République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abou Bekr Belkaïd - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Projet de fin d'études pour l'obtention du diplôme de Master

Option : Equations aux Dérivées partielles et Applications

Sur le Thème :

Régularité des Solutions d'EDPs Elliptiques : Inégalité de Caccioppoli

Présenté par :

M^{elle} **Ghaffour Imène**

Soutenu devant le jury composé de :

M^r **M. Bouchekif**	Professeur à l'UABB-Tlemcen	**Président**
M^r **B. Abdellaoui**	Maître de conférences à l'UABB-Tlemcen	**Examinateur**
M^r **A. Bensedik**	Maître assistant à l'UABB-Tlemcen	**Examinateur**
M^r **B. Messirdi**	Maître assistant à l'UABB-Tlemcen	**Encadreur**

Année universitaire : 2010 – 2011

Remerciements

Je remercie Allah de m'avoir donné la foi, la volonté et le courage pour accomplir ce travail.

Je tiens à adresser mes meilleurs remerciements à mon maitre, le professeur M. BOUCHEKIF pour le savoir qu'il a toujours su me transmettre, le long de mon cursus de formation en master de mathématiques.

Il l'a tout aussi fait pour mes camarades de promotion et pour cela, nous en sommes les témoins autant que le fruit de ses efforts.

Il l'a fait en maitre, avec modestie et compétence, humilité et brio et surtout avec aisance et clarté autrement dit, il l'a fait en pédagogue avéré.

En ce qui me concerne, monsieur BOUCHEKIF a été à l'origine de la proposition du sujet de mémoire que je présente aujourd'hui et au cours duquel, il a souvent intervenu pour apporter les ajustements adéquats. C'est bien grâce à lui que ce travail a gagné en cohérence.

Je tiens à le remercier tout aussi vivement pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

Quoi de mieux que d'exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à l'égard de mon encadreur, monsieur B.MESSIRDI, qui a su me conduire à développer ce travail.

Je le remercie aussi pour ses encouragements.

Mes plus vifs remerciements s'adressent à monsieur B. ABDELLAOUI, pour avoir accepté de juger ce travail. Il le fera, j'en suis convaincue, avec beaucoup d'attention et de rigueur. A son propos, on ne peut, ne peut pas se souvenir de la qualité des cours qu'il nous prodiguait et de l'aisance avec laquelle il manipulait les concepts, les simplifiait et les transmettait après les avoir débarrassés de toutes difficultés et zones d'ombre.

Je tiens aussi à remercier monsieur A. BENSEDIK d'avoir accepter d'examiner ce travail. je lui en suis très reconnaissante.

Ma très haute considération va à monsieur B. Mebkhout, notre chef de département pour avoir, et sincèrement toujours été à l'écoute des étudiants, leur facilitant du mieux qu'il pouvait, le déroulement normal de leurs cursus de formation. Par ailleurs, ses capacités pédagogiques ne peuvent passer inaperçus aux yeux de tous les étudaints qu'il a eu à enseigner. On se disait tous entre nous :"' tu vois ! tu n'n'as pas besoin de revoir son cours après lui, pour le comprendre".

Dédicaces

Ma toute première pensée va à ma très chère maman. Elle est aussi mon amie et ma confidente. Elle m'a tout appris et elle continue encore de le faire.
Je l'ai toujours écoutée. J'en suis très fière.

Puisse Dieu te prêter longue vie avec beaucoup de bonheur et de santé.

A mon trés cher papa. Mon repère, mon guide et mon symbole de l'abnégation au travail. Il m'a toujours couvert de tendresse.

Puisse Dieu lui prêter longue vie !

A mes frères bien-aimés, Mohammed Yassine et Aness Chihabeddine, à qui je souhaite plein de réussite dans leur travail et leurs études.

A celui qui est tout prés mais loin, loin mais tout prés, mon trés cher Salim.

A toute ma famille et tous mes amis.

Notations

- N est un entier, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble ouvert borné, de frontière $\partial\Omega$
- X un espace de Banach de norme $|| \ ||$ et X' son dual.
- H un espace de Hilbert.
- $< \, , >$ la paire de H avec son dual

- $L^p(\Omega)$ est l'espace de fonctions mesurables $u : \ \Omega \to \mathbb{R}$ avec la norme finie :

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$$

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};$ f mesurable et $\exists$ une constante C telle que$|f(x)| \leq C$ p.p sur $\Omega\}$

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = ess\, sup_{x\in\Omega}|u(x)|$$

- Si $x, y \in \mathbb{R}^N$ alors $x.y$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$, i.e :
- Si $x = (x_1, ..., x_N)$, et $y = (y_1, ..., y_N)$, alors

$$x.y = \sum_{i=1}^{N} x_i \ y_i$$

- Si $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.
- $m = (m_1, m_2, .., m_N) \in \mathbb{N}^N$ est un multi-indice , et $m = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$.

  $\nabla^m := \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} ... \partial x_N^{m_N}}$
- $B\,(x, r) = \{y \in \Omega \ ; \ ||x - y|| < r\}$ est la boule ouverte de rayon r dans Ω
- $u \ : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction, alors

  $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N} \right)^T$, son gradient et

  $\triangle u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{div}(\nabla u)$ son laplacien

- p^* est l'exposant critique de p : $p^* = \frac{Np}{N-p}$.
- $Supp\,(u) = \overline{\{x \in \Omega\,;u(x) \neq 0\}}$ est le support d'une fonction $u\ : \Omega \to \mathbb{R}^N$.
- $\omega \subset\subset \Omega$: ω est un ouvert de Ω tel que $\varpi \subset \Omega$ et ϖ est compact.
- $\oint_{B(x_0,r)} udx = \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} u\, dx$, la moyenne de u sur la boule $B(x_0, r)$.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire nous nous intéresserons à la régularité des équations aux dérivées partielles du second ordre uniformément elliptiques.

Il est souvent difficile de travailler directement dans des espaces de classe C^k. Généralement, nous montrons l'existence de solutions faibles dans des espaces dits de Sobolev, puis nous essayons d'améliorer leur régularité.

L'objectif principal de ce travail est justement l'étude de la régularité des solutions faibles de certaines EDPs du second ordre.

Ce travail est composé de trois chapitres :

Le chapitre I est consacré aux "Préliminaires". il est décomposé en trois parties :
La première consiste à présenter les espaces dans lesquels nous allons travailler, à savoir les espaces de Hölder, les espaces de Sobolev et leurs propriétés.
Dans la deuxième, nous énoncerons quelques inégalités qui nous seront utiles par la suite.
Enfin, nous introduirons l'opérateur sous forme divergence

$$L = -div(A\nabla) + b.\nabla + c$$

En premier lieu nous considérerons l'EDP linéaire qui lui est associée, soit :

$$Lu = f(x)$$

L'existence dans ce cas est assurée par le théorème de Lax Milgram.
Ensuite, nous considérerons des équations semi linéaires du type :

$$-\Delta u = g(u)$$

Pour l'existence de solution de cette dernière, nous ferons appel aux méthodes variationnelles.

Le chapitre II porte sur la régularité qui sera aussi reprise au chapitre III. Nous étudierons la régularité de solutions faibles des équations qui ont déja été introduits dans le chapitre I, c'est à dire de

$$-Lu = f(x)$$

et de

$$-\Delta u = g(u)$$

En fait, nous verrons que cette régularité dépend de celle des coefficients et du second membre.

Enfin dans le troisième chapitre, nous donnerons une autre approche de la régularité grâce à "l'inégalité de Caccippioli". Elle est de la forme

$$\int_{B(x_0,r')} |\nabla u|^p dx \leq C \int_{B(x_0,r)} \left| u(x) - \fint_{B(x_0,r)} u \right|^p dx, \text{ pour } p \in (1, \infty)$$

Cette inégalité est un outil simple et puissant, elle nous donne des estimations des solutions faibles. De plus, elle sert à démontrer la régularité.

Cependant, elle n'est pas applicable pour tout u dans $W^{1,p}$. Elle l'est seulement pour les solutions de certaines EDP et problèmes variationnels. Parmi ces équations, nous nous intéresserons aux équations de Laplace, de Poisson et enfin à $div(A(x)u = 0$.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Les espaces fonctionnels

1.1.1 Les espaces C^k

Définition 1.1.1 *Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite continue en x_0 si $\forall x_0 \in \Omega$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$x \in E, ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(x_0)| < \varepsilon,$$

où la norme dans $\mathbb{R}^N$ est la norme euclidienne.

Définition 1.1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.*
On définit
$C^0(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}|\ u \text{ est continue } \}$.
$C^0(\overline{\Omega}) := \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}|\ u \text{ est continue et se prolonge continument sur } \overline{\Omega}\right\}$.

Si $u \in C^0(\overline{\Omega})$, alors sa norme est donnée par

$$||u||_{C^0(\overline{\Omega})} = sup_{x \in \Omega}|u(x)|$$

.

De plus, $(C^0(\overline{\Omega}), ||\ ||_{C^0})$ est un espace de Banach.

Définition 1.1.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.*

Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^k sur Ω si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues.

Plus formellement, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *est de classe* C^k *sur* Ω *si*

$$\nabla^m u \in C^0(\Omega), \forall m \in \{0, 1, ..., k\},$$

On pose alors

$$C^k(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} |\ u \textit{ est de classe } C^k \textit{ sur } \Omega \right\}$$

$$C^k(\overline{\Omega}) := \left\{ \begin{array}{ll} u : \Omega \to \mathbb{R}| & u \textit{ est de classe } C^k \textit{ sur } \Omega, \textit{ et toutes ses dérivées partielles} \\ & \textit{jusqu'à ce que l'ordre } k \textit{ se prolongent continument sur } \overline{\Omega} \end{array} \right\}$$

Ainsi

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega), \quad C^\infty(\overline{\Omega}) := \bigcap_{k \geq 0} C^k(\overline{\Omega})$$

et

$$||u||_{C^k} = max_{0 \leq m \leq k} \left(sup_{x \in \Omega} |\nabla^m u(x)| \right)$$

1.1.2 Les espaces de Hölder

Définitions Supposons Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $0 < \alpha \leq 1$

- Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ est dite continue Höldérienne d'exposant α si
$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \ x, y \in \Omega$$
- Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est bornée et continue, on écrit
$$||u||_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$
- La semi norme d'ordre α de la fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est
$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = sup_{x,y \in \Omega_{x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\}$$
et
- la norme d'ordre α par
$$||u||_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = ||u||_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

– L'espace de Hölder
$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$$
est constituée des fonctions $C^k(\Omega)$ pour lesquelles la norme
$$||u||_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha u||_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$
est fini.
Donc l'espace $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ est constitué de fonctions qui sont $k-$fois continument différentiables et leur dérivées partielles sont continues Höldériennes d'exposant α.

1.1.3 Les espaces de Sobolev

L'espace $W^{1,p}$ et ses propriétés

Définition 1.1.4 *L'espace de Sobolev*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g_1, ..., g_N \in L^p(\Omega) | \int_\Omega u \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \, \varphi \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \forall i = 1, 2, ..., N \right\}$$

Remarque 1 *Si $p = 2$ on écrit souvent*
$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note
$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i.$$

L'espace $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme
$$||u||_{W^{1,p}} = ||u||_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou parfois la norme équivalente $\left(||u||_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$ (si $1 \leq p < \infty$)

Proposition 1.1.1 – *L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$; réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

– *L'espace H^1 est un espace de Hilbert séparable.*

Voici un résultat important de densité :

Théorème 1.1.1 (Friedrichs) *Soit $u \in W^{1,p}$ avec $1 \leq p < \infty$.*
Alors il existe une suite (u_n) de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que

(i) $u_{n|\Omega} \to u$ *dans* $L^p(\Omega)$

(ii) $\nabla u_{n|\omega} \to \nabla u_\omega$ *dans* $L^p(\omega)^N$ *pour tout* $\omega \subset\subset \Omega$

Proposition 1.1.2 (Dérivation d'un produit) *Soient $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v \ + \ u \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, .., N$$

Définition 1.1.5 *Soit $1 \leq p < \infty$: $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la ferméture $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

Théorème 1.1.2 *On suppose Ω de classe C^1. Soit*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^(\overline{\Omega}) \quad avec \quad 1 \leq p < \infty$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad u = 0 \ sur \ \partial\Omega$$

$$(ii) \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Théorème 1.1.3 (Rellich Kondrachov) *On suppose Ω borné de classe C^1. On a*

- *Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$*
- *Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \infty[$,*
- *Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,*

avec injections compactes.

L'espace $W^{k,p}$

Définition 1.1.6 *Soient $k \geq 2$ un entier et soit p un réel avec $1 \leq p \leq \infty$.*
- *L'espace $W^{k,p}$ est défini par*

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{r} u \in L^p(\Omega)| \quad \forall\alpha \text{ avec } |\alpha| < k \ \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tel que} \\ \\ \int_\Omega u\, D^\alpha \varphi = (1)^|\alpha| \int_\Omega g\, \varphi, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \end{array} \right\}$$

- *Si $u \in W^{k,p}(\Omega)$ alors on définit sa norme par*

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \\ \sum_{|\alpha| \leq k} ess\ sup_\Omega |D^\alpha u| & (p = \infty) \end{array} \right.$$

1.2 Quelques inégalités utiles

1.2.1 Inégalité de Young

Définition 1.2.1 *On dit que $p, q \in [1, \infty[$ sont deux exposants conjugués si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Proposition 1.2.1 (inégalité de Young) *Soient $1 < p, q < \infty$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q} \ (a, b > 0)$$

1.2.2 Inégalité de Hölder

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, supposons que $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Si $f \in L^p$, $g \in L^q$, alors $fg \in L^1$ et

$$\int |fg| \leq ||f||_{L^p}\, ||g||_{L^q}$$

1.2.3 Inégalité de Poincarré

Proposition 1.2.2 *Soit Ω un sous ensemble ouvert connexe et borné de $\mathbb{R}^N$, avec frontière $\partial\Omega$, de classe C^1. Supposons $1 \leq p \leq \infty$.*
Alors, il existe une constante C dépendante seulement de N, p et Ω telle que

$$||u - \overline{u}_\Omega||_{L^p(\Omega)} \leq ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$$

pour chaque fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

1.2.4 Inégalités de Sobolev

Théorème 1.2.1 *Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$ de frontière de classe C^1. Supposons $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

- *Si*

  $$k < \frac{n}{p}$$

  alors $u \in L^q(\Omega)$ où

  $$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$$

  et en plus, on a l'estimation

  $$||u||_{L^q(\Omega)} \leq C||u||_{W^{k,p}(\Omega)}$$

  la constante C dépend seulement de k, N, p et Ω
- *Si*

  $$k > \frac{N}{p}$$

  alors $u \in C^{k-[\frac{N}{p}]-1,\alpha}(\Omega)$ où

  $$\alpha = \begin{cases} [\frac{N}{p}] + 1 - \frac{N}{p} \text{si n'est pas entier} \\ \\ \text{n'importe quel nombre positif <1 si } \frac{N}{p} \text{ est entier} \end{cases}$$

  et en plus, on a l'estimation

  $$||u||_{C^{k-[\frac{N}{p}]-1,\alpha}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{k,p}(\Omega)}$$

  la constante C dépend seulement de k, N, p et Ω.

1.3 Notions d'existence de solutions faibes

1.3.1 Introduction sur les opérateurs sous forme divergence

Tout d'abord, on introduit les opérateurs sous forme divergence

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \text{ dans } \Omega \tag{1.1}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \text{ dans } \Omega \tag{1.2}$$

où Ω est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^N$, $a_{i,j}(x), b_i, c\ f : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

En utilisant $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$ *et* $b = (b_1, ..., b_N)^T$, on peut écrire (1.2) sous la forme

$$-tr(A\nabla^2 u) + b\ .\nabla u + cu = f \text{ dans } \Omega$$

et (1.1) sous la forme

$$-div(A\nabla u) + \widetilde{b}\ .\nabla u + cu = f \text{ dans } \Omega$$

On dit que l'EDP $Lu = 0$ est sous forme divergence si l'opérateur L est donné par (1.1) et qu'elle n'est pas sous forme divergence s'il est donné par (1.2).

Remarque Si les coefficients $a_{i,j}$ sont de classe C^1, l'équation (1.1) peut être réecrite sous forme de (1.2) , et vice versa.
En effet ;
On a

$$div(A\nabla u) = tr(A\nabla u) + \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Si, on pose

$$\widetilde{b}_i = b_i + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial x_j},$$

alors (1.2) est équivalente à

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \widetilde{b}_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \text{ dans } \Omega \tag{1.3}$$

Définition 1.3.1 *L'opérateur L est elliptique si pour tout $x \in \Omega$, tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, il satisfait*

$$\xi.A(x)\xi > 0$$

(i.e, toutes les valeurs propres de A sont positives).
On dit que L est uniformément elliptique s'il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\xi.A(x)\xi > \beta|\xi|^2$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$.
L'ellipticité veut dire que pour chaque point $x \in \Omega$, la matrice symétrique $A(x)$ est définie positive et que sa plus petite valeur propre est majorée par β.

1.3.2 L'existence dans le cas linéaire

Supposons que $a_{i,j}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ $i, j = 1, ..., N$, et $f \in L^2(\Omega)$.

Définition 1.3.2 (Solutions faibles) *La forme bilinéaire associée à l'opérateur sous forme divergence est :*

$$B[u, v] = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \; dx$$

pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$
On dit que $u \in H^1(\Omega)$ est solution faible de (1.1) si

$$B[u, v] = (f, v)$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ où (,) dénote le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Supposons que H est espace de Hilbet réel de norme || || et de produit scalaire(,).

Théorème 1.3.1 (Lax Milgram) *Supposons $B : H \times H \to \mathbb{R}$ est une application linéaire pour laquelle, il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que*

- *(i) $|B[u, v]| \leq \alpha ||u|| \, ||v||$ $(u, v) \in H$ et*
- *(ii) $\beta ||u||^2 \leq B[u, u]$ $u \in H$ et soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire bornée dans H.*

Alors, il existe une solution unique $u \in H$ telle que

$$B[u, v] =< f, v >$$

pour tout $v \in H$.

1.3.3 L'existence dans le cas semi linéaire

Tout d'abord, nous allons donner quelques définitions

Définition 1.3.3 *Soit X un espace de Banach et $E \in C^1(X)$.*

- *On dit que $u \in X$ est un point critique de E si $E'(u) = 0$; sinon il est régulier.*

- *On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de E ,s'il existe un point critique de E avec $E(u) = c$.*

- *On dit que la suite $(u_n)_n \subset X$ est de Palais-Smale de niveau c, $(PS)_c$, si*

$$E(u_n) \to c \qquad et \qquad E'(u_n) \to 0 \text{ dans } X', \text{ le dual de } X$$

- *Condition de Palais-Smale*
  (P.-S) Toute suite de Palais-Smale a une sous-suite convergente.

1. Méthode directe

   Théorème 1.3.2 *Supposons X un espace de Banach réflexif avec la norme $|| \ ||$, et soit $M \subset X$ un sous ensemble faiblement fermé de X. Supposons $E : M \to \mathbb{R} \cup \infty$ est coercive et faiblement semi continue sur M par rapport à X, i.e, on suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*
   (1) $E(u) \to \infty$ quand $||u|| \to \infty, u \in M$.

   (2) Pour tout $u \in M$, toute suite (u_n) dans M telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans X, on a
   $$E(u) \le \liminf_{n\to\infty} E(u_n)$$
   Alors u est borné inférieurement sur M et atteint son minimum dans M.

2. Méthodes variationnelles

$$(P_1)\begin{cases} -\Delta u(x) = u^p & \text{pour} \quad x \in \Omega \\ u(x) > 0 & \text{pour} \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où $p = \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$ est critique de point de vue d'injection de Sobolev.

En fait, les solutions de (P_1) correspondent aux points critiques de la fonctionnelle d'énergie

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\, dx$$

Notons que $p+1 = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant limite de l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$.
Puisque l'injection n'est pas compacte, la fonctionnelle ne satsfait pas la condition de Palais-Smale et dans ce cas nous avons le résultat de non-existence dû à Pohozaev suivant :
Quand Ω est ètoilé alors le problème (P_1) avec $p = \frac{N+2}{N-2}$ n'admet pas de solutions.

Si on ajoute une perturbation à (P_1), on peut avoir des solutions même dans le cas critique.
En effet, soit le problème de Brézis-Nirenberg

$$(P_2)\begin{cases} -\Delta u(x) = u^p + \lambda u & \text{pour} \quad x \in \Omega \\ u(x) > 0 & \text{pour} \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Les solutions de (P_2) sont les points critiques de la fonctionnelle d'énergie

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\, dx$$

or puisque l'équation est homogène, on peut utiliser

– Minimisation sous contrainte
  On minimise la fonctionnelle : $\widetilde{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\lambda \int u^2$ sur la

sphère unité dans $L^{p+1}(\Omega)$,

$$M = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : ||u||_{L^{p+1}}^{p+1} = 1\}$$

un point critique de $\widetilde{E}$ satisfait l'équation

$$-\Delta u - \lambda u = \mu u^p$$

où μ est le multiplicateur de Lagrange, donc après avoir trouver la valeur de μ on obtient une solution de (P_2).

ou d'une manière équivalente,

- Minimisation du quotient de Sobolev

$$S_\lambda(u \ ; \ \Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p - \lambda \int_\Omega |u|^2}{(\int_\Omega |u|^{p+1} \, dx)^{2/p+1}}$$

On a le résultat suivant

Théorème 1.3.3 *(a) $N \geq 4, (P_2)$ a une solution pour tout $\lambda \in (0, \lambda_1)$ et n'admet pas de solution quand $\lambda \notin (0, \lambda_1)$ et Ω étoilé, où λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$.*

(b) $N = 3$, on a une solution complète seulement quand Ω est une boule. Dans ce cas (P_2) a une solution ssi $\lambda \in (\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1)$.

De plus, on a le resultat de non-existence suivant :

Théorème 1.3.4 *Soit $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ un domaine régulier dans $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ qui est étoilé par rapport à l'origine dans $\mathbb{R}^N$, et soit $\lambda \leq 0$. Alors, l'unique solution du problème (P_2) est la solution triviale.*

- Méthode de Minimax

  Elle est basée sur le lemme du Col ou parfois appelé la méthode de Montain Pass.

Théorème 1.3.5 (Mountain Pass) *Supposons $E \in \mathcal{C}^1(X)$ satisfait (P-S). Supposons*

(a) $E(0) = 0$;

(b) $\exists \rho > 0$, $\alpha > 0$: $||u|| = \rho \Rightarrow E(u) \geq \alpha$;

(c) $\exists u_1 \in X \; : ||u_1|| \geq \rho$ *et* $E(u_1) < \alpha$.
Définissons

$$P = \{p \in C^0([0,1[; X);\; p(0) = 0,\; p(1) = u_1\}.$$

Alors

$$\beta = \inf_{p \in P}\; sup_{p\in P} \geq \alpha$$

est une valeur critique.

Ce théorème nous fournit des solutions pour des problèmes plus généraux.
En effet, soit

$$\begin{cases} -\Delta u = g(.,u) & \text{dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Théorème 1.3.6 *Soit* Ω *un domaine régulier borné dans* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $p > 1$ *et soit* $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de Carathéodory avec primitive* $G(x,u) = \int_0^u g(x,v) = dv$.
Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites

(a) $\limsup_{u\to 0} \frac{g(x,u)}{u} \leq 0$ *uniformément en* $x \in \Omega$ *;*

(b) $\exists p < 2^*, C \; : |g(x,u)| \leq C(1 + |u|^{p-1})$ *pour presque tout* $x \in \Omega,\; u \in \mathbb{R}$

(c) $\exists q > 2,\; R_0,\; C : 0 < q\,G(x,u) \leq g(x,u)\,u$ *pour presque tout* $x \in \Omega$, *si* $|u| \geq 0$.

Alors, le problème admet des solutions non-triviales $u_+ \geq 0 \geq u_-$ *dans* Ω.

Chapitre 2

Régularité

2.1 La régularité pour les équations linéaires

Dans ce chapitre, on étudie les équations de la forme

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \text{ dans } \Omega \tag{2.1}$$

où Ω est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^N$, $a_{i,j}(x), b_i, c\ f : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

Dorénavant, on suppose la condition de symétrie

$$a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x)\ i, j = 1, ..., N$$

Si on a une équation qui ne satisfait pas cette dernière condition, alors on peut remplacer $a_{i,j}$ par $\widetilde{a}_{i,j} = \frac{1}{2}(a_{i,j} + a_{j,i})$ afin d'avoir une équation équivalente qui a la propriété de symétrie.

Une fois qu'on a une solution faible d'une équation telle que

$$Lu = f \text{ dans } \Omega \tag{2.2}$$

On aimerait bien qu'elle soit une solution classique. Une condition necessaire pour ceci est bien évidemment que la dérivée seconde existe, ce qui nous ramène à un problème de régularité.

On suppose que L est uniformément elliptique avec la constante d'ellipticité $\beta > 0$.

Avant d'annoncer le résultat principal de cette partie, on a besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.1.1 – *(i) Supposons $u, v \in L^2(\Omega)$ et que l'un d'eux est à support compact dans Ω.*
Alors, pour $h < dist(K, \partial\Omega)$, on a

$$\int_\Omega u(x)\, \partial_k^h(v)\, dx = -\int_\Omega \partial_k^{-h} u(x)\, v(x)\, dx$$

– *(ii)Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\Omega' \subset\subset \Omega$ pour $h < dist(K, \partial\Omega)$, on a*

$$\partial_k^h(u) \in W^{1,p}(\Omega)$$

et

$$\partial_{x_k}(\partial_k^h u) = \partial_k^h(\partial_{x_k} u)$$

– *(iii)Pour $h < dist(K, \partial\Omega)$, on a*

$$\partial_k^h(uv)(x) = u(x + he_k)\partial_k^h v(x) + \partial_k^h u(x)\, v(x)$$

Preuve.
– (i)

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\, \partial_k^h(v)\, dx &= \int_\Omega u(x)\frac{v(x + he_k - v(x)}{h}\, dx \\ &= \int_\Omega \frac{u(x)v(x + he_k)}{h}\, dx - \int_\Omega \frac{u(x)v(x)}{h}\, dx\end{aligned}$$

et en faisant le changement de variable x en $x - he_k$ dans la première intégrale, il vient que

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\, \partial_k^h(v)\, dx &= \int_\Omega \frac{u(x - he_k)v(x)}{h}\, dx - \int_\Omega \frac{u(x)v(x)}{h}\, dx \\ &= \int_\Omega \frac{u(x) - u(x - he_k)}{h} v(x)\, dx \\ &= -\int_\Omega \partial_k^{-h}(x)\, v(x)\, dx\end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned}
(ii) < \partial_{x_k}(\partial_k^h(u)), \varphi > &= - < \partial_k^h(u), \partial_{x_k}\varphi > \\
&= -\int_\Omega \partial_k^h(u)\, \partial_{x_k}\varphi\, dx \\
&= \int_\Omega u\, \partial_k^{-h}(\partial_{x_k}\varphi)\, dx \text{ par (i)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
< \partial_{x_k}(\partial_k^h(u)), \varphi > &= \int_\Omega u \partial_k^h \partial_{x_k}(\partial_k^{-h}\varphi) \\
&= -\int_\Omega \partial_{x_k} u\, \partial_k^{-h}\varphi\, dx \\
&= \int_\Omega \partial_k^h(\partial_{x_k} u)\, \varphi\, dx \text{ par (i)} \\
&= < \partial_k^h(\partial_{x_k} u), \varphi >
\end{aligned}$$

– (iii)On a par définition de ∂_k^h

$$\begin{aligned}
\partial_k^h(uv)(x) &= \frac{u(x+he_k)v(x+he_k) - u(x)v(x)}{h} \\
&= u(x+he_k)\frac{v(x+he_k) - v(x)}{h} + \frac{u(x+he_k) - u(x)}{h} v(x) \\
&= u(x+he_k)\partial_k^h v(x) + \partial_k^h u(x) v(x)
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.1 *Supposons que* $a_{i,j} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ *et* $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. *Si* $u \in H^1(\Omega)$ *est une solution faible de (2.1) pour* $f \in L^2(\Omega)$, *alors* $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

Preuve. Fixons $k \in 1, ..., N$, on utilise l'opérateur de difference

$$\partial_k^h w(x) = \frac{1}{h}(w(x+he_k) - w(x)),$$

où k est le $k^{\text{ème}}$ vecteur unitaire.

Supposons que $\Omega' \subset \Omega$ est précompact dans Ω, soit $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $0 \leq \eta \leq 1$ et $\eta \equiv 1$ dans Ω'. Définissons

$$v = -\partial_k^{-h}(\eta^2 \partial_k^h u)$$

si $|h|$ est suffisemment petit, alors elle est bien définie dans Ω et $v \in H_0^1(\Omega)$. D'où

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla v.A\nabla u dx &= -\int_\Omega v div(A\nabla u) \\ &= \int_\Omega v(b.\nabla u + cu - f)dx \qquad (2.3)\end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla v.A\nabla u dx &= \int_\Omega \nabla(-\partial_k^{-h}(\eta^2\partial_k^h u)).A\nabla u dx \\ &= -\int_\Omega \partial_k^{-h}\nabla(\eta^2\partial_k^h u).A\nabla u dx \text{ par (ii)} \\ &= \int_\Omega \nabla(\eta^2\partial_k^h u).\partial_k^h(A\nabla u)dx \text{ par (i)} \\ &= \int_\Omega \nabla(\eta^2\partial_k^h u).(A(x+he_k)\nabla\partial_k^h u + \partial_k^h A\nabla u)dx \text{ par (iii)} \\ &= \int_\Omega \eta^2\nabla\partial_k^h u.A(x+he_k)\nabla\partial_k^h u dx \qquad (2.4) \\ &+ \int_\Omega \eta^2\nabla\partial_k^h u.\partial_k^h A\nabla u \\ &+ 2\int_\Omega \eta\partial_k^h u\nabla\eta.A(x+he_k)\nabla\partial_k^h u dx \\ &+ 2\int_\Omega \eta\partial_k^h u\nabla\eta.\partial_k^h A\nabla u \, dx\end{aligned}$$

soit

$$I = (\int_\Omega \eta^2|\nabla\partial_k^h u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

alors par l'ellipticité de L, on a

$$\beta|\nabla\partial_k^h u|^2 \leq \nabla\partial_k^h u.A(x+he_k)\nabla\partial_k^h u$$

ce qui implique que

$$\beta I^2 \leq \int_\Omega \eta^2\nabla\partial_k^h u.A(x+he_k)\nabla\partial_k^h u dx$$

De plus, par l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_\Omega \eta^2\nabla(\partial_k^h u).\partial_k^h A\nabla u dx \leq (\int_\Omega \eta^2|\nabla\partial_k^h u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega \eta^2|\partial_k^h A|^2|\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

D'où,pour $C_1 = \|A\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}$, on obtient

$$\int_\Omega \eta^2 \nabla \partial_k^h u . \partial_k^h A \nabla u \, dx \leq C_1 I \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

de la même manière, on a

$$\begin{aligned}
& \left| 2 \int_\Omega \eta \partial_k^h u \nabla \eta . A(x + he_k) \nabla \partial_k^h u \, dx \right| \\
\leq \;& 2 \Big(\int_\Omega \eta^2 |\partial_k^h u| \nabla \eta|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega \eta^2 |A(x + he_k)|^2 |\nabla \partial_k^h u|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \\
\leq \;& \|\nabla \eta\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|\partial_k^h u\right\|_{L^2(supp\, \eta)} \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega \eta^2 |\partial_k^h u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
= \;& C_2 \left\|\partial_k^h u\right\|_{L^2(supp\, \eta)} I
\end{aligned}$$

avec $C_2 = \|\nabla \eta\|_{L^\infty(\Omega)} \|A\|_{L^\infty(\Omega)}$ et

$$|2 \int_\Omega \eta \partial_k^h u \nabla \eta . \partial_k^h A \nabla u \, dx| \leq C_3 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \left\|\partial_k^h u\right\|_{L^2(supp\, \eta)},$$

Avec $C_3 = 2 \|\nabla \eta\|_{L^\infty(\Omega)} \|A\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}$.

En utilisant la formule

$$\begin{aligned}
\partial_k^h u(x) &= \frac{1}{h} \int_0^h \frac{d}{dt} u(x + te_k) \, dt, \\
&= \fint_{[0,h]} \frac{d}{dt} u(x + te_k) \, dt
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
||\partial_k^h u||^2_{L^2(\Omega')} &= \int_{\Omega'} \left| \int_0^h \frac{d}{dt} u(x + te_k) \, dt \right|^2 \, dx \\
&\leq \int_{\Omega'} \fint_{[0,h]} |\frac{d}{dt} u(x + te_k)|^2 \, dt \, dx \\
&\leq \int_{\Omega'} \fint_{[0,h]} |\frac{\partial}{\partial x_k} u(x + te_k)|^2 \, dt \, dx \text{ (par l'inégalité de Hölder)} \\
&\leq \fint_{[0,h]} \int_{\Omega'} |\frac{\partial}{\partial x_k} u(x + te_k)|^2 \, dx \, dt \text{ (par le théorème de Fubini)} \\
&\leq \fint_{[0,h]} \int_{\Omega} |\frac{\partial}{\partial x_k} u(x)|^2 \, dx \, dt \\
&\leq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Ainsi (2.4) et les inégalités ci-dessus montrent que

$$\begin{aligned} \beta I^2 &\leq \int_\Omega \nabla v.A\nabla u dx + C_4 I \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + C_4 \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}{}^2 \end{aligned}$$

pour un nombre C_4 qui dépend seulement de η et A.

D'autre part, par (3.12) et l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_\Omega \nabla v.A\nabla u dx \leq C_5 \|v\|_{L^2(supp\eta)} (\|\nabla u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}) \tag{2.6}$$

où

$$C_5 = \|b\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} + 1.$$

Finalement

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(supp\eta)} &= (\int_\Omega |\partial_k^{-h}(\eta^2 \partial_k^h u)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\int_\Omega |\nabla(\eta^2 \partial_k^h u)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\int_\Omega |\eta^2 \nabla \partial_k^h u + 2\eta \nabla \eta (\partial_k^h u)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq I + C_6 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

pour $C_6 = \|\nabla \eta\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Maintenant, on utilise (3.13) et ces dernières inégalités pour estimer le premier terme du coté droit de (3.12).
Et en utilisant l'abbréviation

$$E = (\|\nabla u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})$$

on obtient

$$\beta I^2 \leq C_7 I E + C_7 E^2$$

pour une constante C_7 qui dépend seulement des coefficients de L et η.
Ainsi par l'inégalité de Young

$$\beta I^2 \leq \frac{\beta I^2}{2} + \frac{C_7^2 E^2}{2\beta} + C_7 E^2$$

i.e

$$\int_\Omega \eta^2 |\nabla \partial_k^h u|^2 dx = I^2 \leq C_8^2 E^2$$

pour $C_8^2 = \frac{C_7^2}{\beta} + 2C_7$ et par le théorème de Alaouglu, il existe une suite $h_l \to 0$ telle que

$$\nabla \partial_k^{h_l} u \rightharpoonup g$$

faiblement dans $(L^2(\Omega'))^N$ pour un certain $g \in (L^2(\Omega'))^N$.
Pour $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega'))^N$ on a donc trouver

$$\int_{\Omega'} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} . \nabla u dx = \lim_{l \to +\infty} \int_{\Omega'} \partial_k^{-h_l} \varphi . \nabla u dx = \lim_{l \to +\infty} \int_{\Omega'} \varphi . \nabla \partial_k^{h_l} u dx = \int_{\Omega'} \varphi . g dx$$

ce qui signifie que $g = \nabla \frac{\partial u}{\partial x_k}$ au sens faible.

Ainsi $u \in H^2(\Omega')$.
■

En appliquant le théorème précédent succéssivement, on va ganner en chaque étape un peu plus de régularité.
Un tel raisonnement -typiques aux EDP- est appelé la technique de Bootstrap.

Théorème 2.1.2 *Supposons que les coefficients sont $C^{m,1}(\overline{\Omega})$.
Si $f \in H^m(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de (2.1), alors $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$.*

Preuve. Soit u une solution faible de $Lu = f$, alors

$$\int_\Omega A \nabla u . \nabla v + \int_\Omega b . \nabla u \, v + \int_\Omega cuv \; dx = \int_\Omega fv \; dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Puisque v appartient à $D(\Omega)$, on peut utiliser $-\frac{\partial v}{\partial x_k}$ au lieu de v comme fonction test, on aura

$$\int_\Omega A \nabla u . \nabla (-\frac{\partial v}{\partial x_k}) + \int_\Omega b . \nabla u \, (-\frac{\partial v}{\partial x_k}) + \int_\Omega cu(-\frac{\partial v}{\partial x_k}) \; dx = \int_\Omega f(-\frac{\partial v}{\partial x_k}) \; dx \tag{2.7}$$

On sait par le théorème précédent que $u \in H^2(\Omega') \; \forall \Omega' \subset\subset \Omega$

Si de plus les $a_{i,j} \in C^{1,1}(\Omega)$ alors chaque composante du vecteur $A.\nabla u$ appartient à $H^1(\Omega')$.

Et en permutant entre ∇ et ∂x_k, on trouve à partir de (2.7) que

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}(A\nabla u).\nabla v dx + \int_\Omega b.\nabla u(-\frac{\partial v}{\partial x_k})dx + \int_\Omega cu(-\frac{\partial v}{\partial x_k})\, dx = \int_\Omega f(-\frac{\partial v}{\partial x_k})dx$$

ce qui implique que

$$\int_\Omega \left(A\nabla(\frac{\partial u}{\partial x_k}) + \frac{\partial A}{\partial x_k}.\nabla u\right).\nabla v dx - \int_\Omega b.\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}(\nabla u\, v) - \nabla\frac{\partial u}{\partial x_k} v\right) + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}(cu)v dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k} v dx$$

Ce qui équivaut à écrire

$$\int_\Omega L\frac{\partial u}{\partial x_k} v = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}\, v\, dx - \int_\Omega \frac{\partial A}{\partial x_k}\nabla u.\nabla v\, dx - \int_\Omega \frac{\partial b}{\partial x_k}.(\nabla u\, v) - \int_\Omega \frac{\partial c}{\partial x_k} uv\, dx$$

Vu que le second membre de l'équation précédente appartient à $L^2_{loc}(\Omega)$ alors l'application du théorème précédent nous donne

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} \in H^2_{loc}(\Omega)$$

D'où $u \in H^3(\Omega)$.
En continuant ce processus, ou bien en appliquant seulement ce qu'on a appliqué à $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, on conclut par itération.
■

Corollaire 2.1.1 *Si les coefficients sont $C^\infty(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\Omega)$ alors une solution faible $u \in H^1(\Omega)$ de (2.1) appartient à $C^\infty(\Omega)$.*

Preuve. Par le théorème précédent, on a que

$$u \in H^m(\Omega) \text{ pour tout } m,\ \forall\ \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Puisque m est quelconque, on peut le choisir supérieur à $\frac{N}{2}$ et donc par injection de Sobolev ($W^{m,2}(\Omega) \subset C^{q,\alpha}(\Omega)$), et par conséquent, il va finir par dépasser tout entier q.
D'où $u \in C^q(\Omega)$ pour tout q.
En particulier, $u \in C^\infty(\Omega)$. ■

2.2 La régularité pour les équations semi linéaires

A présent, on s'intéresse à la régularité de solution de

$$-\Delta u = g(u) \text{ dans } \Omega \tag{2.8}$$

où

$g \in C^0(\mathbb{R})$ est une fonction donnée. C'est l'équation d'Euler Lagrange de la fonctionnelle

$$E(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + G(u))dx$$

où

$$G(y) = \int_0^y g(s)\, ds$$

Le comportement de la solution de l'équation (2.8) dépend d'une manière cruciale du taux de croissance de g quand $|y| \to \infty$. on suppose que

$$|g(y)| \leq C_0(|y|^\alpha + 1),\ y \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

pour deux constantes C_0 et $\alpha \geq 1$

Théorème 2.2.1 *Soit $N \geq 3$ et supposons que $\alpha < \frac{N+2}{N-2}$.*
Si $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de (2.8), alors u est localement continue Höldérienne dans Ω.

Pour montrer ce théorème, on a besoin du théorème suinvant, qui est une extension de la théorie de la régularité du paragraphe précédent

Théorème 2.2.2 *Supposons que $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p(\Omega)$. si $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de $\Delta u = f$, alors $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$.*

Preuve.
Le cas $N = 1$ est évident, puisqu'on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = f$$

qui appartient à $L^p(\Omega)$ par hypothèse.

Supposons que $N \geq 2$ et définissons

$$\Phi(x) = -2\frac{1}{2\ \pi} \log|x|,\ \ si\ N = 2$$

et

$$\Phi(x) = -2\frac{|x|^{2-N}}{N(N-2)|B(0,1)|} \; si \; N \geq 3$$

Alors la convolution

$$v(x) \;=\; -\int_{\Omega} \Phi(x-y)f(y)dy \tag{2.10}$$

est une solution faible de $\Delta v = f$ dans Ω. Ainsi $w = u - v$ est harmonique dans Ω(i.e, $\Delta w = 0$)
on sait d'après le corrolaire 2.1.1 que les fonctions harmoniques sont des fonctions lisses (de classe C^{∞}) et donc pour achever la démonstration, il suffit de montrer que $v \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$.
Ceci résulte des estimations des intégrales singulières du type (2.10).[10]

■

Lemme 2.2.1 *Supposons que $u \in H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ est une solution faible de si $p < \frac{\alpha N}{2}$, alors $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ pour un nombre q tel que :*

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} - \frac{2}{N}$$

si $p > \frac{\alpha N}{2}$, alors u est localement continue Höldérienne.

Preuve. Par (2.9), on a $|u|^{\alpha} \in L^{p/\alpha}(\Omega)$

Par conséquent $u \in W^{2,p/\alpha}_{loc}(\Omega)$ en vertu du théorème 2.2.2.

Et par injection de Sobolev, on conclut que

$$u \in L^q(\Omega) \; lorsque \; p < \frac{\alpha N}{2}$$

et

$$u \in L^{\infty}(\Omega) \; quand \; p > \frac{\alpha N}{2}$$

. ■

Preuve de théorème 2.2.2. Tout d'abord, on a par injection de Sobolev $H^1(\Omega) \subset L^{2^*}$ que, $u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$

Définissons les nombres $p_0, p_1, ...$ par

$$p_0 = \frac{2N}{N-2}, \; \frac{1}{p_{k+1}} = \frac{\alpha}{p_k} - \frac{2}{N}$$

tant que

$$p_k < \frac{\alpha N}{2}$$

Le nombre suivant p_{k+1} est bien défini et positif et le lemme 2.2.1 implique que $u \in L^{p_{k+1}}_{loc}(\Omega)$.

Quand $p_k > \frac{\alpha N}{2}$ le lemme 2.2.1 montre que u est localement continue Höldérienne.

Si $p_k = \frac{\alpha N}{2}$, alors p_{k+1} est indéfini. Mais, dans ce cas,on a $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ pour tout $q < \frac{\alpha N}{2}$.
Si q est choisi suffisamment proche de $\frac{\alpha N}{2}$, alors l'application du lemme 2.2.1 deux fois montre la continuité Höldérienne locale. Par conséquent, on a à montrer que $p_k \geq \frac{\alpha N}{2}$ après un nombre fini d'étapes.
Pour ceci, soit

$$\beta = \alpha - 1 < \frac{4}{N-2}$$

car $\alpha < \frac{N+2}{N-2}$ par hypothèse.
Alors

$$\frac{1}{p_{k+1}} - \frac{1}{p_k} = \frac{\beta}{p_k} - \frac{2}{N}$$

Si $p_k \geq \frac{2N}{N-2}$, alors on obtient

$$\frac{1}{p_{k+1}} - \frac{1}{p_k} \leq \frac{\beta(N-2)}{2N} - \frac{2}{N} < 0$$

Ce qui implique que

$$p_{k+1} > p_k \geq \frac{2N}{N-2}$$

Et on conclut que tant que p_{k+1} est bien défini et positif, on a

$$p_{k+1} \geq p_k \geq \frac{2N}{N-2}$$

De plus,

$$\frac{1}{p_{k+1}} - \frac{1}{p_k} \leq \frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_{k-1}}$$

Par conséquent, on a après un nombre fini d'étapes que

$$p_k \geq \frac{\alpha N}{2}$$

■

Chapitre 3

Inégalité de Caccioppoli et application

Une autre approche de la régularité est basée sur l'inégalité de Caccioppoli.

Fixons $p \in (1, \infty)$, $0 < r' < r$ l'inégalité de Caccioppoli est de la forme

$$\int_{B(x_0,r')} |\nabla u|^p dx \leq C \int_{B(x_0,r)} |u|^p dx \tag{3.1}$$

Une fonction dans $W^{1,p}(B(x_0, r))$ ne satisfait pas forcément (3.1), elle doit aussi être solution de certaines d'E.D.P.
Lorsque c'est le cas cette inégalité nous aide à montrer la régularité.

3.1 Pour l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \tag{3.2}$$

Proposition 3.1.1 (Inégalité de Caccioppoli) *Soit $x_0 \in \Omega$, $0 < r' < r$ tels que $B(x_0, r) \subset \Omega$.*
Si u satisfait (3.2), alors il existe $C > 0$ tel que

$$\int_{B(x_0,r')} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{C}{(r - r')^2} \int_{B(x_0,r)} |u|^2 \, dx \tag{3.3}$$

Remarque

- Si u est harmonique, il en est de même pour $u - C$ pour n'importe quelle constante $C \in \mathbb{R}$ en particulier pour

$$C = \frac{1}{B(x_0, r)} \int_{B(x_0,r)} u = \overline{u}_{B(x_0,r)}$$

Donc, on a l'inégalité suivante :

$$\int_{B(x_0,r')} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{C}{(r-r')^2} \int_{B(x_0,r)} |u - \overline{u}_{B(x_0,r)}|^2 \, dx \tag{3.4}$$

- L'inégalité (3.4) est une sorte d'inverse de l'inégalité de Poincaré.

Preuve. Soit $\eta \in C_0^\infty(B(x_0, r))$ tel que $0 \leq \eta \leq 1$ dans $B(x_0, r)$, $\eta \equiv 1$ dans $B(x_0, r')$ et $|\nabla \eta| \leq \frac{2}{r-r'}$.

On a

$$\int_{B(x_0,r)} \Delta u \quad (u\eta^2) = \int_{B(x_0,r)} \nabla u \, \nabla(u\eta^2) = 0$$

On développe

$$\begin{aligned}
\nabla u . \nabla(u\eta^2) &= \nabla u \, . \nabla(u\eta)\eta + \nabla u . \, \nabla\eta(u\eta) \\
&= (\nabla(u\eta) - u\nabla\eta) . \nabla(u\eta) + (\nabla(u\eta) - u\nabla\eta) . u\nabla\eta \\
&= |\nabla(u\eta)|^2 - \nabla\eta \, \nabla(u\eta)u + \nabla(u\eta) \, . \nabla\eta u - |\nabla\eta|^2 \, u^2 \\
&= |\nabla(u\eta)|^2 - |\nabla\eta|^2 \, u^2
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla(u\eta)|^2 \, dx = \int_{B(x_0,r)} |\nabla\eta|^2 \, u^2 \, dx$$

ce qui implique, par définition de η que

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,r')} |\nabla u|^2 \, dx \leq \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 \, dx &\leq \int_{B(x_0,r)} |\nabla\eta|^2 \, u^2 \, dx \\
&\leq \frac{4}{(r-r')^2} \int_{B(x_0,r)} u^2 \, dx
\end{aligned}$$

■

La proposition suivante montre que la norme de la solution faible du laplacien dans L^2 contrôle toutes les normes dans H^k

Proposition 3.1.2 *Soit $x_0 \in \Omega$, $0 < r' < r$ tel que $B(x_0, r) \subset \Omega$.*
Si $\Delta u = 0$ dans Ω, alors

$$\|u\|^2_{H^k(B(x_0,r))} \leq C(r, r', k) \|u\|^2_{L^2(B(x_0,r))}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Preuve. Pour $k = 1$:
On somme l'inégalité

$$\int_{B(x_0,r')} |u|^p \, dx \leq \int_{B(x_0,r)} |u|^p \, dx$$

avec l'inégalité (3.3). On trouve

$$||u||_{H^2_{B(x_0,r)'}} \leq C||u||_{H^2_{B(x_0,r)}}$$

Pour $k = 2$:
Soit $r_1 = \frac{r+r'}{2}$ de sorte que $r_1 \in]r', r[$.

Le laplacien étant un opérateur sous forme divergence à coefficients constants, alors u est de classe C^∞, on peut donc dériver (3.2) pour tout $i \in 1, ..., n$ vu que la fonction $\frac{\partial \omega}{\partial x_i}$ est harmonique, on peut appliquer l'inégalité de Caccioppoli à $\frac{\partial \omega}{\partial x_i}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,r')} \left|\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|^2 &\leq \frac{4}{(r_1 - r')^2} \int_{B(x_0,r_1)} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \\ &\leq \frac{4}{(r_1 - r')^2} \int_{B(x_0,r_1)} |\nabla u|^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

En appliquant l'inégalité de Caccioppoli à nouveau entre r_1 et r', on trouve

$$\int_{B(x_0,r_1)} |\nabla u|^2 \leq \frac{4}{(r - r_1)^2} \int_{B(x_0,r)} |u|^2$$

Et en combinant les deux inégalités obtenues, il vient que

$$\int_{B(x_0,r')} \left|\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|^2 \leq C \int_{B(x_0,r)} |u|^2$$

D'où

$$\|u\|^2_{H^2(B(x_0,r'))} \leq C \|u\|^2_{L^2(B(x_0,r))}$$

Et le cas général se fait par itération. ■

Proposition 3.1.3 (Résultat de compacité) *Soit $r > 0$ et $(u_n)_{n\in N}$ une suite bornée de fonctions harmoniques dans $B(r)$.*
Alors pour tout $0 < r' < r$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in N}$, et $u \in H^k(B(r))$ tel que

$$u_{\sigma(n)} \to u \text{ dans } H^k(B(r'))$$

De plus

$$\Delta u = 0$$

Preuve.

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(B(r))$, on peut extraire une sous-suite $u_{\sigma(n)_n}$ telle que

$$u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u \Longleftrightarrow_{df} \ < u_{\sigma(n)}, \varphi > \to < u, \varphi >, \ \forall \varphi \in L^2(B(r))$$

et pour tout $\varphi \in C_0^\infty(B(r))$ par densité.

D'où $\int_{B(r)} u\Delta\varphi = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B(r))$ et

$\Delta u = 0$

La fonction $(u_{\sigma(n)} - u)$ étant harmonique, on peut appliquer l'inégalité de Caccioppoli.

Soit $r_1 = \frac{r'+r}{2}$, on a

$$\int_{B(r_1)} |\nabla(u_{\sigma(n)} - u)|^2 \leq C \int_{B(r)} |u_{\sigma(n)} - u|^2 \leq C$$

Puisque la suite $(u_{\sigma(n)} - u)$ est bornée dans $H^1(B(r_1))$, alors

$$(u_{\sigma(n)} - u) \rightharpoonup 0 \text{ dans } H^1(B(r_1))$$

et par injection de Rellich Kondrachov, on aura

$$(u_{\sigma(n)} - u) \to 0 \text{ dans } L^{2^*}(B(r_1))$$

En particulier,

$$(u_{\sigma(n)} - u) \to 0 \text{ dans } L^2(B(r_1))$$

Appliquons à nouveau l'inégalité de Caccioppoli, mais cette fois-ci entre r_1 et r',

$$\int_{B(r')} |\nabla(u_{\sigma(n)} - u)|^2 \leq C \int_{B(r_1)} |u_{\sigma(n)} - u|^2 \to 0$$

Ainsi

$$u_{\sigma(n)} \to u \;\text{ fortement dans }\; H^1(B(r'))$$

et en procédant comme dans la proposition précédente, on montre que

$$u_{\sigma(n)} \to u \;\text{ fortement dans }\; H^k(B(r'))$$

■

3.2 Pour l'équation de Poisson

Soit

$$\Delta u = g(x, u, \nabla u) \text{ dans } \Omega \tag{3.6}$$

où $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui vérifie une certaine constante de croissance, à savoir, on suppose qu'ils existent deux constantes

$$C_0 > 0 \text{ et } q > 1$$

telles que

$$|g(x, y, z)| \leq C_0(|z|^q + 1), \text{ pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega), \ z \in \mathbb{R}^N$$

Maintenant, on définit

$$\lambda = \frac{q-2}{1-q}$$

et

$$\mu = \lambda + 1 = \frac{1}{q-1}$$

Lemme 3.2.1 *Pour tout $\delta > 0$, il existe $r_0 > 0, \varepsilon > 0$ et $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ avec la propriété suivante :*
Supposons que

$$u \in W^{1,p}(\Omega)$$

est une solution faible de (3.6) et $B(x_0, r) \subset \Omega$. Si $r \leq r_0$ et

$$r^{\mu p - N} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^p \, dx < \varepsilon^p$$

alors, soit

$$r^{p-N} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^p \ dx \leq r^p$$

ou

$$\int_{B(x_0,\theta r)} \left| u - \overline{u}_{B(x_0,\theta r)} \right|^p dx \leq \delta \, r^{p-N} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^p \ dx$$

Preuve.

Raisonnons par l'absurde, on suppose que pour un certain $\delta > 0$, pour tout $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ fixé, $B(x_k, r_k) \subset \Omega$ tel

$$r_k \to 0$$

et

$$r_k^{\mu p-N} \int_{B(x_k,r_k)} |\nabla u_k|^p \ dx = \varepsilon_k^p \to 0 \tag{3.7}$$

mais

$$r_k^{p-N} \int_{B(x_k,r_k)} |\nabla u_k|^p \, dx > r_k^p \tag{3.8}$$

et

$$\fint_{B(x_k,\theta r_k)} \left|u_k - \overline{u}_{B(x_k,\theta r_k)}\right|^p dx \ > \delta \, r_k^{p-N} \int_{B(x_k,r_k)} |\nabla u_k|^p \, dx \tag{3.9}$$

Notons que (3.8) et (3.9) signifient

$$\varepsilon_k^p > r_k^{\mu p} \tag{3.10}$$

et

$$\fint B(x_k,\theta r_k) \left|u_k - \overline{u}_{B(x_k,\theta r_k)}\right|^p dx > \delta \, \varepsilon_k^p \, r_k^{-\lambda p} \tag{3.11}$$

en effet, à partir de (3.7), on a

$$\int_{B(x_k,r_k)} |\nabla u_k|^p \ dx = r_k^{-\mu p+N} \varepsilon_k^p$$

en remplaçant cette dernière en premier temps dans (3.8), on trouve

$$\varepsilon_k^p > r_k^{p-p+N+\mu p-N}$$

d'où (3.10) et ensuite dans (3.9), on obtient

$$\fint_{B(x_k,\theta r_k)} \left|u_k - \overline{u}_{B(x_k,\theta r_k)}\right|^p dx > \delta r_k^{p-N-\mu p+N} \varepsilon_k^p = \delta r_k^{(1-\mu)p} \varepsilon_k^p$$

d'où (3.11).

Définissons

$$v_k(x) = \frac{r_k^\lambda}{\varepsilon_k}(u_k(r_k x + x_k) - \overline{u}_{B(x_k,\theta r_k)})$$

alors on a,

$$\nabla v_k(x) = \frac{r_k^{\mu}}{\varepsilon_k}\nabla u_k(r_k x + x_k)$$

$$\int_{B(0,1)} |\nabla v_k|^p \, dx \;=\; \frac{r_k^{\mu p-N}}{\varepsilon_k^p}\int_{B(x_k,r_k)} |\nabla u_k|^p = 1, \text{ par } (3.6) \tag{3.12}$$

de plus

$$\int_{B(0,\theta)} v_k dx = 0 \tag{3.13}$$

et par (3.11)

$$\oint_{B(0,\theta)} |v_k|^p \, dx = \frac{r_k^{\lambda+2}}{\varepsilon^k}\oint_{B(x_k,\theta r_k)} |u_k - \overline{u}_B(x_k,\theta r_k)|^p \, dx > \delta \tag{3.14}$$

on calcule aussi

$$\begin{aligned}
|\Delta v_k(x)| &= \frac{r_k^{\lambda+2}}{\varepsilon_k}(\Delta u_k(r_k x + x_k)) \\
&\leq C_0\frac{r_k^{\lambda+2}}{\varepsilon_k}((|\nabla u_k(r_k x + x_k)|)^q + 1) \\
&= C_0(\varepsilon_k^{q-1}\, r_k^{\lambda+2-\mu q}\, |\nabla v_k|^q + \frac{r_k^{\lambda+2}}{\varepsilon_k}) \\
&\leq C_0\left(\varepsilon_k^{q-1}\, r_k^0\, |\nabla v_k|^q + \frac{r_k^{\lambda+2}}{r_k^{\mu}}\right), \text{ par définition de } \lambda, \mu \; et \; (3.10) \\
&= C_0(\varepsilon_k^{q-1}\, |\nabla v_k|^q + r_k)
\end{aligned}$$

donc

$$\int_{B(0,1)} |\Delta v_k| \leq C_0\varepsilon_k^{q-1}\int_{B(0,1)} |\nabla v_k|^q \, dx + C_0 \,|B(0,1)|\, r_k \to 0 \text{ quand } k \to \infty \tag{3.15}$$

il vient de (3.12) et (3.13) que $(v_k)_{k\in N}$ est bornée dans $W^{1,p}(B(0,1))$, donc il existe une sous-suite $(v_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ tel que $v_{k_l} \rightharpoonup v$ faiblement dans $W^{1,p}(B(0,1))$ pour un certain $v \in W^{1,p}(B(0,1))$.
Pour $\varphi \in C_0^{\infty}(B(0.1))$, on a

$$\int_{B(0,1)} \nabla v.\nabla\varphi dx = \lim_{l\to+\infty}\int_{B(0,1)} \nabla v_{k_l}.\nabla\varphi dx = -\lim_{l\to+\infty}\int_{B(0,1)} \Delta v_{k_l}\varphi dx = 0$$

La dernière égalité provient de (3.15).

Ainsi, $\Delta v = 0$ dans $B(0,1)$ et par le corollaire (2.1.1) du chapitre 2

$$v \in C^{\infty}(B(0,1))$$

D'où $\Delta \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ pour tout $i \in 1, \cdots, N$.

le théorème de la valeur moyenne pour les fonctions harmoniques nous donne une constante C_1 telle que

$$\fint_{B(0,\theta)} |\nabla v|^p dx \leq \fint_{B(0,1)} |\nabla v|^p dx \leq C_1.$$

De plus, on a

$$\fint_{B(0,\theta)} v dx = 0$$

et l'inégalité de Poincaré implique que

$$\fint_{B(0,\theta)} |v|^p \, dx \leq C_2 \theta^p \fint_{B(0,\theta)} |\nabla v|^p \, dx \leq C_3 \theta^p$$

pour une autre constante C_2 et pour $C_3 = C_1 C_2$

D'autre part en vertu du théorème de Rellich-Kondrachov, on a $v_{k_l} \to v$ dans $L^p(B(0,1))$.
D'où (3.14) implique que

$$\fint_{B(0,\theta)} |v|^p \, dx \geq \delta$$

Si θ est choisi suffisemment petit, on obtient la contradiction désirée.
■

A présent, on a besoin du résultat suivant :

Lemme 3.2.2 (Morrey) *supposons que* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *et qu'ils existent deux nombres* $\alpha \in (0,1)$ *et* $a > 0$ *tels que*

$$r^{p-n} \int_{B(x_0,r)} (|\nabla u|)^p dx \leq a \, r^{\alpha p}$$

pour toute boule $B(x_0,r) \subset \Omega$ *alors*

$$u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$$

Preuve. On a
$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_B| + |u(y) - u_B|$ or

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_B| &= \lim_{\varepsilon \to 0} |u_\varepsilon(x) - u_B| \\
&\leq C \oint_{B(x_0,\varepsilon)} \int_B \frac{|\nabla u(w)|}{|z-w|^{n-1}} \, dw \, dz \\
&= C \int_B (\oint_{B(x_0,\varepsilon)} \frac{dz}{|z-w|^{n-1}} |\nabla u(w)| \, dw \\
&\leq C \int_B \frac{|\nabla u(w)|}{|x-w|^{n-1}} \, dw
\end{aligned}$$

De la même manière

$$|u_\varepsilon(x) - u_B| \leq C \int_B \frac{|\nabla u(w)|}{|y-w|^{n-1}} dw$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leq C \int_B \frac{|\nabla u(w)|}{|x-w|^{n-1}} dw + \int_B \frac{|\nabla u(w)|}{|y-w|^{n-1}} dw \\
&\leq C|x-y|^{1-\lambda} \left(M^\lambda_{2diamB} |\nabla u|(x) + M^\lambda_{2diamB} |\nabla u|(y) \right) \\
&\leq 2C|x-y|^{1-\lambda} \sup_{0<r<R} r^\lambda \left(\int_{B(x_0,r)} |\nabla u|(z)^p dz \right)^{1/p} \\
&\leq 2\,C|x-y|^{1-\lambda} \sup_{0<r<R} r^\lambda (M^p \, r^{n-p+\alpha p})^{1/p}
\end{aligned}$$

On prend $\lambda = 1 - \alpha$, alors

$$|u(x) - u(y)| \leq C\, M |x-y|^\alpha$$

Et puisque le lemme de Morrey est de nature local, on a pas besoin d'imposer d'hypothèse de régularité sur la frontière de Ω.

■

Théorème 3.2.1 *Supposons que $N \leq \mu p$ et soit $C > 0$, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est une solution faible de (3.6) dans Ω et*

$$\left(\frac{r}{2}\right)^{p-n} \int_{B(x_0,\frac{r}{2})} |\nabla u|^p \, dx \leq C \oint_{B(x_0,r)} |u - \overline{u}_B(x_0,r)|^p \, dx \tag{3.16}$$

pour toute boule $B(x_0, r) \subset \Omega$, alors u est localement Höldérienne continue.

Preuve. Choisissons $x_0 \in \Omega$, on a

$$lim_{r\to 0}\left(r^{\mu p-n}\int_{B(x_0,r)}|\nabla u|^p dx\right)=0$$

Ainsi pour un δ donné et les nombres correspondants, r_0, ε et θ du lemme 3.2.1, il existe un rayon $R \in (0, r_0]$ tel que la condition

$$r^{\mu p-N}\int_{B(x_0,r)}|\nabla u|^p dx \leq \varepsilon^p$$

est satisfaite pour tout $r \in (0, R]$ alors soit

$$r^{p-n}\int_{B(x_0,r)}|\nabla u|^p dx \leq r^p$$

ou

$$\int_{B(x_0,\theta r)}(|u-\overline{u}_B(x_0,\theta r)|)^p dx \leq \delta\, r^{p-n}\int_{B(x_0,r)}|\nabla u|^p\ dx$$

Dans le deuxième cas, on combine ça avec l'inégalité de Caccioppoli (3.16), pour $\sigma = \frac{\theta}{2}$, on obtient

$$(\sigma r)^{p-n}\int_{B(x_0,\sigma r)}|\nabla u|^p dx \leq C\delta r^{p-n}\int_{B(x_0,r)}|\nabla u|^p dx$$

On choisit δ de telle sorte que $C\delta < \frac{1}{2}$.
Alors, on a dans les deux cas

$$(\sigma r)^{p-N}\int_{B(x_0,\sigma r)}|\nabla u|^p dx \leq \frac{1}{2}r^{p-n}\int_{B(x_0,r)}|\nabla u|^p dx + C_1 r^p$$

avec $C_1 = \sigma^{p-N}$, ce qui veut dire :
Si on définit

$$f(r) = r^{p-N}\int_{B(x_0,r)}|\nabla u|^p dx$$

alors,

$$f(\sigma r) \leq \frac{1}{2}f(r) + C_1 r^p,\ \ r \in (0, R]$$

il s'en suit qu'ils existent deux constantes $C_2, \alpha > 0$ avec

$$f(r) \leq C_2 f(R) r^\alpha$$

et par le lemme 3.2.2, on a la continuité Höldérienne locale.

■

Définition On dit que l'équation (3.6) est sous-critique si $\mu p > N$ et critique si $\mu p = N$ (pour un choix optimal de q). Ces cas sont couverts par le théorème 3.2.1.

Si $\mu p < N$, alors l'équation est sur-critique, et on ne peut pas avoir la régularité même avec l'inégalité de Caccioppoli. Mais sous certaines conditions, on peut avoir des résultats de régularité partielle, si l'ensemble dans lequel on perd la régularité est petit.

On mesure la dimension d'un tel ensemble en termes de mesure de Hausdorff.

Pour un ensemble $U \subset \mathbb{R}^N$, soit

$$diamU = sup\{|x-y| : x, y \in U\}$$

Soit $d \geq 0$.Pour $\Sigma \subset \Omega$ et $\rho > 0$, définissons

$$\mathcal{H}\rho^d(\Sigma) = inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(diam\, U_i)^d :\ \Sigma \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, (diam\, U_i) < \rho \text{ pour } i \in \mathbb{N}\right\}$$

Cette inégalité est monotonne en ρ, d'où la limite

$$\mathcal{H}^d(\Sigma) = lim_{\rho \to +0^+}\mathcal{H}^d_\rho(\Sigma)$$

existe.

C'est la mesure de Hausdorff de Σ de dimension d.

Théorème 3.2.2 *Supposons que $q \in (1,2]$ et $n \geq \mu p$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ une solution faible de (3.2) qui satisfait l'inégalité de Caccioppoli (3.16), alors il existe un ensemble relativement fermé $\Sigma \subset \Omega$ avec $\mathcal{H}^{N-\mu p}(\Sigma) = 0$, tel que u est localement continue Höldérienne dans Ω/Σ.*

Pour la preuve, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.3 (le recouvrement de Vitali) *Soit F une collection arbitraire de boules fermées dans $\mathbb{R}^N$ avec*

$$sup\{diam\, B|B \in F\} < \infty$$

Alors, il existe une famille fini $\mathcal{G}$ de collection de boules qui sont deux à deux disjointes telles que

$$\bigcup_{B\in F} \subset \bigcup_{B\in \mathcal{G}} \hat{B}$$

et les boules $\{B_j\}_{j\in J'}$ sont deux à deux disjoints.
Où les $\hat{B}$ sont les boules concentriques de B de rayon 5 fois le rayon des boules B.

Preuve. 1)Soit
$D = sup\{diam\, B|B \in F\}$

Posons $F_j = \{B \in F \ tel\ que\ D/2^j < diam\, B < D/2^{j-1}\}$ $(j = 1, ..., N)$
Définissons $\mathcal{G}_j \subset F_j$ comme suit :

(a) Soit $\mathcal{G}_1$ une collection de boules maximales disjointes dans F_1.

(b) Supposons que $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, ..., \mathcal{G}_{k-1}$ ont été selectionnées, on choisit $\mathcal{G}$ d'être comme toute sous collection maximale disjointe de

$$\left\{ B \in F_k | B \cap B' = \emptyset \text{ pour toute boule } B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{G}_j \right\}$$

Enfin, on définit

$$\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{G}_j$$

Il est clair que $\mathcal{G}$ est une collection de boules disjointes et $\mathcal{G} \subset F$

2)Affirmation :
Pour chaque $B \in F$, il existe une boule $B' \in \mathcal{G}$ telle que $B \cap B' = \emptyset$ et $B \subset \hat{B}'$.
En effet :
Fixons $B \in F$, il existe un indice j tel que $B \in F_j$ et par maximalité de $\mathcal{G}_j$, il existe une boule $B' \in \bigcup_{k=1}^{j} \mathcal{G}_k$ avec $B \cap B' = \emptyset$.

Mais $diamB' \geq D2^j$ et $diamB \leq D\, 2^{j-1}$ de sorte que $diamB \leq 2diam\, B'$.
D'où $B \subset \hat{B}'$.

■

Preuve du théorème 3.2.3. Soit $\delta > 0$ et soient ε, r_0, θ les nombres correspondants du lemme 3.2.1.

Définissons

$$\Sigma = \left\{ x_0 \in \Omega : \liminf_{r\to 0^+} \left(r^{\mu p-N} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^p dx \right) \geq \varepsilon \right\}$$

Supposons que $x_0 \in \Omega/\Sigma$. Alors, il existe un nombre $r \in (0, r_0]$ tel que les conditions du lemme 3.2.1 sont satisfaites.

Similairement à la preuve précédente, on conclut que

$$(\sigma r)^{p-N} \int_{B(x_0,\sigma r)} |\nabla u|^p dx \leq \frac{1}{2} r^{p-N} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^p dx + C_1 r^p$$

pour $\sigma = \frac{\theta}{2}$, à condition que δ est assez petit.

Ainsi, en multipliant l'inégalité précédente par $\sigma^{\lambda p}$, on obtient

$$(\sigma r)^{\mu p-N} \int_{B(x_0,\sigma r)} |\nabla u|^p dx \leq \sigma^{\lambda p} \left(\frac{1}{2} r^{\mu p-N} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^p dx + C_1 r^{\mu p} \right)$$

si $q \leq 2$, alors $\lambda \geq 0$.

D'où le coté droit de l'inégalité précédente est majorée par

$$\frac{\varepsilon}{2} + C_1 r_0^{\mu p}$$

et si r_0 est choisi assez petit alors on peut répéter ces arguments pour σr. On obtient éventuellement

$$r^{p-n} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^p dx \leq C_1 r^{p\alpha} \tag{3.17}$$

pour une certaine constante C_1 et $\alpha > 0$.

De plus, on peut montrer ceci non seulement pour x_0, mais aussi pour tout point dans un certain voisinage de x_0.
Ainsi, u est localement continue Höldérienne prés de x_0 par le lemme 3.2.2.

De plus, pour chaque $\widetilde{x_0}$ dans ce voisinage, on obtient une inégalité de la forme (3.17). Il s'en suit que

$$lim_{r\to 0} \left(r^{\mu p-n} \int_{B(\widetilde{x_0},r)} |\nabla u|^p dx \right) = 0$$

Ainsi $\widetilde{x_0} \notin \Sigma$ et par conséquent Σ est relativement fermé à Ω.

A présent, on doit estimer la mesure de Hausdorff de Σ. Soit $\rho > 0$.Pour tout $x_0 \in \Omega$ il existe un rayon $r \in (0, \rho)$ tel que

$$r^{\mu p - N} \int_{B(x_0, r)} |\nabla u|^p dx \geq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.18}$$

La collection de ses boules couvre Σ. Par le lemme 3.2.3, on peut choisir un nombre fini de points $x_i \in \Sigma$ et leur rayons correspondants $r_i > 0$ qui satisfont (3.18), tel que

$$\Sigma \subset \sum_{i=1}^{\infty} B(x_i, 5r_j)$$

et $B(x_i, r_i) \cap B(x_j, r_j) = \emptyset$ pour $i \neq j$.
D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{10\rho}^{N-\mu p}(\Sigma) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (10r_i)^{N-\mu p} &\leq 10^{N-\mu p} \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B(x_i, r_i)} |\nabla u|^p dx \\ &\leq 10^{N-\mu p} \frac{2}{\varepsilon} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \end{aligned} \tag{3.19}$$

D'où $\mathcal{H}^{N-\mu p}(\Sigma) < \infty$, (car $n - \mu p < N$).
Il s'en suit que Σ est un ensemble nulle pour la mesure de Lebesgue .
Définissons

$$U_p = \{x \in \Omega : dist(x, \Sigma) < \rho\}$$

Alors, on obtient l'amélioration de (3.19) suivante :

$$\mathcal{H}^{N-\mu p}(\Sigma) \leq 10^{N-\mu p} \frac{2}{\varepsilon} \|\nabla u\|_{L^p(U_{5\rho})}^p \to 0 \text{ quand } \rho \to 0$$

D'où $\mathcal{H}^{N-\mu p}(\Sigma) = 0$ ∎

3.3 Pour $div(A\nabla u) = 0$

Dans tout ce qui suit, on suppose la condition d'ellipticité suivante :

$$\beta|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i.\,\xi_j \leq \gamma|\xi|^2$$

Proposition 3.3.1 (Inégalité de Caccioppoli) *Soient $u \in H^1(\Omega)$ solution de $Lu = 0.0 < r' < r$ tel que $B(x_0, r) \subset \Omega$.*
Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_{B(x_0,r')} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{C}{r-r'} \int_{B(x_0,r)} |u|^2 \, dx$$

Remarque :
On ne peut pas espérer que $u \in H^k_{loc}(\Omega)$

Preuve.

$$\int_\Omega div(A(x)\nabla u)\, u\eta^2 \, dx = -\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (u\eta^2)}{\partial x_j} \, dx$$

On développe l'intégrante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial (u\eta^2)}{\partial x_j} &= \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}(u\eta) + \frac{\partial u}{\partial_i}\frac{\partial (u\eta)}{\partial x_j}\eta \\
&= \left(\frac{\partial (u\eta)}{\partial x_i} - \frac{\partial \eta}{\partial x_i}u\right)\frac{\partial \eta}{\partial x_j}u + \left(\frac{\partial (u\eta)}{\partial x_i} - \frac{\partial \eta}{\partial x_i}u\right)\frac{\partial (u\eta)}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial (u\eta)}{\partial x_i}\frac{\partial (u\eta)}{\partial x_j} + \frac{\partial (u\eta)}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}u - \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial (u\eta)}{\partial x_j}u - \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}u^2
\end{aligned}$$

La symétrie des $a_{i,j}$ implique que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial (u\eta^2)}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial (u\eta)}{\partial x_i}\frac{\partial (u\eta)}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}u^2$$

Et par l'ellipticité de la matrice A

$$\begin{aligned}
\beta \int_\Omega |\nabla(u\eta)|^2 \, dx &\leq \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial(u\eta)}{\partial x_i} \frac{\partial(u\eta)}{\partial x_j} \; : dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} u^2 \, dx \\
&\leq \gamma \int_\Omega |\nabla \eta|^2 \, |u|^2 \, dx \\
&\leq \frac{4\gamma}{(r-r')^2} \int_{B(x_0,r)} |u|^2 \, dx
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.3.2 (Résultat de compacité) *Soit $r > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions de*

$$Lu_n = 0$$

telle que
la suite$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^1(B(r))$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $L^2(B(r))$.

Alors, pour tout $0 < r' < r$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_{\sigma(n)} \to u \text{ dans } H^1(B(r'))$$

De plus

$$Lu = 0 \text{ dans } B(r')$$

Preuve. la preuve est identique à celle de la proposition 3.1.3 ■

Lemme 3.3.1 (Généralisation de l'inégalité de Caccioppoli) *Soient $u \in H^1(\Omega)$ une solution de $Lu = 0$, $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \in \Omega$.*
Si

$$|u|^{p+1} \in L^1(B(x_0, r)) \text{ avec } p \geq 1 \, , \tag{3.20}$$

Alors, pour tout $\eta \in C_0^\infty(B(x_0, r))$,

$$|u|^{\frac{p+1}{2}} \eta \in H^1(B(x_0, r))$$

et

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla(|u|^{\frac{p+1}{2}} \eta)|^2 \leq C(p+1)^2 \int_{B(x_0,r)} |u|^{p+1} |\nabla \eta|^2 \tag{3.21}$$

Commentaire

- Si $p = 1$, on retrouve l'inégalité de Caccioppoli.

- Pour $p \leq 2^* - 1$, la propriété (3.20) est automatiquement vérifiée grâce à l'injection de Sobolev $H^1(B(x_0, r)) \subset L^{2^*}(B(x_0, r))$.

  Notons que
$$2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2} > 1$$

Preuve. On a
$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx = 0, \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.22}$$

On prend
$$\begin{aligned} v_+ &= u_+^p \, \eta^2 \\ v_- &= u_-^p \, \eta^2 \end{aligned}$$

Etape 1 :
On suppose en premier lieu que $u \in L^\infty(\Omega)$ (on va voir après comment s'en débarrasser de cette hypothèse) on a donc
$$\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (u_+ \eta^2)}{\partial x_j} = 0$$

On développe
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (u_+^p \eta^2)}{\partial x_j} &= \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (u_+^p)}{\partial x_j} \eta^2 + \frac{\partial u}{\partial x_i} u_+^p \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} \\ &= p u_+^{p-1} \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial u_+}{\partial x_j} \eta^2 + u_+^p \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

On a les relations suivantes
$$\frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_i} \frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_j} = \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 u_+^{p-1} \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial u_+}{\partial x_j}$$

et
$$\begin{aligned} \frac{\partial (u_+^{\frac{p+1}{2}} \eta)}{\partial x_i} \frac{\partial (u_+^{\frac{p+1}{2}} \eta)}{\partial x_j} &= \left(\frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_i} \eta + u_+^{\frac{p+1}{2}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_j} \eta + u_+^{\frac{p+1}{2}} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_i} \frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_j} \eta^2 + u_+^{p+1} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \frac{p+1}{4} u_+^p \left(\frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_+}{\partial x_j} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{4p}{(p+1)^2}\frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_j}\,\eta^2 \\ &= \frac{4p}{(p+1)^2}\left[\frac{\partial(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)}{\partial x_i}\,\frac{\partial(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)}{\partial x_j} - u_+^{p+1}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} - \frac{p+1}{4}u_+^p\left(\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_+}{\partial x_j}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_i}\right)\right] \end{aligned}$$

Par conséquent, (3.22) est équivalente à

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x)\frac{\partial(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)}{\partial x_i}\,\frac{\partial(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)}{\partial x_j} &= \frac{p+1}{4}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}u_+^p\left(\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_+}{\partial x_j}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_i}\right) \\ &+ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x)\left(u_+^{p+1}\,\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} - \frac{(p+1)^2}{4p}\,u_+^p\,\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_j}\right) \end{aligned}$$

Et puisque les $a_{i,j}$ sont symétriques, on déduit

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x)\frac{\partial(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)}{\partial x_i}\,\frac{\partial(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)}{\partial x_j} &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x)u_+^{p+1}\,\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \\ &+ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x)\left(\frac{p+1}{2} - \frac{(p+1)^2}{4p}\right)u_+^p\,\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Et par la condition d'ellipticité, on obtient

$$\beta\int_\Omega \left|\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)\right|^2 \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x)\frac{\partial(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)}{\partial x_i}\,\frac{\partial(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)}{\partial x_j}$$

$$\int_\Omega u_+^{p+1}\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x)\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \leq \gamma\int_\Omega u_+^{p+1}|\nabla\eta|^2$$

et

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x)u_+^p\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N 2\eta\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}u_+^p \\ &\leq 2\gamma\int_\Omega \eta u_+^p|\nabla u_+||\nabla\eta| \end{aligned}$$

D'où

$$\beta \int_\Omega \left|\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}} \eta)\right|^2 \leq \gamma \int_\Omega u_+^{p+1}|\nabla\eta|^2 + (p+1)\gamma \int_\Omega \eta u_+^p |\nabla u_+||\nabla\eta| \quad (3.23)$$

Afin d'avoir l'inégalité désirée, on doit se débarrasser du terme non symétrique de l'inégalité obtenue précédente.
En effet, on applique l'inégalité de Young avec

$$a = \sqrt{\varepsilon}\eta u_+^{\frac{p-1}{2}}|\nabla u_+| \ et \ b = \frac{1}{\varepsilon}u_+^{\frac{p+1}{2}}|\nabla\eta| \text{ avec } \varepsilon > 0$$

On obtient

$$\eta\, u_+^p|\nabla u_+||\nabla\eta| \leq \frac{1}{2}\varepsilon(\eta u_+^{\frac{p-1}{2}}|\nabla u_+|)^2 + \frac{\varepsilon^{-1}}{2}u_+^{p+1}|\nabla\eta|^2$$

D'autre part, le calcul

$$\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta) = \nabla\eta\, u_+^{\frac{p+1}{2}} + \frac{p+1}{2}\eta\, u_+^{\frac{p-1}{2}}\nabla u_+$$

implique que

$$\eta\, u_+^{\frac{p-1}{2}}\ \nabla u_+ \leq \frac{2}{p+1}(|\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\ \eta)| + |\nabla\eta|u_+^{\frac{p+1}{2}})$$

D'où

$$\begin{aligned}
\eta\, u^p|\nabla u_+||\nabla\eta| \ &\leq \ \frac{2\varepsilon}{(p+1)^2}(|\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\ \eta)| + |\nabla\eta|u_+^{\frac{p+1}{2}})^2 + \frac{\varepsilon^{-1}}{2}\ u_+^{p+1}|\nabla\eta|^2 \\
&= \ \frac{2\varepsilon}{(p+1)^2}|(\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\ \eta)|^2 + (\frac{2\varepsilon}{(p+1)^2} + \frac{\varepsilon^{-1}}{2})|\nabla\eta|^2\ u_+^{p+1} \\
&+ \ \frac{4\varepsilon}{(p+1)^2}|(\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\ \eta)|\ |\nabla\eta|u_+^{\frac{p+1}{2}}
\end{aligned}$$

et par l'inégalité de Yonug à nouveau, on a

$$|(\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\ \eta)|\ |\nabla\eta|u_+^{\frac{p+1}{2}} \leq \frac{1}{2}|\nabla\eta|^2u_+^{p+1} + \frac{1}{2}|(\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\ \eta)|^2$$

Ainsi

$$\int_\Omega \eta\, u^p|\nabla u_+||\nabla\eta|\, dx \leq \frac{4\varepsilon}{(p+1)^2}\int_\Omega \left|\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\ \eta)\right|^2 + \left(\frac{4\varepsilon}{(p+1)^2} + \frac{\varepsilon^{-1}}{2}\right)\int_\Omega |\nabla\eta|^2u_+^{p+1} \quad (3.24)$$

De (3.23) et (3.24), on conclut que

$$(\beta - C\frac{\varepsilon}{p+1})\int_{\Omega}\left|\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)\right|^2 \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{(p+1)}+\varepsilon^{-1}(p+1)\right)\int_{\Omega}|\nabla\eta|^2 u_+^{p+1}$$

Donc, si on choisit ε assez petit, on obtient l'inégalité désirée pour v_-.
On procède de la même manière pour v_-

Etape 2 :

Ici, on ne suppose plus que $u \in L^\infty(\Omega)$ et au lieu de prendre v_+ et v_- comme fonctions tests, on introduit des troncatures au niveau N, puis on passe à la limite.
Plus précisément, posons pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{+,N} = \begin{cases} u_+ & \text{si } u_+ \leq N \\ N & \text{si } u_+ \geq N \end{cases}$$

de sorte que

$$\nabla u_{+,N} = \begin{cases} \nabla u & \text{si } 0 \leq u(x) \leq N \\ 0 & \text{si } u(x) \geq N \text{ ou } u(x) \leq 0 \end{cases}$$

On prend comme fonction test :$v_{+,N} = u_{+,N}^{p-1}\, u\, \eta^2$ et on procède de la même manière que la première étape, on trouve

$$\int_{\Omega}|\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)|^2 + \int_{\Omega} N^{p-1}|\nabla u|^2\, \eta\chi_{u\geq N} \leq C\int_{\Omega} u_+^{p+1}|\nabla\eta|^2$$

Puisque la suite $u_{+,N}^{\frac{p+1}{2}}\eta$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et $u_{+,N} \to u_+$ pour presque tout $x \in \Omega$, alors

$$u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta \in H_0^1(\Omega)$$

D'où

$$u_{+,N}^{\frac{p+1}{2}}\eta \rightharpoonup u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega)$$

et

$$u_{+,N}^{\frac{p+1}{2}}\eta \to u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta \text{ faiblement dans } L^2(\Omega)$$

Par semi continuité inférieure, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)|^2 &\leq \liminf_{N\to\infty}\int_{\Omega}|\nabla(u_{+,N}^{\frac{p+1}{2}}\eta)|^2 \\ &\leq C\int_{\Omega}|u_+|^{p+1}|\nabla\eta|^2\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

■

Posons $\lambda = \frac{2^*}{2} = \frac{N}{N-2} > 1$

Lemme 3.3.2 *Soient $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ une solution de*

$$Lu = 0$$

On suppose de plus qu'il existe $q > 2$ tel que $u \in L^q_{loc}(\Omega)$.
Alors, pour tout $x_0 \in \Omega$, $0 < r' < r$ tels que $B(x_0, r) \subset \Omega$, on a

$$\left(\int_{B(x_0,r')} |u|^{\lambda q} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq C \frac{(1+q)^2}{(r-r')^2} \int_{B(x_0,r)} |u|^q$$

En particulier, pour tout compact K de Ω,

$$u \in L^{\lambda q}(K),$$

i.e., $u \in L^{\lambda q}_{loc}(\Omega)$.

Preuve. soit η une fonction plateau définie comme précédemment
On a par hypothèse que $u \in L^q_{loc}(\Omega)$, ce qui implique que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ or d'après le lemme 3.3.1,

$$|u|^{\frac{q}{2}} \eta \in H^1_0(\Omega)$$

et par injection de Sobolev

$$|u|^{\frac{q}{2}} \eta \in L^{2^*}_{loc}(\Omega)$$

On a donc

$$\left(\int_{B(x_0,r)} (|u|^{\frac{q}{2}} \eta)^{2*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C \left(\int_{B(x_0,r)} (|\nabla(u^{\frac{q}{2}} \eta)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B(x_0,r')} |u|^{\lambda q} \right)^{\frac{1}{\lambda}} &\leq C \left(\int_{B(x_0,r)} |\nabla(|u|^{\frac{q}{2}} \eta)|^2 \right) \\
&\leq Cq^2 \int_{B(x_0,r)} |u|^q |\nabla \eta|^2 \text{ (par le lemme 3.3.1)} \\
&\leq C \frac{q^2}{(r-r')^2} \int_{B(x_0,r)} |u|^q
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.3.3 (Itération de Moser) *Soient $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ une solution de $Lu = 0$, $x_0 \in \Omega, r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \Omega$.*
Alors, pour tout $s < \infty$,

$$u \in B(x_0, \frac{r}{2}) \text{ et}$$

$$\left(\int_{B(x_0,\frac{r}{2})} |u|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq C(r,s)\left(\int_{B(x_0,r)} |u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Il en résulte que $u \in L^s(K)$, pour tout compact $K \subset \Omega.i.e$ $u \in L^s_{loc}(\Omega)$.

Preuve. Posons

$$q_i = \lambda q_{i-1} \text{ pour } i = 1, ..., N \text{ avec } q_0 = 2.$$

Donc $q_i = 2\lambda^i$ est une suite croissante et $q_i \to \infty$ quand $i \to \infty$. et $r_i = \frac{r}{2} + \frac{r}{2^{i+2}}$ de sorte que la suite $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ décroit de r_0 à $\frac{r}{2}$
On a alors

$$r_i - r_{i+1} = r/2^{i+2}$$

Puisque $u \in H^1_0(B(x_0, r))$ alors $u \in L^2$.
D'autre part, on a $q_i > 2$ pour tout $i \in 1, ...$ alors si $u \in L^{q_i}$, on obtient en vertu du lemme 3.3.1,

$$\left(\int_{B(x_0,r_{i+1})} |u|^{\lambda q_i}\right)^{\frac{1}{\lambda q_i}} \leq \left(C\frac{q_i^2}{r_i - r_{i+1}}\int_{B(x_0,r_i)} |u|^{q_i}\right)^{1/q_i}$$

ce qui implique

$$\left(\int_{B(x_0,r_{i+1})} |u|^{q_{i+1}}\right)^{\frac{1}{2\lambda^{i+1}}} \leq \left(C\frac{q_i^2}{2^{-2(i+1)}r^2}\int_{B(x_0,r_i)} |u|^{q_i}\right)^{\frac{1}{2\lambda^i}}$$

ce qui signifie que : si $u \in L^{q_i}(B(x_0, r_i))$ alors $u \in L^{q_{i+1}}(B(x_0, r_{i+1}))$ et

$$\left(\int_{B(x_0,r_{i+1})} |u|^{q_i}\right)^{\frac{1}{\lambda^i}} \leq \prod_{k=0}^{i-1}\left(C\frac{q_i^2}{2^{-2(i+1)}r^2}\right)^{\frac{1}{\lambda^k}}\int_{B(x_0,r_i)} |u|^2$$

On fait tendre $i \to \infty$ alors $q_i \to \infty$ et $r_i \geq \frac{r}{2}$.
Ce qui achève la démonstration. ■

Lemme 3.3.3 *Il existe une constante k_0 ne dépendant que de β et γ telles que*

$$K(i, r) \to r^{-n}k_0$$

Preuve. Ecrivons

$$K(i,r) = \prod_{k=0}^{i} \alpha(k,r)$$

avec

$$\alpha(k,r) = \left(\frac{C(1+q_k)^2}{r^2\ 4^{-k+1}} \right)^{\frac{1}{\lambda^k}},\ \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Afin d'étudier le produit, on passe au logarithme, soit

$$\begin{aligned} \log \alpha(k,r) &= \lambda^{-k}\ \log\left(\frac{C(1+q_k)^2}{r^2\ 4^{-k+1}} \right) \\ &= 2\lambda^{-k}\left(\sqrt{\log C} - \log r + \log\left(\frac{1+q_k}{2^{-k+1}} \right) \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \log K(k,r) &= \sum_{k=0}^{i} \lambda^{-k}\ \log\left(\frac{C(1+q_k)^2}{r^2\ 4^{-k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{i} \lambda^{-k}(\log C - 2\log r) + 2\sum_{k=0}^{i} \lambda^{-k} \log\left(\frac{1+q_k}{2^{-k+1}} \right) \quad (3.25) \end{aligned}$$

Comme $\lambda > 1$, alors le premier terme converge.
En effet,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} = \frac{1}{1-\lambda^{-1}} = \frac{N}{2}$$

Donc

$$\sum_{k=0} i\lambda^{-k}(\log C - 2\log r) \to \frac{N}{2}(\log C - 2\log r),\ \textit{quand}\ i \to \infty$$

ce qui est équivalent à écrire que

$$\sum_{k=0}^{i} \lambda^{-k}(\log C - 2\log r) \to \log Cr^{-N},\ i \to \infty$$

et le dernier terme de (3.25) est indépendant de r, et

$$\log\left(\frac{1+q_k}{2^{-k+1}} \right) = \log(1+q_k) + (k+1)\log 2$$

où $q^k = 2\lambda^k$

$$\log(1+q_k) = \log(1+2\lambda^k) \approx k \log\lambda \text{ lorsque } k \to \infty$$

En regroupant les calculs précédents, on obtient

$$\log K(i,r) \to \log(r^{-N}) + C_0$$

■

Les calculs précédents vont nous permettre de montrer que $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, mais on a besoin du résultat de la théorie de mesure suivant :

Lemme 3.3.4 *soient A un ensemble Borélien de $\mathbb{R}^n$ de mesure non nulle, f une fonction mesurable sur A.*
Supposons qu'ils existent des constantes $M_0 > 0,\ s_0 > 1$ telles que

$$\left(\int_A |f(x)|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq M_0,\ \textit{pour tout } s \geq s_0$$

Alors

$$f \in L^\infty(A)$$

et

$$|f(x)| \leq M_0,\ \textit{pour presque tout } x \in A$$

Preuve. Pour $\varepsilon > 0$, on considère l'ensemble

$$W_\varepsilon = \{x \in A, |f(x)| \geq M_0 + \varepsilon\}$$

On a

$$|W_\varepsilon|^{\frac{1}{r}}(M_0+\varepsilon) \leq (\int_{W_\varepsilon} |f(x)|^r)^{\frac{1}{r}} \leq M_0, \textit{pour tout } r > r_0$$

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $|W_\varepsilon| \neq 0$, alors

$$|W_\varepsilon|^{\frac{1}{r}} \to 1 \text{ lorsque } r \to \infty$$

et l'inégalité précédente donne

$$M_0 + \varepsilon \leq M_0$$

ce qui est impossible, donc

$$|W_\varepsilon| = 0$$

Il en résulte alors que

$$W = x \in A, |f(x)| \geq M_0 = \bigcap_{\varepsilon>0} W_\varepsilon = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_{\frac{1}{n}}$$

est de mesure nulle

■

Théorème 3.3.1 *Soit $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ solution de*

$$Lu = 0 \textit{ sur } \Omega$$

Alors, pour tout $x_0 \in \Omega, r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \Omega$, on a

$$|u(x)| \leq k_1 \left(\frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

En particulier, $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$.

Preuve. On a à partir de la proposition 3.3.3 et sa preuve que

$$\left(\int_{B(x_0,\frac{r}{2})} |u|^{q_{k+1}} \right)^{\frac{1}{\lambda^{k+1}}} \leq K(k,r) \int_{B(x_0,r)} |u|^2, \forall k \in \mathbb{N}$$

et comme $q_{k+1} = 2\lambda^{k+1}$, on a

$$\left(\int_{B(x_0,\frac{r}{2})} |u|^{q_{k+1}} \right)^{\frac{1}{q_{k+1}}} \leq \sqrt{K(k,r)} \int_{B(x_0,r)} |u|^2, \forall k \in \mathbb{N}$$

et à partir du lemme 3.3.3, on a

$$K(k,r) \to k_0 r^{-n} \quad \textit{quand } k \to \infty$$

il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $k \geq k_0$

$$K(k,r) \leq 2k_0 r^{-n}$$

Ainsi, pour tout $r \geq q_{k_0+1}$,

$$\begin{aligned} \left(\int_{B(x_0,r)} |u|^r \right)^{\frac{1}{r}} &\leq \sqrt{2k_0} \left(\frac{1}{r^n} \int_{B(x_0,r)} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2k_0|B(1)|} \left(\frac{1}{|B(1)|} \int_{B(x_0,r)} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

La conclusion découle du lemme 3.3.4.

■

Bibliographie

[1] F. Bethuel , *Equations elliptiques linéaires et non linéaires*, université Pierre et Marie Curie, 2001-2002.

[2] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*, Dunod, 1999.

[3] H. Brézis, L. Nirenberg *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolen exponents*, Vol XXXV, 437-477, 1983.

[4] M. Chipot, *Elliptic equations : An introductory course*, Birkhäuser Advanced texts, 1979.

[5] L. C. Evans,R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, 1992.

[6] L. C. Evans, *Partial differential equations* ,Graduate studies in mathematics American mathematical society, vol 19, 2000 .

[7] D. Gilbarg. N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1998.

[8] P. Hajlasz, *Sobolev spaces, theory and applications*, Warszawa university, Poland.

[9] R. Moser, *Theory of partial differntial equations* , university of Bath, 2010-2011.

[10] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.

[11] M. Struwe, *Variational methods Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, third ed., vol 34, Springer, 2000.

9