mathbb{R}^n) \}$
- Pour $k = 1$, $AP^1(\mathbb{R}^n) = \{x \in C^{\,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \cap AP^0(\mathbb{R}^n); x' \in AP^0(\mathbb{R}^n)\}$.

Définition 2.3 *On définit la fonction linéaire continue (dite valeur moyenne)*

$$M : AP^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n \quad ; x \mapsto M(x)$$

par:

$$M(x) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt \ .$$

Remarque 2.2 *Notons que la valeur moyenne M est invariante par translation de temps ie:*

$$M(x) = M(x_\tau) \ \ , \text{ où } x_\tau(t) := x(t+\tau) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}; \tau \in \mathbb{R}$$

Proposition 2.1 *$AP^0(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est un espace de Banach, où*

$$\|x\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

pour tout $x \in AP^0(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.2 *$AP^1(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme $\|x\|_{C^1} = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$, est un espace de Banach.*

Si E et F sont deux espaces normés de dimension finie, on note par : $APU\ (E\times\mathbb{R}, F)$ l'espace des fonctions

$$\begin{aligned} f : E\times\mathbb{R} &\to F; \\ (x,t) &\mapsto f(x,t) \end{aligned}$$

qui sont presque-périodiques en t uniformément par rapport à x.

Théorème 2.1 *[13] Si $\varphi \in AP^0(E)$ et $f\ (x,.) \in AP^0(F)$ uniformément par rapport à x (dans un sous-ensemble compact de E), alors*

$$f(\varphi(t), t) \in AP^0(F).$$

Preuve: Voir [13, Page 27] ■

D'une façon similaire aux fonctions périodiques, une fonction presque-périodique possède une écriture sous forme de serie de Fourier-Bohr (formelle)qui est la suivante : si $f \in AP^0(\mathbb{R}^n)$ alors

$$f(t) \approx \sum_{k\in\mathbb{N}} a(f,\lambda_k) \exp i\lambda_k t.$$

Les coefficients de Fourier-Bohr de $f \in AP^0(\mathbb{R}^n)$ sont les vecteurs complexes:

$$a(f, \lambda_k) := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp(-i\lambda_k t) f\ (t) dt$$

et on note par :

$$\wedge(f\ ) := \{\lambda_k \in \mathbb{R}\ ;\ a(f, \lambda_k) \neq 0\}\, .$$

$\wedge(f\ )$ est au plus dénombrable.

Théorème 2.2 *(Théorème fondamental de Bohr [4]). si $f \in AP^0(\mathbb{R}^n)$, l'égalité de Parseval est vérifiée autrement dit:*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |a(f, \lambda_k)|^2 = M\left(|f(t)|^2\right)$$

Théorème 2.3 *(d'unicité[4]) Si deux fonctions $f, g \in AP^0(\mathbf{E})$ ($\mathbf{E}$ étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ont la même série de Fourier-Bohr alors $f = g$.*

Preuve: Voir [4, page 27]. ■

Théorème 2.4 *[4] Si $f \in AP^0(\mathbf{E})$ alors*

$$\lim_{\nu \to +\infty} \frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} f(t + kT) = f^T(t)$$

existe uniformément en t , et est une fonction purement périodique dont la série de Fourier est constituée des termes de la série de Fourier-Bohr de f qui ont une période T.

Preuve: Voir [4, page 44]. ■

Théorème 2.5 *[13] Pour tout λ, et $f, g \in AP^0(\mathbf{E})$ on a:*

$$|a(f, \lambda) - a(g, \lambda)| \leq \|f - g\|_{\mathbf{E}}$$

par conséquent si une siute $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in AP^0(\mathbf{E})$ *converge uniformément vers* f *alors* $a(f_n,\lambda)$ *converge uniformément vers* $a(f,\lambda)$, *et la série de Fourier-Bohr converge vers la série de Fourier-Bohr de* f *formellement.*

Preuve: Il faut juste appliquer la définition de $a(f,\lambda)$. Pour plus de détails voir [13, page 35]. ■

2.2 Distributions presque-périodiques

2.2.1 Définitions et notations:

Dans cette partie, on gardera les notations de Schwartz [21].

• On appelle (D) l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact sur $\mathbb{R}$.

• On appelle (D') l'ensemble des distributions.

• On appelle (B) l'espace des fonctions indéfiniment dérivables bornées sur $\mathbb{R}$.

• on appelle (B_{pp}) le sous espace fermé des fonctions $\varphi \in (B)$ qui sont presque-périodiques au sens de Bohr ainsi que toutes ses dérivées; autrement dit

$$(B_{pp}) = AP^{\infty}$$

• On note par (B') (le dual topologique de (B)) l'espace des distributions bornées.

• On di que $\mathbf{T}$ est une distribution presque-périodique si $\mathbf{T} \in (B')$ et si l'enemble des traslatées $\tau_k\mathbf{T}$ est relativement compact dans (B'), on en déduit que l'ensemble des distributions presque-périodiques est le sous espace vectoriel fermé (B'_{pp})de (B').

• On définit par prolongement unique, la moyenne d'une distribution $\mathbf{T} \in (B'_{pp})$ par $M(\mathbf{T})$ qui une forme linéaire continue sur (B'_{pp}).

•Pour $\mathbf{T} \in (B'_{pp}), \varphi \in (B_{pp})$ on pose:

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}) = \langle \mathbf{T}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = M(\varphi.\mathbf{T})$$

2.2.2 Opérations et propriétés:

- Si $\varphi \in (B_{pp})$, si $\mathbf{T} \in (B'_{pp})$, alors $\varphi.\mathbf{T} \in (B'_{pp})$.
- Si $\mathbf{T} \in (B'_{pp})$, si $S \in (D'_{L^1})$, alors $S * \mathbf{T} \in (B'_{pp})$.
- Les dérivées d'une distribution presque-périodique sont presque-périodiques.
- Pour qu'une distribution $\mathbf{T}$ soit presque-périodique il faut et il suffit qu 'elle soit somme finie de dérivées de fonctions continues presque-périodiques usuelles (au sens de Bohr).
- Pour qu'une distribution $\mathbf{T}$ soit presque-périodique il faut et il suffit que ses régularisées $\mathbf{T} * \boldsymbol{\varphi}$, $\varphi \in (D)$ soient toutes des fonctions continues presque-périodiques usuelles.

2.2.3 Développement de Fourier:

Si $\mathbf{T} \in (B'_{pp})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, le coefficient de Fourier $a(\mathbf{T},\lambda)$ est défini par:

$$a(\mathbf{T},\lambda) := M[(\exp(-2\pi i\lambda.t)).\mathbf{T}]$$

seuls les $a(\mathbf{T},\lambda) \neq 0$ forment le spectre de $\mathbf{T}$.Pour plus de détails voir [21].

2.3 Construction de l'espace $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

Pour appliquer notre approche varietionnelle, il est nécessaire de définir l'espace de Hilbert $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ appelé espace de Blot [5] sur lequel on va minimiser la fonctionnelle d'énergie (dite d'action moyenne) associée à notre problème.

Définition 2.4 *Si $p \in [1,\infty)$, on note par $B^p(\mathbb{R}^n)$ le complété de $AP^0(\mathbb{R}^n)$ dans*

$L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ par rapport à la semi-norme

$$\|u\|_{B^p} := \left[\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |u(t)|^p_{\mathbb{R}^n}\, dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 2.3

- *On rappelle que : Si $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de $AP^0(\mathbb{R}^n)$ et si $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ qui satisfait*

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{B^p} = 0,$$

alors

$$u \in B^p(\mathbb{R}^n).$$

- *Si $f \in B^p(\mathbb{R}^n)$,alors$\|f\|_{B^p}$ existe dans $\mathbb{R}$.*
- *Si $f, g \in B^p(\mathbb{R}^n)$,on notera $g \sim_p h$ la relation d'équivalence définie par :*

$$g \sim_p h \Leftrightarrow \|g-h\|_{B^p} = 0.$$

Définition 2.5 *On définit L'espace*

$$\mathbf{B}^p(\mathbb{R}^n) := B^p(\mathbb{R}^n)/ \sim_p .$$

Si $f \in B^p(\mathbb{R}^n)$ sa classe d'équivalence est $[f\ ]_p$ est un élement de $\mathbf{B}^p(\mathbb{R}^n)$.Dans la suite, et pour alléger l'écriture on écrit $f \in \mathbf{B}^p(\mathbb{R}^n)$ au lieu de $[f\ ]_p$.

Proposition 2.3 *[5] Si $f \in \mathbf{B}^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|f\ \|_p := \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^p_{\mathbb{R}^n}\, dt]^{\frac{1}{p}} = [M(|f\ |^p)\right]^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $\mathbf{B}^p(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 2.4 *D'aprés ce qui précède, pour $u \in \mathbf{B}^p(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite $u_j \in$*

$AP^0(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\lim_{j\to\infty} \|u - u_j\|_p = 0$$

Proposition 2.4 *[5] Si $p = 2$, $\mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et sa norme $\|.\|_2$est associée au produit scalaire $\langle ., . \rangle_2$défini par:*

$$\langle f, g \rangle_2 := M(f.g) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t).g(t)dt, \qquad \text{pour tous } f, g \in \mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n)$$

Définition 2.6 *Si $u \in \mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n)$, on définit sa dérivée généralisée selon K. Vo-Khac [23, Chapitre B1] notée $\nabla_t u \in \mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n)$ par :*

$$\lim_{s\to 0} \left\| \frac{1}{s} [u(. + s) - u(.)] - \nabla_t u(.) \right\|_2 = 0.$$

L'opérateur de dérivation défini par

$$\begin{aligned} \nabla_t :\in \mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n) \quad &\to \mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n) \\ u \qquad\quad &\mapsto \nabla_t u \end{aligned}$$

est un opérateur linéaire non borné; son domaine est noté $Dom(\nabla_t)$.

Définition 2.7 *Soit l'ensemble*

$$\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n) := Dom(\nabla_t) = \left\{ u \in \mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n) \quad , \ \nabla_t u \in \mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Proposition 2.5 *[5] Muni du produit scalaire*

$$\langle u \ , v \rangle_{1,2} := \langle u, v \rangle_2 + \langle \nabla_t u, \ \nabla_t v \rangle_2 \, ,$$

l'ensemble $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 2.6 *[5] Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que : $1 \leq k \leq \infty$, alors $AP^k(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.*

Proposition 2.7 *[5] Soient* $f \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in AP^1(\mathbb{R}^n)$*, alors* $(f.g) \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\nabla_t(f.g) = \nabla_t f.g + f.g'$ *et* $M(\nabla_t f.g) = -M(f.g')$*.Où le point représente le produit scalaire dans* $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.8 *[5] Soient* $f, g \in \mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n)$ *tels que :* $\forall h \in AP^1(\mathbb{R}^n)$ *on a:* $M(f.h) = -M(g.h')$ *,alors* $g \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\nabla_t g = f$.

Preuve: Pour la preuve de ces quatre dernières propositions voir [5]. ■

Pour alléger l'écriture , on utilisera des fois dans la suite les notations suivantes:

$$\underline{x}(t) := (x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r)),$$

où $x \in AP^1(\mathbb{R}^n)$.

et

$$\underline{u}(t) := (u(t), u(t-r), \nabla_t u(t), \nabla_t u(t-r)),$$

où $u \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

2.4 Opérateurs monotones

Définition 2.8 *Soit* H *un espace de Hilbert sur* $\mathbb{R}$*.Un opérateur* $A : H \to H$ *qui satisfait:*

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0, \qquad \textit{pour tout } u, v \in H.$$

est dit opérateur monotone.

Un opérateur est dit strictement monotone si pour tout $u \neq v$ l'inégalité précedente est stricte.

Un opérateur A est dit fortement monotone s'il existe $c > 0$ tel que:

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq c \left\| u - v \right\|^2, \qquad \text{pour tout } u, v \in H.$$

Remarque 2.5 *Il est clair qu'un opérateur fortement monotone est strictement monotone et, bien sûr monotone.*

Théorème 2.6 *[10] Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$,et $A : H \rightarrow H$ un opérateur continu et fortement monotone,alors A est un homéomorphisme de H dans H.*

Preuve: Voir [10, Page 318] ■

Proposition 2.9 *[17] Soit $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$ un convexe et $F : \mathbf{K} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction G-différentiable, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) F est convexe..

ii) DF (la différentielle de F) est monotone c'est à dire que:

$$\forall u, v \in \mathbf{K}, \qquad \langle DF\ (u) - DF\ (v), u - v \rangle \geq 0.$$

.

Chapitre 3

Formalisme variationnel pour les fonctions Bohr presque-périodiques

Dans ce chapitre et les deux suivants, on s'est inspiré du travail de J. Blot [5] et celui de M. Ayachi et J. Blot [2].

Pour $L : (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note par L_X la différentielle partielle de L par rapport à $X \in (\mathbb{R}^n)^4$ définie par:

$$L_X(X,t).Y := \sum_{k=1}^{4} D_k L(x_1, x_2, x_3, x_4, t).y_k$$

où $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in (\mathbb{R}^n)^4$ et $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in (\mathbb{R}^n)^4$.

Soit l'hypothèse suivante :

(H_1) $L \in APU((\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $(X,t) \in (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R}$ on suppose que $L_X(X,t)$ existe et $L_X \in APU((\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R}, \mathcal{L}((\mathbb{R}^n)^4, \mathbb{R}))$.

On a le lemme suivant:

Lemme 3.1 *La fonctionnelle $\Phi : AP^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\begin{aligned} \Phi(x) \quad &: = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} L(x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), t)dt \\ &= M(L(x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), t)) \end{aligned}$$

est de classe C^1.

Pour tous $x, h \in AP^1(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$D\Phi(x).h = M[D_1L(\underline{x}(t), t).h(t) + D_2L(\underline{x}(t), t).h(t-r) + D_3L(\underline{x}(t), t).h'(t) + D_4L(\underline{x}(t), t).h'(t-r)]$$

Preuve: On introduit l'opérateur linéaire :

$$Q{:}AP^1(\mathbb{R}^n) \to (AP^0(\mathbb{R}^n))^4$$

défini par:

$$Q(x)(t) := (x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r)) = \underline{x}(t)$$

Les quatre composantes de $Q(x)$ sont continues ce qui implique la continuité de Q, or Q est linéaire, donc Q est de classe C^1, et pour tous $x, h \in AP^1(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$DQ(x).h = Q(h)$$

Sous (H_1), L'opérateur de Nemytski

$$N_L : (AP^0(\mathbb{R}^n))^4 \to AP^0(\mathbb{R})$$

défini par:

$$N_L(X)(t) := L(X(t), t)$$

est de classe C^1et pour tous $X, Y \in (AP^0(\mathbb{R}^n))^4$on a :

$$(DN_L(X).Y)(t) = L_X(X(t), t).Y(t).$$

La fonctionelle linéaire continue:

$$M : AP^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

définie par:

$$M(x) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$$

est de classe C^1 et pour tous $\varphi, \psi \in AP^0(\mathbb{R})$ on a:

$$DM(\varphi).\psi = M(\psi)$$

Ainsi, $\Phi = M \circ N_L \circ Q$ est de classe C^1 comme composée de trois applications de classe C^1.

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned} D\Phi(x).h &= DM(N_L(Q(x)) \circ DN_L(Q(x)) \circ DQ(x).h \\ &= M(DN_L(Q(x)).Q(h)) \\ &= M(L_X(\underline{x}(t), t).\underline{h}(t)) \end{aligned}$$

Et en exprimant L_X en termes de D_jL, on obtient :

$$\begin{aligned} D\Phi(x).h &= M[D_1L(\underline{x}(t), t).h(t) + D_2L(\underline{x}(t), t).h(t-r) \\ &\quad + D_3L(\underline{x}(t), t).h'(t) + D_4L(\underline{x}(t), t).h'(t-r)] \end{aligned}$$

■

Théorème 3.1 *(Principe variationnel)*
Sous (H_1), pour tout $x \in AP^1(\mathbb{R}^n)$, les deux assertions suivantes sont équivalentes:
i) $D\Phi(x) = 0$, *c'est à dire que x est un point critique de Φ dans $AP^1(\mathbb{R}^n)$*
ii) *x est une solution Bohr-presque-périodique (au sens faible) de notre équation (1).*

Preuve: Montrons que: i)⇒ii)

Soit $D\Phi(x) = 0$ i.e:

$$M(D_1L(\underline{x}(t), t).h(t) + D_2L(\underline{x}(t), t).h(t-r)$$
$$+D_3L(\underline{x}(t), t).h'(t) + D_4L(\underline{x}(t), t).h'(t-r) = 0$$

Puisque la valeur moyenne est invariante par translation on a:

$$M(D_2L(\underline{x}(t), t).h(t-r)) = M(D_2L(\underline{x}(t+r), t+r).h(t))$$

et

$$M(D_4L(\underline{x}(t), t).h'(t-r)) = MD_4L(\underline{x}(t+r), t+r).h'(t)) \tag{3.1}$$

En utilisant le lemme 3.1 on obtient pour tout $h \in AP^1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} 0 &= M(D_1L(\underline{x}(t), t) + D_2L(\underline{x}(t+r), t+r)).h(t) \\ &\quad +M(D_3L(\underline{x}(t), t) + D_4L(\underline{x}(t+r), t+r)).h'(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Posons :

$$q(t) := D_1L(\underline{x}(t), t) + D_2L(\underline{x}(t+r), t+r)$$

Notons par $q_k(t)$ ses coordonnées pour $k = 1, ..., n$.

Posons:

$$p(t) := D_3L(\underline{x}(t), t) + D_4L(\underline{x}(t+r), t+r)$$

Notons par $p_k(t)$ ses coordonnées pour $k = 1, ..., n$.

On déduit de l'égalité (3.2) que pour tout $\varphi \in AP^\infty(\mathbb{R})$ on a :

$$M(q_k(t).\varphi(t)) = -M(p_k(t).\varphi'(t))$$

on obtient:

$$Dp_k = q_k$$

dans le sens des distributions presque-périodiques.En passant par les séries de Fourier on a pour tout $\ell \in \mathbb{N}$:

$$a(Dp_k, \lambda_\ell) = a(q_k, \lambda_\ell)$$

Or p_k est continue on aura donc

$$a(Dp_k, \lambda_\ell) = a(p'_k, \lambda_\ell)$$

ceci implique

$$a(p'_k, \lambda_\ell) = a(q_k, \lambda_\ell)$$

q_k étant continue, en utilisant le théorème 2.2 des series de Fourier-Bohr on déduit que p_k est de classe C^1 et que :

$$p'_k = q_k$$

dans le sens des dérivées.La fonction $p(. - r)$ est de classe C^1 et donc:

$$p'(t-r) = q(t-r)$$

qui est exactement (ii)

Maintenant montrons que :ii)⇒i).

Pour tous $f \in AP^1(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ et $y \in AP^1(\mathbb{R}^n)$;on a:

$$M(f.y') = -M(f'.y)$$

en effet, en faisant une intégration par partie on obtient:

$$\begin{aligned} M(f.y')(t) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t).y'(t)dt \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T} \left[(f.y)(T) - (f.y)(-T)\right] - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f'(t).y(t)dt \\ &= 0 \qquad\qquad - M(f'.y)(t) \end{aligned}$$

car $(f.y) \in AP^1(\mathbb{R}^n)$.

En prenant:

$$
\begin{aligned}
f &= D_3L(x(t-r), x(t-2r), x'(t-r), x'(t-2r), t-r) \\
&\quad + D_4L(x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), t)
\end{aligned}
$$

et en translatant le temps par r, on obtient de (ii) la relation suivante :
pour tout $h \in AP^1(\mathbb{R}^n)$

$$
\begin{aligned}
0 &= M((D_1L(\underline{x}(t), t) + D_2L(\underline{x}(t+r), t+r)).h(t) \\
&\quad + (D_3L(\underline{x}(t), t) + D_4L(\underline{x}(t+r), t+r)).h'(t)) \\
&= M(D_1L(\underline{x}(t), t).h(t) + D_2L(\underline{x}(t), t).h(t-r) \\
&\quad + D_3L(\underline{x}(t), t).h'(t) + D_4L(\underline{x}(t), t).h'(t-r)) \\
&= D\Phi(x).h
\end{aligned}
$$

et ainsi on a (i). $\blacksquare$

Dans cette partie on ennonce quelques résultats concernant la structure de l'ensemble des solutions Bohr-presque-périodiques de notre équation (1) dans le cas où L est autonome et convexe.

Théorème 3.2 *Supposons que $L \in C^1((\mathbb{R}^n)^4, \mathbb{R})$, et que L est convexe, alors on a:*
i) L'ensemble des solutions Bohr-presque-périodiques de l'équation (1) est un sous ensemble fermé convexe de $AP^1(\mathbb{R}^n)$.
ii) Si x^1 est une solution T^1-périodique non constante de l'équation (1), si x^2 est une solution T^2-périodique non constante de l'équation (1), et si $\frac{T_1}{T_2}$ n'est pas rationnel, alors $(1-\theta)x^1 + \theta x^2$ est une solution Bohr-presque-périodique non périodique del'équation (1) pour tout $\theta \in]0, 1[$.
iii) Si x est une solution Bohr-presque-périodique de l'équation (1), $T \in (0, \infty)$ est tel que $a(x, \frac{2\pi}{T}) \neq 0$, alors l'équation (1) admet une solution T-périodique non constante.

iv) Si x est une solution Bohr-presque-périodique de l'équation (1), alors $M(x)$ est une solution constante de l'équation (1).

Preuve: i) Puisque L est convexe, la fonctionnelle Φ est aussi convexe dans $AP^1(\mathbb{R}^n)$ en effet:

soient $x_1, x_2 \in AP^1(\mathbb{R}^n)$ et soit $\theta \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\Phi((1-\theta)x_1 + \theta x_2) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} L((1-\theta)\underline{x}_1(t) + \theta \underline{x}_2(t))dt \\
&\leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} [(1-\theta)L(\underline{x}_1(t)) + \theta L(\underline{x}_2(t))]dt \\
&= (1-\theta)\left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} L(\underline{x}_1(t))dt\right] + \theta\left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} L(\underline{x}_2(t))dt\right] \\
&= (1-\theta)\Phi(x_1) + \theta\Phi(x_2)
\end{aligned}$$

L est autonome et de classe C^1, L satisfait (H_1) alors Φ est de classe C^1. D'aprés le théorème 1.1 l'ensemble des points critiques de Φ est égal à l'ensemble des minimums de Φ c'est à dire:

$$A = \left\{x \in AP^1(\mathbb{R}^n) : \Phi(x) = \inf \Phi\right\} = \left\{x \in AP^1(\mathbb{R}^n) : D\Phi(x) = 0\right\}$$

de plus A est fermé et convexe, en effet :

$$A = \left\{x \in AP^1(\mathbb{R}^n) : D\Phi(x) = 0\right\} = (D\Phi)^{-1}\{0\}$$

Φ étant de classe C^1, donc A est fermé.

Soient $x_1, x_2 \in A$, comme Φ est convexe on a :

$$\begin{aligned}
\Phi((1-\theta)x_1 + \theta x_2) &\leq (1-\theta)\Phi(x_1) + \theta\Phi(x_2) \\
&= (1-\theta)\inf\Phi + \theta\inf\Phi \\
&= \inf\Phi
\end{aligned}$$

Or

$$\inf \Phi \leq \Phi((1-\theta)x_1 + \theta x_2) \leq \inf \Phi$$

Ceci implique que :

$$\Phi((1-\theta)x_1 + \theta x_2) = \inf \Phi$$

Et on conclut que:

$$(1-\theta)x_1 + \theta x_2 \in A,$$

c'est à dire A est convexe.

ii) Soient x^1une solution T^1-périodique non constante de l'équation (1) et x^2 une solution T^2-périodique non constante de l'équation (1).

Posons: $x = (1-\theta)x^1 + \theta x^2$ avec $\theta \in]0,1[$ .Comme A est convexe, x est aussi solution de l'équation (1).

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que x est périodique de période τ, ce qui nous permet d'écrire:

$$x(t) = x(t+\tau) = (1-\theta)x^1(t+\tau) + \theta x^2(t+\tau)$$

D'autre part:

$$(1-\theta)x^1(t) + \theta x^2(t) = x(t) = (1-\theta)x^1(t+T^1) + \theta x^2(t+T^2).$$

Car x^1 est périodique de période T^1, et x^2 est périodique de période T^2.

Par identification on a :

$$\begin{cases} x^1(t+\tau) = x^1(t+T^1) = x^1(t) \\ x^2(t+\tau) = x^2(t+T^2) = x^2(t) \end{cases}$$

$$ie : \begin{cases} \exists a \in \mathbb{Z}^*; \tau = a.T^1 \\ \exists b \in \mathbb{Z}^*; \tau = b.T^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{T^1}{T^2} = \frac{b}{a}$$

Ce qui entraine que $\dfrac{T^1}{T^2}$ est rationnel, et ceci contredit l'hypothèse; on conclut que si $\dfrac{T_1}{T_2}$ n'est pas rationnel, alors $(1-\theta)x^1 + \theta x^2$ est une solution Bohr-presque-périodique non périodique de l'équation (1).

iii) Soit x une solution Bohr-presque-périodique de l'équation (1) et $T \in (0, \infty)$ tel que $a(x, \frac{2\pi}{T}) \neq 0$.

Considérons l'expression suivante:

$$C_{T,\nu}(x)(t) := \frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} x(t+kT) \qquad \textit{où} \quad \nu \in \mathbb{N}^*, t \in \mathbb{R}$$

Par le théorème 2.3, il existe une fonction T-périodique continue notée par x^T telle que :

$$\lim_{\nu \to +\infty} \left\| C_{T,\nu}(x) - x^T \right\|_\infty = 0$$

On vérifie que :

$$\lim_{\nu \to \infty} \left\| C_{T,\nu}(x) - x^T \right\|_{C^1} = 0.$$

En effet:

$$\lim_{\nu \to \infty} \left\| C_{T,\nu}(x) - x^T \right\|_{C^1} = \lim_{\nu \to \infty} \left[\left\| C_{T,\nu}(x) - x^T \right\|_\infty + \left\| C\,'_{T,\nu}(x) - (x^T)' \right\|_\infty \right]$$

Puisque d'aprés le même théorème 2.3, il existe une fonction y^T T-périodique continue telle que :

$$\lim_{\nu \to \infty} \left\| C\,'_{T,\nu}(x) - y^T \right\|_\infty = 0$$

et puisque

$$\lim_{\nu \to +\infty} \left\| C_{T,\nu}(x) - x^T \right\|_\infty = 0$$

ceci implique

$$y^T = (x^T)' et \lim_{\nu\to\infty} \left\| C\,'_{T,\nu}(x) - (x^T)' \right\|_\infty = 0,$$

et donc on conclut que:

$$\lim_{\nu\to+\infty} \left\| C_{T,\nu}(x) - x^T \right\|_{C^1} = 0.$$

L est autonome, $t \to x(t+kT)$ est une solution Bohr-presque-périodique de l'équation (1), en effet, en utilisant le changement de variable suivant

$$\eta = t + kT \qquad ie: \quad d\eta = dt$$

dans l'équation (1) on obtient le résultat.

On remarque que $C_{T,\nu}(x)$ est une combinaison convexe de solutions Bohr-presque-périodiques de l'équation (1), A étant convexe, $C_{T,\nu}(x)$ est donc solution Bohr-presque-périodique de l'équation (1), et puisque A est fermé, alors x^T est aussi solution T-périodique de l'équation (1).

On vérifie que pour $m \in \mathbb{Z}$:

$$a(C_{T,\nu}(x), \frac{2\pi m}{T}) = a(x, \frac{2\pi m}{T})$$

en effet:

$$\begin{aligned} a(C_{T,\nu}(x), \frac{2\pi m}{T}) &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp(-\frac{2\pi m}{T} it) C_{T,\nu}(x) dt \\ &= \frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp(-\frac{2\pi m}{T} it) x(t+kT) dt \end{aligned}$$

En utilisant le même changement de variable $(\eta = t + kT)$,on obtient:

$$\begin{aligned} a(C_{T,\nu}(x), \frac{2\pi m}{T}) &= \frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{(k-1)T}^{(k+1)T} \exp(-\frac{2\pi m}{T} i\eta) x(\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1} a(x, \frac{2\pi m}{T}) \\ &= a(x, \frac{2\pi m}{T}) \end{aligned}$$

D'aprés le théorème 2.4 on a:

$$\lim_{\nu\to+\infty} a(C_{T,\nu}(x), \frac{2\pi m}{T}) = a(x^T, \frac{2\pi m}{T})$$

Et donc :

$$a(x^T, \frac{2\pi m}{T}) = a(x, \frac{2\pi m}{T})$$

Puisque x^T est périodique

$$\wedge(x^T) = \left\{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \in \frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}\right\}$$

Si $a(x, \frac{2\pi}{T}) \neq 0$ (i.e:$m = 1$), x^T est une solution T-périodique non constante de l'équation (1) ce qui prouve (iii).

Pour prouver (iv) il suffit de prendre $T^1 \in (0, \infty)$ tel que :

$$(\frac{2\pi}{T^1})\mathbb{Z} - \{0\} \cap \wedge(x) = \varnothing$$

et alors tous les coefficients de Fourier-Bohr de x^{T^1} sont tous nuls sauf la valeur moyenne de $x^{T^1} qui$ est égale à $M(x)$. ■

Interprétation :

• Si l'équation (1) n'admet aucune solution constante, alors elle n'admet ni solution périodique ni solution presque-périodique non périodique.

• Si l'équation (1) n'admet aucune solution périodique ou si toutes les périodes de ses solutions périodiques sont des multiples rationnels d'un nombre réel fixé, alors elle n'admet pas de solution presque-périodique non périodique.

L'espace $(AP^1(\mathbb{R}^n), \|.\|_{C^1})$ n'est pas reflexif, ce qui ne nous permet pas de développer les techniques des méthodes variationnelles, c'est pourquoi on va étendre notre étude à l'espace de Hilbert $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

Chapitre 4

Formalisme variationnel pour les fonctions Besicovitch presque périodiques

Pour montrer le principe variationnel sur $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, nous avons besoin de deux lemmes.

E et F sont deux espaces normés de dimension finie.

Lemme 4.1 *Soit $g \in APU(E \times \mathbb{R}, F)$ une fonction qui satisfait la condition de Hölder suivante:*

$$\exists \alpha \in (0,1]; \exists a \in [0,\infty); \forall t \in \mathbb{R}; \forall z, w \in E : |g(z,t) - g(w,t)|_F \leq a\, |z-w|_E^{\alpha}$$

Soit $p, q \in [1,\infty)$ tels que $p = \alpha q$, alors on a:

i) Si $u \in \mathbf{B}^p(E)$, alors : $t \to g(u(t),t) \in \mathbf{B}^q(F)$.

ii) L'opérateur de Nemytski $N_g : \mathbf{B}^p(E) \to \mathbf{B}^q(F)$ défini par:

$$N_g u(t) := g(u(t),t)$$

satisfait :

$$\|N_g u - N_g v\|_q \leq a \|u - v\|_p^\alpha$$

et ceci pour tous $u, v \in \mathbf{B}^p(E)$

Preuve: Posons $b(t) := |g(0,t)|$, ainsi nous avons $b \in AP^0(\mathbb{R})$ .La condition de Hölder nous donne:

$$|g(z,t)|_F - b(t) = |g(z,t)|_F - |g(0,t)|_F \leq |g(z,t) - g(0,t)|_F \leq a |z|_E^\alpha$$

d'où

$$|g(z,t)|_F \leq a |z|_E^\alpha + b(t),$$

pour tout $z \in E, t \in \mathbb{R}$.

Si $u \in \mathbf{B}^p(E)$, alors nous avons :

$$|g(u(t),t)|_F \leq a |u(t)|_E^\alpha + b(t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Puisque b est continue on a:

$$b \in L^q_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

comme

$$(|u(t)|_E^\alpha)^q = |u(t)|_E^p ,$$

on a:

$$|u|^\alpha \in L^q_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

et

$$t \mapsto g(u(t),t) \in L^q_{loc}(\mathbb{R}, F).$$

Or on sait que pour $u \in \mathbf{B}^p(E)$,il existe une suite $(u_j)_j \in AP^0(E)$ telle que:

$$\lim_{j\to+\infty} \|u - u_j\|_p = 0.$$

Posons:

$$\varphi_j(t) := g(u_j(t), t),$$

par le théorème 2.1 on a:

$$\varphi_j \in AP^0(F).$$

Un calcul direct nous donne:

$$\begin{aligned}
(M(\left|g(u(t),t) - \varphi_j(t)\right|_F^q))^{\frac{1}{q}} &\leq (M(a\left|u(t) - u_j(t)\right|_E^{\alpha})^q)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.1)\\
&\leq a(M(\left|u(t) - u_j(t)\right|_E^p))^{\frac{1}{q}}\\
&= a(M(\left|u(t) - u_j(t)\right|_E^p))^{\frac{\alpha}{p}}\\
&= a\left\|u - u_j\right\|_p^{\alpha}
\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{j\to+\infty} \|u - u_j\|_p = 0,$$

ce qui implique que:

$$\lim_{j\to+\infty} \left(M(\left|g(u(t),t) - \varphi_j(t)\right|^q)\right)^{\frac{1}{q}} = 0$$

et donc :

$$t \to g(u(t),t) \in \mathbf{B}^q(\ F),$$

et ainsi (i) est prouvé.

Pour démontrer (ii) il suffit de remplacer dans (4.1) $\varphi_j(t)$ par $g(v(t),t)$ et on aura:

$$\|N_g u - N_g v\|_q \leq a\|u - v\|_p^{\alpha}$$

■

Lemme 4.2 *Soit* $f \in APU(E \times \mathbb{R},\ F\ )$*une fonction telle que la dérivée partielle* $D_1 f$ (z,t) *existe pour tout* $(z,t) \in E \times \mathbb{R}$ *et telle que:*

$$D_1 f \in APU(E \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(E,F)).$$

Nous supposons l'hypothèse suivante:

H) $\exists a_1 \in [0,\infty),$ *tel que pour tous* $z, w \in E$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}$:

$$|D_1 f\ (z,t) - D_1 f\ (w,t)|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq a_1 \, |z-w|_E$$

Alors l'opérateur de Nemytski :

$$N_f : \mathbf{B}^2(E) \to \mathbf{B}^2(F)$$

défini par :

$$N_f(u)(t) := f(u(t),t)$$

est de classe $C^{\ 1}$ *pour tous* $u, h \in \mathbf{B}^2(E)$

$$(DN_f(u).h)(t) = D_1 f(u(t),t).h(t).$$

Preuve: La démonstration se fait en cinq étapes.

1$^{\text{ère}}$étape : Nous montrons que $\exists a_0 \in [0,\infty), b \in \mathbf{B}^1(\mathbb{R})$ tel que : pour tout $(z,t) \in E \times \mathbb{R}$,

$$|f\ (z,t)|_F \leq a_0 \, |z\ |_E^2 + b(t).$$

On a d'aprés les hypothèses :

$$|D_1 f\ (z,t) - D_1 f\ (0,t)|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq a_1 \, |z-0|_E = a \, |z|_E$$

Ceci implique:

$$\begin{aligned} |D_1 f\ (z,t)|_{\mathcal{L}(E,F)} &\leq |D_1 f\ (z,t) - D_1 f\ (0,t)|_{\mathcal{L}(E,F)} + |D_1 f\ (0,t)|_{\mathcal{L}(E,F)} \\ &\leq a_1 |z\ |_E + |D_1 f\ (0,t)|_{\mathcal{L}(E,F)} \end{aligned} \tag{4.2}$$

En utilisant le théorème de la valeur moyenne on a pour tout $(z,t) \in E \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f\ (z,t)|_F &\leq |f\ (z,t) - f\ (0,t)|_F + |f\ (0,t)|_F \\ &\leq \sup_{\zeta \in]0,z[} |D_1 f\ (\zeta,t)|_{\mathcal{L}(E,F)} |z-0|_E + |f\ (0,t)|_F \\ &\leq \sup_{\zeta \in]0,z[} (a_1 |\zeta|_E + |D_1 f\ (0,t)|_{\mathcal{L}(E,F)}). |z|_E + |f\ (0,t)|_F \\ &= (a_1 |z|_E + |D_1 f\ (0,t)|_{\mathcal{L}(E,F)}). |z|_E + |f\ (0,t)|_F \\ &\leq a_1 |z|_E^2 + \frac{1}{2} |D_1 f\ (0,t)|_{\mathcal{L}(E,F)}^2 + \frac{1}{2} |z|_E^2 + |f\ (0,t)|_F \\ &= (a_1 + \frac{1}{2}) |z|_E^2 + \frac{1}{2} |D_1 f\ (0,t)|_{\mathcal{L}(E,F)}^2 + |f\ (0,t)|_F \end{aligned} \tag{4.3}$$

Posons:

$$b(t) := \frac{1}{2} |D_1 f\ (0,t)|_{\mathcal{L}(E,F)}^2 + |f\ (0,t)|_F\,,$$

et

$$a_0 := a_1 + \frac{1}{2}.$$

Puisque

$$f \in APU(E \times\ \mathbb{R}, F) \text{ et } D_1 f \in APU(E \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(E,F)),$$

on a:

$$b \in AP^0(\mathbb{R}) \subset \mathbf{B}^1(\mathbb{R}).$$

2^éme^étape : Nous montrons que $t \to f\ (u(t),t) \in \mathbf{B}^1(F)$ où $u \in \mathbf{B}^2(E)$

Soit $u \in \mathbf{B}^2(E)$, alors l'inégalité:

$$|f\ (u(t),t)|_F \leq a_0 |u(t)|_E^2 + b(t) \quad \text{implique que } t \to f\ (u(t),t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, F)$$

En utilisant le lemme 4.1 avec : $p = 2, q = 2, \alpha = 1 et \ g = D_1 f$, on a:

$$t \to D_1 f \ (u(t), t) \in \mathbf{B}^2(\mathcal{L}(E, F))$$

Soit $(u_m)_m$ une suite de $AP^0(E)$ telle que:

$$\lim_{m \to \infty} \|u - u_m\|_2 = 0.$$

En utilisant le théorème de la valeur moyenne, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& |f(u_m(t), t) - f(u(t), t) - D_1 f(u(t), t).(u_m(t) - u(t))|_F \\
\leq \ & (\sup_{\zeta \in]u(t), u_m(t)[} |D_1 f(\zeta, t) - D_1 f(u(t), t)|_{\mathcal{L}(E,F)}). \, |u_m(t) - u(t))|_E \\
\leq \ & a_1 \sup_{\zeta \in]u(t), u_m(t)[} |\zeta - u(t)|_E \, . \, |u_m(t) - u(t)|_E \\
\leq \ & a_1 \, |u_m(t) - u(t)|_E^2
\end{aligned}$$

par conséquent:

$$M(|f(u_m(t), t) - f(u(t), t) - D_1 f(u(t), t).(u_m(t) - u(t))| \leq a_1 . \, \|u_m - u\|_2^2$$

puisque

$$t \to D_1 f(u(t), t) \in \mathbf{B}^2(\mathcal{L}(E, F)),$$

et

$$(u_m - u) \in \mathbf{B}^2(E),$$

on a:

$$t \to D_1 f(u(t), t).(u_m(t) - u(t)) \in \mathbf{B}^1(F).$$

En utilisant le théorème 2.1 on a:

$$t \to f(u_m(t), t) \in AP^0(F) \subset \mathbf{B}^1(F).$$

Et ainsi en posant :

$$\psi_m(t) := f(u_m(t), t) - D_1 f(u(t), t).(u_m(t) - u(t))$$

on a

$$\psi_m \in \mathbf{B}^1(F).$$

L'inégalité précédente implique:

$$\lim_{m \to \infty} M(|f\ (u(t), t) - \psi_m(t)|_F) = 0$$

Alors on a :

$$t \to f(u(t), t) \in \mathbf{B}^1(F).$$

3$^{\text{éme}}$**étape :** Nous montrons que pour tout $u \in \mathbf{B}^2(E)$, l'opérateur

$$\Pi(u) : \mathbf{B}^2(E) \to \mathbf{B}^1(F)$$

défini par:

$$(\Pi(u).h)(t) := D_1 f\ (u(t), t).h(t)$$

est linéaire continu .

On a vu que :

$$t \to D_1 f(u(t), t).h(t) \in \mathbf{B}^1(F).$$

$\Pi(u)$ est linéaire, en effet:

Soient $h, k \in \mathbf{B}^2(E)$ et soient $\mu, \theta \in \mathbb{R}$, alors on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Pi(u).(\mu h + \theta k)(t) &= D_1 f\ (u(t), t).(\mu h + \theta k)(t) \\
&= D_1 f\ (u(t), t).(\mu h)(t) + D_1 f\ (u(t), t).(\theta k)(t) \\
&= \mu D_1 f\ (u(t), t).h(t) + \theta D_1 f\ (u(t), t).k(t) \\
&= \mu \Pi(u).h(t) + \theta \Pi(u).k(t)
\end{aligned}$$

Pour la continuité, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a pour tout $h \in \mathbf{B}^2(E)$:

$$\begin{aligned}
M(|D_1 f(u(t), t).h(t)|_F) &\leq M(|D_1 f(u(t), t)|_{\mathcal{L}(E,F)} \cdot |h(t)|_E) \\
&\leq \left[M(|D_1 f(u(t), t)|^2_{\mathcal{L}(E,F)}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[M(|h(t)|^2_E)\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité de $\Pi(u)$.

4$^{\text{éme}}$**étape :** On démontre la différentiabilité de N_f.

D'aprés le lemme 4.1, l'opérateur $N_f : \mathbf{B}^2(E) \to \mathbf{B}^2(F)$ est continu.

Soient $u, h \in \mathbf{B}^2(E)$,en utilisant le théorème de la valeur moyenne, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
|f(u(t) + h(t), t) - f(u(t), t) - D_1 f(u(t), t).h(t)|_F &\leq \sup_{\zeta \in]u(t), u(t)+h(t)[} |D_1 f(\zeta, t) - D_1 f(u(t), t)|_{\mathcal{L}(E,F)} \cdot |h(t)|_E \\
&\leq a_1 |h(t)|^2
\end{aligned}$$

En utilisant la monotonie de la moyenne M, on obtient:

$$M(|f\ (u(t) + h(t), t) - f\ (u(t), t) - D_1 f\ (u(t), t).h(t)|_F) \leq a_1 \|h\|_2^2$$

i.e.:

$$\|N_f(u + h) - N_f(u) - \Pi(u).h\| \leq a_1 \|h\|_2^2$$

Ceci implique que N_f est différentiable en u et que:

$$DN_f(u) = \Pi(u)$$

5$^{\text{éme}}$**étape :** Montrons que N_f est de classe C^1.

Soient $u, v \in \mathbf{B}^2(E)$, en utilisant l'hypothèse (H), pour tout $h \in \mathbf{B}^2(E)$ tel que $\|h\|_2 \leq 1$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} |(D_1 f\ (u(t),t) - D_1 f\ (v(t),t)).h(t)| &\leq |D_1 f\ (u(t),t) - D_1 f\ (v(t),t)| \,.\, |h(t)| \\ &\leq a_1 |u(t) - v(t)| \,.\, |h(t)| \end{aligned}$$

en utilisant Cauchy-Schwartz on a la majoration suivante:

$$\begin{aligned} M(|(D_1 f\ (u(t),t) - D_1 f\ (v(t),t)).h(t)|) &\leq a_1 M(|u(t) - v(t)| \,.\, |h(t)|) \\ &\leq a_1 \|u - v\|_2 \,.\, \|h\|_2 \\ &\leq a_1 \|u - v\|_2 \end{aligned}$$

et on obtient :

$$\|DN_f(u) - DN_f(v)\|_{\mathcal{L}} \leq a_1 \|u - v\|_2$$

ce qui prouve la continuité de DN_f. ■

Théorème 4.1 (principe variationnel) *Soit L une fonction définie par:*

$$\begin{aligned} L &: (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (X,t) &: = (x_1, x_2, x_3, x_4, t) \longmapsto L(X,t) := L(x_1, x_2, x_3, x_4, t) \end{aligned}$$

et r une constante strictement positive,telles que:

1) $L \in APU((\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$,

2) *les dérivées partielles* $D_k L(x_1, x_2, x_3, x_4, t), k = 1, .., 4$ *existent pour tout*

$(x_1, x_2, x_3, x_4, t) \in (\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R}$, *et* $D_k L \in APU((\mathbb{R}^n)^4 \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$;

3) $\exists a_1 \in [0, \infty)$ *telle que:* $|L_X(X,t) - L_X(Y,t)| \leq a_1 |X - Y|_{(\mathbb{R}^n)^4}$, *pour tous* $X, Y \in (\mathbb{R}^n)^4$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Alors la fonctionnelle :

$$J : \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

définie par:

$$\begin{aligned} J(u) &= M(L(u(t), u(t-r), \nabla_t u(t), \nabla_t (t-r), t)) \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} L(u(t), u(t-r), \nabla_t u(t), \nabla_t u(t-r), t) dt \end{aligned}$$

est de classe C^1,*et les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

i) $DJ(u) = 0$ *i.e: u est un point critique de J.*

ii)

$$\begin{aligned} & D_1 L(u(t-r), u(t-2r), \nabla_t u(t-r), \nabla_t u(t-2r), t-r) \\ & + D_2 L(u(t), u(t-r), \nabla_t u(t), \nabla_t u(t-r), t) \\ = \; & \nabla_t [D_3 L(u(t-r), u(t-2r), \nabla_t u(t-r), \nabla_t u(t-2r), t-r) \\ & + D_4 L(u(t), u(t-r), \nabla_t u(t), \nabla_t u(t-r), t)]. \end{aligned}$$

(l'égalité est dans $\mathbf{B}^2(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$*).*

Définition 4.1 *Si* $u \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *satisfait l'assertion (ii) dans le théorème 4.1 ,on dit que u est une solution Besicovitch-presque-périodique faible de l'équation (1).*

Preuve: On considère l'opérateur :

$$\Im : \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to (\mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n))^4 \equiv \mathbf{B}^2((\mathbb{R}^n)^4)$$

défini par:

$$\Im(u)(t) := (u(t), u(t-r), \nabla_t u(t), \nabla_t u(t-r))$$

Il est clair que $\Im$ est linéaire continu, alors $\Im$ est de classe C^1 et on a pour tout $h \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$:

$$D\Im(u).h = \Im(h)$$

On considère l'opérateur Nemytski:

$$N_L : \mathbf{B}^2((\mathbb{R}^n)^4) \to \mathbf{B}^1(\mathbb{R})$$

défini par :

$$(N_L(U))(t) := L(U(t), t)$$

En utilisant lemme 4.2, N_L est de classe C^1 et pour tous $U = (u_1, u_2, u_3, u_4), V = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbf{B}^2((\mathbb{R}^n)^4)$ on a:

$$\begin{aligned} (DN_L(U).V)(t) &= L_X(U(t), t).V(t) \\ &= \sum_{k=1}^{4} D_k L(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), t).v_k(t) \end{aligned}$$

La valeur moyenne $M : \mathbf{B}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est linéaire continue en effet:

$$|M(x(t))| \leq M(|x(t)|) = \|x\|_1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{B}^1(\mathbb{R})$$

donc elle est de classe C^1 et pour tous $\varphi, \psi \in \mathbf{B}^1(\mathbb{R})$ on a:

$$DM(\varphi).\psi = M(\psi)$$

Par conséquent:

$$J = M \circ N_L \circ \Im$$

est de classe C^1comme composition de trois applications de classe C^1.

Soit $u \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, si (i) est vraie, alors pour tout $h \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ on a:

$$\begin{aligned}
0 &= DJ(u).h = D(M \circ N_L \circ \Im)(u).h \\
&= DM(N_L \circ \Im(u)) \circ DN_L(\Im(u)) \circ D\Im(u).h \\
&= M(DN_L(\Im(u).\Im(h)) \\
&= M(D_1L(\underline{u}(t),t).h(t) + D_2L(\underline{u}(t),t).h(t-r) \\
&\quad +D_3L(\underline{u}(t),t).\nabla_t h(t) + D_4L(\underline{u}(t),t).\nabla_t h(t-r)) \\
&= M((D_1L(\underline{u}(t),t) + D_2L(\underline{u}(t+r),t+r)).h(t)) \\
&\quad +M((D_3L(\underline{u}(t),t) + D_4L(\underline{u}(t+r),t+r)).\nabla_t h(t))
\end{aligned}$$

Or d'aprés la proposition 2.8 on a:

$$D_1L(\underline{u}(t),t) + D_2L(\underline{u}(t+r),t+r) = \nabla_t[D_3L(\underline{u}(t),t) + D_4L(\underline{u}(t+r),t+r)]$$

Ce qui donne(ii).

Inversement on a:

$$\nabla_t[D_3L(\underline{u}(t),t) + D_4L(\underline{u}(t+r),t+r)] \in \mathbf{B}^2(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$$

c'est à dire

$$t \longmapsto D_3L(\underline{u}(t),t) + D_4L(\underline{u}(t+r),t+r) \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

et pour tout $h \in AP^1(\mathbb{R}^n)$ on a:

$$M((D_1L(\underline{u}(t),t)+D_2L(\underline{u}(t+r),t+r)).h(t) - M(\nabla_t(D_3L(\underline{u}(t),t)+D_4L(\underline{u}(t+r),t+r)).h(t)) = 0$$

En utlisant la proposition 2.7 on obtient:

$$\begin{aligned}
0 &= M((D_1L(\underline{u}(t),t)+D_2L(\underline{u}(t+r,t+r)).h(t)+(D_3L(\underline{u}(t),t)+D_4L(\underline{u}(t+r),t+r)).h'(t)) \\
&= M((D_1L(\underline{u}(t),t).h(t)+D_2L(\underline{u}(t),t).h(t-r)+D_3L(\underline{u}(t),t).h'(t)+D_4L(\underline{u}(t),t).h'(t-r)) \\
&= DJ(u).h
\end{aligned}$$

Comme $AP^1(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ d'aprés la proposition 2.6; on a $DJ(u).h=0$ pour tout $h\in\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, et donc: $DJ(u)=0$. ■

Théorème 4.2 (Existence,unicité) *Soit* $L:(\mathbb{R}^n)^4\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction qui satisfait les hypothèses (1), (2) et (3) du théorème 4.1 ainsi que les deux hypothèses suivantes:*
i) $L(.,t):(\mathbb{R}^n)^4\to\mathbb{R}$ *est convexe, pour tout* $t\in\mathbb{R}$.
ii) $\exists i\in\{1,2\},j\in\{3,4\},c\in(0,\infty)$ *tels que pour tout* $(x_1,x_2,x_3,x_4,t)\in(\mathbb{R}^n)^4\times\mathbb{R}$ *on a:*

$$L(x_1,x_2,x_3,x_4,t)\geq c(|x_i|^2_{\mathbb{R}^n}+|x_j|^2_{\mathbb{R}^n}).$$

Alors il existe une fonction $u\in\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *qui est une solution Besicovitch-presque-périodique faible de l'équation (1).*
Si de plus on a l'hypothèse suivante:
iii) $\exists k\in\{1,2\},\ell\in\{3,4\},c_1\in(0,\infty)$ *tels que la fonction* $\Upsilon:(\mathbb{R}^n)^4\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *définie par:*

$$\Upsilon(x_1,x_2,x_3,x_4,t):=L(x_1,x_2,x_3,x_4,t)-\frac{c_1}{2}|x_k|^2_{\mathbb{R}^n}-\frac{c_1}{2}|x_\ell|^2_{\mathbb{R}^n}$$

est convexe par rapport à (x_1,x_2,x_3,x_4) *pour tout* $t\in\mathbb{R}$.
Alors la solution Besicovitch-presque-périodique faible de l'équation (1) est unique.

Preuve: 1) Existence:

En utilisant théorème 4.1, la fonctionnelle J est de classe C^1, et d'aprés l'hypothèse (i) J est convexe; l'hypothèse (ii) assure que pour tout $u\in\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$,on a:

$$J(u)\geq c(M(|u|^2)+M(|\nabla_t u|^2))=c\,\|u\|^2_{1,2}$$

Puisque la valeur moyenne est invariante par translation, J est coercive sur $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, et ainsi en appliquant le théorème 1.2 à la fonctionnelle J , $\exists u \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ telle que:

$$J(u) = \inf J$$

c-à-d

$$DJ(u) = 0,$$

et d'aprés le théorème 4.1 u est une solution Besicovitch-presque-périodique faible de l'équation (1).

2) Unicité:

Pour traiter l'unicité, on considère la fonctionnelle $I : \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, définie par:

$$I(u) := M(\Upsilon(u(t), u(t-r), \nabla_t u(t), \nabla_t(t-r), t)) = J(u) - \frac{c_1}{2}M(|u|^2) - \frac{c_1}{2}M(|\nabla_t u|^2)$$

on constate que I est convexe (car Υest convexe), et puisque J est de classe C^1, I est aussi de classe C^1.

Notons que:

$$DI(u) = DJ(u) - c_1 \langle u \ , . \rangle_2$$

En utilisant la monotonie de la différentielle d'une fonctionnelle convexe, pour tous $u, v \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, on a:

$$0 \leq \langle DI(u) - DI(v), u - v \rangle = \langle DJ(u) - DJ(v), u - v \rangle - c_1 \langle u - v, u - v \rangle_2$$

ceci implique:

$$\langle DJ(u) - DJ(v), u - v \rangle \geq c_1 \|u - v\|_{1,2}^2$$

Maintenant si u et v sont deux solutions Besicovitch-presque-périodiques faibles de l'équation (1), alors d'aprés le théorème 4.1 on a:

$$DJ(u) = DJ(v) = 0$$

ceci implique

$$c_1 \|u - v\|_{1,2}^2 = 0$$

et donc

$$u = v$$

■

Chapitre 5

Exemple

Considérons l'équation suivante:

$$\begin{aligned} & D_1K(x(t-r),x(t-2r),x'(t-r),x'(t-2r))+D_2K(x(t),x(t-r),x'(t),x'(t-r)) \\ & -\frac{d}{dt}\left[D_3K(x(t-r),x(t-2r),x'(t-r),x'(t-2r))+D_4K(x(t),x(t-r),x'(t),x'(t-r))\right] \\ = \; & b(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

où $K : (\mathbb{R}^n)^4 \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable, et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est un terme forçant presque-périodique.

Théorème 5.1 (Existence et unicité) *Soit $K \in C^2((\mathbb{R}^n)^4, \mathbb{R})$ une fonction qui satisfait les hypothèses suivantes:*

1) $\exists a_0 \in [0,\infty)$ tel que: $|K(X)| \leq a_0. |X|^2_{(\mathbb{R}^n)^4}$ pour tout $X \in (\mathbb{R}^n)^4$.

2) $\exists j \in \{1,2\}, k \in \{3,4\}, c \in (0,\infty)$ tels que la fonction $G : (\mathbb{R}^n)^4 \to \mathbb{R}$ définie par:

$$G(x_1,x_2,x_3,x_4) := K(x_1,x_2,x_3,x_4) - \frac{c}{2}|x_j|^2_{\mathbb{R}^n} - \frac{c}{2}|x_k|^2_{\mathbb{R}^n}$$

est convexe et non négative sur $(\mathbb{R}^n)^4$.

3) La différentielle DK est Lipschitzienne sur $(\mathbb{R}^n)^4$.

Alors on a :

i) Pour tout $b \in \mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n)$, il existe une unique $u \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ qui est une solution Besicovitch-presque-périodique faible de l'équation (5.1).
ii) L'ensemble des fonctions $b \in AP^0(\mathbb{R}^n)$ tel qu'il existe une solution Bohr-presque-périodique de l'équation (5.1) est dense dans $AP^0(\mathbb{R}^n)$ par rapport à la norme suivante:

$$\|b\|_* := \sup \left\{ M(b.h) : h \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n), \|h\|_{1,2} \leq 1 \right\}$$

Preuve: En prenant :

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = K(x_1, x_2, x_3, x_4) - x_1.b(t+r)$$

où le point denote le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$

on constate que l'équation (5.1) est un cas particulier de l'équation (1)

Pour prouver (i), il suffit de montrer que cette fonction L vérifie les hypothèses du théorème 4.2, en effet:

Soit $b \in \mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n)$, montrons alors que:

- L_X est Lipschitzienne, on a:

$$|L_X(X,t) - L_X(Y,t)|_{\mathcal{L}((\mathbb{R}^n)^4,\mathbb{R})} = |DK(X) - DK(Y)|_{\mathcal{L}((\mathbb{R}^n)^4,\mathbb{R})}$$

or DK est Lipschitzienne implique que $\exists a \in [0, \infty)$ tel que pour tous $X, Y \in (\mathbb{R}^n)^4$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$|L_X(X,t) - L_X(Y,t)|_{\mathcal{L}((\mathbb{R}^n)^4,\mathbb{R})} \leq a\,|X - Y|_{(\mathbb{R}^n)^4}$$

- $L(.,t) : (\mathbb{R}^n)^4 \to \mathbb{R}$ est convexe $\forall t \in \mathbb{R}$,on a:

$$K(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(x_1, x_2, x_3, x_4) + \frac{c}{2}(|x_j|^2_{\mathbb{R}^n} + |x_k|^2_{\mathbb{R}^n})$$

ceci implique:

$$L(x_1,x_2,x_3,x_4,t)=G(x_1,x_2,x_3,x_4)+\frac{c}{2}(|x_j|^2_{\mathbb{R}^n}+|x_k|^2_{\mathbb{R}^n})-x_1.b(t+r)$$

or la fonction G est convexe et la fonction $\frac{c}{2}(|x_j|^2_{\mathbb{R}^n}+|x_k|^2_{\mathbb{R}^n})$ est aussi convexe(car la norme est convexe et la somme de deux fonctions convexes est convexe), et donc la fonction K est convexe. De plus la fonction $(-x_1.b(t+r))$ est convexe car elle est linéaire, ainsi on conclut que $L(.,t)$ est convexe $\forall t\in\mathbb{R}$ comme somme de trois fonctions convexes.

• L'hypothèse suivante: $\exists i\in\{1,2\},j\in\{3,4\},c\in(0,\infty)$ tels que pour tout $(x_1,x_2,x_3,x_4,t)\in(\mathbb{R}^n)^4\times\mathbb{R}$ on a:

$$L(x_1,x_2,x_3,x_4,t)\geq c(|x_i|^2_{\mathbb{R}^n}+|x_j|^2_{\mathbb{R}^n})$$

a été utilisée pour prouver la coercivité dela fonctionnelle J, on a constaté que l'hypothèse:

$$K(x_1,x_2,x_3,x_4)\geq\frac{c}{2}(|x_i|^2_{\mathbb{R}^n}+|x_j|^2_{\mathbb{R}^n})$$

déduite de l'hypothèse (3) est suffisante pour montrer la coercivité de la fonctionnelle J de notre exemple en effet:

$$\begin{aligned}
J(u) &= M(L(\underline{u}(t),t))=M(K(\underline{u}(t))-M(u(t).b(t+r)) \\
&\geq \frac{c}{2}\left[M(|u(t)|^2_{\mathbb{R}^n})+M(|\nabla_t u(t)|^2_{\mathbb{R}^n})\right]-\langle u,b\rangle_2 \\
&\geq \frac{c}{2}\|u\|^2_{1,2}-\|u\|_2\|b\|_2 \\
&\geq \frac{c}{2}\|u\|^2_{1,2}-\|u\|_{1,2}\|b\|_2
\end{aligned}$$

par conséquent J est coercive à l'infini.

• Il reste à montrer que:

$$\Upsilon(x_1,x_2,x_3,x_4,t):=L(x_1,x_2,x_3,x_4,t)-\frac{c_1}{2}|x_k|^2-\frac{c_1}{2}|x_\ell|^2$$

est convexe en effet, l'hypothèse (2) nous permet d'écrire:

$$\Upsilon(x_1, x_2, x_3, x_4, t) := G(x_1, x_2, x_3, x_4) - x_1.b(t+r)$$

puisque les fonctions G et $(\ -x_1.b(t+r))$ sont convexes,alors Υest convexe $\forall t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, d'aprés le théorème 4.2 pour tout $b \in \mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n), \exists u \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ qui est une solution Besicovitch-presque-périodique faible unique de (5.1).

Maintenant montrons l'assertion (ii).

On introduit les fonctionnelles $E_1 \ et \ F_1$définies de $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$E_1(u) := M(K(\underline{u}(t)) \quad et \quad F_1(u) := M(G(\underline{u}(t))$$

Elles sont des cas spéciaux de la fonctionnelle J du théorème 4.1 et donc elles sont de classe C^1.

Notons que:

$$F_1(u) = E_1(u) - \frac{c}{2} \|u\|_{1,2}^2$$

En utilisant l'isomorphisme de F.Riesz:

$$\hat{\jmath} : \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to [\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)]'$$

tel que:

$$\langle \hat{\jmath}(u), v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

pour tous $u, v \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

On peut définir les gradients:

$$\operatorname{grad} E_1(u) := \hat{\jmath}^{-1}(DE_1(u)) \quad et \quad \operatorname{grad} F_1(u) := \hat{\jmath}^{-1}(DF_1(u))$$

En utilisant la monotonie de $\operatorname{grad} F_1$ (due à la convexité de F_1), on a pour tous $u, v \in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$

$$0 \leq \langle \operatorname{grad} F_1(u) - \operatorname{grad} F_1(v), u - v\rangle = \langle \operatorname{grad} E_1(u) - \operatorname{grad} E_1(v), u - v\rangle - c. \|u - v\|_{1,2}^2$$

Ceci implique:

$$\langle \operatorname{grad} E_1(u) - \operatorname{grad} E_1(v)\rangle \geq c \|u - v\|_{1,2}^2$$

i.e.: $\operatorname{grad} E_1$ est fortement monotone et par conséquent, d'aprés théorème 2.6, $\operatorname{grad} E_1$ est un homéomorphisme de $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

Considérons l'opérateur nonlinéaire non borné:

$$\Psi : Dom(\Psi) \subset \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to \mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n)$$

défini par:

$$(\Psi(u))(t) := D_1K(\underline{u}(t-r)) + D_2K(\underline{u}(t)) - \nabla_t[D_3K(\underline{u}(t-r)) + D_4K(\underline{u}(t))]$$

et ainsi $\Psi(u) = b$ signifie que u est une solution Besicovitch-presque-périodique faible de (5.1).

En utilisant (i), Ψ est bijective; vérifions que:

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_* = \|\operatorname{grad} E_1(u) - \operatorname{grad} E_1(v)\|_{1,2}$$

en effet on a:

$$\begin{aligned}
M((\Psi(u) - \Psi(v)).h) &= M(\Psi(u).h) - M(\Psi(v).h) \\
&= M(DK(\underline{u}(t).\underline{h}(t)) - M(DK(\underline{v}(t).\underline{h}(t)) \\
&= DE_1(u).h - DE_1(v).h \\
&= (DE_1(u) - DE_1(v)).h
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)-\Psi(v)\|_* &= \sup\left\{M((\Psi(u)-\Psi(v)).h) : h\in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n), \|h\|_{1,2}\le 1\right\}\\
&= \sup\left\{(DE_1(u)-DE_1(v)).h : h\in \mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n), \|h\|_{1,2}\le 1\right\}\\
&= \|DE_1(u)-DE_1(v)\|_{(B^{1,2})^*}\\
&= \|\mathrm{grad}E_1(u)-\mathrm{grad}\ E_1(v)\|_{1,2}
\end{aligned}$$

Puisque, d'aprés proposition 2.6 $AP^2(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, et $AP^2(\mathbb{R}^n)\subset Dom(\Psi)$ ce qui implique que $AP^2(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $Dom(\Psi)$ par rapport à la norme $\|.\|_{1,2}$.

Or grad E_1 est un homéomorphisme de $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathbf{B}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ on déduit que Ψ est un homéomorphisme de $(Dom(\Psi),\|.\|_{1,2})$ dans $(\mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n),\|.\|_*)$. Donc $\Psi(AP^2(\mathbb{R}^n))$ est dense dans $\mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n)$ par rapport à la norme $\|.\|_*$, et puisque $\Psi(AP^2(\mathbb{R}^n)\subset AP^0(\mathbb{R}^n)\subset \mathbf{B}^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\Psi(AP^2(\mathbb{R}^n)$ est dense dans$AP^0(\mathbb{R}^n)$ par rapport à la norme$\|.\|_*$ ■

Bibliographie

[1] L. Amerio and G. Prouse, Almost-Periodic Functions and Functional Equations. Van Nostrand Reinold Compagny N. Y. 1971.

[2] M. Ayachi and J. Blot,Variational Methods for Almost Periodic Solutions of a Class of Neutral Delay Equations. Abstract and Applied Analysis, vol. 2008, Article ID 153285, 13 pages, 2008.

[3] A. Bahri and H. Berestycki, Forced vibration of superquadratic Hamiltonian System. Acta.Math.152 (1984), 143-197.

[4] A. S. Besicovitch, Almost periodic functions . Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1932.

[5] J. Blot, Oscillations presque-périodiques forcées d'équations d'Euler-Lagrange.Bulletin de la Société Mathématique de France, vol.122,no.2 pp.285-304,1994.

[6] J. Blot, Calculus of variations in mean and convex LagrangiansII, Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol. 40,no.3, pp.457-463,1989

[7] M. Bouchekif, Stabilité et presque-périodicité pour une classe d'équations hyperboliques non linéaires du second ordre en t,Thèse de Doctorat de 3^{eme} Cycle, Université des sciences et techniques de Lille I, 1983.

[8] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, France, 1983.

[9] I. Cherti, Contribution à l'étude d'Equations aux Dérivées Partielles, d'Equations Fonctionnelles à Retard. Solutions Périodiques et Presque-Périodiques. Thèse de Doctorat, Université de Rabat, juin 2007.

[10] C. Corduneau. Almost Periodic Functions, Chelsea, New York, NY, USA, 2nd edition, 1989.

[11] P. Drabek and J. Milota, Methods of Nonlinear Analysis, Applications to Differential Equations, Edition Birkhauser Verlag AG, 2007.

[12] I. Ekeland and R. Teman, Convex Analysis and Variational Problems, North-Holland Publisting Company, 1976.

[13] A. M. Fink, Almost Periodic Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics 377, Springer-Verlag, Brelin, 1974.

[14] Z. Guo and J. Yu, Multiplicity Results for Periodic Solutions to Delay Differential Equations via Critical Point Theory, J.Differential Equations 218, pp.15-35.

[15] J.-K. Hale and S.-M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional differential equations. Applied Mathematical Sciences 99, edition Springer-Verlag, New York 1993.

[16] J.-B. Hiriart-Urruty, Du Calcul Différentiel au Calcul Variationnel: Un Aperçu de l'Evolution de P. Fermat à nos jours.Version écrite d'un exposé à la journée FERMAT organisée à l'hôtel d'Assézat de Toulouse en octobre 2004, sous l'égide de l'Académie des Sciences,Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse, pages 1-16.

[17] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[18] Y. Long, Multiple Solutions of perturbed superquadratic second order Hamiltonian Systems, Trans. Amer, Math. Soc., 311 (1989), 749-780.

[19] N. Merzagui, Méthodes topologiques et variationnelles pour l'etude de problèmes aux limes périodiques. Thèse de Doctorat,Université de Tlemcen, 1999.

[20] P. H. Rabinowitz, Multiple critical points of perturbed symmetric functionals, Trans. Amer. Math. Soc., 272 (1982), 753-769.

[21] L. Schwartz, Théorie des Distributions, Hermann, Paris, France, 1966.

[22] X.-B. Shu and Y.-T. Xu, Multiple periodic solutions for a class of second-order nonlinear neutral delay equations, Abstract and Applied Analysis, vol. 2006, Article ID 10252, 9 pages, 2006.

[23] M. Struwe, Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Springer-Verlag, Berlin, Heideberg 1990-1996-2000.

[24] K. Vo-Khac, Etude des Fonctions Quasi-stationnaires et leurs Applications aux Equations Différentielles Opérationnelles. Mémoire de la S. M. F. tome 6 (1966), p. 3-175.