

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Option : Biomathématique et modélisation mathématique

Présenté par

MAHROUG FATIMA

Analyse mathématique d'un modèle agro-écologique

Soutenu le : 22/10/2020

Devant le jury composé de :

Mr. Ali Moussaoui, Professeur. Université de Tlemcen. **Président.**

Mr. Abdelkader Lakmeche, Professeur. Université de Sidi-Bel-Abbès. **Examineur.**

Mr. Mohammed Bouizem, M.C.B. Université de Tlemcen. **Encadreur.**

Remerciements

J'adresse tous mes remerciements à mon Dieu qui m'a aidé tout au long de mes études.

Je tiens à remercier mon directeur de ce mémoire le Docteur **Mohammed Bouizem** pour m'avoir encouragée, orientée et aidée.

Je voudrais remercier le Professeur **Ali Moussaoui** pour avoir accepté de présider le jury.

Je voudrais remercier le Professeur **Abdelkader Lakmeche** pour avoir accepté de participer à l'examen de ce travail.

Je remercie mes chers parents pour tous leurs sacrifices, leurs amours et leurs prières. Mes remerciements vont à ma grande-mère et toute ma famille qui m'ont toujours accompagnée et encouragée.

Table des matières

Introduction	4
1 Caractérisation des populations des insectes et des araignées	8
1.1 Les insectes des bois	10
1.2 Les araignées	12
2 Préliminaires	15
2.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz	15
2.2 Théorème de la positivité	16
2.3 Lemme de comparaison	16
2.4 Stabilité des points d'équilibre	16
2.5 Critère de Routh-Hurwitz	18
2.6 Modèles de croissance linéaire et logistique	18
3 Analyse mathématique de quelques modèles de proie prédateur	22
3.1 Modèle 1	22
3.1.1 Existence et unicité de solution	23
3.1.2 Existence des points d'équilibre	24
3.1.3 Stabilité des points d'équilibre	25
3.1.4 Stabilité globale du point d'équilibre de coexistence	26
3.1.5 Simulations numériques	28
3.1.6 Conclusions	29
3.2 Modèle 2	29
3.2.1 Existence et unicité de solution	29

3.2.2	Existence des points d'équilibre	31
3.2.3	Stabilité des points d'équilibre	32
3.2.4	Simulations numériques	34
3.2.5	Conclusions	34
4	Analyse mathématique d'un modèle agro-écologique	36
4.1	Existence et unicité de solution	37
4.2	Existence des points d'équilibre	38
4.3	Stabilité des points d'équilibre	51
4.4	Simulations numériques	59
4.4.1	Points d'équilibre E_0, E_1, E_2	59
4.4.2	Point d'équilibre E_3	60
4.4.3	Point d'équilibre E_4	62
	Conclusions et Perspectives	65
	Bibliographie	67

Introduction

De nos jours, les ressources naturelles s'épuisent à un rythme rapide. En agriculture, l'utilisation des engrais synthétiques au cours des dernières décennies a posé deux types de problèmes différents. D'un côté, l'empoisonnement de l'environnement, pour lequel le DDT est interdit comme anti-parasitaire depuis plusieurs années. D'un autre côté, les insectes ont tendance à développer dans le temps une résistance aux pesticides utilisés, par des mutations appropriées, qui à leur tour génèrent la nécessité de trouver de nouveaux poisons pour leur défense. Une alternative à l'utilisation répandue des pesticides est d'essayer de contrôler les ravageurs par des moyens organiques, en utilisant par exemple des prédateurs ou des parasitoses spécifiques des ravageurs des cultures impliquées.

Les araignées sont des prédateurs terrestres typiques qui présentent un degré de diversité élevé dans les agro-écosystèmes selon les stratégies de capture des proies. Leur rôle de contrôleurs biologiques constitue un sujet difficile en écologie appliquée. Face aux pénuries de proies, les araignées errantes recherchent activement des habitats plus productifs. Les araignées sont des prédateurs abondants et omniprésents dans les écosystèmes terrestres. En 1984, Wise [32] a proposé un modèle mathématique de l'araignée comme un prédateur terrestre et il a précisé que certaines familles d'araignées diffèrent dans la façon de se nourrir et d'utiliser leur environnement pour leur rôle dans les communautés terrestres. Les interactions compétitives, les impacts sur la population des proies diffèrent suivant le type des araignées errantes, ainsi leur rôle dans les réseaux écologiques est considéré d'une manière très particulière (voir [31]).

D'un point de vue général, on peut dire que les araignées errantes sont souvent

confrontées à une pénurie de proies dans la nature. Face à cette pénurie, les araignées choisissent généralement la stratégie de repos et d'attente, restant immobiles en attendant une augmentation de proies, ou bien elles recherchent des micro-habitats plus productifs.

En fait, de nombreuses araignées errantes sélectionnent le micro-habitat en fonction de l'abondance des proies (voir [5], [13] et [20]). Comme l'ont confirmé plusieurs études de comparaison en laboratoire et sur le terrain (voir [1], [6] et [8]), une augmentation de l'abondance des proies peut favoriser leur taux de croissance et leur fécondité. Ainsi, on peut supposer que les araignées errantes sont théoriquement rassasiées en termes de nourriture. Une croissance de la population augmente par conséquent la concurrence entre les adultes et pourrait favoriser les comportements de dispersion.

Ces hypothèses ont été étudiées par des scientifiques et ils ont montré par une conception expérimentale que le manque de nourriture ne peut être exclue pour la plupart des espèces. L'accumulation des preuves, directes et indirectes, montre clairement que les araignées ont souvent faim, au point de présenter des taux de croissance et de reproduction assez conséquent, ce qui est physiologiquement possible (voir [31]).

Plusieurs études suggèrent que les araignées choisissent activement des proies de manière à optimiser la proportion d'acides aminés essentiels dans leur alimentation (voir [7] et [19]). Même s'il semble que ce comportement évolue dans des environnements avec une faible diversité de proies, il a été prouvé qu'un régime mixte est nécessaire à une croissance et une reproduction normale.

Le degré de rassasiement des araignées ainsi que le rejet de certains types de proies pourrait expliquer l'existence d'une proportion de différents types de proies dans le régime alimentaire, d'où la nécessité de la recherche de nouveaux micro-habitats.

Dans certaines régions de la méditerranée et même dans d'autres pays, les agro-écosystèmes viticoles sont aujourd'hui soumis à des transformations importantes dues principalement à deux causes apparemment opposées, l'abandon des terres et l'intensification agricole. L'intensification implique l'élimination progressive de tous les petits éléments du paysage naturel qui ne sont pas strictement liés au processus de production, augmentant ainsi la perte globale d'hétérogénéité avec ses conséquences sur les communautés biotiques (voir [1], [10] et [25]).

L'hétérogénéité du paysage est principalement obtenue par la présence du bois. Il semble que ce soit le facteur environnemental le plus important pour améliorer la diversité des araignées (voir [11]). Des paysages divers, notamment des habitats boisés, peuvent être considérés comme un refuge et une source des populations d'araignées pour des habitats comme les vignobles. Les terres agricoles sont en constante évolution, dans lesquelles les organismes sont perturbés à plusieurs reprises par les exploitations agricoles (voir [9]).

En effet, la plupart des agro-écosystèmes ne fournissent aucun habitat permanent à de nombreuses espèces. Par conséquent, pour la prospérité de ces derniers, la présence des zones de refuge, telles que les bois relativement intacts est fondamentale. La présence des couches herbacées jouent également un rôle très important. Ces facteurs influencent à la fois la structure de la communauté et la composition spécifique des groupes d'araignées. L'entretien des parcelles semi-naturelles permet une plus grande diversification des prédateurs spécialisés, ce qui peut être important pour la lutte contre divers ravageurs dans les agro-écosystèmes (voir [17]).

Nous décrivons un système dans lequel les araignées prédateurs peuvent se déplacer parmi les vignobles et les bois, dans lesquels prospèrent deux proies différentes, qui sont des populations d'insectes. De plus, étant donné que les vignobles prédominent largement les bois, nous supposons que les araignées subissent une sorte d'effet de satiété alimentaire, compte tenu de l'abondance du même type de proie dans les vignobles. Puisqu'ils sont capables de se déplacer et de chercher d'autres sources de nourriture, nous modélisons cette capacité à trouver d'autres sources de nourriture en tenant compte également de la population d'insectes vivant dans les territoires voisins.

Dans ce mémoire, nous modélisons une situation où le paysage est dominé par les vignobles et les seuls éléments divers sont de petites parcelles de bois résiduelles. Donc, il s'agit d'un modèle de contrôle biologique des agro-écosystèmes où l'utilisation d'araignées est proposée, on considère la population d'insectes vivant dans les bois, et les insectes ayant le vignoble comme habitat. Nous considérons la dynamique des populations d'araignées errantes et de leurs proies dans un paysage agricole presque homogène.

Notre travail se compose de quatre chapitres.

Après l'introduction, le chapitre 1 est consacré à la partie biologique de notre phénomène afin d'exposer la problématique dans ce mémoire. En effet, nous nous intéressons à synthétiser les connaissances actuelles sur les araignées en tant que prédateurs et leurs proies qui se définissent dans la population des insectes vivant dans les bois et celle vivant dans la vigne.

On trouve dans le chapitre 2, un rappel de quelques résultats mathématiques utiles pour la suite de ce mémoire.

Dans le chapitre 3, avant de considérer le modèle général des trois populations citées au dessus, nous étudions séparément deux modèles proies prédateurs décrivant respectivement la dynamique de la population des insectes des bois et celle des araignées et la dynamique de la population des insectes de la vigne et celle des araignées. Nous faisons l'étude de l'existence et l'unicité de la solution positive globale, le calcul des points d'équilibre et leur stabilité locale et globale. Enfin, des simulations numériques sont données pour illustrer nos résultats.

Dans le chapitre 4, nous considérons un modèle mathématique décrivant la dynamique de la population des araignées prédateurs se déplaçant parmi les vignobles et les bois, dans lesquels vivent deux proies différentes, qui sont la population d'insectes des bois et celle des vignobles. Nous démontrons tout d'abord l'existence globale et l'unicité de solutions positives, puis nous étudions l'existence des points d'équilibre et leur stabilité. Nous terminons ce chapitre avec des simulations numériques qui illustrent nos résultats.

A la fin de ce mémoire, nous donnons quelques conclusions et nous proposons quelques perspectives.

Chapitre 1

Caractérisation des populations des insectes et des araignées

Apparu il y a environ 420 millions d'années, les insectes ont évolué dans une infinie diversité de forme, de couleur, de mode de vie (individuel ou en colonie), et se sont adaptés à tous les environnements et écosystèmes de la planète.

Un insecte ravageur est un insecte nuisible pour les cultures agricoles, pour les arbres et la végétation en général. Ces insectes sont naturellement présents dans l'environnement où ils se reproduisent spontanément au gré de la dynamique de leurs plante-hôte.

Certains insectes ravageurs sont connus depuis l'antiquité. D'autres, nouvellement introduits dans un territoire, sont en fait des insectes exotiques importés accidentellement ou intentionnellement. N'étant pas accompagnés de leurs prédateurs, ni de leurs parasites naturels, certaines espèces peuvent adopter dans leur nouvel environnement des comportements nouveaux, beaucoup plus agressifs pour les cultures, (voir[34]).

1. **L'Eudémis** : C'est un petit papillon qui a été découvert par Denis et Schiffmüller en 1775. Ce ravageur est présent dans la plupart des vignobles européens mais il existe aussi en Afrique du nord, (voir[22]).

Les dégâts occasionnés aux cultures par l'Eudémis sont de natures diversifiées, il y a deux types de dégâts (directs et indirects).

Les dégâts directs sont la conséquence de l'alimentation de ces insectes et les

dégâts indirects correspondent à l'installation de *Botrytis cinerea*, responsable de la pourriture grise, (voir [22]), (voir Figure 1.2).



FIGURE 1.1 – Dégâts directs (photos du haut) et indirects (photos du bas) , [22].

2. **La Cochylis** : C'est un ancien ravageur de la vigne qui a été découvert par Plaute, puis au premier siècle par Pline. Au début du XXème siècle, la Cochylis ravage tout le vignoble français et en particulier celui du Bordelais, (voir[28]), (voir Figure 1.2).
3. **La Pyrale de la vigne** : Au XVIème siècle cette espèce était le ravageur majeur de la vigne. On la trouve principalement en Languedoc sous le nom de "Babote" dans les Pyrénées orientales sous le nom de "couque" mais aussi en Bourgogne et dans tous les vignobles du centre et de la côte ouest en France. La Pyrale est actuellement présente surtout en Bourgogne, Alsace, Suisse, mais aussi beaucoup plus au sud comme en Espagne, au Portugal, et parfois dans les Pyrénées orientales. Elle serait d'origine Eurasienne, (voir[28]), (voir Figure 1.2).
4. **L'Eulia** : C'est un insecte qui est présent en Europe et provoque des dégâts sur les baies ainsi que sur les feuilles. le début de ses dégâts significatifs date des années 1950.



FIGURE 1.2 – L'Eudémis (haut gauche), la Cochylis (haut droite), l'Eulia (bas gauche) et la pyrale de la vigne (bas droite), [28].

1.1 Les insectes des bois

Il y a plusieurs types d'insectes qui attaquent les bois mais on ne citera que les principaux.

1. **Capricorne** : C'est un insecte qui se retrouve très souvent dans la nature. Il se nourrit spécialement de bois, en particulier les bois résineux. On retiendra le Pin maritime, le Pin laricio, le Pin noir d'Autriche, le Pin sylvestre, mais aussi le Mélèze, l'Épicéa et le Sapin, (voir [33]). L'insecte adulte ayant une durée de vie très courte (environ 1 mois) et ne se nourrissant pas pendant cette période de reproduction, c'est bien la larve, qui, au fil de son développement et des années va faire le plus de dégâts, (voir Figure 1.3). Il provoque des trous de sortie, des boursouflures à la surface du bois, du bruit, et un affaissement anormal du bois.
2. **La petite et grosse Vrille** : Il existe deux types de Vrille, la petite et la grosse. Les deux peuvent faire des dégâts considérables dans les bois. Les Vrilles sont des insectes xylophages, c'est à dire que leurs larves circulent à travers le bois en digérant la cellulose et en creusant des petits trous ronds. Contrairement aux capricornes, les vrilles ne vivent pas en permanence dans le bois. Pour entrer et sortir du bois, elle forent des trous circulaires de quelques

millimètres, (voir [33]), (voir Figure 1.3). Elles provoquent des trous de sortie très nombreux de 2 à 3 mm et une Perte totale de la résistance mécanique du bois.

3. **Lyctus** : D'origine tropicale, cet insecte a été déplacé lors du transport du bois. Il pond dans les bois à larges vaisseaux de sève comme le chêne ou le bambou. Cet insecte infeste plus souvent le bois dans ses premières années d'utilisation du fait de la disparition progressive de l'amidon. Le Lyctus a un cycle de vie correspondant généralement à une période de 12 à 24 mois, qui varie selon la nature et la qualité nutritive de ce bois, (voir [33]), (voir Figure 1.3). il provoque plusieurs trous de sortie de 1 à 1,5 mm en cas d'attaque importante. De plus, on remarque beaucoup d'insectes morts dans les endroits infestés durant la période de mai à septembre.
4. **Termite** : Les Termites sont des insectes primitifs de couleur blanchâtre, et de petite taille (5 à 8 mm de longueur pour une largeur de l'ordre du mm), d'où leur surnom de "fourmis blanches". Ils sont qualifiés d'insectes "sociaux", car ils vivent en colonies organisées, tout comme les abeilles, ou les fourmis. Les termites se nourrissent de la cellulose contenue dans le bois, (voir [36]), (voir Figure 1.3). ils provoquent une dégradation de l'aspect du revêtement du bois et une diminution de la résistance mécanique de la zone attaquée. Un bois qui paraît intact de l'extérieur peut être complètement évidé par les termites.



FIGURE 1.3 – Termite (haut gauche), Lyctus (haut droite), Grosse Vilerette (bas gauche), Capricorne (bas droite), [33].

1.2 Les araignées

Environ 47000 espèces d'araignées sont actuellement connues dans le monde. Tous sont des prédateurs, la majorité se nourrissent principalement d'insectes. Les araignées sont abondantes dans les environnements naturels et cultivés, dans lesquels leur abondance annuelle moyenne varie de 50 à 150 individus par mètre carré, (voir [18]).

Les araignées appartiennent à l'ordre des aranéides (Aranae). Comme chez les acariens, le prosome est composé de la tête et du thorax soudés entre eux et portant les quatre paires de pattes composées de 7 articles. Jusqu'à 8 yeux simples sont insérés sur le prosome ainsi que des pédipalpes servant à la manipulation des proies, (voir Figure 1.4). Les araignées qui ne consomment que des proies vivantes, ne possèdent pas de pièces buccales broyeuses. Elles injectent par les chélicères (ou crochets), placés près de l'ouverture buccale, du venin pour immobiliser leur proie ainsi que des enzymes digestives qui vont liquéfier celle-ci et qu'elles vont ensuite aspirer, (voir [35]). La seconde partie du corps est l'abdomen ou opisthosome. Des glandes séricigènes situées sur l'abdomen produisent une protéine se solidifiant à l'air, composée de microfibrilles qui permet de former des toiles (La soie). Cette dernière sert aussi à la formation des nids protégeant les oeufs (voir Figure 1.4), (voir [35]).



FIGURE 1.4 – Araignée, [35].

Les araignées attrapent leur proies directement par une chasse à courre, à l'affut ou à l'aide de toiles (fils de soie). Ces prédateurs sont des généralistes et consomment toutes sortes de proies. Ainsi, on considère que les araignées régulent les populations d'insectes ravageurs des agro-écosystèmes. Ils ont un rôle très important pour prévenir et réduire la prolifération des ravageurs, (voir [30]).

De nombreuses études à travers le monde ont montré que l'utilisation des produits chimiques diminue la diversité et la densité des araignées. En 1980, Mansour, Rosen et Shulov [15] ont réalisé une étude comparative d'un an, des communautés d'araignées dans deux vergers, l'un traité avec des produits chimiques et l'autre non traité.

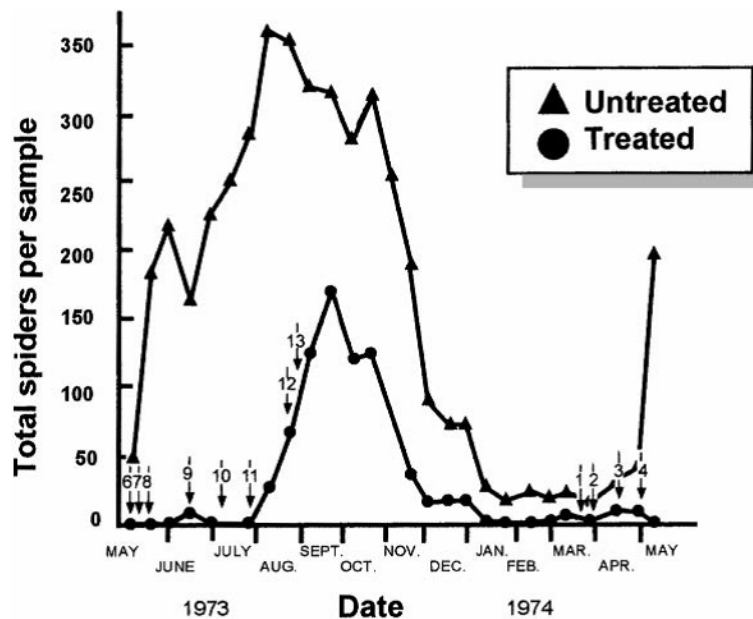


FIGURE 1.5 – Fluctuation des populations d'araignées dans les vergers traités et non traités. Les flèches numérotées indiquent les applications de pesticides dans le verger traité, [18].

La densité des araignées s'est avérée être au moins deux fois plus élevée dans le verger non traité sur toute l'année (voir figure 1.5). La population d'araignées dans le verger pulvérisé a été affectée par les traitements aux pesticides et a souvent été complètement éliminée. Cependant, les araignées sont réapparues dans le verger lorsque l'intervalle entre les applications était suffisamment long par exemple entre les flèches 8 et 9 (voir Figure 1.5). L'application d'insecticides plusieurs fois au cours de la saison ou à des doses élevées détruit généralement les communautés d'araignées, (voir [18]).

Les agro-écosystèmes sont caractérisés par divers facteurs, tels que le travail humain

et l'énergie et les produits pétrochimiques, qui remplacent et complètent le fonctionnement de nombreux écosystèmes. Si de telles substitutions peuvent réguler certaines de ces fonctions, elles risquent également d'en endommager d'autres. Par exemple, l'utilisation de pesticides peut contrôler les maladies qui ont un impact négatif sur les cultures, mais celles-ci peuvent également tuer des organismes non ciblés ayant d'autres fonctions positives, (voir [4]).

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 2.1. ([14])

1. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, y) \mapsto f(t, y)$ une fonction où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
On dit que f est lipschitzienne par rapport à y s'il existe un réel positif k tel que : $\forall (t, y_1) \in \Omega, \forall (t, y_2) \in \Omega$, on a : $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$.
2. On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à y si tout point $(t, y) \in \Omega$, possède un voisinage appartenant à Ω et dans lequel f est lipschitzienne par rapport à y .

Théorème 2.1 (Cauchy-Lipschitz). ([14]) Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, y) \mapsto f(t, y)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On suppose que f est continue en (t, y) et localement lipschitzienne par rapport à y . Alors, pour tout point $(t_0, y_0) \in \Omega$, il existe un intervalle fermé I centré en t_0 et une solution locale $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle $\dot{y} = f(t, y)$ avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. En outre $y \in C^1$ et cette solution est unique.

2.2 Théorème de la positivité

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Théorème 2.2. (*Positivité*) ([26],[27]) *On suppose que f vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy Lipschitz et*

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \forall x \in \mathbb{R}_+^d : x_i = 0 \Rightarrow f_i(t, x) \geq 0. \quad (2.2)$$

Si $x(t_0) \geq 0$, alors la solution correspondante $x(t)$ de (2.1) satisfait $x(t) \geq 0, \forall t > t_0$.

2.3 Lemme de comparaison

Lemme 2.1. ([12]) *Soit l'équation différentielle scalaire suivante*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

où $f(t, x)$ est continue en t et localement lipschitzienne en x , pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in J \subset \mathbb{R}$. Soit $[t_0, T)$ (T pouvant être infini) l'intervalle d'existence maximal de la solution $x(t)$, et supposons que $x(t) \in J$ pour tout $t \in [t_0, T)$. Soit $y(t)$ une fonction continue dont la dérivée à droite supérieure satisfait l'inégalité différentielle

$$D^+y(t) \leq f(t, y(t)), y(t_0) \leq x_0,$$

avec $y(t) \in J$ pour tout $[t_0, T)$. Alors $y(t) \leq x(t)$ pour tout $[t_0, T)$.

2.4 Stabilité des points d'équilibre

Définition 2.2. ([12]) *Considérons l'équation autonome*

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.4)$$

On dit que x^ est un point d'équilibre de (2.4) si $f(x^*) = 0$.*

Le point d'équilibre $x^ = 0$ de l'équation (2.4) est :*

— Stable si, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ telle que

$$\|x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \epsilon, \forall t \geq 0.$$

— Instable s'il n'est pas stable.

— Asymptotiquement stable s'il est stable et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

Théorème 2.3. ([12]) Soit $x = 0$ un point d'équilibre de système non linéaire $\dot{x} = f(x)$ où $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continument différentiable et D est un voisinage de l'origine.

Soit $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)|_{x=0}$ alors,

1. L'origine est asymptotiquement stable si $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres λ_i de A .
2. L'origine est instable si $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ pour au moins une valeur propre de A .

Définition 2.3. ([23]). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, et soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 ,

1. V est dite définie positive si :

(a) $V(0) = 0$, et

(b) $V(u) > 0$ pour $u \in \Omega \setminus \{0\}$

2. V est dite définie négative, si $-V$ est définie positive.

3. V est dite semi-définie positive si :

(a) $V(0) = 0$, et

(b) $V(u) \geq 0$ pour tout $u \in \Omega$

4. V est dite semi-définie négative si $-V$ est semi-définie positive.

Théorème 2.4. (Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe)([23]).

Soit $x(t)$ solution de $\dot{x} = f(x)$ et soit V une fonction de classe C^1 définie positive sur Ω un voisinage de $x^* = 0$ (sans perte de généralité on prend l'équilibre exactement l'origine)

1. Si $\frac{dV}{dt}$ est semi-définie négative alors x^* est stable.

2. Si $\frac{dV}{dt}$ est définie négative alors x^* est asymptotiquement stable.

Théorème 2.5. (Théorème d'invariance de LaSalle)([23]). Soit $\mathbb{R}^n \ni x \rightarrow V(x)$ de classe C^1 et définie positive

$$\frac{dV}{dt} \leq 0.$$

Alors, pour toute condition initiale y_0 , la solution de $\dot{x} = f(x)$ (définie pour tout temps $t > 0$) converge asymptotiquement vers le plus grand sous-ensemble invariant contenu dans l'ensemble des points $\xi \in \mathbb{R}^n$ tels que $\frac{d}{dt}V(\xi) = 0$.

2.5 Critère de Routh-Hurwitz

Soit le système linéaire de dimension n suivant (voir [2]) : $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ avec $i \in [1, n]$,

où $A = [a_{ij}]$ est une matrice carrée de dimension n admettant n valeurs propres qui sont solutions de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$, qui est un polynôme de degré n que nous écrivons sous la forme suivante :

$$p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0,$$

Considérons les n déterminants suivants

$$H_1 = \alpha_1, H_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix}, \dots, H_k = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_4 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \alpha_k \end{vmatrix}$$

avec $k \in [1, n]$. Dans le cas de dimension n , tous les a_j avec $j > n$ sont pris égaux à zéro. On a donc le résultat suivant :

L'équilibre est asymptotiquement stable, si et seulement si, $\forall k \in [1, n], H_k > 0$.

2.6 Modèles de croissance linéaire et logistique

1. Modèle de croissance linéaire([2])

La forme générale de la loi de croissance de la population est la suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Soit n le taux de natalité par unité de temps et par individu et soit m le taux de mortalité. Les taux de natalité et de mortalité sont supposés être constants, ce qui nous conduit au modèle suivant :

$$\frac{dx}{dt} = nx - mx = rx, \quad (2.5)$$

où $r = n - m$ est le taux de croissance de la population.

La solution de l'équation (2.5) est :

$$x(t) = x_0 e^{rt}.$$

Si $r < 0$, la population est en extinction.

Si $r = 0$, la population reste constante.

Si $r > 0$, la population est en croissance.

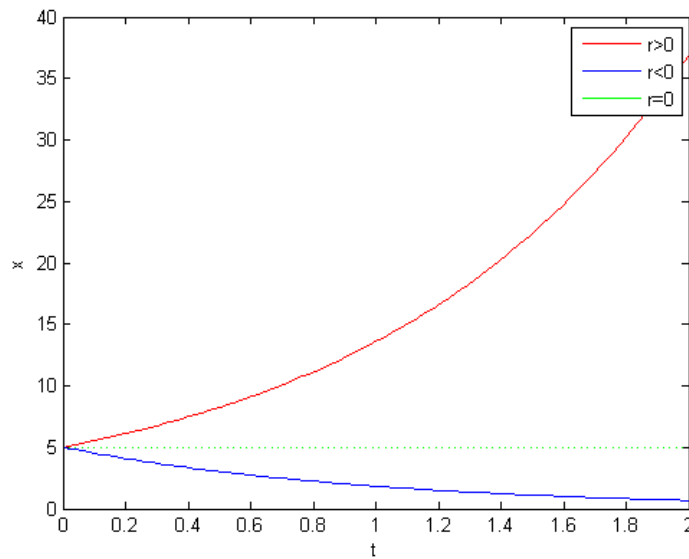


FIGURE 2.1 – La loi de croissance linéaire.

2. Modèle de croissance logistique([2])

Dans un cas simple on choisit pour le taux de natalité la fonction décroissante

de l'effectif suivante :

$$n(x) = \alpha - \beta x, \quad (2.6)$$

où α et β sont des constantes positives.

Pour le taux de mortalité, on choisit la fonction croissante de l'effectif suivante :

$$m(x) = \gamma + \delta x, \quad (2.7)$$

où γ et δ sont des constantes positives.

On remplace (2.6) et (2.7) dans (2.5) on obtient

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (2.8)$$

où $r = \alpha - \gamma > 0$ est le taux de croissance de la population, et $K = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}$ s'appelle la capacité limite du milieu.

La solution de l'équation (2.8) est

$$x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) + (K - x(0))\exp(-rt)}.$$

On a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = K.$$

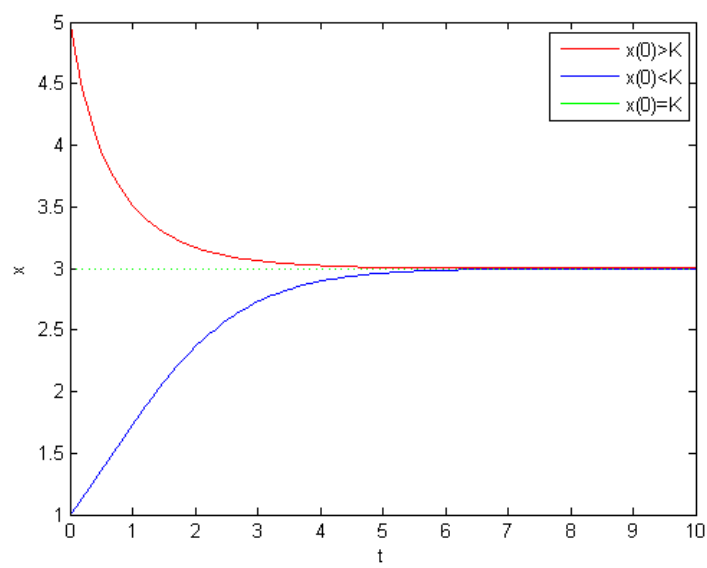


FIGURE 2.2 – La loi de croissance logistique.

Chapitre 3

Analyse mathématique de quelques modèles de proie prédateur

3.1 Modèle 1

Dans cette section, on considère un modèle décrivant la dynamique de la population d'insectes vivant dans les bois notée par $x(t)$ et la population d'araignées notée par $y(t)$. On a le modèle suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= rx(1 - \frac{x}{W}) - cyx, \\ \dot{y} &= y(-a + kcx). \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec les conditions initiales :

$$x(0) = x^0 \geq 0, \quad y(0) = y^0 \geq 0. \quad (3.2)$$

Supposons que tout les paramètres du modèle 3.1 sont strictement positifs.

Définitions des paramètres du modèle (3.1) :

r : Taux de croissance de la population des insectes vivant dans les bois.

W : La capacité limite du milieu.

c : Taux de prédation du prédateur (les araignées) sur la proie (les insectes vivant dans les bois).

a : Taux de mortalité de la population des araignées.

k : Taux de conversion de la biomasse de proies en prédateurs.

3.1.1 Existence et unicité de solution

Théorème 3.1. *Soit F continue et localement Lipschitzienne dans $\mathbb{R}^2$, alors le système (3.1) admet une solution unique $(x(t), y(t))$ dans $\mathbb{R}^2$.*

Preuve

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donné par $F(x, y) = (F_1, F_2)(x, y)$, tel que.

$$\begin{cases} F_1(x, y) &= rx(1 - \frac{x}{W}) - cyx, \\ F_2(x, y) &= y(-a + kcx). \end{cases}$$

F est localement lipschitzienne, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz le système (3.1) avec les conditions initiales admet une solution locale unique $(x(t), y(t))$ dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 3.2. *Le système (3.1) admet une solution unique positive dans $\mathbb{R}_+^2$.*

Preuve

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= F_1(x, y), \\ \dot{y} &= F_2(x, y). \end{cases}$$

On a

$$F_1(0, y) = 0 \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}_+ \text{ et } F_2(x, 0) = 0 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Alors, d'après le théorème de positivité (2.2), on déduit que le système (3.1) admet une solution unique positive dans $\mathbb{R}_+^2$, $\forall t \geq 0$.

Théorème 3.3. *Le système (3.1) admet une solution globale unique positive dans $\mathbb{R}_+^2$.*

Preuve

Soit $X(t) = (x(t), y(t))$, on fait un raisonnement par l'absurde.

On suppose qu'il $\exists T < +\infty$, telle que $\lim_{t \rightarrow T} \|X(t)\| = +\infty$.

On a, $\dot{x} = rx(1 - \frac{x}{W}) - cyx$, on déduit que $\dot{x} \leq rx$, donc $x(t) \leq x(0)e^{rt} \leq x(0)e^{rT} = A$.

Ainsi, $\limsup_{t \rightarrow T} x(t) < +\infty$.

On a, $\dot{y} = y(-a + kcx)$, on déduit que $\dot{y} \leq y(-a + kcA)$.

On pose $\alpha = -a + kcA$, on obtient $\dot{y} \leq \alpha y$, et donc

$y(t) \leq y(0)e^{\alpha t} \leq y(0)e^{\alpha T}$. Ainsi, $\limsup_{t \rightarrow T} y(t) < +\infty$.

Ce qui est absurde, par suite la solution du système (3.1) est globale.

3.1.2 Existence des points d'équilibre

Définition 3.1. *Le point d'équilibre $E_* = (E_*^1, E_*^2)$ est appelé un point d'équilibre non trivial si $E_*^i > 0$, $\forall i \in \{1, 2\}$.*

Les points d'équilibre de (3.1) peuvent être soit le point d'équilibre trivial E_0 ou les points d'équilibre non triviaux suivants.

1. Le point d'équilibre de coexistence noté par $E_2 = (E_2^1, E_2^2)$, avec $E_2^i > 0$ pour $i \in \{1, 2\}$.
2. Le point d'équilibre semi trivial noté par $E_1 = (E_1^1, 0)$, avec $E_1^1 > 0$.

Théorème 3.4. *1. Le point d'équilibre trivial $E_0 = (0, 0)$ existe toujours.*

2. Le point d'équilibre semi trivial $E_1 = (W, 0)$ existe toujours.

3. Le point d'équilibre de coexistence $E_2 = (x^, y^*)$ existe, si $\frac{a}{Wkc} < 1$. Avec $x^* = \frac{a}{kc}$ et $y^* = \frac{r}{c}(1 - \frac{a}{Wkc})$.*

Preuve

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= F_1(x, y), \\ \dot{y} &= F_2(x, y), \end{cases}$$

admet un point d'équilibre (x^*, y^*) , si

$$\begin{aligned} \begin{cases} F_1(x^*, y^*) &= 0, \\ F_2(x^*, y^*) &= 0. \end{cases} &\iff \begin{cases} rx^*(1 - \frac{x^*}{W}) - cy^*x^* &= 0, \\ y^*(-a + kcx^*) &= 0. \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^* = 0 &\text{ou } r(1 - \frac{x^*}{W}) - cy^* = 0, \\ y^* = 0 &\text{ou } -a + kcx^* = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On a les points d'équilibres suivants :

$$E_0 = (0, 0).$$

$$E_1 = (W, 0).$$

$$E_2 = (x^*, y^*), \text{ avec } x^* = \frac{a}{kc} \text{ et } y^* = \frac{r}{c} \left(1 - \frac{a}{Wkc}\right).$$

Pour déterminer E_1 , on prend $y^* = 0$, alors $r(1 - \frac{x^*}{W}) = 0 \implies x^* = W$.

Pour déterminer E_2 , on prend $-a + kcx^* = 0 \implies x^* = \frac{a}{kc}$,

on prend $r(1 - \frac{a}{Wkc}) - cy^* = 0 \implies y^* = \frac{r}{c} \left(1 - \frac{a}{Wkc}\right)$.

3.1.3 Stabilité des points d'équilibre

La matrice jacobienne de système (3.1) est :

$$J = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2x}{W}) - cy & -cx \\ kcy & -a + kcx \end{pmatrix}$$

Théorème 3.5. *Le point d'équilibre trivial E_0 est instable.*

Preuve

La matrice jacobienne en E_0 est :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = r > 0$, $\lambda_2 = -a < 0$, alors le point d'équilibre E_0 est instable.

Théorème 3.6. *1. Si $a > kcW$, alors le point d'équilibre semi trivial E_1 est localement asymptotiquement stable.*

2. Si $a < kcW$, alors le point d'équilibre semi trivial E_1 est instable.

Preuve

La matrice jacobienne en E_1 est :

$$J(W, 0) = \begin{pmatrix} -r & -cW \\ 0 & -a + kcW \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = -r < 0$, $\lambda_2 = -a + kcW$

$\lambda_2 < 0$ si $a > kcW$ et $\lambda_2 > 0$ si $a < kcW$.

Donc.

Si $a > kcW$, alors le point d'équilibre de coexistence E_1 est localement asymptotiquement stable.

Si $a < kcW$, alors le point d'équilibre de coexistence E_1 est instable.

Théorème 3.7. *Si $a < Wkc$, alors le point d'équilibre de coexistence E_2 est localement asymptotiquement stable.*

Preuve

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2x^*}{W}) - cy^* & -cx^* \\ kcy^* & -a + kcx^* \end{pmatrix}.$$

On a $-a + kcx^* = 0$, donc

$$\det J(x^*, y^*) = kc^2 y^* x^* > 0.$$

$$\text{tr} J(x^*, y^*) = r(1 - \frac{2x^*}{W}) - cy^* = \frac{-ar}{Wkc} < 0.$$

Alors le point d'équilibre de coexistence E_2 est localement asymptotiquement stable.

3.1.4 Stabilité globale du point d'équilibre de coexistence

Théorème 3.8. *Si $a < Wkc$, alors le point d'équilibre de coexistence E_2 est globalement asymptotiquement stable dans $\mathbb{R}_+^2 \setminus (0, 0)$.*

preuve

On considère la fonction de Liapunov suivante au point d'équilibre $E_2 = (x^*, y^*)$.

$$V(x, y) = k \left(x - x^* - x^* \ln\left(\frac{x}{x^*}\right) \right) + \left(y - y^* - y^* \ln\left(\frac{y}{y^*}\right) \right),$$

telle que,

$$x^* = \frac{a}{kc}. \quad (3.3)$$

$$y^* = \frac{r}{c} \left(1 - \frac{x^*}{W} \right). \quad (3.4)$$

On a, $\forall t, t_0 > 0$ et $t \neq t_0$, $f(t) = t - t_0 - t_0 \ln(\frac{t}{t_0}) > 0$ car

$$f'(t) = 1 - \frac{t_0}{t} > 0, \forall t > t_0$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$$

Alors $V(x, y) > 0, \forall (x, y) \neq (x^*, y^*)$ et $V(x^*, y^*) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(x, y) &= k\left(\frac{x - x^*}{x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{y - y^*}{y}\right)\frac{dy}{dt}. \\ &= k(x - x^*)\left[r\left(1 - \frac{x}{W}\right) - cy\right] + (y - y^*)(-a + kcx). \\ &= k(x - x^*)\left[r\left(1 - \frac{x}{W}\right) - c(y - y^*) - cy^*\right] + (y - y^*)[-a + kc(x - x^*) + kcx^*]. \end{aligned}$$

D'après (3.4) on obtient $cy^* = r(1 - \frac{x^*}{W})$ et d'après (3.3) on obtient $kcx^* - a = 0$.

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(x, y) &= k(x - x^*)\left[-\frac{r}{W}(x - x^*) - c(y - y^*)\right] + kc(x - x^*)(y - y^*). \\ &= -\frac{kr}{W}(x - x^*)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{dV}{dt}(x, y) \leq 0$.

Soit,

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus (0, 0), \frac{dV}{dt}(x, y) = 0\}. \\ &= \{(x^*, y), y \in \mathbb{R}_+^*\}. \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dt} = 0, \text{ si } x = x^*.$$

On remplace x par x^* dans la deuxième équation de système (3.1).

On obtient $\dot{y} = y(-a + kcx^*) = 0$ car $-a + kcx^* = 0$, alors, $y(t) = y^*$.

Donc $M = \{(x^*, y^*)\}$ est le plus grand ensemble invariant contenu dans D .

D'après le théorème de L'invariance de Lasalle E_2 est globalement asymptotiquement stable.

3.1.5 Simulations numériques

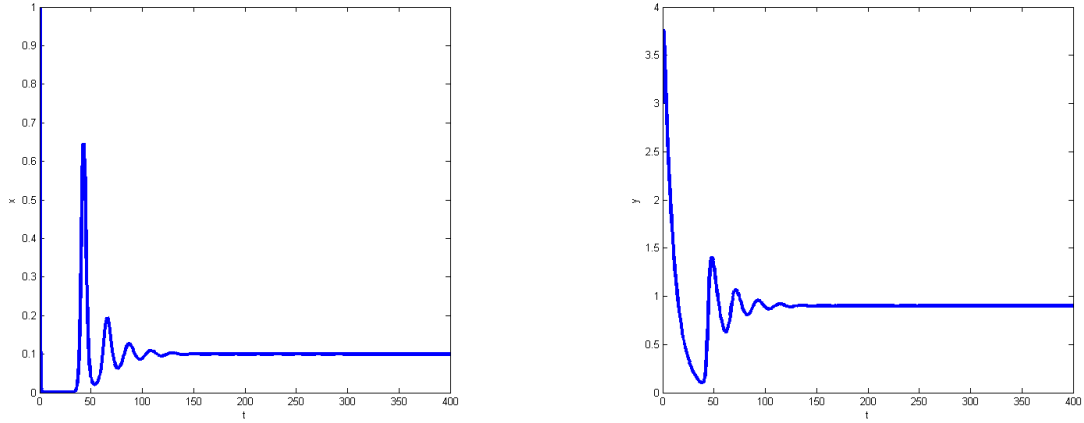


FIGURE 3.1 – Les points d'équilibre E_0 et E_1 sont instables (Th 3.5, Th 3.6), l'équilibre E_2 est stable (Th 3.7), pour les paramètres : $a = 0.1$, $c = 1$, $r = 1$, $W = 1$, $k = 1$.

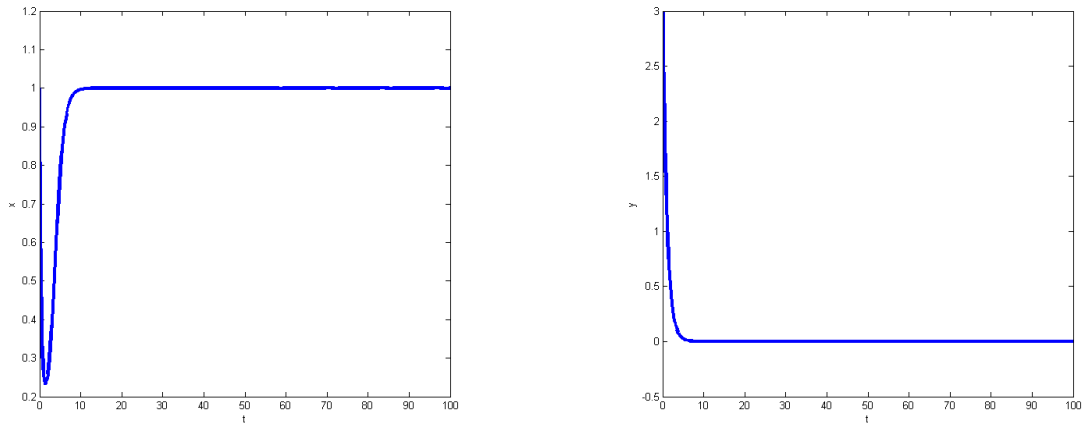


FIGURE 3.2 – Le point d'équilibre E_1 est stable (Th 3.6), pour les paramètres : $a = 1$, $c = 0.1$, $r = 1$, $W = 1$, $k = 1$.

3.1.6 Conclusions

En conclusion, nous remarquons que dans le cas où $a > kcW$, il y'a extinction des prédateurs et l' effectif des proies tend vers la capacité limite W et dans le cas où $a < kcW$, les effectifs des prédateurs et des proies vont vers un état constant.

3.2 Modèle 2

Dans cette section, on considère un modèle décrivant la dynamique de la population d'araignées notée par $y(t)$ et la population d'insectes ayant la vigne comme habitat notée par $z(t)$. On a le modèle suivant

$$\begin{cases} \dot{y} &= y(-a + \frac{k bz}{H + z}), \\ \dot{z} &= z(e - \frac{by}{H + z}). \end{cases} \quad (3.5)$$

Avec les conditions initiales :

$$y^0(0) = y^0 \geq 0, \quad z^0(0) = z^0 \geq 0.$$

Supposons que tout les paramètres du modèle 3.5 sont strictement positifs.

Définition des paramètresdu modèle (3.5) :

a : Taux de mortalité de la population des araignées.

k : Taux de conversion de la biomasse de proies en prédateurs.

b : Taux de prédation du prédateur (les araignées) sur la proie (les insectes vivant dans le vignoble).

H : La constante de demi-saturation pour le prédateur.

e : Taux de croissance des insectes ayant le vignoble comme habitat.

3.2.1 Existence et unicité de solution

Théorème 3.9. *Soit F continue et localement Lipschitzienne dans $\mathbb{R}^2$, alors le système (3.5) admet une solution unique $(y(t), z(t))$ dans $\mathbb{R}^2$.*

Preuve

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donné par $F(y, z) = (F_1, F_2)(y, z)$, tel que.

$$\begin{cases} F_1(y, z) &= y(-a + \frac{kbz}{H+z}), \\ F_2(y, z) &= z(e - \frac{by}{H+z}). \end{cases}$$

F est localement lipschitzienne donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz le système (3.5) avec les conditions initiales admet une solution locale unique $(y(t), z(t))$ dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 3.10. *Le système (3.5) admet une solution unique positive dans $\mathbb{R}_+^2$.*

Preuve

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{y} &= F_1(y, z), \\ \dot{z} &= F_2(y, z). \end{cases}$$

On a

$$F_1(0, z) = 0 \geq 0, \forall z \in \mathbb{R}_+ \text{ et } F_2(y, 0) = 0 \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}_+.$$

Alors, d'après le théorème de positivité (2.2), on déduit que le système (3.5) admet une solution unique positive dans $\mathbb{R}_+^2$, $\forall t \geq 0$.

Théorème 3.11. *Le système (3.5) admet une solution globale unique positive dans $\mathbb{R}_+^2$.*

Preuve

Soit $X(t) = (y(t), z(t))$, on fait un raisonnement par l'absurde.

On suppose qu'il $\exists T < +\infty$, telle que $\lim_{t \rightarrow T} \|X(t)\| = +\infty$.

On a, $\dot{y} = y(-a + \frac{kbz}{H+z})$, on déduit que

$$\dot{y} \leq y(-a + kb) \text{ car } \frac{z}{H+z} \leq 1.$$

On pose $\alpha = -a + kb$, on obtient $\dot{y} \leq \alpha y$, et donc,

$$y(t) \leq y(0)e^{\alpha t} \leq y(0)e^{\alpha T}.$$

Ainsi, $\limsup_{t \rightarrow T} y(t) < +\infty$.

On a, $\dot{z} = z(e - \frac{by}{H+z})$, on déduit que

$$\dot{z} \leq ez \text{ car } \frac{z}{H+z} \leq 1, \text{ et donc,}$$

$$z(t) \leq z(0)e^{et} \leq z(0)e^{eT}.$$

Ainsi, $\limsup_{t \rightarrow T} z(t) < +\infty$.

Ce qui est absurde, par suite la solution du système (3.5) est globale.

3.2.2 Existence des points d'équilibre

Définition 3.2. *Le point d'équilibre $E_* = (E_*^1, E_*^2)$ est appelé un point d'équilibre non trivial si $E_*^i > 0, \forall i \in \{1, 2\}$.*

Les points d'équilibre de (3.5) peuvent être soit le point d'équilibre trivial E_0 ou le point d'équilibre de coexistence suivant.

- Le point d'équilibre de coexistence noté par $E_1 = (E_1^1, E_1^2)$, avec $E_1^i > 0$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Théorème 3.12. 1. *Le point d'équilibre trivial $E_0 = (0, 0)$ existe toujours.*

2. *Le point d'équilibre de coexistence $E_1 = (y^*, z^*)$ existe si $kb > a$. Avec $y^* = \frac{ekH}{kb-a}$ et $z^* = \frac{aH}{kb-a}$.*

Preuve

Le système

$$\begin{cases} \dot{y} &= F_1(y, z), \\ \dot{z} &= F_2(y, z). \end{cases}$$

admet un point d'équilibre (y^*, z^*) , si

$$\begin{cases} F_1(y^*, z^*) &= 0, \\ F_2(y^*, z^*) &= 0. \end{cases} \iff \begin{cases} y^*(-a + \frac{kbz^*}{H+z^*}) &= 0, \\ z^*(e - \frac{by^*}{H+z^*}) &= 0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y^* = 0 \text{ ou } -a + \frac{kbz^*}{H+z^*} = 0, \\ z^* = 0 \text{ ou } e - \frac{by^*}{H+z^*} = 0. \end{cases}$$

On a les points d'équilibres suivants :

$$E_0 = (0, 0).$$

$$E_1 = (y^*, z^*). \text{ avec } y^* = \frac{ekH}{kb - a} \text{ et } z^* = \frac{aH}{kb - a}.$$

$$\text{Pour déterminer } z^* \text{ on prend } -a + \frac{kbz^*}{H + z^*} = 0 \implies z^* = \frac{aH}{kb - a}$$

$$\text{Pour déterminer } y^* \text{ on prend } e - \frac{by^*}{H + z^*} = 0 \implies y^* = \frac{e}{b}(H + z^*)$$

$$\implies y^* = \frac{ekH}{kb - a}$$

3.2.3 Stabilité des points d'équilibre

La matrice jacobienne de système (3.5) :

$$\begin{pmatrix} -a + \frac{kbz}{H + z} & \frac{Hkby}{(H + z)^2} \\ -\frac{bz}{H + z} & e - \frac{Hby}{(H + z)^2} \end{pmatrix}$$

Théorème 3.13. *Le point d'équilibre trivial E_0 est instable.*

Preuve

La matrice jacobienne en E_0 est :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = -a < 0$ et $\lambda_2 = e > 0$, alors E_0 est instable.

Théorème 3.14. *Si $kb > a$, alors le point d'équilibre de coexistence E_1 est instable.*

Preuve

La matrice jacobienne en E_1 est :

$$J(y^*, z^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{kbHy^*}{(H + z^*)^2} \\ -\frac{bz^*}{H + z^*} & e - \frac{bHy^*}{(H + z^*)^2} \end{pmatrix}$$

$$\det J = \frac{kb^2Hy^*z^*}{(H+z^*)^3} > 0.$$

$$\operatorname{tr} J = e - \frac{bHy^*}{(H+z^*)^2}$$

on a

$$e - \frac{by^*}{H+z^*} = 0 \implies y^* = \frac{e}{b}(H+z^*) \text{ donc } \operatorname{tr} J = \frac{ez^*}{H+z^*} > 0.$$

Alors le point d'équilibre de coexistence E_1 est instable.

3.2.4 Simulations numériques

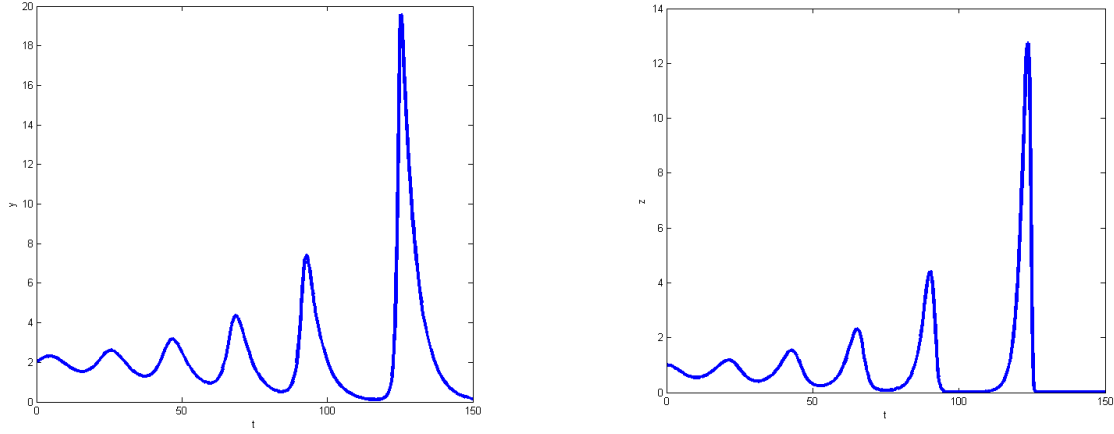


FIGURE 3.3 – Les points d'équilibre E_0 et E_1 sont instables (Th 3.13, Th 3.14), pour les paramètres : $a = 0.2$, $c = 1$, $b = 2$, $k = 1$, $H = 7$, $e = 0.5$.

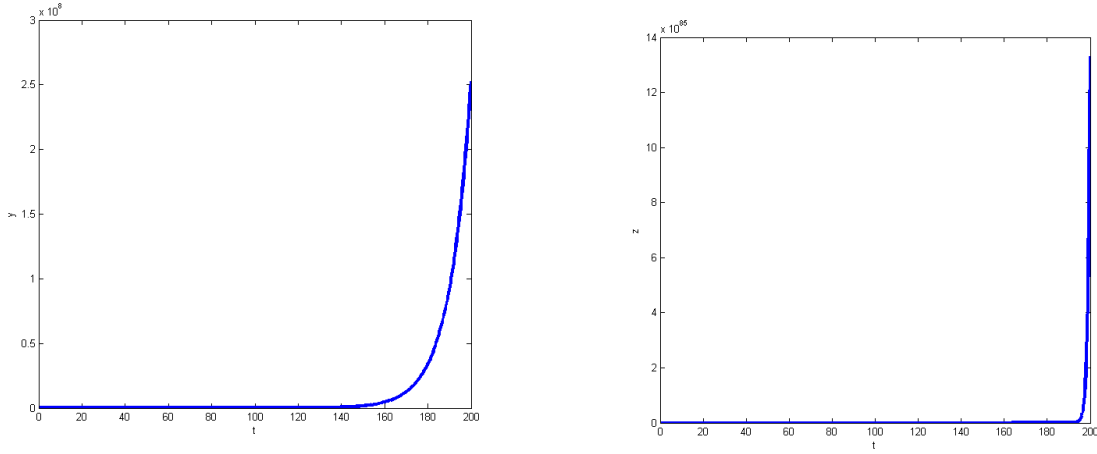


FIGURE 3.4 – Les points d'équilibre E_0 et E_1 sont instables (Th 3.13, Th 3.14), pour les paramètres : $a = 0.9$, $c = 1$, $b = 1$, $k = 1$, $H = 1$, $e = 1$.

3.2.5 Conclusions

D'après la figure (3.3), nous constatons que les effectifs respectifs des proies et des prédateurs varient d'une manière oscillatoire, ce qui signifie une certaine coexistence

entre ces deux dernières.

D'après la figure (3.4), nous constatons que les effectifs respectifs des proies et des prédateurs varient d'une manière croissante.

Chapitre 4

Analyse mathématique d'un modèle agro-écologique

Dans ce chapitre, on considère l'écosystème constitué par des populations d'araignées notées $x_2(t)$ et des insectes qui y vivent en fonction du territoire qu'elles occupent. Plus précisément, soit $x_1(t)$ la population d'insectes vivant dans les bois et les espaces verts qui bordent les terres cultivées, et soit $x_3(t)$ celle des insectes ayant la vigne comme habitat. On a le modèle suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= rx_1(1 - \frac{x_1}{W}) - cx_2x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2(-a + \frac{kbx_3}{H + x_3} + kcx_1), \\ \dot{x}_3 &= x_3(e - \frac{bx_2}{H + x_3}). \end{cases} \quad (4.1)$$

Avec les conditions initiales :

$$x_1(0) = x_1^0 \geq 0, \quad x_2(0) = x_2^0 \geq 0, \quad x_3(0) = x_3^0 \geq 0. \quad (4.2)$$

Supposons que tout les paramètres du modèle (4.1) sont strictement positifs.

Définitions des paramètres du modèle (4.1) :

r : Taux de croissance de la population des insectes vivant dans les bois.

W : La capacité limite du milieu.

c : Taux de prédation du prédateur (les araignées) sur la proie (les insectes vivant dans les bois).

a : Taux de mortalité de la population des araignées.

k : Taux de conversion de la biomasse de proies en prédateurs

b : Taux de prédation du prédateur (les araignées) sur la proie (les insectes vivant dans le vignoble).

H : La constante de demi-saturation pour le prédateur.

e : Taux de croissance des insectes ayant le vignoble comme habitat.

4.1 Existence et unicité de solution

Théorème 4.1. *Soit F continue et localement Lipschitzienne dans $\mathbb{R}^3$, alors le système (4.1) admet une solution unique $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ dans $\mathbb{R}^3$.*

Preuve

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donné par $F(x_1, x_2, x_3) = (F_1, F_2, F_3)(x_1, x_2, x_3)$, tel que.

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3) &= rx_1(1 - \frac{x_1}{W}) - cx_2x_1, \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &= x_2(-a + \frac{kbx_3}{H + x_3} + kcx_1), \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &= x_3(e - \frac{bx_2}{H + x_3}). \end{cases}$$

F est localement lipschitzienne donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz le système (4.1) avec les conditions initiales admet une solution locale unique $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 4.2. *Le système (4.1) admet une solution unique positive dans $\mathbb{R}_+^3$.*

Preuve

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= F_3(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

On a

$$F_1(0, x_2, x_3) = 0 \geq 0, \forall (x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$F_2(x_1, 0, x_3) = 0 \geq 0, \forall (x_1, x_3) \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$F_3(x_1, x_2, 0) = 0 \geq 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Alors, d'après le théorème de positivité (2.2), on déduit que le système (4.1) admet une solution unique positive dans $\mathbb{R}_+^3$, $\forall t \geq 0$.

Théorème 4.3. *Le système (4.1) admet une solution globale unique positive dans $\mathbb{R}_+^3$.*

Preuve

Soit $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, on fait un raisonnement par l'absurde.

On suppose qu'il $\exists T < +\infty$, telle que $\lim_{t \rightarrow T} \|x(t)\| = +\infty$.

On a $\dot{x}_1 = rx_1(1 - \frac{x_1}{W}) - cx_2x_1$, on déduit que

$$\dot{x}_1 \leq rx_1, \text{ donc } x_1(t) \leq x_1(0)e^{rt} \leq x_1(0)e^{rT} = A.$$

Ainsi, $\limsup_{t \rightarrow T} x_1(t) < +\infty$.

On a, $\dot{x}_2 = x_2(-a + \frac{kbx_3}{H + x_3} + kcx_1)$, on déduit que

$$\dot{x}_2 \leq x_2(-a + kb + kcA) \text{ car } \frac{x_3}{H + x_3} \leq 1.$$

On pose $\alpha = -a + kb + kcA$, on obtient $\dot{x}_2 \leq \alpha x_2$, et donc,

$$x_2(t) \leq x_2(0)e^{\alpha t} \leq x_2(0)e^{\alpha T}.$$

Ainsi, $\limsup_{t \rightarrow T} x_2(t) < +\infty$.

On a, $\dot{x}_3 = x_3(e - \frac{bx_2}{H + x_3})$, on déduit que

$$\dot{x}_3 \leq ex_3 \text{ car } \frac{x_2}{H + x_3} \leq 1, \text{ et donc } x_3(t) \leq x_3(0)e^{et} \leq x_3(0)e^{eT}.$$

Ainsi, $\limsup_{t \rightarrow T} x_3(t) < +\infty$.

Ce qui est absurde et donc la solution du système (4.1) est globale.

4.2 Existence des points d'équilibre

Définition 4.1. *Le point d'équilibre $E_* = (E_*^1, E_*^2, E_*^3)$ est appelé un point d'équilibre non trivial si $E_*^i > 0$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$.*

Les points d'équilibre de (4.1) peuvent être soit le point d'équilibre trivial E_0 ou les points d'équilibre non triviaux suivants.

1. Le point d'équilibre de coexistence noté par $E_4 = (E_4^1, E_4^2, E_4^3)$, avec $E_4^i > 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
2. Le point d'équilibre semi trivial noté par $E_3 = (E_3^1, E_3^2, 0)$, avec $E_3^i > 0$ pour $i \in \{1, 2\}$.
3. Le point d'équilibre semi trivial noté par $E_2 = (0, E_2^2, E_2^3)$, avec $E_2^i > 0$ pour $i \in \{2, 3\}$.
4. Le point d'équilibre semi trivial noté par $E_1 = (E_1^1, 0, 0)$, avec $E_1^1 = W > 0$.

Théorème 4.4. 1. *Le point d'équilibre trivial $E_0 = (0, 0, 0)$ existe toujours.*

2. *Le point d'équilibre semi trivial $E_1 = (W, 0, 0)$ existe toujours.*

3. *Le point d'équilibre semi trivial $E_2 = (0, x_2^*, x_3^*)$ existe si $kb > a$. Avec $x_2^* = \frac{ekH}{kb - a}$ et $x_3^* = \frac{aH}{kb - a}$.*

4. *Le point d'équilibre semi trivial $E_3 = (x_1^*, x_2^*, 0)$ existe si $\frac{a}{Wkc} < 1$. Avec $x_1^* = \frac{a}{kc}$ et $x_2^* = \frac{r}{c}(1 - \frac{a}{Wkc})$.*

Preuve

Le point (x_1^*, x_2^*, x_3^*) est un équilibre du système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= F_3(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

si

$$\begin{cases} F_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= 0, \\ F_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= 0, \\ F_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= 0. \end{cases} \iff \begin{cases} rx_1^*(1 - \frac{x_1^*}{W}) - cx_2^*x_1^* &= 0, \\ x_2^*(-a + \frac{kbx_3^*}{H + x_3^*} + kcx_1^*) &= 0, \\ x_3^*(e - \frac{bx_2^*}{H + x_3^*}) &= 0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1^* = 0 \text{ ou } r(1 - \frac{x_1^*}{W}) - cx_2^* &= 0, \\ x_2^* = 0 \text{ ou } -a + \frac{kbx_3^*}{H + x_3^*} + kcx_1^* &= 0, \\ x_3^* = 0 \text{ ou } e - \frac{bx_2^*}{H + x_3^*} &= 0. \end{cases}$$

On a les points d'équilibres suivants :

$$E_0 = (0, 0, 0).$$

$$E_1 = (W, 0, 0)$$

$$E_2 = (0, x_2^*, x_3^*). \text{ Avec } x_2^* = \frac{ekH}{kb-a} \text{ et } x_3^* = \frac{aH}{kb-a}.$$

$$E_3 = (x_1^*, x_2^*, 0). \text{ Avec } x_1^* = \frac{a}{kc} \text{ et } x_2^* = \frac{r}{c}(1 - \frac{a}{Wkc}).$$

Pour déterminer E_1 , on prend $x_2^* = x_3^* = 0$, alors $r(1 - \frac{x_1^*}{W}) = 0 \implies x_1^* = W$.

Pour déterminer E_2 , on prend $x_1^* = 0$ et donc

$$-a + \frac{kbx_3^*}{H + x_3^*} = 0 \text{ et } x_2^* = \frac{e}{b}(H + x_3^*) \text{ ce qui implique que}$$

$$x_3^* = \frac{aH}{kb-a} > 0 \text{ si } kb > a \text{ et } x_2^* = \frac{ekH}{kb-a} > 0 \text{ si } kb > a.$$

Pour déterminer E_3 , on prend $x_3^* = 0$ et donc :

$$-a + kcx_1^* = 0 \text{ et } r(1 - \frac{x_1^*}{W}) - cx_2^* = 0 \implies x_1^* = \frac{a}{kc} \text{ et } x_2^* = \frac{r}{c}(1 - \frac{a}{Wkc}) > 0 \text{ si } \frac{a}{Wkc} < 1.$$

4.2.1 Existence du point d'équilibre de coexistence E_4

$E_4 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ est un point d'équilibre de coexistence du système (4.1) si

$$\left\{ \begin{array}{l} r\bar{x}_1(1 - \frac{\bar{x}_1}{W}) - c\bar{x}_2\bar{x}_1 = 0, \\ \bar{x}_2(-a + \frac{kb\bar{x}_3}{H + \bar{x}_3} + kc\bar{x}_1) = 0, \\ \bar{x}_3(e - \frac{b\bar{x}_2}{H + \bar{x}_3}) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} r(1 - \frac{\bar{x}_1}{W}) - c\bar{x}_2 = 0, \\ -a + \frac{kb\bar{x}_3}{H + \bar{x}_3} + kc\bar{x}_1 = 0, \\ e - \frac{b\bar{x}_2}{H + \bar{x}_3} = 0. \end{array} \right.$$

Donc, on a

$$r(1 - \frac{\bar{x}_1}{W}) - c\bar{x}_2 = 0. \quad (4.3)$$

$$-a + \frac{kb\bar{x}_3}{H + \bar{x}_3} + kc\bar{x}_1 = 0. \quad (4.4)$$

$$e - \frac{b\bar{x}_2}{H + \bar{x}_3} = 0. \quad (4.5)$$

A partir de (4.5) on obtient

$$\bar{x}_2 = \frac{e}{b}(\bar{x}_3 + H). \quad (4.6)$$

A partir de (4.3) on obtient

$$\bar{x}_1 = (1 - \frac{c}{r}\bar{x}_2)W. \quad (4.7)$$

On remplace (4.6) dans (4.7), on obtient

$$\bar{x}_1 = \frac{W[rb - ce(H + \bar{x}_3)]}{rb}. \quad (4.8)$$

Avec, $\bar{x}_1 > 0$ si $\bar{x}_3 + H < \frac{rb}{ec}$.

On remplace (4.8) dans (4.4) on obtient

$$kec^2W\bar{x}_3^2 + [rb(a - kcW - kb) + 2kc^2WeH]\bar{x}_3 + [rb(a - kcW) + kc^2WeH]H = 0.$$

Le point $E_4 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ est un point d'équilibre de coexistence si et seulement si $\bar{x}_3$ vérifie (4.9) et (4.10).

$$kec^2W\bar{x}_3^2 + [rb(a - kcW - kb) + 2kc^2WeH]\bar{x}_3 + [rb(a - kcW) + kc^2WeH]H = 0. \quad (4.9)$$

et

$$\bar{x}_3 + H < \frac{rb}{ec}. \quad (4.10)$$

Avec, $\bar{x}_1 = \frac{Wec}{rb} \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right)$ et $\bar{x}_2 = \frac{e}{b} (H + \bar{x}_3)$.

Posons

$$\begin{aligned} A_1 &= kec^2W > 0, \\ B_1 &= rb(a - kcW - kb) + 2kc^2WeH, \\ C_1 &= [rb(a - kcW) + kc^2WeH]H. \end{aligned}$$

Le signe de B_1

$$\left\{ \begin{array}{ll} B_1 > 0 & \text{si } a > \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right) \text{ et } r > 0, \\ B_1 = 0 & \text{si } a = \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right) \text{ et } r > \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)}, \\ B_1 < 0 & \text{si } a < \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right) \text{ et } r > \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)}. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Le signe de C_1

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_1 > 0 & \text{si } a > \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \text{ et } r > 0, \\ C_1 = 0 & \text{si } a = \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \text{ et } r > \frac{ceH}{b}, \\ C_1 < 0 & \text{si } a < \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \text{ et } r > \frac{ceH}{b}. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Remarque 4.1. Si $a \geq k(cW + b)$ alors on peut vérifier facilement que l'équation (4.9) n'admet aucune solution positive puisque $A_1 > 0$, $B_1 > 0$ et $C_1 > 0$.

Soit $a < k(cW + b)$. Pour chercher les solutions de (4.9), on calcule Δ .

$$\begin{aligned}\Delta &= [rb(a - kcW - kb) + 2kc^2WeH]^2 - 4kec^2W [rb(a - kcW) + kc^2WeH] H. \\ &= r^2b^2 [(a - kcW - kb)^2 - 4k^2c^2\frac{eW}{r}H]. \\ &= r^2b^2 \left[a - k(cW + b) - 2kc\sqrt{\frac{eW}{r}H} \right] \left[a - k(cW + b) + 2kc\sqrt{\frac{eW}{r}H} \right].\end{aligned}$$

Le signe de Δ

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \quad \text{si} \quad a < \frac{k(cW+b)}{\sqrt{r}} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) \text{ et } r > \frac{4c^2WeH}{(cW+b)^2}, \\ \Delta = 0 \quad \text{si} \quad a = \frac{k(cW+b)}{\sqrt{r}} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) \text{ et } r > \frac{4c^2WeH}{(cW+b)^2}, \\ \Delta < 0 \quad \text{si} \quad a > k(cW + b) - 2kc\sqrt{\frac{eW}{r}H} \text{ et } r > 0. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

On distingue les cas suivants

1. **Cas1 :** $C_1 = 0$. Dans ce cas l'équation (4.9) admet une solution unique positive.

$$\bar{x}_3 = \frac{-B_1}{A_1} = \frac{-rba + rbk(cW + b) - 2kc^2WeH}{kec^2W}. \quad (4.14)$$

D'après (4.12), $C_1 = 0$ si et seulement si $a = \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right)$ et $r > \frac{ceH}{b}$. D'où l'équation (4.14) est équivalente à

$$\bar{x}_3 = \frac{b^2 \left(r - \frac{c^2WeH}{b^2} \right)}{ec^2W}. \quad (4.15)$$

D'après (4.15), la solution $\bar{x}_3 > 0$ si et seulement si $r > \max \left(\frac{ceH}{b}, \frac{c^2WeH}{b^2} \right) = \frac{ceH}{b} \max \left(1, \frac{cW}{b} \right)$.

D'après (4.10), on a

$$\begin{aligned}
\bar{x}_3 + H < \frac{rb}{ec} &\Leftrightarrow \frac{b^2 \left(r - \frac{c^2 W e H}{b^2} \right) + ec^2 W H}{ec^2 W} < \frac{rb}{ec}. \\
&\Leftrightarrow b^2 \left(r - \frac{c^2 W e H}{b^2} \right) + ec^2 W H < cWbr. \\
&\Leftrightarrow b < cW.
\end{aligned}$$

D'où, $\bar{x}_3$ satisfait (4.9) et (4.10) si et seulement si

$$b < cW, \quad r > \frac{c^2 W e H}{b^2} \text{ et } a = \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right). \quad (4.16)$$

En conclusion, on a le résultat suivant

Théorème 4.5. *Si (4.16) est satisfaite, alors le système (4.1) admet un unique point d'équilibre de coexistence $E_4 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ où $\bar{x}_3$ est donnée par (4.15).*

2. **Cas2 :** $C_1 < 0$. Dans ce cas l'équation (4.9) admet une solution positive unique.

$$\bar{x}_3 = \frac{-B_1 + \sqrt{\Delta}}{2A_1} = \frac{-rba + rbk(cW + b) - 2kc^2 W e H + \sqrt{\Delta}}{2kec^2 W}. \quad (4.17)$$

D'après (4.12), $C_1 < 0$ si et seulement si $a < \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right)$ et $r > \frac{ceH}{b}$.

D'après (4.10), on a

$$\begin{aligned}
\bar{x}_3 + H < \frac{rb}{ec} &\Leftrightarrow \frac{-rba + rbk(cW + b) + \sqrt{\Delta}}{2kec^2 W} < \frac{rb}{ec}. \\
&\Leftrightarrow -rba + rbk(cW + b) + \sqrt{\Delta} < 2kcWrb. \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} < rb(a - kb + kcW) \text{ et } a > k(b - cW). \\
&\Leftrightarrow \Delta < r^2 b^2 (a - kb + kcW)^2 \text{ et } a > k(b - cW). \\
&\Leftrightarrow -4r^2 b^2 kcW(a - kb) - 4ec^2 Wrb^2 k^2 H < 0 \text{ et } a > k(b - cW). \\
&\Leftrightarrow r(a - kb) + kceH > 0 \text{ et } a > k(b - cW). \\
&\Leftrightarrow a > \frac{kb}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \text{ et } a > k(b - cW).
\end{aligned}$$

D'où, $\bar{x}_3$ satisfait (4.9) et (4.10) si et seulement si

$$r > \frac{ceH}{b} \text{ et } \max \left(k(b - cW), \frac{kb}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \right) < a < \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right). \quad (4.18)$$

L'équation (4.18) est valable si et seulement si

$$\frac{kb}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) < \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right),$$

et

$$k(b - cW) < \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right).$$

En effet

$$\frac{kb}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) < \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \Leftrightarrow b < cW,$$

et

$$k(b - cW) < \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \Leftrightarrow rb(b - 2cW) < -cWceH.$$

$$\Leftrightarrow r > \frac{c^2WeH}{b(2cW - b)}, \text{ (car } b < cW \text{)}.$$

Alors, l'équation (4.18) est équivalente à

$$\begin{cases} b < cW, \ r > \frac{ceH}{b} \max \left(1, \frac{cW}{2cW - b} \right) = \frac{ceH}{b} \text{ et} \\ \max \left(k(b - cW), \frac{kb}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \right) < a < \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right). \end{cases} \quad (4.19)$$

En conclusion, on a le résultat suivant

Théorème 4.6. *Si (4.19) est satisfaite, alors le système (4.1) admet un unique point d'équilibre de coexistence $E_4 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ où $\bar{x}_3$ est donnée par (4.17).*

3. **Cas3 :** $C_1 > 0$, $B_1 < 0$ et $\Delta > 0$. Dans ce cas l'équation (4.9) admet deux solutions positives

$$\bar{x}_3^+ = \frac{-B_1 + \sqrt{\Delta}}{2A_1} = \frac{-rba + rbk(cW + b) - 2kc^2WeH + \sqrt{\Delta}}{2kec^2W} > 0, \quad (4.20)$$

et

$$\bar{x}_3^- = \frac{-B_1 - \sqrt{\Delta}}{2A_1} = \frac{-rba + rbk(cW + b) - 2kc^2WeH - \sqrt{\Delta}}{2kec^2W} > 0. \quad (4.21)$$

D'après (4.12), $C_1 > 0$ si et seulement si $a > \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right)$.

D'après (4.11), $B_1 < 0$ si et seulement si $a < \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right)$

et $r > \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)}$.

D'après (4.13), $\Delta > 0$ si et seulement si $a < \frac{k(cW+b)}{\sqrt{r}} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right)$

et $r > \frac{4c^2WeH}{(cW+b)^2}$.

D'après (4.10) on a

$$\bar{x}_3^+ + H < \frac{rb}{ec} \Leftrightarrow a > \frac{kb}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \text{ et } a > k(b - cW) \text{ (voir Cas 2),}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{x}_3^- + H < \frac{rb}{ec} &\Leftrightarrow \frac{-rba + rbk(cW + b) - \sqrt{\Delta}}{2kec^2W} < \frac{rb}{ec}. \\ &\Leftrightarrow -rba + rbk(cW + b) - \sqrt{\Delta} < 2kcWrb. \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{\Delta} < rb(a - kb + kcW). \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq k(b - cW), \\ \text{ou bien} \\ -\sqrt{\Delta} < rb(a - kb + kcW), a < k(b - cW) \text{ et } b > cW. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq k(b - cW), \\ \text{ou bien} \\ \Delta > r^2b^2(a - kb + kcW)^2, a < k(b - cW) \text{ et } b > cW. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq k(b - cW), \\ \text{ou bien} \\ -4r^2b^2kcW(a - kb) - 4ec^2Wrb^2k^2H > 0, a < k(b - cW) \text{ et } b > cW. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq k(b - cW), \\ \text{ou bien} \\ a < \frac{kb}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right), r > \frac{ceH}{b}, a < k(b - cW) \text{ et } b > cW. \end{cases} \end{aligned}$$

D'où, $\bar{x}_3^+$ satisfait (4.9) et (4.10) si et seulement si

$$\begin{cases} r > \max \left(\frac{2c^2WeH}{b(cW+b)}, \frac{4c^2WeH}{(cW+b)^2} \right) \text{ et} \\ a > \frac{k}{r} \max \left[cW \left(r - \frac{ceH}{b} \right), r(b - cW), b \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \right] \\ a < \frac{k(cW+b)}{r} \min \left[\left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right), \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) \right]. \end{cases} \quad (4.22)$$

et $\bar{x}_3^-$ satisfait (4.9) et (4.10) si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} r > \max \left(\frac{2c^2WeH}{b(cW+b)}, \frac{4c^2WeH}{(cW+b)^2} \right) \text{ et} \\ \frac{k}{r} \max \left[cW \left(r - \frac{ceH}{b} \right), r(b - cW) \right] < a < \frac{k(cW+b)}{r} \min \left[\left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right), \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) \right] \end{array} \right. \quad (4.23)$$

ou bien

$$\left\{ \begin{array}{l} r > \max \left(\frac{2c^2WeH}{b(cW+b)}, \frac{4c^2WeH}{(cW+b)^2}, \frac{ceH}{b} \right), \quad b > cW \text{ et} \\ a > \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \\ a < \frac{k(cW+b)}{r} \min \left[\left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right), \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right), \frac{r(b-cW)}{(cW+b)}, \frac{b}{(cW+b)} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \right]. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

L'équation (4.22) est valable si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right), \\ k(b - cW) &< \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right), \\ \frac{kb}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right), \\ \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right), \\ k(b - cW) &< \frac{k(cW+b)}{r} \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) \end{aligned}$$

et

$$\frac{kb}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) < \frac{k(cW+b)}{r} \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right).$$

En effet

$$\begin{aligned} \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right) \Leftrightarrow r > \frac{c^2WeH}{b^2} \\ k(b - cW) &< \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right) \Leftrightarrow r > \frac{ceH}{b}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{kb}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right) \Leftrightarrow r > \frac{eH}{W} \left(\frac{2cW}{b} - 1 \right), \\
\frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) \Leftrightarrow (b\sqrt{r} - c\sqrt{WeH})^2 > 0, \\
k(b-cW) &< \frac{k(cW+b)}{r} \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) \Leftrightarrow r > \frac{eH}{W}
\end{aligned}$$

et

$$\frac{kb}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) < \frac{k(cW+b)}{r} \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) \Leftrightarrow (\sqrt{Wr} - \sqrt{eH})^2 > 0.$$

Alors, l'équation (4.22) est équivalent à

$$\begin{cases}
r > \max \left(\frac{2c^2WeH}{b(cW+b)}, \frac{4c^2WeH}{(cW+b)^2}, \frac{c^2WeH}{b^2}, \frac{ceH}{b}, \frac{eH}{W} \left(\frac{2cW}{b} - 1 \right), \frac{eH}{W} \right) = \max \left(\frac{c^2WeH}{b^2}, \frac{eH}{W} \right) \text{ et} \\
a > \frac{k}{r} \max \left[cW \left(r - \frac{ceH}{b} \right), r(b-cW), b \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \right] \\
a < \frac{k(cW+b)}{r} \min \left[\left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right), \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) \right].
\end{cases} \quad (4.25)$$

En conclusion, on a le résultat suivant

Théorème 4.7. *Si (4.25) est satisfaite, alors le système (4.1) admet un point d'équilibre de coexistence $E_4^+ = (\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^+, \bar{x}_3^+)$ où $\bar{x}_3^+$ est donnée par (4.20).*

L'équation (4.23) est valable si et seulement si

$$\begin{aligned}
\frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right), \\
k(b-cW) &< \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right), \\
\frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right)
\end{aligned}$$

et

$$k(b-cW) < \frac{k(cW+b)}{r} \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right).$$

En effet

$$\begin{aligned} \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right) \Leftrightarrow r > \frac{c^2WeH}{b^2}, \\ k(b-cW) &< \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right) \Leftrightarrow r > \frac{ceH}{b}, \\ \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) \Leftrightarrow (b\sqrt{r} - c\sqrt{WeH})^2 > 0 \end{aligned}$$

et

$$k(b-cW) < \frac{k(cW+b)}{r} \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) \Leftrightarrow r > \frac{eH}{W}.$$

Alors, l'équation (4.23) est équivalent à

$$\begin{cases} r > \max \left(\frac{2c^2WeH}{b(cW+b)}, \frac{4c^2WeH}{(cW+b)^2}, \frac{c^2WeH}{b^2}, \frac{ceH}{b}, \frac{eH}{W} \right) = \max \left(\frac{c^2WeH}{b^2}, \frac{eH}{W} \right) \text{ et} \\ a > \frac{k}{r} \max \left[cW \left(r - \frac{ceH}{b} \right), r(b-cW) \right] \\ a < \frac{k(cW+b)}{r} \min \left[\left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right), \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) \right]. \end{cases} \quad (4.26)$$

En conclusion, on a le résultat suivant

Théorème 4.8. *Si (4.26) est satisfaite, alors le système (4.1) admet un point d'équilibre de coexistence $E_4^- = (\bar{x}_1^-, \bar{x}_2^-, \bar{x}_3^-)$ où $\bar{x}_3^-$ est donnée par (4.21).*

Remarque 4.2. *Si (4.25) est satisfaite alors on a (4.26) mais l'inverse est faux en général (il suffit de voir que $\bar{x}_3^- + H < x_3^+ + H < \frac{rb}{ec}$).*

Soit $\overline{(4.25)}$ la négation de (4.25). D'après le théorème 4.7 et 4.8 on a le résultat suivant :

Lemme 4.1.

(a) *Si (4.25) est satisfaite, alors le système (4.1) admet deux points d'équilibre de coexistence $E_4^+ = (\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^+, \bar{x}_3^+)$ et $E_4^- = (\bar{x}_1^-, \bar{x}_2^-, \bar{x}_3^-)$ où $\bar{x}_3^+$ et $\bar{x}_3^-$ sont données par (4.20) et (4.21) respectivement.*

(b) Si (4.26) et $\overline{(4.25)}$ sont satisfaites, alors le système (4.1) admet un unique point d'équilibre de coexistence $E_4^- = (\bar{x}_1^-, \bar{x}_2^-, \bar{x}_3^-)$ où $\bar{x}_3^-$ est donnée par (4.21).

L'équation (4.24) est valable si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right), \\ \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right), \\ \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< k(b-cW) \end{aligned}$$

et

$$\frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) < \frac{kb}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right).$$

En effet

$$\begin{aligned} \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right) \Leftrightarrow r > \frac{c^2WeH}{b^2}, \\ \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< \frac{k(cW+b)}{r} \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) \Leftrightarrow (b\sqrt{r} - c\sqrt{WeH})^2 > 0, \\ \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) &< k(b-cW) \Leftrightarrow b(2cW-b)r < c^2WeH \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2cW - b \leq 0, \\ \text{ou bien} \\ 2cW - b > 0 \text{ et } r < \frac{c^2WeH}{b(2cW-b)} \end{cases}$$

et

$$\frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) < \frac{kb}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \Leftrightarrow cW < b.$$

Alors, l'équation (4.24) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} r > \frac{ceH}{b} = \max \left(\frac{2c^2WeH}{b(cW+b)}, \frac{4c^2WeH}{(cW+b)^2}, \frac{ceH}{b}, \frac{c^2WeH}{b^2} \right), \quad 2cW \leq b \text{ et} \\ a > \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \\ a < \frac{k(cW+b)}{r} \min \left[\left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right), \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right), \frac{r(b-cW)}{(cW+b)}, \frac{b}{(cW+b)} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \right]. \end{array} \right. \quad (4.27)$$

ou bien

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \left(\frac{2c^2WeH}{b(cW+b)}, \frac{4c^2WeH}{(cW+b)^2}, \frac{ceH}{b}, \frac{c^2WeH}{b^2} \right) = \frac{ceH}{b} < r < \frac{c^2WeH}{b(2cW-b)}, \quad 2cW > b > cW \text{ et} \\ a > \frac{kcW}{r} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \\ a < \frac{k(cW+b)}{r} \min \left[\left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right), \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right), \frac{r(b-cW)}{(cW+b)}, \frac{b}{(cW+b)} \left(r - \frac{ceH}{b} \right) \right]. \end{array} \right. \quad (4.28)$$

En conclusion, on a le résultat suivant

Théorème 4.9. *Si (4.27) (resp. (4.28)) est satisfaite, alors le système (4.1) admet un point d'équilibre de coexistence $E_4^- = (\bar{x}_1^-, \bar{x}_2^-, \bar{x}_3^-)$ où $\bar{x}_3^-$ est donnée par (4.21).*

4. **Cas4 :** $B_1 < 0$ et $\Delta = 0$. Dans ce cas l'équation (4.9) admet une solution positive double

$$\bar{x}_3^+ = \bar{x}_3^- = \frac{-B_1}{2A_1} = \frac{-rba + rbk(cW+b) - 2kc^2WeH}{2kec^2W} > 0. \quad (4.29)$$

D'après (4.11) $B_1 < 0$ si et seulement si $a < \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right)$ et $r > \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)}$.

D'après (4.13) $\Delta = 0$ si et seulement si $a = \frac{k(cW+b)}{\sqrt{r}} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right)$ et $r > \frac{4c^2WeH}{(cW+b)^2}$.

$$a = \frac{k(cW+b)}{\sqrt{r}} \left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)} \right) < \frac{k(cW+b)}{r} \left(r - \frac{2c^2WeH}{b(cW+b)} \right) \iff r > \frac{c^2WeH}{b^2}$$

En remplaçant a par sa valeur, l'équation (4.29) devient

$$\bar{x}_3^+ = \frac{b\sqrt{WeH} \left(\sqrt{r} - \frac{c\sqrt{WeH}}{b} \right)}{ecW} \text{ et } r > \frac{c^2WeH}{b^2} \quad (4.30)$$

D'après (4.10) on a

$$\begin{aligned}
\bar{x}_3^+ + H < \frac{rb}{ec} &\Leftrightarrow \frac{b\sqrt{WeH}\left(\sqrt{r - \frac{c\sqrt{WeH}}{b}}\right) + ecWH}{ecW} < \frac{rb}{ec} \\
&\Leftrightarrow b\sqrt{WeH}\sqrt{r} < rbW \\
&\Leftrightarrow r > \frac{eH}{W}.
\end{aligned}$$

D'où, $\bar{x}_3^+$ satisfait (4.9) et (4.10) si et seulement si

$$\begin{cases} r > \max\left(\frac{2c^2WeH}{b(cW+b)}, \frac{4c^2WeH}{(cW+b)^2}, \frac{c^2WeH}{b^2}, \frac{eH}{W}\right) = \max\left(\frac{c^2WeH}{b^2}, \frac{eH}{W}\right) \text{ et} \\ a = \frac{k(cW+b)}{\sqrt{r}}\left(\sqrt{r} - \frac{2c\sqrt{WeH}}{(cW+b)}\right). \end{cases} \quad (4.31)$$

En conclusion, on a le résultat suivant

Théorème 4.10. *Si (4.31) est satisfaite, alors le système (4.1) admet un point d'équilibre de coexistence $E_4^+ = (\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^+, \bar{x}_3^+)$ où $\bar{x}_3^+$ est donnée par (4.30).*

4.3 Stabilité des points d'équilibre

La matrice jacobienne de système (4.1) est :

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2x_1}{W}) - cx_2 & -cx_1 & 0 \\ kcx_2 & -a + \frac{kbx_3}{H+x_3} + kcx_1 & \frac{Hkbx_2}{(H+x_3)^2} \\ 0 & -\frac{bx_3}{H+x_3} & e - \frac{Hbx_2}{(H+x_3)^2} \end{pmatrix}$$

Théorème 4.11. *Le point d'équilibre trivial E_0 est instable.*

Preuve

La matrice jacobienne en E_0 est :

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = r > 0$, $\lambda_2 = -a < 0$ et $\lambda_3 = e > 0$, alors E_0 est instable.

Théorème 4.12. *Le point d'équilibre semi trivial E_1 est instable .*

Preuve

La matrice jacobienne en E_1 est :

$$J(W, 0, 0) = \begin{pmatrix} -r & -cW & 0 \\ 0 & -a + kcW & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = -r < 0$, $\lambda_2 = -a + kcW$ et $\lambda_3 = e > 0$, alors E_1 est instable.

Théorème 4.13. *Si $kb > a$, alors le point d'équilibre semi trivial E_2 est instable.*

Preuve

La matrice jacobienne en E_2 est :

$$J(0, x_2^*, x_3^*) = \begin{pmatrix} r - cx_2^* & 0 & 0 \\ kcx_2^* & 0 & \frac{Hkbx_2^*}{(H + x_3^*)^2} \\ 0 & \frac{-bx_3^*}{H + x_3^*} & e - \frac{Hbx_2^*}{(H + x_3^*)^2} \end{pmatrix}$$

A partir de (4.5), on a $bx_2^* = e(H + x_3^*)$.

Alors,

$$J(0, x_2^*, x_3^*) = \begin{pmatrix} r - cx_2^* & 0 & 0 \\ kcx_2^* & 0 & \frac{keH}{H + x_3^*} \\ 0 & \frac{-bx_3^*}{H + x_3^*} & e - \frac{eH}{H + x_3^*} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice J est donné par :

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} r - cx_2^* - \lambda & 0 & 0 \\ kcx_2^* & -\lambda & \frac{keH}{H + x_3^*} \\ 0 & \frac{-bx_3^*}{H + x_3^*} & e - \frac{eH}{H + x_3^*} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$p(\lambda) = (r - cx_2^* - \lambda)p_1(\lambda) = 0.$$

On a,

$$p_1(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{keH}{H+x_3^*} \\ -bx_3^* & e - \frac{eH}{H+x_3^*} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left(e - \frac{eH}{H+x_3^*} - \lambda \right) + \frac{bkeHx_3^*}{(H+x_3^*)^2} = 0.$$

Cette équation est équivalente à :

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Avec,

$$a_1 = \frac{eH}{H+x_3^*} - e = \frac{-ex_3^*}{H+x_3^*} < 0 \text{ et } a_2 = \frac{bkeHx_3^*}{(H+x_3^*)^2} > 0.$$

D'après le critère de Routh-Hurwitz p_1 admet une valeur propre à partie réelle positive. Donc, le point d'équilibre semi trivial E_2 est instable.

Théorème 4.14. *Soit $a < Wkc$.*

1. *Si, $r > \frac{eHc^2kW}{b(Wkc-a)}$, alors le point d'équilibre semi trivial E_3 est localement asymptotiquement stable.*
2. *Si, $r < \frac{eHc^2kW}{b(Wkc-a)}$, alors le point d'équilibre semi trivial E_3 est instable.*

Preuve

La matrice jacobienne en E_3 est :

$$J(x_1^*, x_2^*, 0) = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2x_1^*}{W}) - cx_2^* & -cx_1^* & 0 \\ kcx_2^* & -a + kcx_1^* & \frac{kbx_2^*}{H} \\ 0 & 0 & e - \frac{bx_2^*}{H} \end{pmatrix}$$

On a, $x_1^* = \frac{a}{kc}$.

Alors

$$J(x_1^*, x_2^*, 0) = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2a}{Wkc}) - cx_2^* & -\frac{a}{k} & 0 \\ kcx_2^* & 0 & \frac{kbx_2^*}{H} \\ 0 & 0 & e - \frac{bx_2^*}{H} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice J est donné par :

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} r(1 - \frac{2a}{Wkc}) - cx_2^* - \lambda & -\frac{a}{k} & 0 \\ kcx_2^* & -\lambda & \frac{kbx_2^*}{H} \\ 0 & 0 & e - \frac{bx_2^*}{H} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$p(\lambda) = (e - \frac{bx_2^*}{H} - \lambda)p_2(\lambda) = 0.$$

Avec

$$p_2(\lambda) = \begin{vmatrix} r(1 - \frac{2a}{Wkc}) - cx_2^* - \lambda & -\frac{a}{k} \\ kcx_2^* & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left[r \left(1 - \frac{2a}{Wkc} \right) - cx_2^* - \lambda \right] + acx_2^* = 0.$$

Cette équation est équivalente à :

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0.$$

Où,

$$b_1 = cx_2^* - r \left(1 - \frac{2a}{Wkc} \right) = \frac{ra}{Wkc} > 0.$$

$$b_2 = acx_2^* > 0.$$

Donc, d'après le critère de Routh-Hurwitz, toutes les valeurs propres de p_2 sont à partie réelle négative.

Pour que les valeurs propres de J soient à partie réelle négative il faut que :

$$\lambda = e - \frac{bx_2^*}{H} < 0, \text{ on sait que } x_2^* = \frac{r}{c} \left(1 - \frac{a}{Wkc} \right).$$

Alors,

$$\lambda = e - \frac{bx_2^*}{H} = e - \frac{br(Wkc - a)}{Hc^2kW} < 0 \text{ si } eHc^2kW < br(Wkc - a).$$

Donc, si $eHc^2kW < br(Wkc - a)$, alors le point d'équilibre E_3 est localement asymptotiquement stable.

D'autre part, si $eHc^2kW > br(Wkc - a)$, alors le point d'équilibre E_3 est instable.

4.3.1 Stabilité du point d'équilibre de coexistence E_4

la matrice jacobienne au point $E_4 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{2\bar{x}_1}{W}) - c\bar{x}_2 & -c\bar{x}_1 & 0 \\ kc\bar{x}_2 & -a + \frac{k\bar{x}_3}{H+\bar{x}_3} + kc\bar{x}_1 & \frac{k\bar{x}_2H}{(H+\bar{x}_3)^2} \\ 0 & -\frac{b\bar{x}_3}{(H+\bar{x}_3)} & e - \frac{b\bar{x}_2H}{(H+\bar{x}_3)^2} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -r\frac{\bar{x}_1}{W} & -c\bar{x}_1 & 0 \\ kc\bar{x}_2 & 0 & \frac{ekH}{(H+\bar{x}_3)} \\ 0 & -\frac{b\bar{x}_3}{(H+\bar{x}_3)} & e - \frac{eH}{(H+\bar{x}_3)} \end{pmatrix}$$

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\frac{ec}{b} \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right) - \lambda & -\frac{ec^2W}{rb} \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right) & 0 \\ \frac{ekc}{b} (H + \bar{x}_3) & -\lambda & \frac{ekH}{(H+\bar{x}_3)} \\ 0 & -\frac{b\bar{x}_3}{(H+\bar{x}_3)} & e - \frac{eH}{(H+\bar{x}_3)} - \lambda \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique associé à J est donné par

$$\left[e - \frac{eH}{(H + \bar{x}_3)} - \lambda \right] \left[\left(\frac{ec}{b} \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right) + \lambda \right) \lambda + \frac{ekc}{b} (H + \bar{x}_3) \frac{ec^2W}{rb} \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right) \right]$$

$$- \frac{ekH}{(H + \bar{x}_3)} \left(\frac{ec}{b} \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right) + \lambda \right) \frac{b\bar{x}_3}{(H + \bar{x}_3)} = 0.$$

On obtient

$$-\lambda^3 - \left[\frac{ec}{b} \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right) - \frac{e\bar{x}_3}{(H + \bar{x}_3)} \right] \lambda^2$$

$$- \left[\frac{ke^2c^3W}{rb^2} (H + \bar{x}_3) \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right) - \frac{ec}{b} \frac{e\bar{x}_3}{(H + \bar{x}_3)} \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right) + \frac{ekHb\bar{x}_3}{(H + \bar{x}_3)^2} \right] \lambda$$

$$- ke^2c\bar{x}_3 \left[\frac{H}{(H + \bar{x}_3)^2} - \frac{ec^2W}{rb^2} \right] \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right) = 0.$$

Donc

$$\lambda^3 + M_2\lambda^2 + M_1\lambda + M_0 = 0.$$

avec

$$M_2 = \frac{ec}{b} \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right) - \frac{e\bar{x}_3}{(H + \bar{x}_3)}.$$

$$M_1 = \frac{e\bar{x}_3}{(H + \bar{x}_3)} \left(\frac{kec^3W}{rb^2\bar{x}_3} (H + \bar{x}_3)^2 - \frac{ec}{b} \right) \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right) + \frac{ekHb\bar{x}_3}{(H + \bar{x}_3)^2}.$$

$$M_0 = ke^2c\bar{x}_3 \left(\frac{H}{(H + \bar{x}_3)^2} - \frac{ec^2W}{rb^2} \right) \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right).$$

1. **Cas1** : $C_1 = 0$. D'après (4.15), on a

$$\bar{x}_3 + H = \frac{b^2 \left(r - \frac{e^2W eH}{b^2} \right)}{ec^2W} + H = \frac{b^2 r}{ec^2W}. \quad (4.32)$$

D'après (4.32), on obtient

$$\begin{aligned}
M_0 &= ke^2 c \bar{x}_3 \left(\frac{H}{(H+\bar{x}_3)^2} - \frac{ec^2 W}{rb^2} \right) \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right). \\
&= ke^2 c \bar{x}_3 \left(\frac{H}{(H+\bar{x}_3)^2} - \frac{1}{(H+\bar{x}_3)} \right) \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right). \\
&= \frac{ke^2 c \bar{x}_3}{(H+\bar{x}_3)} \left(\frac{H}{(H+\bar{x}_3)} - 1 \right) \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right) < 0.
\end{aligned}$$

Car $\frac{H}{(H+\bar{x}_3)} < 1$ et $(H + \bar{x}_3) < \frac{rb}{ec}$. On a le résultat suivant

Théorème 4.15. *Si (4.16) est satisfaite, alors l'unique point d'équilibre de coexistence $E_4 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ est instable.*

2. **Cas2 :** $C_1 < 0$. D'après (4.17), on a

$$\bar{x}_3 + H = \frac{-rba + rbk(cW + b) + \sqrt{\Delta}}{2kec^2 W}. \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
M_0 &= ke^2 c \bar{x}_3 \left(\frac{H}{(H+\bar{x}_3)^2} - \frac{ec^2 W}{rb^2} \right) \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right). \\
&= ke^2 c \bar{x}_3 \left(\frac{\sqrt{H}}{(H+\bar{x}_3)} - \frac{c}{b} \sqrt{\frac{We}{r}} \right) \left(\frac{\sqrt{H}}{(H+\bar{x}_3)} + \frac{c}{b} \sqrt{\frac{We}{r}} \right) \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right). \\
&= \frac{ke^2 c^2 \bar{x}_3}{b(H+\bar{x}_3)} \sqrt{\frac{We}{r}} \left(\frac{b}{c} \sqrt{\frac{rH}{We}} - (H + \bar{x}_3) \right) \left(\frac{\sqrt{H}}{(H+\bar{x}_3)} + \frac{c}{b} \sqrt{\frac{We}{r}} \right) \left(\frac{rb}{ec} - (H + \bar{x}_3) \right).
\end{aligned}$$

Pour déterminer le signe de M_0 il suffit de connaître le signe de $\frac{b}{c} \sqrt{\frac{rH}{We}} - (H + \bar{x}_3)$.

En effet

$$\begin{aligned}
\frac{b}{c} \sqrt{\frac{rH}{We}} - (H + \bar{x}_3) &= \frac{b}{c} \sqrt{\frac{rH}{We}} - (H + \bar{x}_3). \\
&= \frac{b}{c} \sqrt{\frac{rH}{We}} - \frac{-rba + rbk(cW + b) + \sqrt{\Delta}}{2kec^2 W}. \\
&= \frac{2kbecW \sqrt{\frac{rH}{We}} + rba - rbk(cW + b) - \sqrt{\Delta}}{2kec^2 W}.
\end{aligned}$$

Puisque $C_1 < 0$, alors $rb(a - kcW) < -kc^2WeH$, d'où on a

$$\begin{aligned} \frac{b}{c}\sqrt{\frac{rH}{We}} - (H + \bar{x}_3) &= \frac{2kbecW\sqrt{\frac{rH}{We}} + rba - rbk(cW+b) - \sqrt{\Delta}}{2kec^2W} \\ &< \frac{2kbc\sqrt{rWeH} - rb^2k - kc^2WeH - \sqrt{\Delta}}{2kec^2W} \\ &= \frac{-k(b\sqrt{r} - c\sqrt{WeH})^2 - \sqrt{\Delta}}{2kec^2W} < 0. \end{aligned}$$

Donc $M_0 < 0$. On a le résultat suivant

Théorème 4.16. *Si (4.19) est satisfaite, alors l'unique point d'équilibre de coexistence $E_4 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ est instable.*

3. **Cas3 :** $C_1 > 0$, $B_1 < 0$ et $\Delta > 0$. D'après (4.20), on a

$$\bar{x}_3^+ + H = \frac{-rba + rbk(cW + b) + \sqrt{\Delta}}{2kec^2W} \quad (4.34)$$

et

$$\bar{x}_3^- + H = \frac{-rba + rbk(cW + b) - \sqrt{\Delta}}{2kec^2W}. \quad (4.35)$$

Puisque $\Delta > 0$, alors $\sqrt{r}(a - k(cW + b)) < -2kc\sqrt{WeH}$, d'où on a

$$\begin{aligned} \frac{b}{c}\sqrt{\frac{rH}{We}} - (H + \bar{x}_3^+) &= \frac{2kbecW\sqrt{\frac{rH}{We}} + rba - rbk(cW+b) - \sqrt{\Delta}}{2kec^2W} \\ &< \frac{2kbc\sqrt{rWeH} - 2bkc\sqrt{rWeH} - \sqrt{\Delta}}{2kec^2W} \\ &= \frac{-\sqrt{\Delta}}{2kec^2W} < 0. \end{aligned}$$

Donc, $M_0 < 0$. On a le résultat suivant

Théorème 4.17. *Si (4.25) est satisfaite, alors le point d'équilibre de coexistence $E_4^+ = (\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^+, \bar{x}_3^+)$ est instable.*

De même,

$$\begin{aligned} \frac{b}{c}\sqrt{\frac{rH}{We}} - (H + \bar{x}_3^-) &= \frac{2kbecW\sqrt{\frac{rH}{We}} + rba - rbk(cW+b) + \sqrt{\Delta}}{2kec^2W} \\ &= \frac{2kbc\sqrt{rWeH} + rba - rbk(cW+b) + \sqrt{\Delta}}{2kec^2W}. \end{aligned}$$

Puisque $\Delta > 0$, alors $r(a - k(cW + b)) + 2kc\sqrt{rWeH} < 0$. Supposons que

$$\frac{b}{c}\sqrt{\frac{rH}{We}} - (H + \bar{x}_3^-) < 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{b}{c}\sqrt{\frac{rH}{We}} - (H + \bar{x}_3^-) < 0 &\Leftrightarrow b \left[r(a - k(cW + b)) + 2kc\sqrt{rWeH} \right] + \sqrt{\Delta} < 0. \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} < -b \left[r(a - k(cW + b)) + 2kc\sqrt{rWeH} \right]. \\ &\Leftrightarrow \Delta < b^2 \left[r(a - k(cW + b)) + 2kc\sqrt{rWeH} \right]^2. \\ &\Leftrightarrow b^2 \left[r(a - k(cW + b)) - 2kc\sqrt{rWeH} \right] \left[r(a - k(cW + b)) \right. \\ &\quad \left. + 2kc\sqrt{rWeH} \right] < b^2 \left[r(a - k(cW + b)) + 2kc\sqrt{rWeH} \right]^2. \\ &\Leftrightarrow \left[r(a - k(cW + b)) - 2kc\sqrt{rWeH} \right] > \left[r(a - k(cW + b)) \right. \\ &\quad \left. + 2kc\sqrt{rWeH} \right] \\ &\Leftrightarrow -4kc\sqrt{rWeH} > 0. \end{aligned}$$

Impossible, d'où $\frac{b}{c}\sqrt{\frac{rH}{We}} - (H + \bar{x}_3^-) > 0$. Par conséquence, $M_0 > 0$.

Remarque 4.3. *Pour étudier la stabilité de E_4^- , il faut vérifier les autres conditions de Routh-Hurwitz, c'est à dire $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ et $M_1M_2 > M_0$.*

Vu la complexité des calculs, on va se contenter de quelques simulations numériques pour traiter ce cas.

4. **Cas4 :** $B_1 < 0$ et $\Delta = 0$. D'après (4.30) on a

$$\bar{x}_3^+ + H = \bar{x}_3^- + H = \frac{b\sqrt{WeHr}}{ecW}. \quad (4.36)$$

d'où on a

$$\frac{b}{c}\sqrt{\frac{rH}{We}} - (H + \bar{x}_3^+) = 0$$

Donc, $M_0 = 0$. On a le résultat suivant

Remarque 4.4. *Si (4.31) est satisfaite, alors on ne peut rien conclure sur la stabilité de l'unique point d'équilibre de coexistence $E_4^+ = (\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^+, \bar{x}_3^+)$.*

4.4 Simulations numériques

4.4.1 Points d'équilibre E_0, E_1, E_2

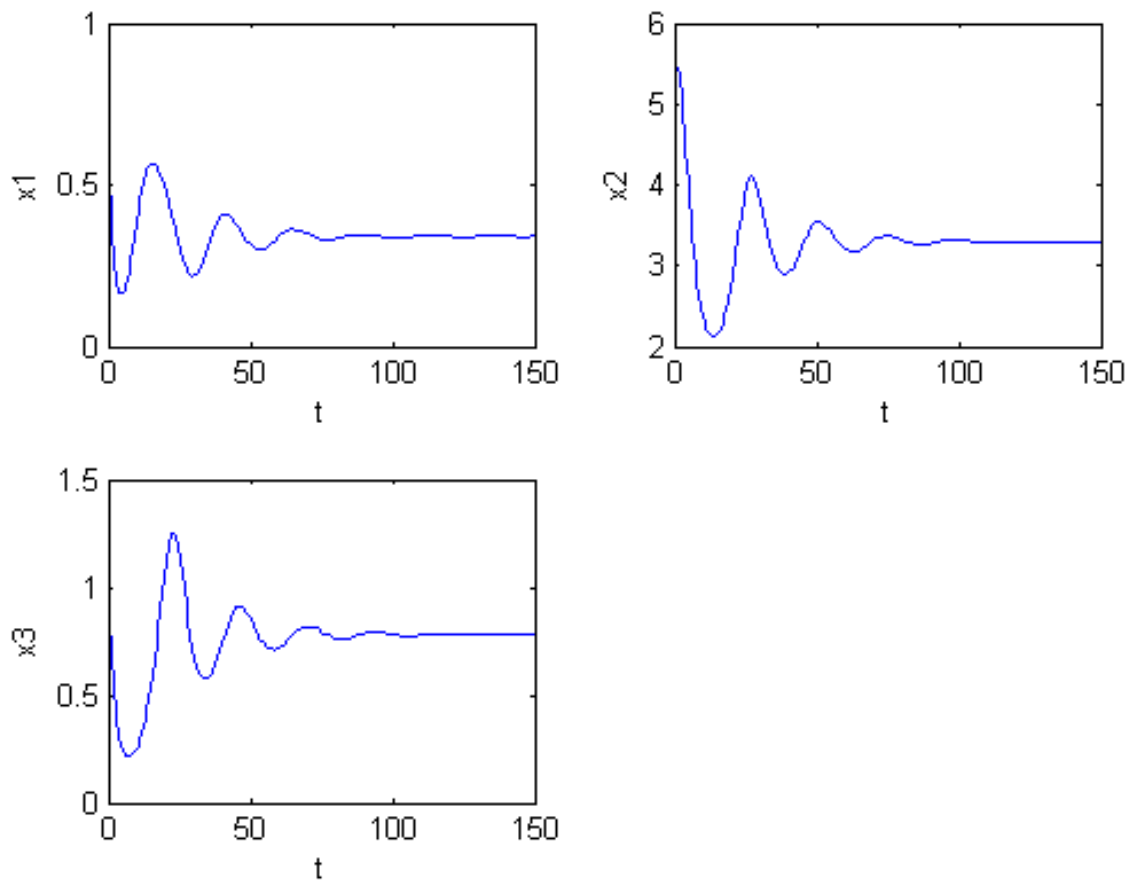


FIGURE 4.1 – Les points d'équilibre E_0, E_1, E_2 sont instables (Th 4.11, Th 4.12 et Th 4.13), pour les paramètres : $a = 0.2, b = 1.18, c = 0.2, e = 0.5, r = 1.2, W = 1, k = 1, H = 7$.

4.4.2 Point d'équilibre E_3

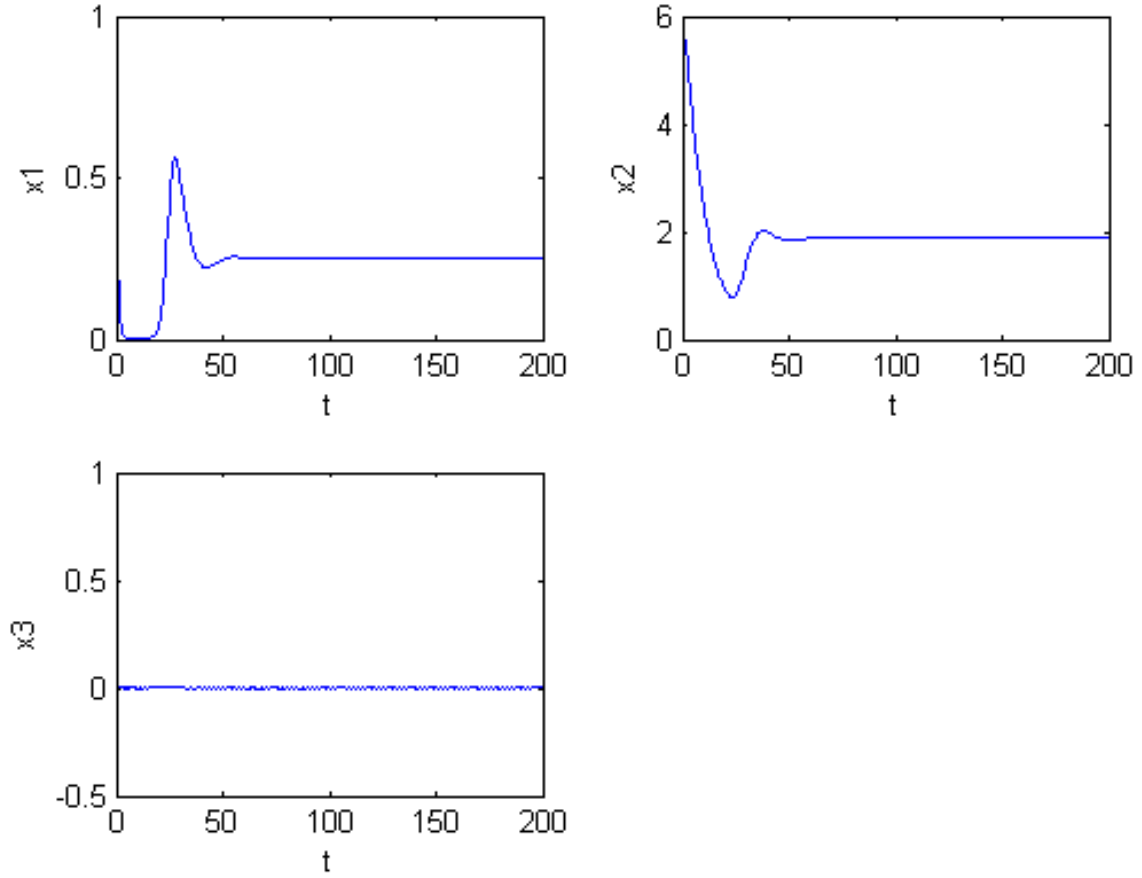


FIGURE 4.2 – Le point d'équilibre E_3 est localement asymptotiquement stable (Th4.14), pour les paramètres : $a = 0.1$, $b = 1.18$, $c = 0.4$, $e = 0.5$, $r = 1$, $W = 1$, $k = 1$, $H = 1$.

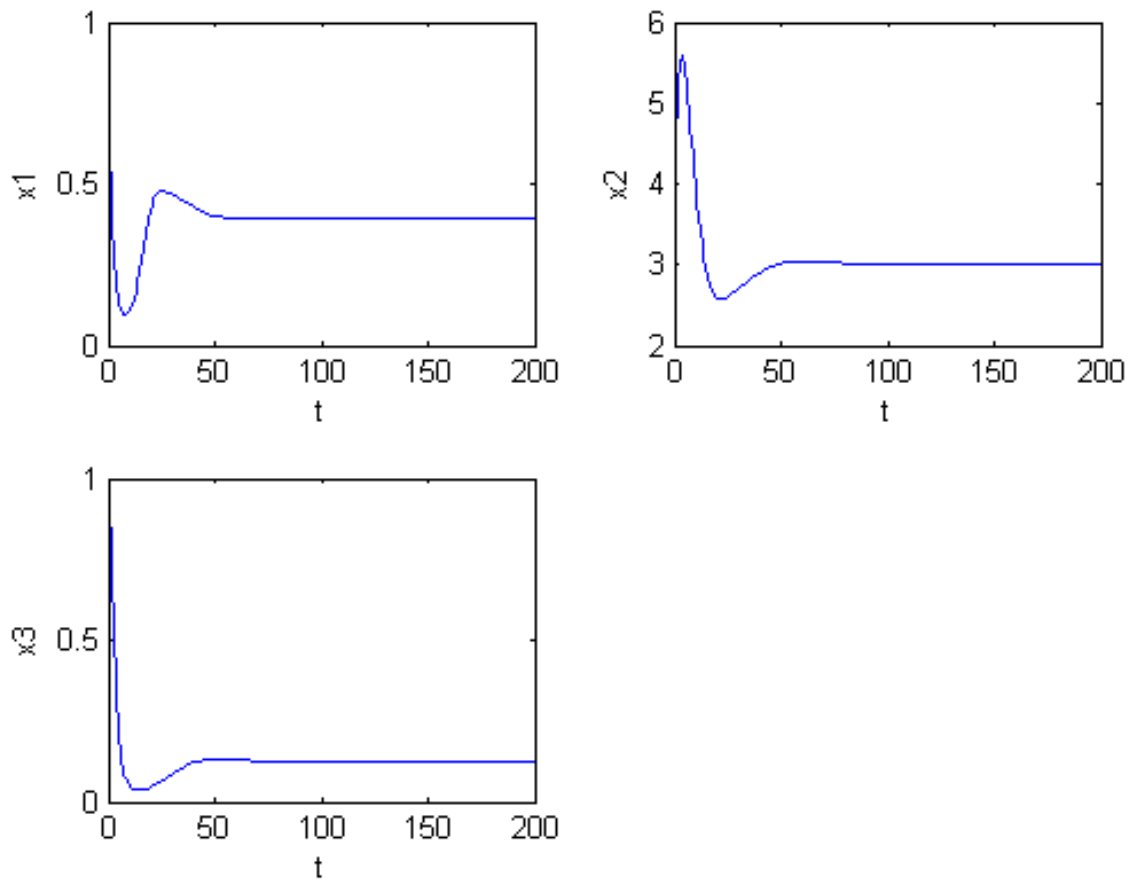


FIGURE 4.3 – Le point d'équilibre E_3 est instable (Th4.14), pour les paramètres : $a = 0.1$, $b = 1.18$, $c = 0.2$, $e = 0.5$, $r = 1$, $W = 1$, $k = 1$, $H = 7$.

4.4.3 Point d'équilibre E_4

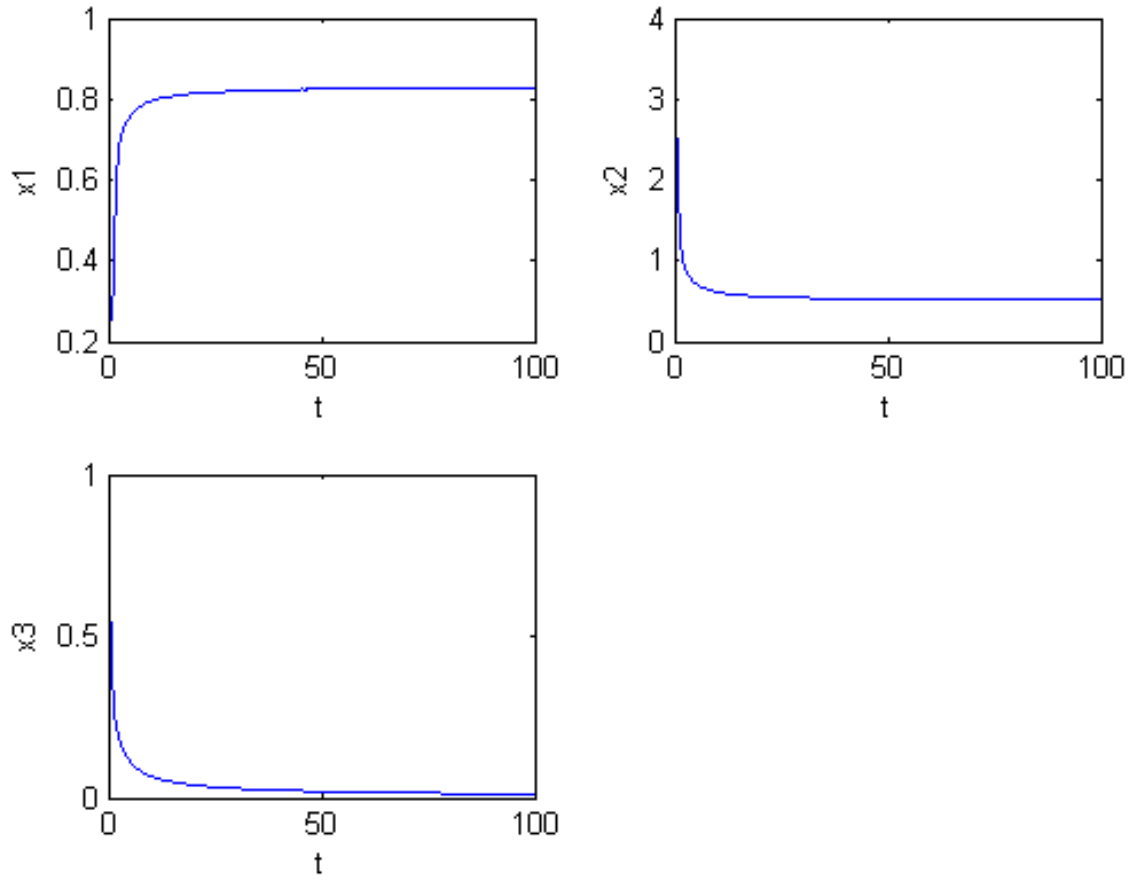


FIGURE 4.4 – le point $E_4(0.5, 1.5, 2)$ est instable (Th 4.15), pour les paramètres : $a = 1.67$, $b = 1$, $c = 2$, $e = 0.5$, $r = 6$, $W = 1$, $k = 1$, $H = 1$.

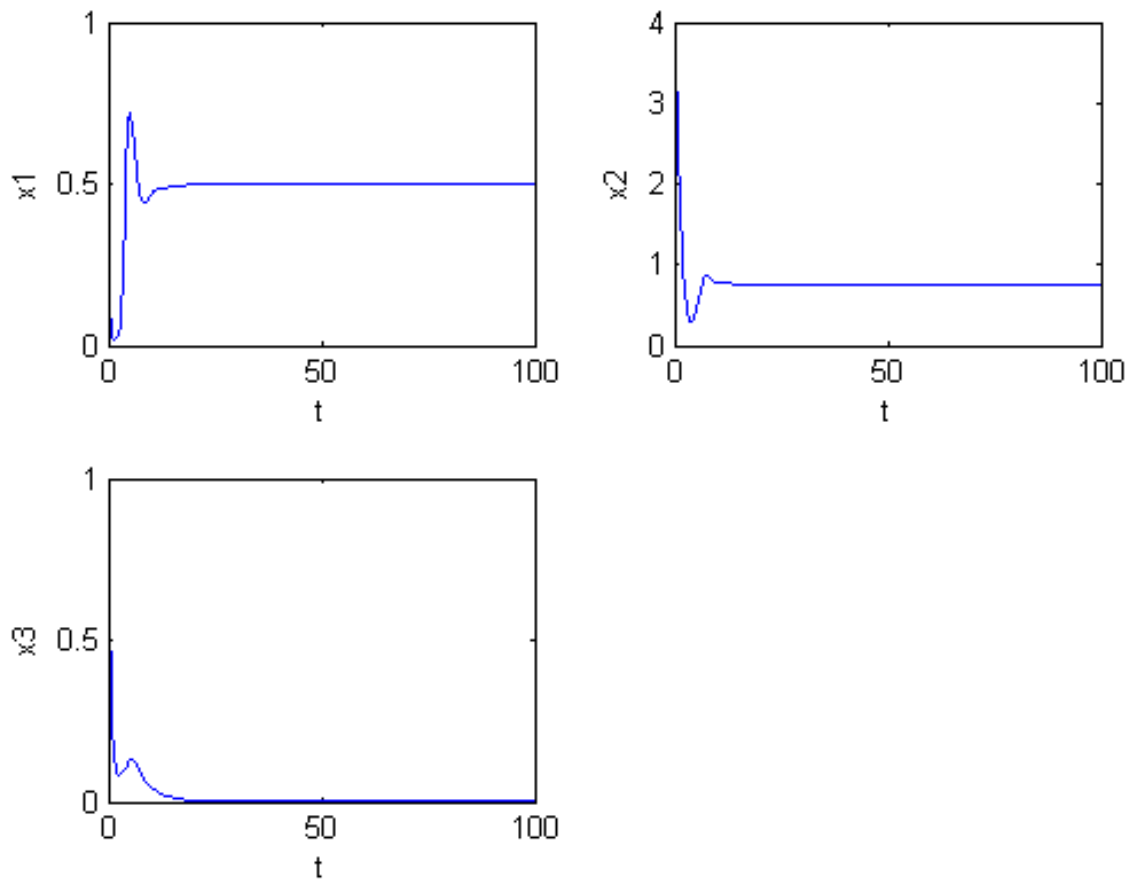


FIGURE 4.5 – Le point E_4 est instable(Th4.16), pour les paramètres : $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $e = 0.5$, $r = 3$, $W = 1$, $k = 1$, $H = 1$.

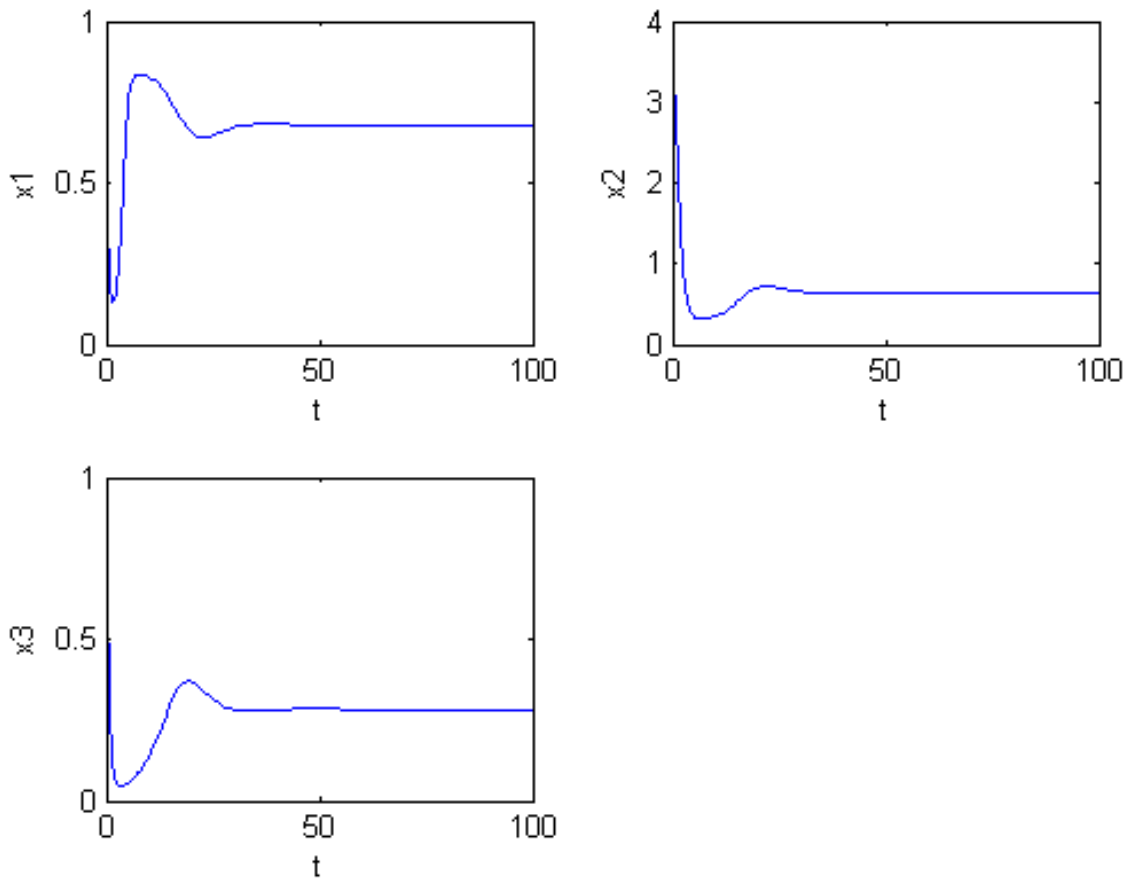


FIGURE 4.6 – Le point $E_4^+(0.22, 1.56, 2.12)$ est instable et $E_4^-(0.68, 0.64, 0.28)$ est stable (Th4.17),(Rm4.3), pour les paramètres : $a = 0.9$, $b = 1$, $c = 1$, $e = 0.5$, $r = 2$, $W = 1$, $k = 1$, $H = 1$.

Conclusions et Perspectives

Dans ce mémoire nous avons analysé un modèle mathématique du contrôle biologique des agro-écosystèmes, c'est un modèle proie prédateur décrivant la dynamique de la population des insectes vivant dans les bois, des araignées et des insectes vivant dans la vigne (voir [29]).

Dans le chapitre 3, nous avons étudiés séparément deux modèles proies prédateurs décrivant respectivement la dynamique de la population des insectes des bois et celle des araignées et la dynamique de la population des insectes de la vigne et celle des araignées. Nous avons fait l'étude de l'existence et l'unicité de la solution positive globale, le calcul des points d'équilibre et leur stabilité. Enfin, des simulations numériques sont données pour illustrer nos résultats.

Dans le chapitre 4 nous avons analysé un modèle proies prédateurs contenant trois équations différentielles telles que la première et la troisième équation décrivent respectivement l'évolution des insectes des bois et la croissance de la population d'insectes de la vigne en plein champ.

Dans la première équation, le premier terme tient compte de la croissance logistique tandis que le dernier terme représente la prédation à laquelle ces insectes sont soumis par la population d'araignées.

La troisième équation modélise la croissance de la population d'insectes de la vigne dans les champs ouverts, et l'activité de prédation à laquelle ils sont soumis par les araignées. on remarque que ces deux termes ont des expressions différentes de celles correspondantes à la première équation.

La dynamique des araignées est donnée dans la deuxième équation, où la mortalité est décrite par une croissance Malthusienne et les deux termes positifs représentent la

croissance due à la prédation sur les deux populations d'insectes.

Dans ce chapitre nous avons étudié l'existence globale et l'unicité de la solution positive de notre système, l'existence des points d'équilibre et leur stabilité locale, En perspective, et à partir des résultats obtenus dans ce mémoire il serait intéressant d'analyser la bifurcation de Hopf pour obtenir des solutions périodiques observées dans les simulations numériques (voir [29]), ainsi que celles observées dans la figure suivante (4.7).

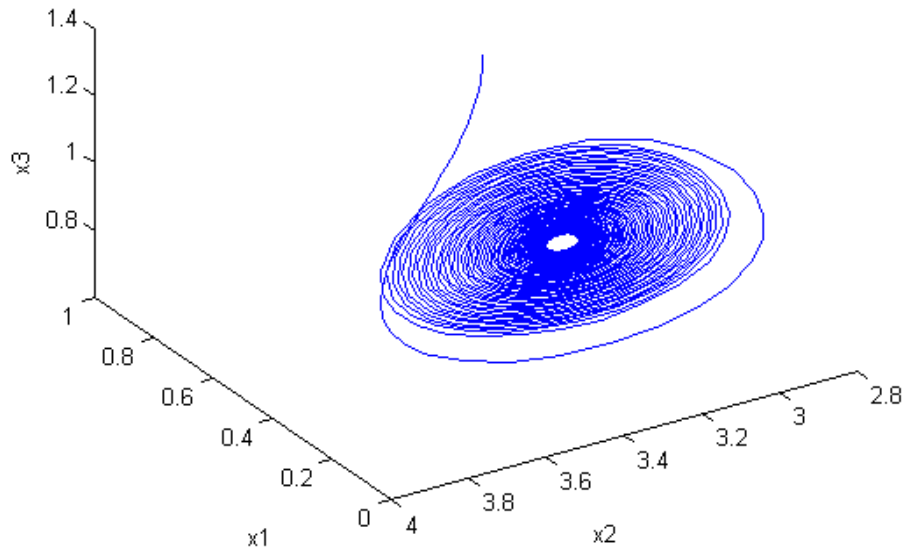


FIGURE 4.7 – Portrait de phase du modèle (4.1). Cas où il y a coexistence des proies et des prédateurs avec condition initiale $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 3, 1)$ et pour les paramètres : $a = 0.2$, $b = 1.18$, $c = 0.24$, $e = 0.5$, $r = 1$, $W = 1$, $k = 1$, $H = 7$.

En effet, à partir des simulations numériques, nous pouvons conclure que les taux de prédation c et b entre la proie dans le bois et la proie dans le vignoble ont un rôle essentiel dans la stabilité de notre point d'équilibre de coexistence du système (4.1), ainsi que le taux de croissance spécifique de la proie dans les bois, c'est-à-dire le paramètre r .

Le rôle des araignées en tant que contrôleurs biologiques dans les rizières et les vergers a été étudié par plusieurs scientifiques, (voir [24], [17] et [21]). Les techniques de prolifération des araignées ont conduit à 60% de réduction de l'utilisation des pesticides (voir [16]). En perspective, il serait intéressant aussi de développer et d'étudier de tels modèles dans un futur travail.

Bibliographie

- [1] J.F. Anderson, *Responses to starvation in the spiders *Lycosa lenta* Hentz and *Filistata hibernalis* (Hentz)*, Ecology **55** (1974) 576-585.
- [2] P. Auger, C. Lett and J.C. Poggiale *Modélisation mathématique en écologie*, Dunod, Paris, 2010.
- [3] Y. Belgaid, M. Helal, A. Lakmeche and E. Venturino *On the stability of periodic solutions of an impulsive system arising in the control of agroecosystems*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2019.
- [4] E. Caprio, B. Nervo, M. Isaia, G. Allegro and A. Rolando *Organic versus conventional systems in viticulture : Comparative effects on spiders and carabids in vineyards and adjacent forests*, Agricultural Systems **136** (2015) 61-69.
- [5] W.D. Edgar, *The life-cycle, abundance and seasonal movement of the wolf spider, *Lycosa* (*Pardosa*) *lugubris*, in central Scotland*, J. Anim. Ecol. **40** (2) (1971) 303-322.
- [6] W.D. Edgar, *Prey and predators of the wolf spider, *Lycosa lugubris**, J. Zool. **159** (1969) 405-411.
- [7] M.H. Greenstone, *Spider feeding behaviour optimises dietary essential amino acid composition*, Nature **181** (1979) 501-503.
- [8] D.W. Hagstrum, *Ecological energetics of the spider *Tarentula kochi* (Araneae : *Lycosidae*)*, Ann. Entomol. Soc. **63** (1970) 1297-1304.
- [9] J.M. Halley, C.F.G. Thomas and P.C. Jepson, *A model for the spatial dynamics of *Linyphiid* spiders in farmland*, J. Appl. Ecol. **33** (3) (1996) 471-492.

- [10] W.B. Harms, A.H.F. Stortelder, and W. Vos, *Effects of intensification of agriculture on nature and landscape in the Netherlands*. In : Wolman, M.G., Fournier, F.G.A. (Eds.), *Land Transformation in Agriculture*, SCOPE Publication 32. John Wiley, New York, (1987) 357-380.
- [11] M. Isaia, F. Bona and G. Badino, *Influence of landscape diversity and agricultural practices on spiders assemblage in Italian vineyards of Langa Astigiana (North west Italy)*, Environ. Entomol. **35** (2) (2006) 297-307.
- [12] H.K.Khalil, *Nonlinear Systems, Third Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2002.
- [13] A.E. Kronk and S.E. Riechert, *Parameters affecting the habitat choice of a desert wolf spider, Lycosa santrita Chamberlin and Ivie*, J. Arachnol. **7** (1979) 155-166.
- [14] A. Lesfari, *équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles, cours et exercices corrigés*, Ellipses, 2015.
- [15] F. Mansour, D. Rosen and A. Shulov, *Biology of the spider Chiracanthium mildei [Arachnida : Clubionidae]*, Entomophaga. **25** (1980) 237-248.
- [16] D. Maloney, F.A. Drummond and R. Alford, *Spider predation in agroecosystems : can spiders effectively control pest population ?*, MAFES (Maine Agricultural and Forest Experiments Station), Technical Bulletin, **190** (2003).
- [17] P. Marc and A. Canard, *Maintaining spider biodiversity in agroecosystems as a tool in pest control*, Agric. Ecosyst. Environ, **62** (1997) 229-235.
- [18] P. Marc, A. Canard and F. Ysnel, *Spiders (Araneae) useful for pest limitation and bioindication*, Agriculture, Ecosystems and Environment **74** (1999) 229-273.
- [19] K. Miyashita, *Quantitative feeding biology of Lycosa Tinsignita Boes et Str (Araneae : Lycosidae) under different feeding conditions*, Appl. Entomol. Zool **3** (1968) 81-88.
- [20] D.H. Morse and R.S. Fritz, *Experimental and observational studies of patch choice at different scales by the crab spider Misumena vatia*, Ecology **63** (1982) 172-182.
- [21] M. Nyffeler and G. Benz, *Spiders in natural pest control : a review*, J. Appl. Entomol. **103** (1987) 321-339.

- [22] D. Picart, *Modélisation et estimation des paramètres liés au succès reproducteurs d'un ravageur de la vigne (Lobesia botrana DEN. SCHIFF)*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux, 2009.
- [23] H. Reinhard, *Equations différentielles Fondement et applications*, BORDAS, 1982.
- [24] S.E. Riechert and L. Bishop, *Prey control by an assemblage of generalist predators : spiders in garden test systems Ecology*, **71** (1990) 1441-1450.
- [25] B. Ruthsatz and W. Haber, *The significance of small landscape elements in rural areas as refuges for endangered plant species*, In : Tjallingii, S.P., De Veer, A.A. (Eds.), *Perspective in Landscape Ecology*. PUDOC, Wageningen, Netherlands. (1981) 117-124.
- [26] H. Smith, *An Introduction to Delay Differential Equations with Sciences Applications to the Life*, Springer, 2010.
- [27] H. Smith and P. Waltman, *The theory of the chemostat Dynamics of microbial competition*, Cambridge University Press, 1995.
- [28] D. Thiery, *Ravageurs de la vigne*, Féret, Bordeaux, 2008.
- [29] E. Venturino, M. Isaia, F. Bona, S. Chatterjee and G. Badino *Biological controls of intensive agroecosystems : Wanderer spiders in the Langa Astigiana*. *Ecological Complexity*, **5** (2008) 157-161.
- [30] E. Venturino, M. Isaia, F. Bona, E. Issoglio, V. Triolo and G. Badino, *Modelling the spiders ballooning effect on the vineyard ecology*, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, **1** (2006) 137-159.
- [31] D.H. Wise, *Spiders in Ecological Webs*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993.
- [32] D.H. Wise, *The role of competition in spider communities : insights from field experiments with a model organism*. In : Simberloff, D.R.D., Abele, L.G., Thistle, A.B., Strong, (Eds.), *Ecological Communities : Conceptual issues and evidences*, Princeton University Press, Princeton, (1984) 42-53.
- [33] www.energieplus-lesite.be/theories/enveloppe9/comportement-des-materiaux4/insectes-parasites-du-bois.

- [34] <https://www.universalis.fr/encyclopedie/araignees-araneides/>
- [35] <http://ephytia.inra.fr/fr/C/26333/Vigne-Les-araignees-Araneae>.
- [36] <https://www.insectes-net.fr/termites/ter2.htm>

Résumé

Nous étudions dans ce mémoire un modèle mathématique agro-écologique décrivant la dynamique des araignées prédateurs se déplaçant parmi les vignobles et les bois, dans lesquels vivent deux proies différentes, qui sont la population d'insectes des bois et celle des vignobles. D'abord, nous démontrons l'existence globale et l'unicité de solutions positives. Puis, nous étudions l'existence et la stabilité des points d'équilibres. Enfin, nous faisons des simulations numériques pour illustrer nos résultats.

Mots clés :

Modèle mathématique agro-écologique, Points d'équilibre, Existence et unicité de solutions positives, Stabilité, Simulations numériques.

Abstract

We study in this thesis a mathematical model describing the dynamics of predatory spiders moving among vineyards and woods, in which two-different prey live, which are the wood insect population and that of the vineyards. First, we prove the global existence and uniqueness of positive solutions. Then we examine the existence and stability of equilibrium points. Finally, we propose numerical simulations to illustrate our results.

Keywords:

Agro-ecological mathematical model, Equilibrium points, Existence of positive solutions, Stability, Numerical simulations.

ملخص

ندرس في هذه المذكرة نموذجاً رياضياً إيكولوجياً يصف ديناميكيات العناكب المفترسة التي تتحرك بين مزارع الكروم والغابات، حيث تعيش فريستين مختلفتين، وهما حشرات الاخشاب والكروم. أولاً، نظهر وجود الحل وتفرد. ثم، نحن ندرس وجود واستقرار نقاط التوازن. أخيراً، نقدم عمليات محاكاة رقمية لتوضيح نتائجنا.

الكلمات المفتاحية:

نموذج رياضي إيكولوجي، نقاط التوازن، وجود وتفرد الحلول الإيجابية، الاستقرار، المحاكاة العددية.