

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Option : Biomathématique & Modélisation
présenté par

HAFFAF Badreddine Oussama

Soutenue le : 29 09 2022

L'effet du cannibalisme sur un modèle proie-prédateur

Soutenu devant le jury composé de :

<i>Mr.</i> T.MAHDJOUB	Professeur Université de Tlemcen	Président
<i>Mr.</i> M.MESK	MCA Université de Tlemcen	Examineur
<i>M^{me}.</i> S.YACHEUR	MCB Université de Tlemcen	Examinatrice
<i>M^{me}.</i> S.BENZERDJEB	MCB Université de Ain-Temouchent	Encadrant

Année Universitaire : 2022-2023

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mes chers parents,

Mes sœurs,

Tout ma famille,

Tous mes proches amis

Remerciements

Ces cinq années étaient très éprouvantes moralement et physiquement pour beaucoup de raisons, essentiellement la période de la pandémie du virus Corona qui a pris beaucoup d'être chers à notre cœur et tous mes sincères condoléances à tout les enseignants qui on été touchés dans cette pandémie

En premier je voudrais remercier mes chers professeurs pour leurs soutient et leur dévouement qu'ils m'ont donnés durant mes études .

Je tiens aussi à remercier à mon encadrante Mme.[S.BENZERDJEB](#) pour sa grande aide et m'avoir toujours poussé à donner le meilleurs de moi même et j'adresse aussi mes plus sincères remerciements à l'ensemble du corps administratif qui mon été dévoué corps et âme à chaque instants.

C'est, encore, un grand plaisir pour moi, d'adresser mes sincère remerciements à Messieurs :

T.MAHDJOUB, **M.MESK** et **Mme S.YACHEUR** d'avoir accepter de faire partie du jury qui examinera ce modeste travail.

Et le meilleur pour la fin je tiens à remercier ma mère [HADJADJ OUAL Hassiba Nawal](#) et mon père [Omar](#) pour leurs aide précieux qui m'ont amené là ou je suis et aussi grâce à leurs aide financièrement et moralement qui m'ont permis à atteindre mon but de la vie et à jamais dévier de droit chemin.

Table des matières

1 Outils Mathématiques	1
1.1 Notions sur l'existence de la solution	1
1.2 La stabilité	2
2 Quelques Modèles de base en dynamique des populations	5
2.1 Modèle de Malthus	5
2.2 Modèle de Verhulst	6
2.3 Le modèle de Lotka Volterra	7
2.4 Modèle proie-prédateur structuré en stade	9
2.4.1 Existence de la solution	11
3 Modèle proie prédateur sans cannibalisme	13
3.1 Introduction	13
3.2 État d'équilibre	13
3.3 Stabilité locale	14
3.4 Stabilité globale	16
3.5 Simulations numériques	18
4 Modèle proie prédateur avec cannibalisme	21
4.1 Introduction	21
4.2 État d'équilibre	21
4.3 Stabilité des points d'équilibres	23
4.3.1 Stabilité globale	31
4.4 Simulations numériques	36
Bibliographie	41

Introduction

Dans le monde du vivant, il est fréquent que la femelle araignée dévore le mâle après l'accouplement. Chez d'autres espèces, les adultes peuvent se nourrir de juvéniles (des larves, des œufs ...). Ce phénomène est appelé le cannibalisme.

D'une manière générale, le cannibalisme est un processus qui se produit entre des individus de la même espèce, cela signifie qu'un membre se nourrit d'un autre membre de sa propre espèce. Cet acte est considéré comme une forme particulière de prédation « prédation intraspécifique ». On la trouve chez une grande variété d'animaux (Les lions, les chats ...), y compris les insectes [21], les araignées, les scorpions [26], les poissons [7], et les oiseaux. Cela indique qu'un cannibale est programmé à assurer et à défendre ses propres besoins, ses intérêts et non pas l'existence et le bien de son espèce.

Souvent, les cannibales et leurs victimes sont à différents stades de croissance (par exemple, juvéniles et adultes, immatures et matures, groupes de tailles différentes) les modèles mathématiques correspondants sont structurellement différents des modèles de type proie- prédateur [[3],[4],[9],[12],[13],[18],[19],[20]]. Dans [13], Kohlemeier et Ebenman ont discuté le rôle du cannibalisme pour un système proie-prédateur avec une réponse fonctionnelle de type Holling 2. Puis dans [23], Bosch et Gabriel ont établi un système proies prédateur structuré en âge avec un prédateur cannibale, ils ont montré que le cannibalisme est un mécanisme de stabilisation lorsque les oscillations de la population sont dues à la classe d'âge. Magusoon [18] a proposé un modèle proie-prédateur structuré en 2 classes d'âge : mature et immature. De plus, il suppose que le cannibalisme agit sur les prédateurs et les proies sont soumises à une compétition entre elles.

Dans ce mémoire, on reprend les travaux Fengqin Zhang [27] et de Magusoon [18] ; on s'intéresse alors à étudier le même modèle tout en supposant qu'il n'existe aucune compétition dans les ressources, entre les proies. Le présent manuscrit est constitué d'une introduction, de 4 chapitres et d'une conclusion générale.

Le premier chapitre de ce mémoire est : « **Outils Mathématiques** », il introduit des rappels sur quelques notions mathématiques qui seront utilisées dans l'étude des modèles biologiques.

L'objectif du second chapitre est de présenter les modèles de base de la dynamique des populations. Ces derniers expriment l'évolution d'une espèce en fonction du temps t , ainsi il décrit les interactions interspécifiques et intraspécifiques telles que la prédation et le cannibalisme.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'évolution de deux populations : les proies et les prédateurs. La prédation décrite ici est interspécifique (sans prendre en considération l'effet du cannibalisme). Alors, c'est un modèle proie-prédateur dont les prédateurs sont divisés en 2 classes : les adultes et les juvéniles. Cette étude permet de déterminer des conditions pour lesquelles ces individus coexistent et à la fin on donne quelques exemples de simulations numériques.

Le dernier chapitre concerne l'étude du modèle décrit précédemment mais cette fois-ci, on suppose que le cannibalisme agit sur les prédateurs et que les cannibales sont les adultes prédateurs.

En fait, on rajoute aux équations du système décrit dans le chapitre 3, un terme qui exprime ce type de prédation. On allant donc chercher des conditions pour lesquelles la population atteint son état d'équilibre et ainsi, étudier la stabilité autour de cet équilibre. Pour illustrer cette étude, on donne des exemples numériques.

Chapitre 1

Outils Mathématiques

Ici, on donne quelques outils et des théorèmes mathématiques qui seront utilisés dans l'étude des systèmes dynamiques

1.1 Notions sur l'existence de la solution

En général, un système dynamique est défini par un système d'équations différentielles ordinaires (EDO). Supposons que I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1 (Équation différentielle) Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction.

Soit une variable réelle $t \in I$ et $x(t) = (x_1(t) \dots x_n(t))$ une fonction dérivable en t à valeurs réelles.

On appelle équation différentielle ordinaire du première ordre associée à f l'équation suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \quad (1.1)$$

Où $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$, et chaque fonction f_i est continue sur $I \times \Omega$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Dans la pratique, l'équation (1.1) exprime la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps t , et x représente l'état du système étudié. Si la fonction f dépend du temps(t) explicitement, on parle d'équation différentielle non autonome, et elle est autonome si f ne dépend pas explicitement de temps.

Définition 1.2 (Ensemble positivement invariant) Un ensemble $M \subset \Omega$ est dit invariant si pour tout t , il doit vérifier que $x(t) \in M$ alors, cette solution est bien définie. Si cette propriété est satisfaite uniquement pour $t \geq 0$, l'ensemble M est un ensemble positivement invariant.

Définition 1.3 (Problème de Cauchy) Le problème de Cauchy consiste à trouver une solution au problème formulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

On note, un point $(t_0; x_0) \in I \times \Omega$; avec $I = [0, T[$.

Définition 1.4 (Locale lipschitziennté en un point)[1]

Soit f une fonction définie sur $I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On appelle f une fonction localement lipschitzienne en x , si pour tout $(t_0; x_0) \in I \times \Omega$; il existe un voisinage V_0 et $K \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\|f(t, x_1), f(t, x_2)\|_{\mathbb{R}^n} < K \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in V_0$$

Remarque 1.1 Il est reconnu que si f est de classe C^1 alors, elle est localement lipschitzienne par rapport à x sur $I \times \Omega$.

Théorème 1.1 (Cauchy-Lipschitz, forme locale) [24] Si la fonction $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et localement lipschitzienne en x , alors il existe $a > 0$, tel que pour tout $(t_0; x_0) \in I \times \Omega$; le problème de Cauchy (1.2) admet une unique solution dans $[t_0 - a; t_0 + a]$.

Remarque 1.2 Les fonctions f sont de classe C^1 et d'après le théorème précédent elles sont localement lipschitziennes.

Définition 1.5 (Solution bornée) Une solution $\phi(t, t_0, x_0)$ du système (1.2) est dite bornée dans $\mathbb{R}^n$ s'il existe une région compacte $A \subset \mathbb{R}^n$ et un temps fini T ($T = T(t_0; x_0)$) tels que, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$:

$$\phi(t, t_0, x_0) \in A \quad \text{pour tout } t \geq T$$

1.2 La stabilité

Les notions sur l'existence et l'unicité des solutions sont des résultats locaux en temps et en espace. La notion de stabilité globale permet de savoir leur comportement lorsque le temps devient grand. Soit le système non linéaire et autonome suivante :

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)), & x \in U \subset \mathbb{R}^n \\ x(t_0) &= x_0 & t_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.3)$$

où : $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, n \geq 2$

Définition 1.6 (Point d'équilibre) On appelle x^* un point d'équilibre (point critique ou bien point singulier) du système (1.3) s'il vérifie $f(x^*) = 0$.

Remarque 1.3 Dans l'étude il est facile de se ramener au cas de l'origine ($x^* = 0$), tout en posant $y = x - x^*$. Pour cela, et pour simplifier les notations dans ce document, on note que $x^* = 0$.

Définition 1.7 (Stabilité) [8] Un point d'équilibre x^* est dit stable au sens de Lyapounov si pour tout $\epsilon > 0$; il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que

$$\|x_0 - x^*\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_\epsilon \Rightarrow \|x(t) - x^*\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon, \quad \forall t > t_0.$$

Définition 1.8 Le point d'équilibre x^* est dit instable s'il n'est pas stable.

Définition 1.9 (Stabilité asymptotique) Un point d'équilibre x^* est dit asymptotiquement stable s'il est stable et si pour tout $\epsilon > 0$; il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que

$$\|x_0 - x^*\| < \delta_\epsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*.$$

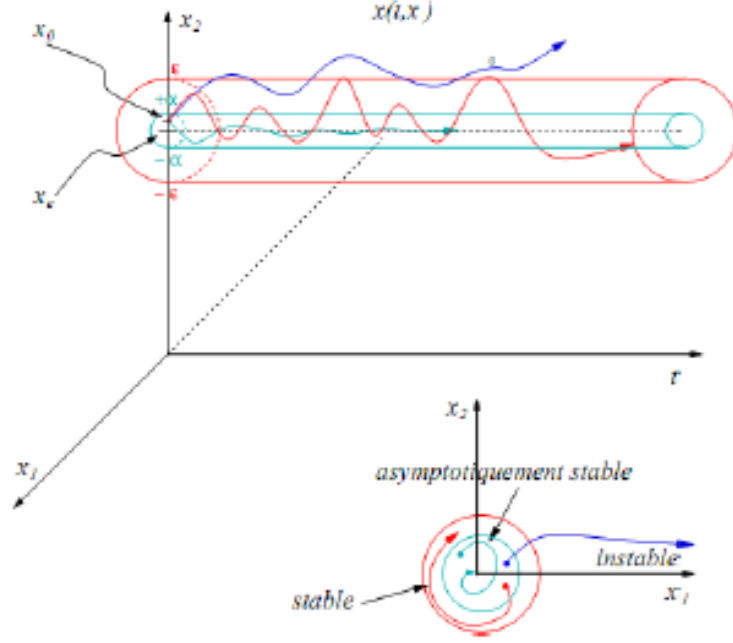


FIGURE 1.1 – Quelques types de stabilité de Lyapounov

Remarque 1.4

1. x^* est asymptotiquement stable $\implies x^*$ est stable.
2. Une solution est dite stable si les solutions associées à des valeurs voisines de la condition initiale restent proches de la solution considérée jusqu'à l'infini.

La stabilité par linéarisation Pour faire la linéarisation du système (1.3), d'abord on ramène le point d'équilibre x^* à l'origine ($f(0) = 0$). Ensuite, on développe f en série de Taylor autour de $x^* = 0$, ce qui donne :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) + \dots$$

Définition 1.10 La linéarisation du système (1.3) au point x^* est donnée par le système suivant :

$$x'(t) = Jx \quad \text{avec} \quad J = \left(\frac{df_i}{dx_j}(x^*) \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(x^*) & \frac{df_1}{dx_2}(x^*) & \frac{df_1}{dx_3}(x^*) & \dots & \frac{df_1}{dx_n}(x^*) \\ \frac{df_2}{dx_1}(x^*) & \frac{df_2}{dx_2}(x^*) & \frac{df_2}{dx_3}(x^*) & \dots & \frac{df_2}{dx_n}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1}(x^*) & \frac{df_n}{dx_2}(x^*) & \frac{df_n}{dx_3}(x^*) & \dots & \frac{df_n}{dx_n}(x^*) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

J est appelée la matrice jacobienne de système (1.3) en x^* .

Théorème 1.2 Soit x^* un équilibre du système (1.3) et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

1. si $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres λ_i de J alors, x^* est asymptotiquement stable.
2. si $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ pour au moins une valeur propre de J alors, x^* est instable.

Matrice de Hurwitz-stabilité [5] On s'intéresse à étudier la stabilité du système (1.4).

Soit $p(\lambda)$ le polynôme caractéristique associé à (1.4), il s'écrit sous la forme :

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

où tous les coefficients a_i sont des constantes réelles. Les n matrices de Hurwitz sont données par

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

où $a_j = 0$ si $j > n$.

Théorème 1.3 *Toutes les racines du polynôme $P(\lambda)$ ont une partie réelle négative si et seulement si les déterminants de toutes les matrices de Hurwitz sont positifs :*

$$\text{Det}(H_j) > 0, j = 1 \dots n$$

Théorème 1.4 (Lyapounov) *Soit x^* un point d'équilibre associé à (1.3).*

Soit $\Omega_0 \subset \Omega$ un voisinage de x^ et $V : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant :*

1. $V(x^*) = 0$
2. *Pour tout $x \in \Omega_0 - \{x^*\}$, $V(x) > 0$.*
3. *Pour tout $x \in \Omega_0 - \{x^*\}$, $\frac{dV}{dt} < 0$.*

Alors, x^ est asymptotiquement stable.*

Proposition 1.1 *Si le point d'équilibres x^* est asymptotiquement stable et que :*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

alors x^ est globalement asymptotiquement stable.*

Définition 1.11 (Fonction définie négative)[6] *Soit $V : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $V(x^*) = 0$. On dit que V est définie négative (resp semi-définie négative) si $V(x) < 0$ (resp $V(x) \leq 0$) pour $x \in I$, $x \neq x^*$.*

Théorème 1.5 (Principe d'invariance de La Salle)[14] *On suppose que $\Omega_0 \subset \Omega$ est un ouvert positivement invariant pour le système (1.3). On considère $V : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\frac{dV}{dt}$ est semi-définie négative sur Ω_0 . Soit M le plus grand ensemble invariant pour (1.3) contenu dans $\{x \in \Omega_0 : \frac{dV}{dt} = 0\}$.*

Alors, toute solution bornée issue de Ω_0 tend vers l'ensemble M lorsque le temps tend vers l'infini.

Chapitre 2

Quelques Modèles de base en dynamique des populations

Dans la nature, les phénomènes biologiques, les relations entre les individus peuvent être décrites par des équations mathématiques afin de pouvoir étudier leurs évolutions. Dans ce contexte, ce chapitre présente les modèles classiques dans la dynamique des populations et dans l'écologie. On considère N une population qui évolue selon le temps t .

2.1 Modèle de Malthus

Lorsque la population N évolue au cours du temps et que les ressources environnementales sont supposées illimitées (Le plus souvent ce n'est pas réaliste), alors, le modèle s'écrit sous la forme d'une équation différentielle :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \quad (2.1)$$

avec r représente le taux de croissance de la population N .
La solution de (2.1) est la loi de croissance malthusienne

$$N(t) = N(0)e^{rt}$$

De ce fait, il se présente 3 cas (voir la figure 2.1) :

1. Si $r < 0$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$, on dit que la population est en extinction.
2. Si $r = 0$ alors $N(t) = N(0)$ ce qui veut dire que la population est constante.
3. Si $r > 0$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = +\infty$, d'où la croissance est exponentielle de cette population.

Il est clair que les ressources vont s'épuiser avec le temps, pour cela ils ont déjà trouvé un modèle qui s'approche de la réalité pour mieux modéliser la croissance d'une population. D'ailleurs c'est l'objectif du modèle suivant proposé par [Pierre François Verhulst](#)

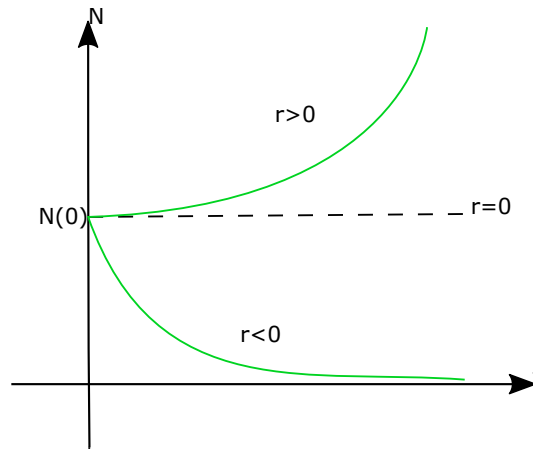


FIGURE 2.1 – La fonction de croissance malthusienne.

2.2 Modèle de Verhulst

Le modèle de Verhulst se base sur l'idée suivante :

Si la taille de la population augmente elle conduit à une augmentation du taux de mortalité et une diminution du taux de natalité.

Pour cela, le taux de croissance de la population N , noté par r , représente la différence entre natalité et mortalité.

De plus, il tient en compte de la capacité limite de l'environnement de cette population, notée par k . Ceci est modélisée par :

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{k} \right) \quad (2.2)$$

Il est appelé aussi le modèle logistique.

Remarque 2.1 Lorsque $\frac{dN}{dt} = 0$, on a deux points d'équilibre 0 et k . Où, 0 est un équilibre instable et k est un équilibre asymptotiquement stable.

Remarque 2.2 La solution de (2.2) est :

$$N(t) = \frac{kN(0)}{N(0) + (k - N(0))\exp(-rt)}$$

De plus,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = k \quad \text{pour} \quad N(0) \neq 0,$$

Et

$$N(t) = 0 \quad \text{pour} \quad N(0) = 0$$

Ceci affirme que la croissance ne dépasse pas la capacité de milieu k .

Dans ce qui suit, on s'intéresse à étudier l'interaction entre deux populations.

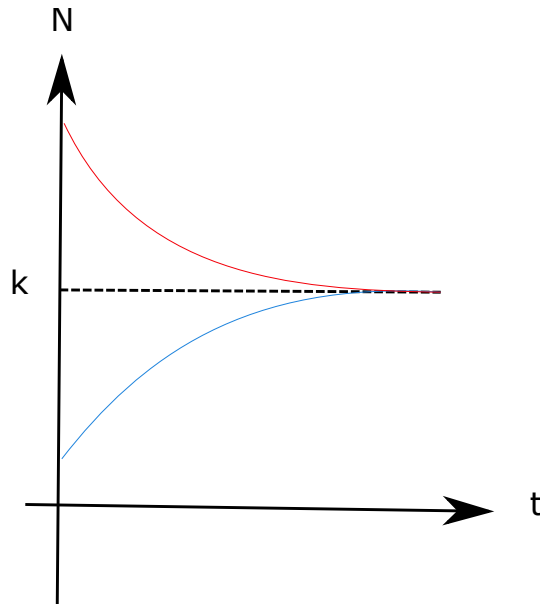


FIGURE 2.2 – La fonction de croissance logistique.

2.3 Le modèle de Lotka Volterra

En mathématique, les modèles proies prédateurs de Lotka Volterra sont des systèmes d'équations différentielles non linéaires du premier ordre. Ils ont été proposés indépendamment par Alfred James Lotka en 1925 [16] et Vito Volterra en 1926 [25].

Le modèle de Lotka Volterra s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(\alpha_1 - \beta_1 P) \\ \frac{dP}{dt} = P(-\alpha_2 + \beta_2 N) \end{cases} \quad (2.3)$$

ou α_1 , α_2 , β_1 et β_2 sont des constantes positives :

- $N(t)$: la densité des proies à l'instant t .
- $P(t)$: la densité des prédateurs à l'instant t .
- α_1 : le taux de reproduction intrinsèque des proies (indépendant du nombre de prédateurs).
- α_2 : le taux de mortalité des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées.
- β_1 : le taux de mortalité des proies du aux prédateurs rencontrés (Le nombre de proies consommées par un prédateur et par unité de temps).
- β_2 : le coefficient d'interaction entre les deux populations (le taux de conversion de quantité de proies consommées en effectif de prédateurs).

Dynamique du système

D'après le modèle (2.3), les proies croît d'une manière exponentielle en absence des prédateurs, d'autre part, les prédateurs prospèrent lorsque les proies sont nombreuses.

L'analyse mathématique de ce système permet d'avoir les résultats suivants :

- le système (2.3) admet deux points d'équilibres l'origine $(0, 0)$ et l'équilibre intérieur $\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$.
- le point $(0, 0)$ est instable (car la linéarisation autour de ce point donne une matrice dont le déterminant est négatif)
- la stabilité du point $\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$ peut être analysée par l'application du théorème de Lyapounov . En effet , soit V une fonction candidate de Lyapounov ,déterminant à partir d'une intégrale première que l'on définit par la fonction F suivante :

$$F(N, P) = -\alpha_2 \ln N - \alpha_1 \ln P + \beta_2 N + \beta_1 P \quad (2.4)$$

et dont sa dérivée par rapport au temps est

$$\frac{dF}{dt}(N, P) = 0$$

C'est à dire

$$F(N, P) = k \quad k \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

Donc la fonction candidate de Lyapounov V est

$$V(N, P) = F(N, P) - F\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) \quad (2.6)$$

Du fait que

$$V\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) = 0$$

et

$$\frac{dV}{dt}(N, P) = \frac{dF}{dt}(N, P) \leq 0$$

Ainsi que $V(N, P) \geq 0$.En effet , le développement de Taylor à l'ordre 1 de l'intégrale première F au voisinage de l'équilibre $\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$ est donné par :

$$\begin{aligned} F(N, P) &= F\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N^2} F\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) \left(N - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial P^2} F\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) \left(P - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N \partial P} F\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) \left(N - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right) \left(P - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) \end{aligned}$$

Puisque le terme $\frac{\partial^2 F}{\partial N \partial P} = 0$,alors :

$$F(N, P) = F\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) + \frac{\beta_2^2}{2\alpha_2} \left(N - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^2 + \frac{\beta_1^2}{2\alpha_1} \left(P - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2$$

d'ou

$$F(N, P) - F\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) = \frac{\beta_2^2}{2\alpha_2} \left(N - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^2 + \frac{\beta_1^2}{2\alpha_1} \left(P - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2$$

Autrement dit

$$V(N, P) = \frac{\beta_2^2}{2\alpha_2} \left(N - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^2 + \frac{\beta_1^2}{2\alpha_1} \left(P - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2$$

est une fonction positive ,ce qui conduit à conclure que V est une fonction de Lyapounov qui assure la stabilité de l'équilibre $\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$.

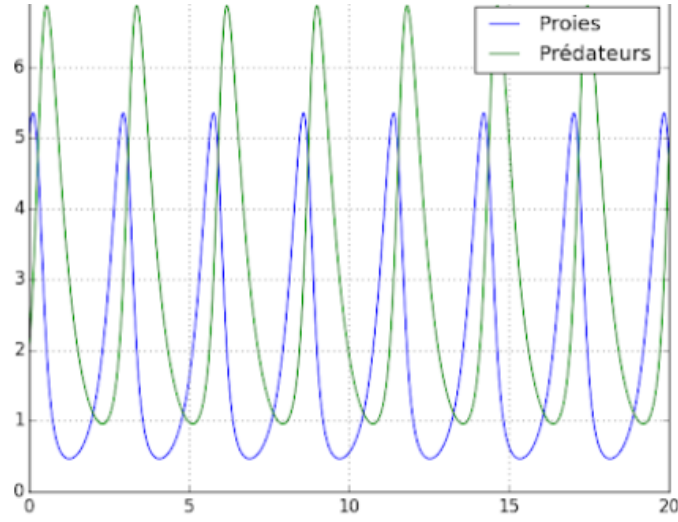


FIGURE 2.3 – Dynamiques des populations sur le modèle de Lotka-Volterra ($\alpha_1 = 1.34$, $\alpha_2 = 0.68$, $\beta_1 = 2.26$, $\beta_2 = 0.82$)

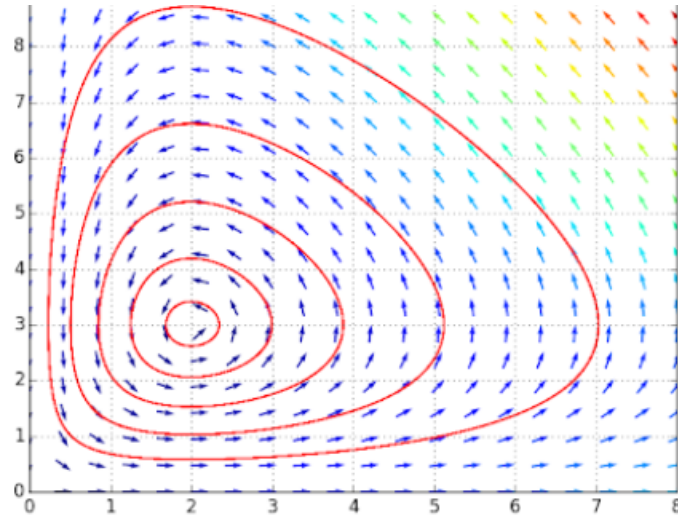


FIGURE 2.4 – Diagramme de phases

2.4 Modèle proie-prédateur structuré en stade

Considérons deux populations les proies et les prédateurs, ces derniers sont structurés en deux stades : les adultes et les juvéniles, On suppose aussi que les juvéniles ne sont pas des prédateurs. Soit $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ respectivement la densité à l'instant t des prédateurs adultes, prédateurs juvéniles et des proies.

De plus, supposons que la prédation soit intraspécifique interprété par le cannibalisme des adultes sur les juvéniles. Ceci peut être modélisé par un système d'équations différentielles sous la forme :

$$\begin{cases} x' &= -\alpha_1 x + \mu y + \epsilon_1 xy + \epsilon_2 xz, \\ y' &= \beta_1 x - \mu y - \alpha_2 y - dxy \\ z' &= (\beta_2 - \theta x)z \end{cases} \quad (2.7)$$

avec

- α_1 : taux de mortalité des adultes prédateurs.

- α_2 : taux de mortalité des juvéniles prédateurs.
- β_1 :taux de natalité des prédateurs(adultes).
- β_2 :taux de natalité des proies.
- μ : taux de maturation des juvéniles .
- d : taux de cannibalisme des prédateurs adultes sur les juvéniles
- ϵ_1 :taux de croissance des adultes prédateurs en dévorant les juvéniles.
- ϵ_2 :taux de croissance des adultes prédateurs en dévorant les proies .
- θ : taux de capture des prédateurs adultes sur les proies.

Ainsi, tous les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \mu, d, \epsilon_1, \epsilon_2$ et θ sont strictement positifs.

Afin de faciliter l'étude mathématique de ce système on utilise le changement de variables suivant :

$$x = \frac{\alpha_1 \bar{x}}{\theta}, \quad y = \frac{\alpha_1^2 \bar{y}}{\theta \mu}, \quad z = \frac{\alpha_1 \bar{z}}{\epsilon_2}, \quad t = \frac{T}{\alpha_1}$$

En effet, par dérivation des fonctions x, y et z , on obtient :

$$\begin{cases} x'(t) &= \frac{\alpha_1^2 \bar{x}'(T)}{\theta}, \\ y'(t) &= \frac{\alpha_1^3 \bar{y}'(T)}{\theta \mu} \\ z'(t) &= \frac{\alpha_1^2 \bar{z}'(T)}{\epsilon_2} \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \bar{x}'(T) &= \frac{\theta x'(t)}{\alpha_1^2}, \\ \bar{y}'(T) &= \frac{\theta \mu y'(t)}{\alpha_1^3} \\ \bar{z}'(T) &= \frac{\epsilon_2 z'(t)}{\alpha_1^2} \end{cases}$$

D'après (2.7), on trouve :

$$\begin{cases} \bar{x}'(T) &= \frac{\theta}{\alpha_1^2} (-\alpha_1 x(t) + \mu y(t) + \epsilon_1 x(t)y(t) + \epsilon_2 x(t)z(t)), \\ \bar{y}'(T) &= \frac{\theta \mu}{\alpha_1^3} (\beta_1 x(t) - \mu y(t) - \alpha_2 y(t) - dx(t)y(t)) \\ \bar{z}'(T) &= \frac{\epsilon_2}{\alpha_1^2} [(\beta_2 - \theta x(t))z(t)] \end{cases}$$

On remplace $x(t), y(t)$ et $z(t)$ dans les équations précédentes :

$$\begin{cases} \bar{x}'(T) &= \frac{\theta}{\alpha_1^2} \left(-\frac{\alpha_1^2 \bar{x}(T)}{\theta} + \frac{\alpha_1^2 \bar{y}(T)}{\theta} + \epsilon_1 \frac{\alpha_1^3}{\theta^2 \mu} \bar{x}(T) \bar{y}(T) + \frac{\alpha_1^2}{\theta} \bar{x}(T) \bar{z}(T) \right), \\ \bar{y}'(T) &= \frac{\theta \mu}{\alpha_1^3} \left(\beta_1 \frac{\alpha_1}{\theta} \bar{x}(T) - \frac{\alpha_1^2}{\theta} \bar{y}(T) - \alpha_2 \frac{\alpha_1^2}{\theta \mu} \bar{y}(T) - d \frac{\alpha_1^3}{\theta^2 \mu} \bar{x}(T) \bar{y}(T) \right) \\ \bar{z}'(T) &= \frac{\epsilon_2}{\alpha_1^2} \left[(\beta_2 - \alpha_1 \bar{x}(T)) \frac{\alpha_1}{\epsilon_2} \bar{z}(T) \right] \end{cases}$$

Le calcul donne :

$$\begin{cases} \bar{x}'(T) &= -\bar{x}(T) + \bar{y}(T) + \frac{\epsilon_1 \alpha_1}{\theta \mu} \bar{x}(T) \bar{y}(T) + \bar{x}(T) \bar{z}(T), \\ \bar{y}'(T) &= \frac{\beta_1 \mu}{\alpha_1^2} \bar{x}(T) - \frac{\mu}{\alpha_1} \bar{y}(T) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \bar{y}(T) - \frac{d}{\theta} \bar{x}(T) \bar{y}(T) \\ \bar{z}'(T) &= \frac{\beta_2}{\alpha_1} \bar{z}(T) - \bar{x}(T) \bar{z}(T) \end{cases}$$

En posant

$$\bar{\beta}_1 = \frac{\beta_1 \mu}{\alpha_1^2}, \quad \bar{e} = \frac{\alpha_1 \epsilon_1}{\theta \mu}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\alpha_1}, \quad \bar{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \bar{c} = \bar{\mu} + \bar{\alpha}_2, \quad \bar{d} = \frac{d}{\theta}, \quad \bar{\beta}_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_1}$$

Finalement on obtient à partir de (2.7) un nouveau système simple à étudier donné par (2.8)

$$\begin{cases} x' &= -x + y + exy + xz, \\ y' &= \beta_1 x - cy - dxy \\ z' &= (\beta_2 - x)z \end{cases} \quad (2.8)$$

Remarque 2.3

- Pour simplifier les notations on garde les mêmes symboles.
- Tous les paramètres β_1 , β_2 , e , c et d sont positifs.
- Toutes les fonctions x , y et z sont positives et continues.

2.4.1 Existence de la solution

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -x + y + exy + xz, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta_1 x - cy - dxy \\ \frac{dz}{dt} &= (\beta_2 - x)z \\ x(0) &= x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Qui peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} X'(t) &= F(X(t)), \\ X(t_0) &= (x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

Avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

F est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^3$ par :

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + exy + xz \\ \beta_1 x - cy - dxy \\ (\beta_2 - x)z \end{pmatrix}.$$

Notons que $\mathbb{R}_+^3$ est le quadrant strictement positif tel que

$$\mathbb{R}_+^3 := \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Puisque F est de classe C^1 , ce qui veut dire elle est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^3$. Donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système (2.9) admet une unique solution.

Théorème 2.1

Ω_0 est positivement invariant pour le système (2.8).

Preuve

Pour le système (2.8), il est évident que $x'|_{x=0} = y > 0$ pour $y > 0$, $y'|_{y=0} = \beta_1 x > 0$ pour $x > 0$, et pour $z'|_{z=0} = 0$ est positivement invariant. Par conséquent, l'ensemble

$$\Omega_0 = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z \geq 0\}$$

est positivement invariant pour (2.8).

Donc pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega_0$ la solution $(x(t), y(t), z(t)) \in \Omega_0$.

Chapitre 3

Modèle proie prédateur sans cannibalisme

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier un modèle proie-prédateur dont les individus prédateurs sont divisés en deux classes d'âge : les adultes et les juvéniles notés respectivement à l'instant t par $x(t)$ et $y(t)$.

De plus, on suppose qu'il n'y a aucun effet du cannibalisme, sur les individus. Ce phénomène a été bien décrit dans le chapitre précédent.

Cela veut dire que, nous allons reprendre le même système (2.8) mais avec : $e = d = 0$ (le cannibalisme est absent), et dans ce cas le système décrit par (2.8) devient :

$$\begin{cases} x' &= -x + y + xz, \\ y' &= \beta_1 x - cy \\ z' &= (\beta_2 - x)z \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2 État d'équilibre

Les points d'équilibres sont solutions des équations $x' = y' = z' = 0$ tels que :

$$\begin{cases} -x + y + xz &= 0, \\ \beta_1 x - cy &= 0 \\ (\beta_2 - x)z &= 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Théorème 3.1

Le système (3.1) admet deux points d'équilibre :

- *L'origine $E_0 = (0, 0, 0)$.*
- *Si $\beta_1 < c$ alors le système (3.1) admet un équilibre positif $E_2^* = \left(\beta_2, \frac{\beta_1 \beta_2}{c}, 1 - \frac{\beta_1}{c} \right)$*

Preuve

- D'après la 3 ème équation de (3.2), on remarque facilement que si $z = 0$ alors $x = y = 0$ ce qu'implique $E_0 = (0, 0, 0)$ est un équilibre triviale pour (3.1)
- D'après la 3 ème équation de (3.2), on a

$$x = \beta_2$$

et a partir de la 2 ème équation de (3.2), on obtient

$$y = \frac{\beta_1 x}{c}$$

d'où

$$y = \frac{\beta_1 \beta_2}{c}$$

En remplaçant les valeurs de x et y dans la 1 ère équation de (3.2), on trouve

$$z = 1 - \frac{\beta_1}{c}$$

3.3 Stabilité locale

Pour déterminer la stabilité des points d'équilibres du système (3.1), on a besoin de calculer la matrice jacobienne associée à (3.1) qui est notée au point (x, y, z) par $J(x, y, z)$, telle que :

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 + z & 1 & x \\ \beta_1 & -c & 0 \\ -z & 0 & \beta_2 - x \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.1

L'origine E_0 est un point d'équilibre instable.

Preuve

Pour montrer que l'origine E_0 est instable, il suffit de calculer le jacobien en E_0 , tel que :

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & -c & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique associé à $J(0, 0, 0)$ est

$$p(\lambda) = (-1 - \lambda)[(-c - \lambda)(\beta_2 - \lambda)] - \beta_1(\beta_2 - \lambda)$$

d'où :

$$p(\lambda) = (-\beta_2 + \lambda)[(1 + \lambda)(-c - \lambda) + \beta_1]$$

Les racines de ce polynôme représentent les valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 , solutions de :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \beta_2 \\ \lambda^2 + (c+1)\lambda + c - \beta_1 = 0 \end{cases}$$

il en résulte que :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \beta_2 \\ \lambda_2 = \frac{-(c+1) - \sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_3 = \frac{-(c+1) + \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

avec

$$\Delta = (c+1)^2 - 4(c - \beta_1)$$

Puisque $\lambda_1 > 0$, alors l'origine est instable .

Théorème 3.2

Si $c > \beta_1$, alors le point équilibre E_2^ de (3.1) est localement asymptotiquement stable.*

Preuve

Afin d'étudier la stabilité autour de l'équilibre $E_2^* = \left(\beta_2, \frac{\beta_1\beta_2}{c}, 1 - \frac{\beta_1}{c}\right)$. Il faut d'abord calculer la matrice jacobienne en E_2^* , notée par J_2 . En effet

$$J_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\beta_1}{c} & 1 & \beta_2 \\ \beta_1 & -c & 0 \\ \frac{\beta_1}{c} - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice $J_2 - \lambda I$ est :

$$\begin{aligned} |J_2 - \lambda I| &= \beta_2(c + \lambda) \left(\frac{\beta_1}{c} - 1 \right) - \lambda \left[\left(\frac{\beta_1}{c} + \lambda \right) (c + \lambda) - \beta_1 \right] \\ &= \lambda^3 + \left(\frac{\beta_1}{c} + c \right) \lambda^2 - \left(\frac{\beta_1\beta_2}{c} - \beta_2 \right) \lambda - \beta_2(\beta_1 - c) \end{aligned}$$

c'est un polynôme de degré 3 de la forme :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

Avec

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{\beta_1}{c} + c \right) \\ a_2 &= - \left(\frac{\beta_1\beta_2}{c} - \beta_2 \right) \\ a_3 &= -\beta_2(\beta_1 - c) \end{aligned}$$

Il est clair que $a_1 > 0$ et $a_3 > 0$. De plus, le calcul de $a_1a_2 - a_3$ donne :

$$\begin{aligned} a_1a_2 - a_3 &= \left(c + \frac{\beta_1}{c}\right) \left(\beta_2 - \frac{\beta_1\beta_2}{c}\right) + \beta_2(\beta_1 - c) \\ &= c\beta_2 - \beta_1\beta_2 + \frac{\beta_1\beta_2}{c} - \frac{\beta_1^2\beta_2}{c^2} + \beta_1\beta_2 - \beta_2c \\ &= \frac{\beta_1\beta_2}{c} \left(1 - \frac{\beta_1}{c}\right) \end{aligned}$$

Par suite, $a_1a_2 - a_3 > 0$ car $\beta_1 < c$

En appliquant le théorème de la matrice de Roth-Hurwitz, on déduit que l'équilibre E_2^* est localement asymptotiquement stable si $\beta_1 < c$.

3.4 Stabilité globale

Pour déterminer la stabilité globale nous avons besoin d'introduire la fonction V définie par

$$V(x, y, z) = \left(x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*}\right) + \frac{1}{c} \left(y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*}\right) + \left(z - z^* - z^* \ln \frac{z}{z^*}\right)$$

Théorème 3.3

Si $\beta_1 < c$, alors le point d'équilibre $E_2^*(x^*, y^*, z^*)$ associé à (3.1) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve

Montrons d'abord que V est une fonction de Lyapounov. En effet,

- $V(E_2^*) = 0$
- Vérifions que $V(x, y, z) > 0$.

Soit $V(x, y, z) = H(x, y, z) - H(x^*, y^*, z^*)$

avec :

$$H(x, y, z) = x - x^* \ln x + \frac{1}{c} (y - y^* \ln y) + z - z^* \ln z$$

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= H(x^*, y^*, z^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x^*, y^*, z^*) (x - x^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} H(x^*, y^*, z^*) (y - y^*)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} H(x^*, y^*, z^*) (z - z^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(x^*, y^*, z^*) (x - x^*) (y - y^*) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} H(x^*, y^*, z^*) (x - x^*) (z - z^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} H(x^*, y^*, z^*) (y - y^*) (z - z^*) + \omega(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\text{et puisque : } \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} = 0$$

alors on a :

$$H(x, y, z) = H(x^*, y^*, z^*) + \frac{1}{2\beta_2} (x - \beta_2)^2 + \frac{c}{2\beta_1\beta_2} \left(y - \frac{\beta_1\beta_2}{c}\right)^2 + \frac{c^2}{2(c - \beta_1)} \left(z - \frac{c - \beta_1}{c}\right)^2 + \omega(x, y, z)$$

d'où :

$$H(x, y, z) - H(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{2\beta_2} (x - \beta_2)^2 + \frac{c}{2\beta_1\beta_2} \left(y - \frac{\beta_1\beta_2}{c}\right)^2 + \frac{c^2}{2(c - \beta_1)} \left(z - \frac{c - \beta_1}{c}\right)^2 + \omega(x, y, z)$$

Donc $V(x, y, z) > 0$

- Montrons que $\frac{dV}{dt} < 0$. En effet :
Le système (3.1) peut prendre la forme suivant :

$$\begin{cases} x' &= x \left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + (z - z^*) \right] \\ y' &= \beta_1 y \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) \\ z' &= -z(x - x^*) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} x^* &= \beta_2 \\ y^* &= \frac{\beta_1 \beta_2}{c} \\ z^* &= 1 - \frac{\beta_1}{c} \end{cases}$$

par dérivation de la fonction V , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \left(1 - \frac{x^*}{x}\right) \left[x \left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} + z - z^* \right) \right] + \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \left[\beta_1 y \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) \right] + \left(1 - \frac{z^*}{z}\right) (-z(x - x^*)) \\ &= x \left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + x(z - z^*) - x^* \left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + x^*(z - z^*) + \beta_1 y \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) \\ &\quad - \beta_1 y^* \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) - z(x - x^*) + z^*(x - x^*) \\ &= (x - x^*) \left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + \beta_1 (y - y^*) \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) \\ &= \frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right) \left(\frac{x^*}{x} - \frac{y^*}{y} \right) + \beta_1 \frac{x^*}{y^*} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \left(\frac{y^*}{y} - \frac{x^*}{x} \right) \right] \\ &= -\frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right)^2 + \beta_1 \frac{x^*}{y^*} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right)^2 - \left(1 + \beta_1 \frac{x^*}{y^*}\right) \left(1 - \frac{x^*}{x}\right) \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \right] \end{aligned}$$

Puisque

$$c = \beta_1 \frac{y^*}{x^*}$$

Alors on a :

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{xy}{x^*} \left\{ \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right) - \left(\frac{1+c}{2}\right) \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \right]^2 + \left(c - \frac{(1+c)^2}{4} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right)^2 \right) \right\}$$

D'où :

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{xy}{x^*} \left\{ \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right) - \left(\frac{1+c}{2}\right) \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \right]^2 + \frac{(1-c)^2}{4} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right)^2 \right\}$$

De plus, $\frac{dV}{dt} = 0$ est équivalent à $x = x_0$ et $y = y_0$. il est facile de voir le plus grand ensemble invariant contenu dans $Q := (x, y, z) \in \omega_0 : \frac{dV}{dt} = 0$ est réduit à l'équilibre E_2^* . Ainsi à partir de le principe d'invariance de La SALLE, le point d'équilibre E_2^* est globalement asymptotiquement stable.

3.5 Simulations numériques

Dans cette partie, nous allons illustrer les résultats théoriques obtenus précédemment par des simulations numériques effectuées à l'aide du logiciel Matlab.

En l'absence du cannibalisme le système (3.1), on considère l'état initial de la population des proies et prédateurs est fixé par la condition initiale :

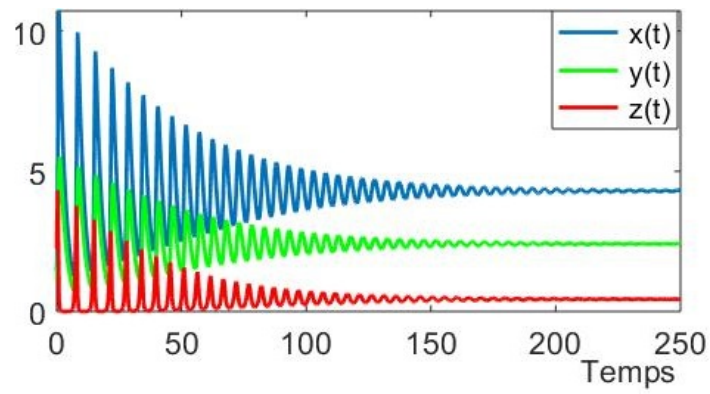
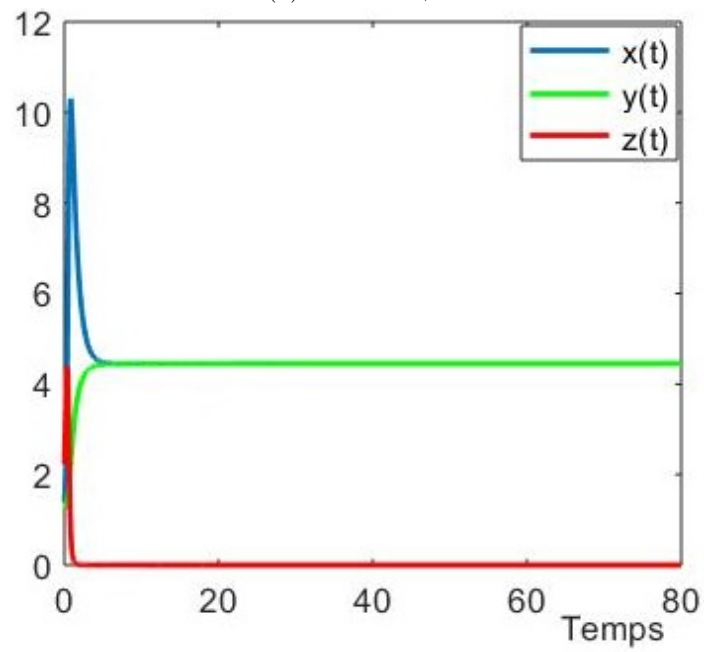
$$(x(0), y(0), z(0)) = (1.45, 1.25, 2.23)$$

De plus, prenons

$$\beta_2 = 4.3, \quad \beta_1 = 2.3 \quad \text{et} \quad c = 4.1$$

La figure obtenue (voir figure 3.1 (a)) montre l'existence et la stabilité du point d'équilibre $E_2^*(x^*, y^*, z^*) = (4.3, 2.41, 0.43)$.

D'autre part, si $\beta_1 = c = 2.3$ alors le point d'équilibre $E_2^*(x^*, y^*, z^*) = (4.3, 4.3, 0)$ existe et il est stable (voir la figure 3.1 (b)).

(a) Cas : $c > \beta_1$ (b) Cas : $c = \beta_1$ FIGURE 3.1 – (a) Cas $c > \beta_1$; (b) Cas $c = \beta_1$.

Chapitre 4

Modèle proie prédateur avec cannibalisme

4.1 Introduction

Dans cette partie, l'objectif est d'étudier l'impact du cannibalisme sur l'évolution de la population. Le modèle correspondant à ce cas a été déjà décrit dans le chapitre 2. Nous avons vu également dans le chapitre précédent comment la population évolue dans l'absence du cannibalisme.

Rappelons maintenant le modèle proie prédateur avec cannibalisme donné par le système (2.8) :

$$\begin{cases} x' &= -x + y + exy + xz, \\ y' &= \beta_1 x - cy - dxy \\ z' &= (\beta_2 - x)z \end{cases}$$

e, d représentent le taux du cannibalisme.

Et les constantes : e, c, d, β_1 et β_2 sont positives.

4.2 État d'équilibre

La recherche des points d'équilibres se fait par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -x + y + exy + xz &= 0, \\ \beta_1 x - cy - dxy &= 0 \\ (\beta_2 - x)z &= 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

La 3ème équation de (4.1) donne

$$z = 0 \quad \text{ou bien} \quad x = \beta_2$$

— Lorsque $z = 0$, les 2 premières équations de (4.1) deviennent :

$$\begin{cases} x &= \frac{cy}{\beta_1 - dy} \\ y &= \frac{x}{1 + ex} \end{cases}$$

Par substitution de x dans y , on trouve

$$y(\beta_1 - dy + ecy - c) = 0$$

Ce qui entraîne

$$\left\{ \begin{array}{ll} y = 0 & \text{et} \quad x = 0 \\ \text{ou bien} \\ y = \frac{c - \beta_1}{ce - d} = y_0 & \text{et} \quad x = \frac{c - \beta_1}{\beta_1 e - d} = x_0 \end{array} \right.$$

Par suite, les deux points d'équilibre associés à (2.8) sont :

- L'équilibre triviale $E_0 = (0, 0, 0)$.
- L'équilibre au bord $E_1(x_0, y_0, 0)$.

De plus, pour que E_1 soit positif il faut que :

$$\min(c, \frac{d}{e}) < \beta_1 < \max(c, \frac{d}{e})$$

— Lorsque $x = \beta_2$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \frac{\beta_2 - y - e\beta_2 y}{\beta_2} \\ y = \frac{\beta_1 \beta_2}{c + d\beta_2} \end{array} \right.$$

Il suffit de remplacer la valeur de y pour trouver que

$$z = 1 - \frac{\beta_1(1 + e\beta_2)}{c + \beta_2 d}$$

Ainsi, le point d'équilibre E^* est positif si

$$\beta_1 < \frac{c + \beta_2 d}{1 + e\beta_2}$$

.

Ce qui est équivalent à

$$e < e_1(d)$$

avec

$$e_1(d) := \frac{c + d\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 \beta_2}$$

Par conséquent, les résultats de cette étude sont présentés dans le théorème suivant :

Théorème 4.1

Le système (2.8) admet 3 points d'équilibres :

1. *L'équilibre triviale : $E_0(0, 0, 0)$.*

2. Si $\min(c, \frac{d}{e}) < \beta_1 < \max(c, \frac{d}{e})$, alors $E_1(x_0, y_0, 0)$ est un équilibre positif,
avec $x_0 = \frac{c - \beta_1}{\beta_1 e - d}$ et $y_0 = \frac{c - \beta_1}{ce - d}$.
3. Si $e < \frac{c + d\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 \beta_2}$ alors l'équilibre $E^*(x^*, y^*, z^*)$ est positif
avec $x^* = \beta_2$, $y^* = \frac{\beta_1 \beta_2}{c + \beta_2 d}$ et $z^* = 1 - \frac{\beta_1(1 + e\beta_2)}{c + \beta_2 d}$

4.3 Stabilité des points d'équilibres

Soit $J(x, y, z)$ la matrice jacobienne associée au système (2.8)

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 + ey + z & 1 + ex & x \\ \beta_1 - dy & -c - dx & 0 \\ -z & 0 & \beta_2 - x \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.1

Le point d'équilibre $E_0 = (0, 0, 0)$ est instable.

Preuve

Considérons le point d'équilibre $E_0(0, 0, 0)$, la matrice jacobienne associée est donnée par :

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & -c & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

donc E_0 est instable (voir le chapitre 3)

Théorème 4.2

- Si $e_0(d) < \beta_1 < \frac{d}{e}$ alors, l'équilibre E_1 est localement asymptotiquement stable.
- si $c < \beta_1 < e_0(d)$ ou $\frac{d}{e} < \beta_1 < c$ alors, l'équilibre E_1 est instable.

Avec

$$e_0(d) = \frac{c + d\beta_2}{\beta_2 e + 1}$$

Preuve

Soit $J(E_1)$ la matrice jacobienne associée a (4.1), avec $E_1 = \left(\frac{c - \beta_1}{\beta_1 e - d}, \frac{c - \beta_1}{ce - d}, 0 \right)$

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -1 + ey_0 & 1 + ex_0 & x_0 \\ \beta_1 - dy_0 & -(c + dx_0) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 - x_0 \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$\begin{cases} x &= \frac{cy}{\beta_1 - dy} \\ y &= \frac{x}{1 + ex} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} -1 + ey &= \frac{-y}{x} \\ 1 + ex &= \frac{x}{y} \\ \beta_1 - dy &= \frac{cy}{x} \\ c + dx &= \frac{\beta_1 x}{y} \end{cases}$$

d'où $J(E_1)$ prend la forme :

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -\frac{y_0}{x_0} & \frac{x_0}{y_0} & x_0 \\ \frac{cy_0}{x_0} & -\frac{\beta_1 x_0}{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 - x_0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique associé à $J(E_1)$ est :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (\beta_2 - x_0 - \lambda) \left[\left(-\frac{y_0}{x_0} - \lambda \right) \left(-\frac{\beta_1 x_0}{y_0} - \lambda \right) - c \right] \\ &= (\beta_2 - x_0 - \lambda) \left[\lambda^2 + \left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{\beta_1 x_0}{y_0} \right) \lambda + \beta_1 - c \right] \end{aligned}$$

Les solution de l'équation $P(\lambda) = 0$ sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \beta_2 - x_0 \\ \lambda^2 + \left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{\beta_1 x_0}{y_0} \right) \lambda + \beta_1 - c = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Il est clair que si $\beta_2 - x_0 < 0$, alors $\lambda_1 < 0$.

De plus si

$$\beta_1 - c > 0,$$

Alors l'équation du 2^{ème} degré donnée par (4.2) admet 2 solutions négatives notée par λ_2, λ_3 .

Autrement dit, si

$$\beta_1 > c \quad \text{et} \quad \beta_2 < x_0,$$

Alors toutes les valeurs propres sont négatives.

Par suite E_1 est localement asymptotiquement stable.

Or, d'après le théorème précédent E_1 existe si :

$$\min(c, \frac{d}{e}) < \beta_1 < \max(c, \frac{d}{e})$$

donc la première condition pour que E_1 soit stable est :

$$c < \beta_1 < \frac{d}{e}$$

Ainsi, $\beta_2 < x_0$ ce qui entraine

$$\begin{aligned} \beta_2 - x_0 < 0 &\implies \beta_2 - \frac{c - \beta_1}{\beta_1 e - d} < 0 \\ &\implies \frac{\beta_2 \beta_1 e - d \beta_2 - c + \beta_1}{\beta_1 e - d} < 0 \\ &\implies \beta_2 \beta_1 e - d \beta_2 - c + \beta_1 > 0 \quad \text{car} \quad \beta_1 e - d < 0 \\ &\implies \beta_1 > \frac{c + d \beta_2}{\beta_2 e + 1} = e_0(d) \end{aligned}$$

D'où, la deuxième condition qui assure la stabilité de l'équilibre E_1 est

$$\beta_1 > e_0(d)$$

Finalement on peut conclure que le point E_1 est asymptotiquement stable si :

$$c < e_0(d) < \beta_1 < \frac{d}{e}$$

Remarque 4.1 Les résultats obtenus par ce théorème, sont représentés graphiquement dans la figure suivante.

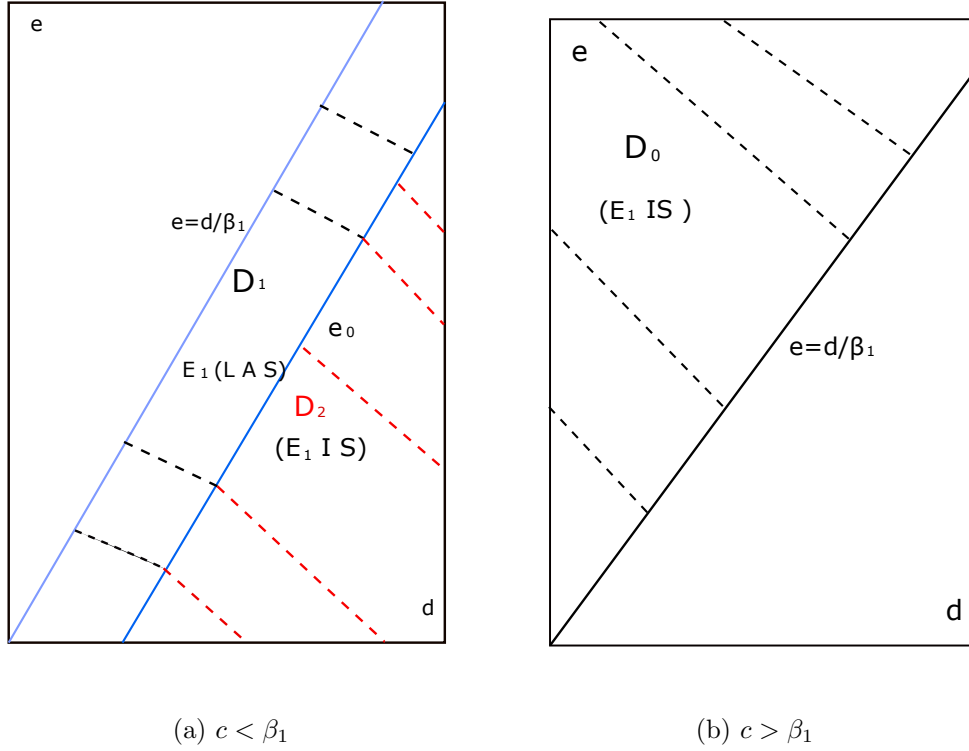


FIGURE 4.1 – Existence et stabilité du point d'équilibre E_1 lorsque : (a) $c < \beta_1$; (b) $c > \beta_1$.

Pour étudier la stabilité de l'équilibre E^* , on note par (H_1) , (H_2) et (H_3) les hypothèses suivantes :

- (H_1) $c \leq \beta_1$ et $e < e_1(d)$
 (H_2) $c > \beta_1$ et $e < e_2(d)$
 (H_3) $c > \beta_1$ et $e_2(d) < e < e_1(d)$

avec :

$$e_2(d) = \frac{1}{c} \left[d + \frac{(c - \beta_1)(c + d\beta_2)}{c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)} \right]$$

Théorème 4.3

- Si (H_1) ou (H_2) est satisfaite, alors le point d'équilibre intérieur E^* est localement asymptotiquement stable.
- Si (H_3) est satisfaite, alors le point d'équilibre intérieur E^* est instable.

Preuve

Pour étudier la stabilité du point d'équilibre $E^* = \left(\beta_2, \frac{\beta_1\beta_2}{c + \beta_2d}, 1 - \frac{\beta_1(1 + e\beta_2)}{c + \beta_2d} \right)$, il faut calculer $J_3(E^*)$ la matrice jacobienne calculée en E^* . En effet,

$$J_3(E^*) = \begin{pmatrix} -1 + ey^* + z^* & 1 + ex^* & x^* \\ \beta_1 - dy^* & -(c + dx^*) & 0 \\ -z^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque,

$$\begin{cases} x &= \frac{cy}{\beta_1 - dy} \\ y &= \frac{x(1-z)}{1+ex} \\ 0 &= -x + y + exy + xz \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} -1 + ey + z &= \frac{-y}{x} \\ 1 + ex &= \frac{x(1-z)}{y} \\ \beta_1 - dy &= \frac{cy}{x} \\ -(c + dx) &= -\frac{\beta_1 x}{y} \end{cases}$$

Donc la matrice Jacobienne devient :

$$J_3(E^*) = \begin{pmatrix} -\frac{y^*}{x^*} & \frac{x^*(1-z^*)}{y^*} & x^* \\ \frac{cy^*}{x^*} & -\frac{\beta_1 x^*}{y^*} & 0 \\ -z^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice $J_3(E^*) - \lambda I$ est :

$$\begin{aligned} |J_3 - \lambda I| &= -x^* z^* \left(\frac{\beta_1 x^*}{y^*} + \lambda \right) - \lambda \left[\left(\frac{y^*}{x^*} + \lambda \right) \left(\frac{\beta_1 x^*}{y^*} + \lambda \right) - c(1-z^*) \right] \\ &= -\frac{\beta_1 x^{*2} z^*}{y^*} - (x^* z^* - c(1-z^*) + \beta_1) \lambda - \left(\frac{y^*}{x^*} + \frac{\beta_1 x^*}{y^*} \right) \lambda^2 - \lambda^3 \\ &= \frac{\beta_1 x^{*2} z^*}{y^*} + (x^* z^* - c(1-z^*) + \beta_1) \lambda + \left(\frac{y^*}{x^*} + \frac{\beta_1 x^*}{y^*} \right) \lambda^2 + \lambda^3 \end{aligned}$$

C'est un polynôme de degré 3 de la forme :

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$$

Avec

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{y^*}{x^*} + \frac{\beta_1 x^*}{y^*} \right) \\ a_2 &= (x^* z^* - c(1-z^*) + \beta_1) \\ a_3 &= \frac{\beta_1 x^{*2} z^*}{y^*} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Roth-Hurwitz le point E^* est localement stable si

$$a_1 > 0, a_3 > 0 \quad \text{et} \quad a_1 a_2 - a_3 > 0$$

Il est claire que $a_1 > 0$ et $a_3 > 0$. De plus, le calcul de $a_1 a_2 - a_3$ donne :

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 - a_3 &= \left(\frac{y^*}{x^*} + \frac{\beta_1 x^*}{y^*} \right) (x^* z^* - c(1 - z^*) + \beta_1) - \left(\frac{\beta_1 x^{*2} z^*}{y^*} \right) \\
&= \left(\frac{\beta_1 + (c + d\beta_2)^2}{c + d\beta_2} \right) \left[\beta_2 \left(1 - \frac{\beta_1(1 + e\beta_2)}{c + d\beta_2} \right) + \beta_1 - c \left(\frac{\beta_1(1 + e\beta_2)}{c + d\beta_2} \right) \right] \\
&\quad - \beta_2 [c + d\beta_2 - \beta_1(1 + e\beta_2)] \\
&= \left(\frac{\beta_1 + (c + d\beta_2)^2}{c + d\beta_2} \right) \left(\frac{(c + d\beta_2)(\beta_1 + \beta_2) - (1 + e\beta_2)(c\beta_1 + \beta_1\beta_2)}{c + d\beta_2} \right) \\
&\quad - \beta_2 [c + d\beta_2 - \beta_1(1 + e\beta_2)] \\
&= \frac{(\beta_1(c + d\beta_2)^2) [(c + d\beta_2)(\beta_1 + \beta_2) - \beta_1(1 + e\beta_2)(c + \beta_2)]}{(c + d\beta_2)^2} \\
&\quad - \frac{\beta_2(c + d\beta_2)^2 [c + d\beta_2 - \beta_1(1 + e\beta_2)]}{(c + d\beta_2)^2} \\
&= \frac{\beta_1\beta_2 [c + d\beta_1 + d\beta_2 - \beta_1 - \beta_1ec - \beta_1e\beta_2 + (c + d\beta_2)^2(d - ce)]}{(c + d\beta_2)^2} \\
&= \frac{\beta_1\beta_2}{(c + d\beta_2)^2} [(c + d\beta_2)[d(c + d\beta_2) + 1] + \beta_1(d - 1) - e[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]] \\
&= \frac{\beta_1\beta_2[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]}{(c + d\beta_2)^2} \left[\frac{S}{[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]} - e \right]
\end{aligned}$$

Avec

$$S = (c + d\beta_2)[d(c + d\beta_2) + 1] + \beta_1(d - 1)$$

Donc

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 - a_3 &= \frac{\beta_1\beta_2[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]}{(c + d\beta_2)^2} \left[\frac{1}{c} \frac{cS + d\beta_1\beta_2 - d\beta_1\beta_2}{[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]} - e \right] \\
&= \frac{\beta_1\beta_2[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]}{(c + d\beta_2)^2} \left[\frac{d[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)] + (c - \beta_1)(c + d\beta_2)}{c[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]} - e \right] \\
&= \frac{\beta_1\beta_2[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]}{(c + d\beta_2)^2} [e_2(d) - e]
\end{aligned}$$

Pour déterminer le signe de $a_1a_2 - a_3$ il faut calculer :

$$\begin{aligned}
e_1(d) - e_2(d) &= \frac{c + d\beta_2 - \beta_1}{\beta_1\beta_2} - \frac{d[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)] + (c - \beta_1)(c + d\beta_2)}{c[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]} \\
&= \frac{c(c + d\beta_2 - \beta_1)[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]}{\beta_1\beta_2c[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]} \\
&\quad - \frac{d\beta_1\beta_2[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)] + \beta_1\beta_2(c - \beta_1)(c + d\beta_2)}{\beta_1\beta_2c[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]} \\
&= \frac{[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)][c(c + d\beta_2 - \beta_1) - d\beta_1\beta_2] - \beta_1\beta_2(c - \beta_1)(c + d\beta_2)}{\beta_1\beta_2c[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]} \\
&= \frac{[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)][(c + d\beta_2)(c - \beta_1)] - \beta_1\beta_2(c - \beta_1)(c + d\beta_2)}{\beta_1\beta_2c[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]} \\
&= \frac{(c + d\beta_2)(c - \beta_1)[- \beta_1\beta_2 + c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]}{\beta_1\beta_2c[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]} \\
&= \frac{(c - \beta_1)(c + d\beta_2)[(c + d\beta_2)^2 + \beta_1]}{\beta_1\beta_2[c(c + d\beta_2)^2 + \beta_1(c + \beta_2)]}
\end{aligned}$$

Alors, on a

- (a) Si $c \leq \beta_1$ alors, $e_1(d) \leq e_2(d)$.
- (b) Si $c > \beta_1$ alors, $e_1(d) > e_2(d)$.

Pour cela, E^* existe :

- Si $c \leq \beta_1$ ou ($c > \beta_1$ et $e < e_2(d)$) alors, $a_1a_2 - a_3 > 0$.
- Si $c > \beta_1$ et $e_2(d) < e < e_1(d)$ alors, $a_1a_2 - a_3 < 0$.

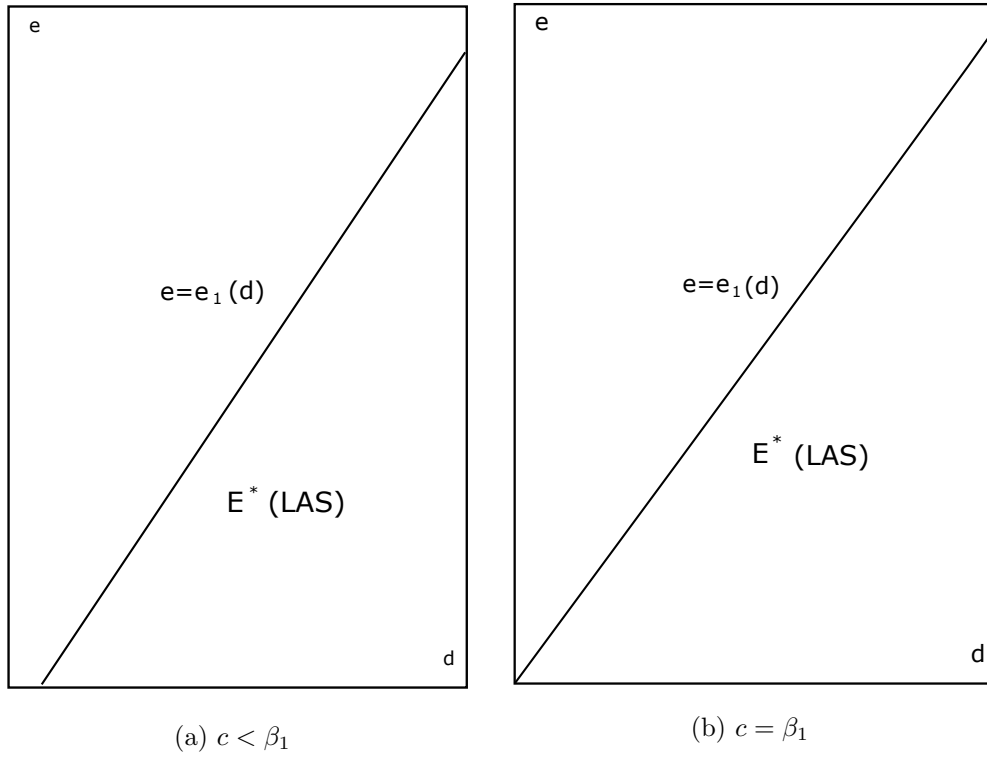


FIGURE 4.2 – Existence et stabilité du point d'équilibre E^* lorsque : (a) $c < \beta_1$; (b) $c = \beta_1$.

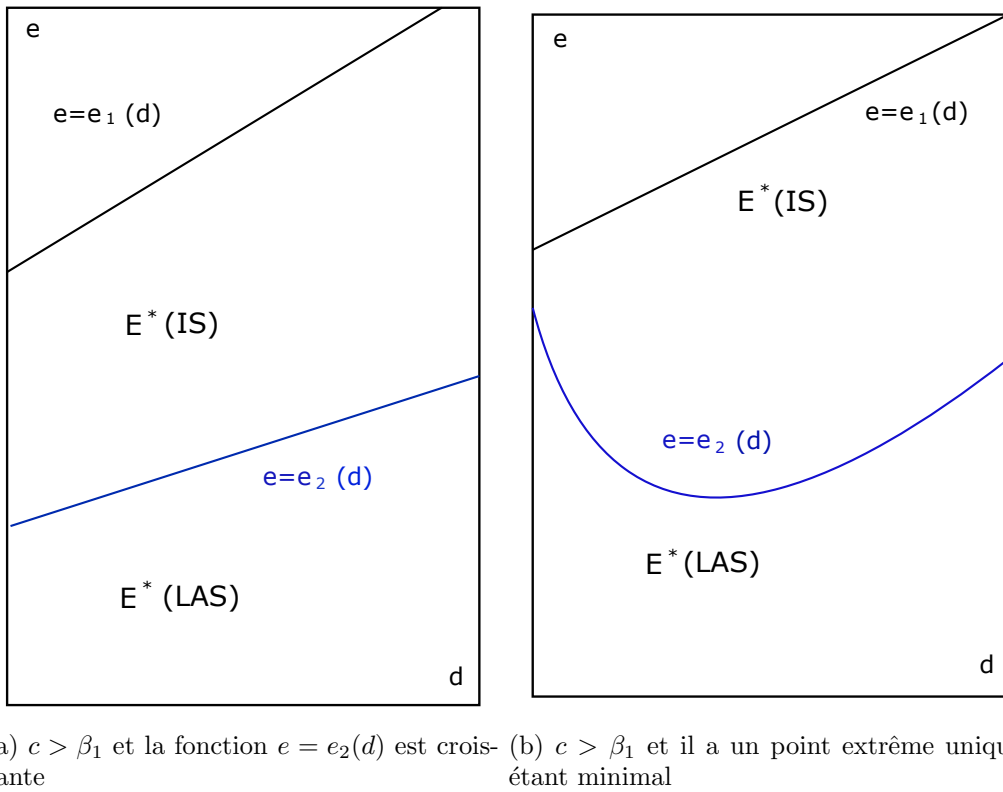
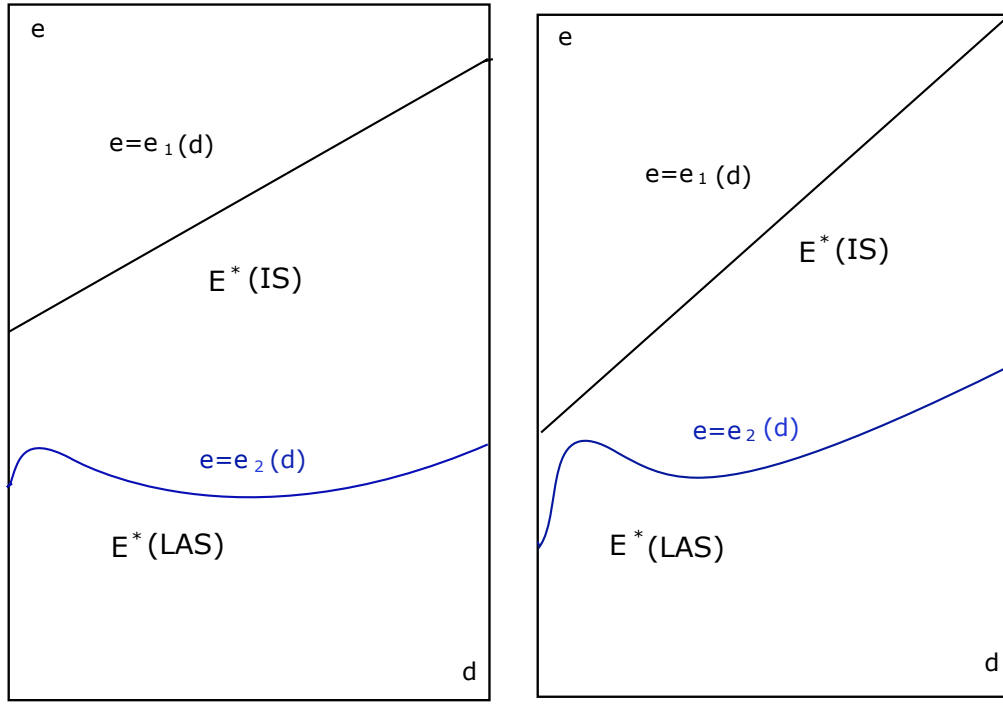


FIGURE 4.3 – Existence et stabilité du point d'équilibre E^* lorsque : (a) $c > \beta_1$ et la fonction $e = e_2(d)$ est croissante ; (b) $c > \beta_1$ et il a un point extrême unique étant minimal.

Remarque 4.2 *LAS* veut dire que le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable . Par contre, *IS* signifie que l'équilibre est instable.



(a) $c > \beta_1$, il a deux points extrêmes, et $e_2(0)$ entre les deux valeurs extrêmes
 (b) $c > \beta_1$, il a deux points extrêmes, et $e_2(0)$ est inférieur aux deux valeurs extrêmes

FIGURE 4.4 – Existence et stabilité du point d'équilibre E^* lorsque : (a) $c > \beta_1$, il a deux points extrêmes, et $e_2(0)$ entre les deux valeurs extrêmes ; dans (b) $c > \beta_1$, il a deux points extrêmes, et $e_2(0)$ est inférieur aux deux valeurs extrêmes.

4.3.1 Stabilité globale

Pour déterminer la stabilité globale de E_1 nous avons besoin d'introduire une fonction V_1 définie par :

$$V_1 = \left(x - x_0 - x_0 \ln \frac{x}{x_0} \right) + \frac{(2\beta_1 - c)x_0}{c^2 y_0} \left(y - y_0 - y_0 \ln \frac{y}{y_0} \right) + z$$

Théorème 4.4

Si $c < \beta_1 < \frac{d}{e}$ et $\beta_2 \leq \frac{\beta_1 - c}{d - \beta_1 e}$ autrement dit $e_0(d) \leq \beta_1 < \frac{d}{e}$, alors le point $E_1(x_0, y_0, 0)$ associée à (2.8) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve

Montrons d'abord que V_1 est une fonction de Lyapounov. En effet,

- $V_1(E_1) = 0$
- Vérifions que $V_1(x, y, z) > 0$.

Soit

$$V_1(x, y, z) = H(x, y, z) - H(x_0, y_0, 0)$$

avec :

$$H(x, y, z) = x - x_0 \ln x + \frac{(2\beta_1 - c)x_0}{c^2 y_0} (y - y_0 \ln y) + z$$

Par le développement de Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned}
H(x, y, z) &= H(x_0, y_0, 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x_0, y_0, 0) (x - x_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} H(x_0, y_0, 0) (y - y_0)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} H(x_0, y_0, 0) (z)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(x_0, y_0, 0) (x - x_0)(y - y_0) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} H(x_0, y_0, 0) (x - x_0)(z) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} H(x_0, y_0, 0) (y - y_0)(z)
\end{aligned}$$

Et puisque :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} = 0$$

Alors :

$$H(x, y, z) = H(x_0, y_0, 0) + \frac{(\beta_1 e - d)^2}{2(c - \beta_1)^2} \left(x - \frac{c - \beta_1}{\beta_1 e - d}\right)^2 + \frac{(ce - d)^3}{2c^2(\beta_1 e - d)} \left(\frac{\beta_1}{c - \beta_1}\right) \left(y - \frac{c - \beta_1}{ce - d}\right)^2$$

D'où :

$$H(x, y, z) - H(x_0, y_0, 0) = \frac{(\beta_1 e - d)^2}{2(c - \beta_1)^2} \left(x - \frac{c - \beta_1}{\beta_1 e - d}\right)^2 + \frac{(ce - d)^3}{2c^2(\beta_1 e - d)} \left(\frac{\beta_1}{c - \beta_1}\right) \left(y - \frac{c - \beta_1}{ce - d}\right)^2$$

Avec

$$\frac{(ce - d)^3}{2c^2(\beta_1 e - d)} \left(\frac{\beta_1}{c - \beta_1}\right) > 0 \quad \text{si} \quad c < \beta_1 < \frac{d}{e}$$

Donc on peut conclure que si $c < \beta_1 < \frac{d}{e}$ alors, $V_1(x, y, z) > 0$

- Montrons que $\frac{dV_1}{dt} < 0$

En effet, le système (2.8) peut prendre la forme suivante :

$$\begin{cases}
x' &= x \left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y_0}{x_0} \right) + e(y - y_0) + z \right], \\
y' &= y \left[\beta_1 \left(\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0} \right) - d(x - x_0) \right] \\
z' &= (\beta_2 - x)z
\end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases}
x_0 &= \frac{cy_0}{\beta_1 - dy_0} \\
y_0 &= \frac{x_0}{1 + ex_0}
\end{cases}$$

Par dérivation de la fonction V_1 , on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dt} &= (x - x_0) \left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y_0}{x_0} \right) + e(y - y_0) \right] \\
&+ \frac{(2\beta_1 - c)x_0}{c^2 y_0} (y - y_0) \left[\beta_1 \left(\frac{y}{x} - \frac{y_0}{x_0} \right) - d(x - x_0) \right] + (\beta_2 - x)z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} = & y_0 \left(\frac{x}{x_0} - 1 \right) \left(\frac{x_0 y}{x y_0} - 1 \right) + \frac{\beta_1 (2\beta_1 - c) x_0^2}{c^2 y_0} \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right) \left(\frac{x y_0}{x_0 y} - 1 \right) \\ & + \left[e x_0 y_0 - \frac{(2\beta_1 - c) x_0}{c^2 y_0} d x_0 y_0 \right] \left(\frac{x}{x_0} - 1 \right) \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right) + (\beta_2 - x_0) z \end{aligned} \quad (4.3)$$

On applique :

$$\begin{cases} e x_0 y_0 &= x_0 - y_0 \\ d x_0 y_0 &= \beta_1 x_0 - c y_0 \end{cases}$$

qui donne :

$$e x_0 y_0 - \frac{(2\beta_1 - c) x_0}{c^2 y_0} d x_0 y_0 = - \frac{\beta_1 (2\beta_1 - c) x_0^2 - 2\beta_1 c x_0 y_0 + c^2 y_0^2}{c^2 y_0}$$

En le substituant en (4.3) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} = & - \frac{xy}{x_0} \left[\left(\frac{x_0}{x} - 1 \right)^2 - \frac{2\beta_1 x_0}{c y_0} \left(\frac{y_0}{y} - 1 \right) \left(\frac{x_0}{x} - 1 \right) + \frac{\beta_1 (2\beta_1 - c) x_0^2}{c^2 y_0^2} \left(\frac{y_0}{y} - 1 \right)^2 \right] + (\beta_2 - x_0) z \\ = & - \frac{xy}{x_0} \left\{ \left[\left(\frac{x_0}{x} - 1 \right) - \frac{\beta_1 x_0}{c y_0} \left(\frac{y_0}{y} - 1 \right) \right]^2 - \left(\left(\frac{2\beta_1}{c} \right)^2 - \frac{4\beta_1 (2\beta_1 - c) x_0^2}{c^2 y_0^2} \right) \left(\frac{y_0}{y} - 1 \right)^2 \right\} \\ & + (\beta_2 - x_0) z \end{aligned}$$

Et on a :

$$\left(\frac{2\beta_1}{c} \right)^2 - \frac{4\beta_1 (2\beta_1 - c) x_0^2}{c^2 y_0^2} = \frac{4\beta_1 (c - \beta_1)}{c^2} < 0 \quad \text{si} \quad \beta_1 > c$$

Donc $\frac{dV_1}{dt}$ est semi-définie négative quand $\beta_1 > c$ et $\beta_2 \leq x_0$.

De plus, quand $\beta_1 > c$ et $\beta_2 = x_0$, $\frac{dV_1}{dt} = 0$ est équivalent à $x = x_0$ et $y = y_0$. Il est facile de voir que le plus grand ensemble invariant contenu dans $K := \{(x, y, z) \in \Omega_0 : \frac{dV_1}{dt} = 0\}$ est réduit à l'équilibre E_1 . Ainsi à partir du principe d'invariance de La Salle, le point d'équilibre E_1 est globalement asymptotiquement stable comme $\beta_1 > c$ et $\beta_2 \leq x_0$.

Pour déterminer la stabilité globale au point $E^*(x^*, y^*, z^*)$ nous avons besoin d'introduire une fonction V_2 qui définie par :

$$V_2 = \left(x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*} \right) + n \frac{x^*}{y^*} \left(y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*} \right) + \left(z - z^* - z^* \ln \frac{z}{z^*} \right)$$

Avec :

$$n = \frac{\beta_1 (c - c e \beta_2 + 2d \beta_2)}{c^2 (c + d \beta_2)}$$

Théorème 4.5

Soit E^* un point d'équilibre associé à (2.8). Si $d \geq ec$ alors, E^* est globalement asymptotiquement stable

Preuve

Montrons d'abord que V_2 est une fonction de Lyapounov. En effet,

- $V_2(E^*) = 0$
- Vérifions que $V_2(x, y, z) > 0$
Soit

$$V_2(x, y, z) = H(x, y, z) - H(x^*, y^*, z^*)$$

Avec :

$$H(x, y, z) = x - x^* \ln x + n \frac{x^*}{y^*} (y - y^* \ln y) + z - z^* \ln z$$

Par la fonction de Taylor au point (x^*, y^*, z^*) , on obtient

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= H(x^*, y^*, z^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x^*, y^*, z^*) (x - x^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} H(x^*, y^*, z^*) (y - y^*)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} H(x^*, y^*, z^*) (z - z^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(x^*, y^*, z^*) (x - x^*) (y - y^*) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} H(x^*, y^*, z^*) (x - x^*) (z - z^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} H(x^*, y^*, z^*) (y - y^*) (z - z^*) \end{aligned}$$

Et puisque :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} = 0$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= H(x^*, y^*, z^*) + \frac{1}{2\beta_2} (x - \beta_2)^2 + \frac{(c + \beta_2 d)(c - ce\beta_2 + 2d\beta_2)}{2\beta_2 c^2} \left(y - \frac{\beta_1 \beta_2}{c + d\beta_2} \right)^2 \\ &+ \frac{(c + d\beta_2)^2}{2(c - \beta_1 + \beta_2 d - e\beta_1 \beta_2)} \left(z - 1 + \frac{\beta_1(1 + e\beta_2)}{c + \beta_2 d} \right)^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} H(x, y, z) - H(x^*, y^*, z^*) &= \frac{1}{2\beta_2} (x - \beta_2)^2 + \frac{(c + \beta_2 d)(c - ce\beta_2 + 2d\beta_2)}{2\beta_2 c^2} \left(y - \frac{\beta_1 \beta_2}{c + d\beta_2} \right)^2 \\ &+ \frac{(c + d\beta_2)^2}{2(c - \beta_1 + \beta_2 d - e\beta_1 \beta_2)} \left(z - 1 + \frac{\beta_1(1 + e\beta_2)}{c + \beta_2 d} \right)^2 \end{aligned}$$

Avec :

$$\frac{(c + \beta_2 d)(c - ce\beta_2 + 2d\beta_2)}{2\beta_2 c^2} > 0 \quad \text{si} \quad d > ec$$

et

$$(c - \beta_1 + \beta_2 d - e\beta_1 \beta_2) > 0 \quad \text{si} \quad \beta_1 < \frac{c + d\beta_2}{1 + e\beta_2}$$

Donc $V_2(x, y, z) > 0$ si $c < \frac{d}{e}$

- Montrons que $\frac{dV_2}{dt} < 0$.

En effet, Le système (2.8) peut prendre la forme suivante

$$\begin{cases} x' &= x \left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + e(y - y^*) + (z - z^*) \right], \\ y' &= y \left[\beta_1 \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) - d(x - x^*) \right] \\ z' &= (x^* - x)z \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} x^* &= \frac{cy^*}{\beta_1 - dy^*} \\ y^* &= \frac{x^*(1 - z^*)}{1 + ex^*} \end{cases}$$

Par dérivation de la fonction V_2 , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} &= (x - x^*) \left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + e(y - y^*) \right] + n \frac{x^*}{y^*} (y - y^*) \left[\beta_1 \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) - d(x - x^*) \right] \\ &= \frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x} \right) \left(\frac{x^*}{x} - \frac{y^*}{y} \right) + \frac{n\beta_1 x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y} \right) \left(\frac{y^*}{y} - \frac{x^*}{x} \right) \right] \\ &\quad + \frac{xy}{x^*} \left[x^* \left(e - \frac{ndx^*}{y^*} \right) \left(1 - \frac{x^*}{x} \right) \left(1 - \frac{y^*}{y} \right) \right] \\ &= -\frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x} \right)^2 + \frac{n\beta_1 x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{xy}{x^*} \left[- \left(ex^* + 1 + \frac{n\beta_1 x^{*2}}{y^{*2}} - \frac{ndx^{*2}}{y^*} \right) \left(1 - \frac{x^*}{x} \right) \left(1 - \frac{y^*}{y} \right) \right] \end{aligned}$$

Noter que :

$$\begin{cases} ex^* + 1 &= \frac{x^*(1 - z^*)}{y^*} \\ dx^* &= \frac{\beta_1 x^* - cy^*}{y^*} \end{cases}$$

Alors :

$$ex^* + 1 + \frac{n\beta_1 x^{*2}}{y^{*2}} - \frac{ndx^{*2}}{y^*} = \frac{x^*(nc + 1 - z^*)}{y^*}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} &= -\frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x} \right)^2 + \frac{n\beta_1 x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y} \right)^2 - \frac{x^*(nc + 1 - z^*)}{y^*} \left(1 - \frac{x^*}{x} \right) \left(1 - \frac{y^*}{y} \right) \right] \\ &= -\frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x} \right) - \frac{x^*(nc + 1 - z^*)}{2y^*} \left(1 - \frac{y^*}{y} \right) \right]^2 \\ &\quad - \frac{xy}{x^*} \left[\left(n\beta_1 - \frac{(nc + 1 - z^*)^2}{4} \right) \frac{x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Remplacent $n = \frac{\beta_1(c - ce\beta_2 + 2d\beta_2)}{c^2(c + d\beta_2)}$ dans l'expression ci-dessus donne :

$$\frac{dV_2}{dt} = -\frac{xy}{x^*} \left\{ \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right) - \frac{\beta_1 x^*}{cy^*} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \right]^2 + \frac{\beta_1^2 \beta_2 (d - ec) x^{*2}}{c^2 (c + d\beta_2) y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right)^2 \right\}$$

Donc $\frac{dV_2}{dt} \leq 0$ pour $d \geq ec$, ce qui veut dire que $\frac{dV_2}{dt}$ est semi-définie négative. De plus, $\frac{dV_2}{dt} = 0$ si et seulement si $x = x^*$, $y = y^*$ et $d = ec$. V_2 est une fonction de Lyapounov stricte et le seul plus grand ensemble invariant contenu dans $P := \{(x, y, z) \in \Omega_0 : \frac{dV_2}{dt} = 0\}$ est réduit à l'équilibre E^* . D'après le principe de La Salle, le point d'équilibre E^* est globalement asymptotiquement stable si $d \geq ec$.

4.4 Simulations numériques

Dans cette partie, nous allons illustrer les résultats théoriques obtenus précédemment par des simulations numériques effectuées à l'aide du logiciel Matlab.

Soit le modèle avec cannibalisme décrit par (2.8), on considère le cas où les proies disparaissent (c-à-d $z = 0$).

dans ce cas, on rappelle que le point d'équilibre E_1 existe et stable si

$$\frac{c + d\beta_2}{\beta_2 e + 1} < \beta_1 < \frac{d}{e},$$

ce qui équivalent à

$$\frac{c + d\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 \beta_2} < e < \frac{d}{\beta_1}.$$

Pour cela, choisissons

$$d = 2, \quad \beta_1 = 0.48, \quad \beta_2 = 1.5 \quad \text{et} \quad c = 0.25$$

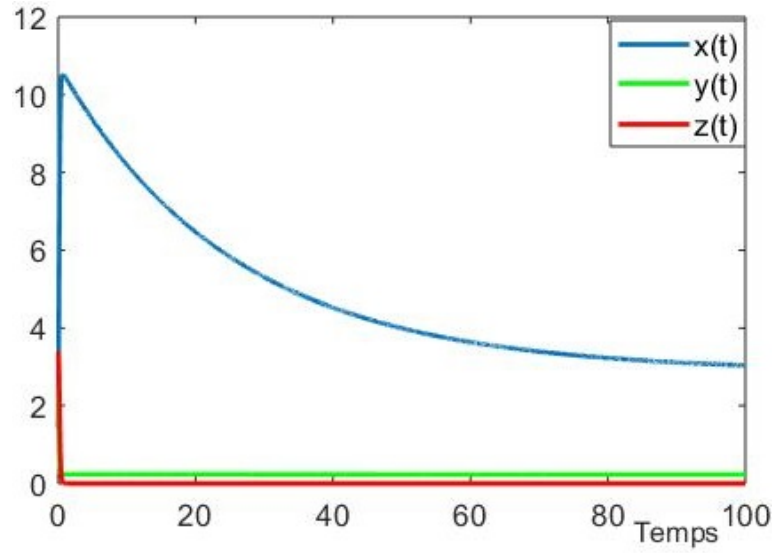
et la condition initiale

$$(x(0), y(0), z(0)) = (1.42, 2.5, 3.4)$$

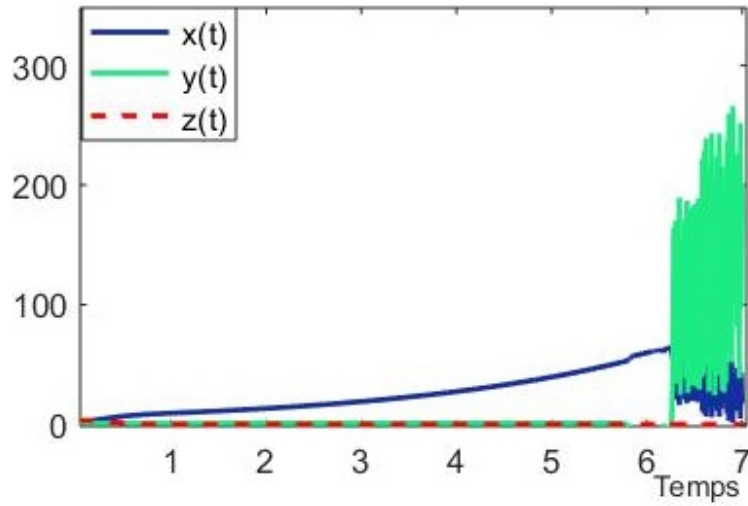
Le point d'équilibre obtenue est

$$E_1(x_0, y_0, 0) = (2.87, 0.15, 0)$$

Il est asymptotiquement stable lorsque $3.84 < e = 4 < 4.16$ (voir la figure 4.5 (a)) alors qu'il est instable pour $e = 5.2 < \frac{d}{c} = 8$ (voir la figure 4.5 (b)).



(a)



(b)

FIGURE 4.5 – Coexistence des prédateurs et l'extinction des proies

En présence des proies et des prédateurs, considérons les valeurs suivante

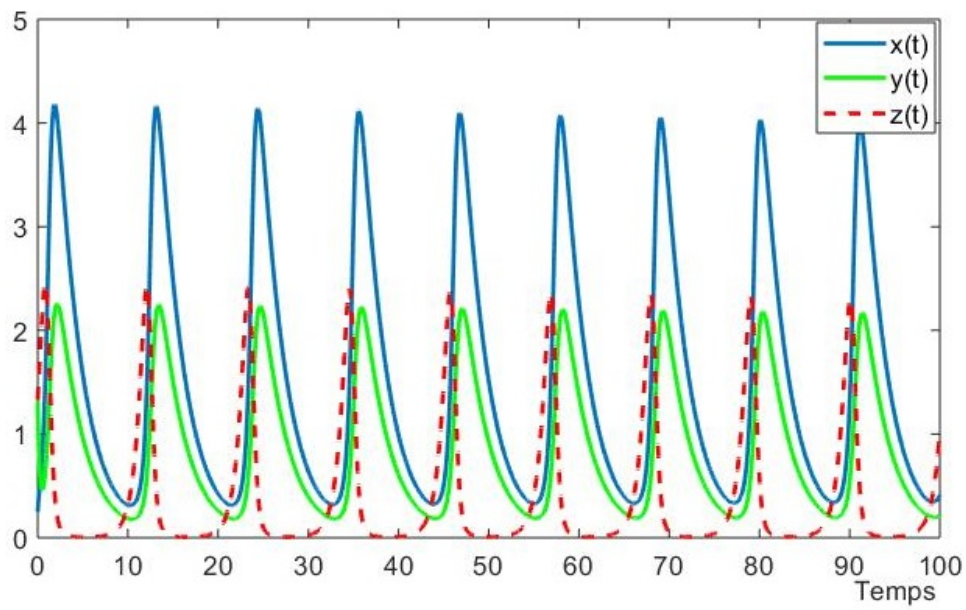
$$c = 4.4, \quad \beta_1 = 2.5 \quad \text{et} \quad \beta_2 = 1.5$$

et prenons une condition initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (0.25, 1.32, 1.33)$. A travers ces données, nous avons

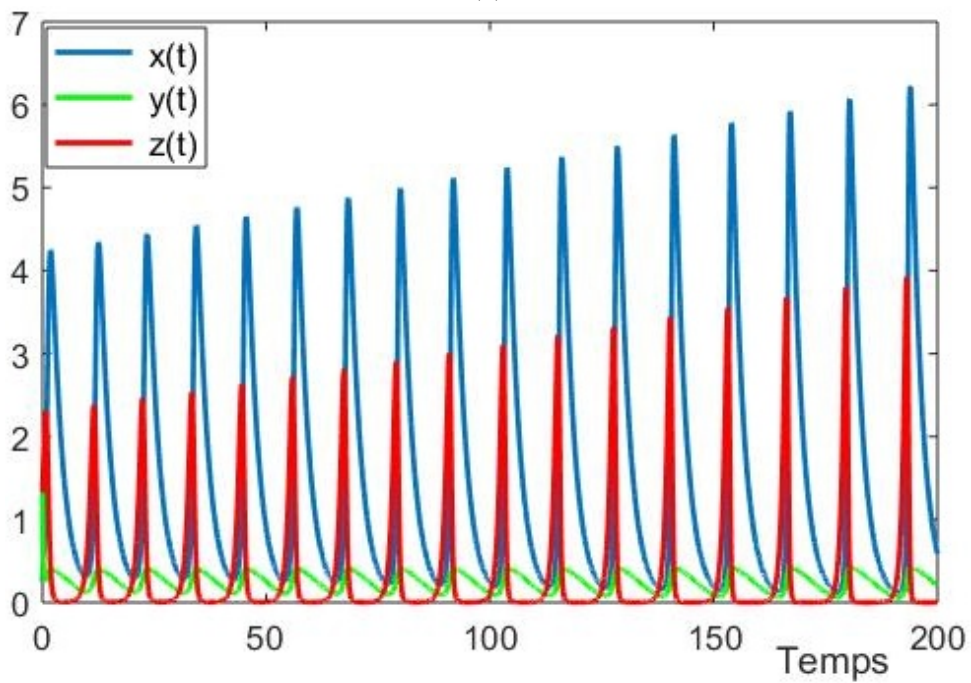
$$e_2(d) = \begin{cases} 0.0246 & \text{si } d = 0.025 \\ 1.1897 & \text{si } d = 5.2 \end{cases}$$

Lorsque $d = 0.025$, nous devons choisir e de sorte que $e = 0.02 < e_2(d)$. On obtient une solution périodique stable $E^*(x^*, y^*, z^*) = (1.5, 0.84, 0.41)$ (voir la figure 4.6 (a)).

D'autre part, lorsque $d = 5.2$, nous devons choisir e de sorte que $e = 1.25 > e_2(d)$. On obtient une solution instable (voir la figure 4.6 (b)).



(a)



(b)

FIGURE 4.6 – Les proies et les prédateurs coexistent

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié un modèle proie-prédateur et dont les prédateurs sont structurés en deux stades : adultes et juvéniles. Ainsi, Il a été supposé que les adultes prédateurs soient des cannibales des juvéniles. L'objectif était de comprendre l'effet du cannibalisme sur l'évolution des populations. De ce fait, et pour bien comprendre cette situation, on a considéré deux systèmes : le premier où le cannibalisme est absent, il a été étudié dans le troisième chapitre, par contre dans le second système (voir le dernier chapitre), on a supposé que le cannibalisme existe et il agit sur les prédateurs.

Les résultats obtenus dans le cas où le cannibalisme est absent, ont montré que si $\beta_1 < c$, alors il existe un seul équilibre positif non nul. En prenant en compte les notations du système initial noté par (2.7), cela signifie que les deux populations coexistent et vont atteindre leur état d'équilibre si $\beta_1 < \alpha_1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\mu}$.

Lorsque le cannibalisme est présent, l'étude du système (2.8) montre que le cannibalisme rend la dynamique du modèle complexe. En effet,

- Si $\min(c, \frac{d}{e}) < \beta_1 < \max(c, \frac{d}{e})$, alors le système admet un équilibre positif aux bords. Ce qui prévoit une extinction des proies et une coexistence des adultes et des juvéniles prédateurs.
- Si l'une des deux conditions est vérifiée :

$$(a) \quad c \leq \beta_1 \quad \text{et} \quad e < e_1(d)$$

$$(b) \quad c > \beta_1 \quad \text{et} \quad e < e_2(d)$$

les populations vont atteindre leur état d'équilibre et elles coexistent.

A partir de ces résultats, on peut conclure que la stabilité des équilibres dépend du changement du taux de cannibalisme. Il permet aussi aux proies de survivre.

Bibliographie

- [1] H. Amann, Ordinary didderential equations - An introduction to nonlinear analysis, Walter de Gruyter , Berlin. New York, (1990).
- [2] P. Auger, Mathematical Modeling in ecology, book of Pierre Auger.
- [3] S. Biswas, S. Samanta, J. Chattopadhyay, A model based theoretical study on cannibalistic prey-predator system with disease in both population. Differential Equations Dynam.Systems, 23 (2015), 1-44.
- [4] S. Biswas, S. Samanta, J. Chattopadhyay, Cannibalistic predator-prey model with disease in predator-a delay model, Int. J. Bifurcal chaos, 25 (2015),130-155.
- [5] S. Bourafaa, M-S Abdelouahab, A. Moussaoui, Solitons and Fractals, Chaos, (2020).
- [6] R.Chill. Equations différentielles et stabilité. Université de Metz (2006).
- [7] D. Claessen, A.M. de Roos, Bistability in a size-structured population model of cannibalistic fish-a continuation study, Theor. Popul. Biol. 64 (2003), 49-65.
- [8] H. Dang-Vu et C. Delcarte, Bifurcation et chaos, une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et mathematical, Eds Ellipses, Université-Mécanique, (2000).
- [9] L.R. Fox, Cannibalism in natural population, Ann. Rev. Ecol. Syst. 6 (1975), 87-106.
- [10] J. Gukenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical systems, and Bifurcation of Vector Fields, Berlin : Springer, (1990).
- [11] V. Guttal, P. Romanczuk, S.J. Simpson, G.A. Sword, I.D. Couzin, Cannibalism can drive the evolution of behavioural phase polyphenism in locusts, Ecol. Lett, 15 (2012), 1158-1166.
- [12] C. Kaewmanee, I.M. Tang, Cannibalism in an age-structured predator-prey system, Ecol. Model. 167 (2003), 213-220.
- [13] C.Kohlmeier, W. Ebenhoh, The stabilizing role of cannibalism in a predator-prey sustem, Bull. Math. Biol. 57 (1995), 401-411.
- [14] J.P. LaSalle, The Stability of Dynamical Systems, in : Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, (1976).
- [15] M. Liod, Self regulation of adult numbers by cannibalism in two laboratory strains of flour beetles (*Tribolium castaneum*), Ecology, 49 (1968), 245-259.
- [16] A.J. Lotka ,Elements of Physical Biology ,Williams et Wilkins Company (1925), 460 p.
- [17] A.M. Lyapunov, The General Problem of the Stability of Motion, Taylor & Francis, London, (1992).
- [18] K.G. Magusoon, Destablizing effect on cannibalism on a structured predator-prey sustem, Math. Biosci. 155 (1999), 61-75.

- [19] R. Marik, L. Pribylona, An age-structured model of cannibalism, *Electron. J. Differ. Eq.* (2006), 1-11.
- [20] G.A. Polis, The evolution and dynamics of intraspecific predation, *Ann. Rev. Ecol. Syst.* 12 (1981), 225-251.
- [21] M.L. Richardson, R.F. Mitchell, P.F. Reagel, L.M. Hanks, Causes and consequences of cannibalism in noncarnivorous insects, *Annu. Rev. Entomol.* 55 (2010), 39-53.
- [22] H.L. Smith, *Monotone Dynamical Systems : An Introduction to the Theory of Competitive and cooperative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs 41, Amer. Math. Soc. Providence, RI, (1995).
- [23] F. Van der Bosch, W. Gabriel, Cannibalism in an age-structured predator-prey system, *Bull. Math. Biol.* 59 (1997), 551-567.
- [24] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems* Springer-Verlag, New-York (1990).
- [25] V. Volterra Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically ,*Nature* n 118 ,(1926) ,p 558-60.
- [26] D.H. Wise, Cannibalism, food limitation, intraspecific competition, and the regulation of spider population, *Annu. Rev. Entomol.* 51 (2006), 441-465.
- [27] F. Zhang, Y. Chen, J. Li, Dynamical analysis of a stage-structured predator-prey model with cannibalism, *Mathematical Biosciences* (2018).

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés par l'étude de l'effet du cannibalisme sur un modèle proie-prédateur, avec les prédateurs structurés en deux stades (les adultes et les juvéniles).

Donc, nous étudions deux systèmes : un modèle avec cannibalisme et un modèle sans cannibalisme. L'analyse de l'équilibre et de la stabilité établit des conditions permettant la survie des deux populations. Afin d'illustrer ces résultats théoriques, une simulation numérique sera présentée pour chaque système.

mots clés : Cannibalisme, système dynamique, stabilité, Proie-Prédateur.

Abstract

In this thesis, we were interested in the study of the effect of cannibalism on a prey-predator model, with predators structured in two stages (adults and juveniles).

So, we study two systems : a model with cannibalism and a model without cannibalism. The analysis of equilibrium and stability establishes a conditions allowing the survival of the two populations. In order to illustrate these theoretical results, a numerical simulation will be presented for each system.

Key words : Cannibalism, dynamical system, stability, Prey-Prédateur.