

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

En vue de l'obtention du Diplôme de master en mathématiques.
Option : Probabilités et statistiques approfondies

Thème

Lois des grands nombres de Feller et Jajte

Présenté Par :

M^{lle} BELMOKHTAR MERIEM BATOUL

Mémoire soutenu devant le jury composé de :

<i>M</i> F.Boukhari	MCA UABB TLEMCE	<u>Président</u>
<i>M^{me}</i> M.Kada Kloucha	MCB ESSAT TLEMCE	<u>Examinatrice</u>
<i>M^{me}</i> D.Malti	MCB ESSAT TLEMCE	<u>Encadreur</u>

Année universitaire : 2019 – 2020

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À

Mes parents , pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

Que le Dieu les protège

À

Mes chers frères Habibe,Khadidja et Hafsa.

À

Mon oncle Abd Elwahid Zeddoune et ma tante Horia

Remerciements

Avant tout, je remercie ALLAH de m'avoir donné le courage et la volonté de mener ce mémoire.

J'exprime mes profonds remerciements à mon encadreuse Mme D.Malti maître de conférences à l'ESSAT-Tlemcen, pour son aide précieuse et conseils qu'elle m'a donnés tout au long de ce travail.

Mes remerciements vont également aux membres de jury le président Mr f.Boukhari maître de conférences à l'Université Abou bekr Belkaid-Tlemcen et L'examineur Mme M.Kada Kloucha maître de conférences à l'ESSAT-Tlemcen qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Martingales et fonctions à variations régulières	5
1.1 Martingales	5
1.2 Fonctions à variation régulière	11
2 Quelques lois limites pour des différences de martingale	12
2.1 L.F.G.N pour des variables aléatoires i.i.d	12
2.2 Lois fortes des grands nombres pour les différences de martingale . .	20
3 Loi faible des grands nombres de Kolmogorov-Feller pour le maximum des sommes pondérées	30
3.1 Lois faible des grands nombres de kolmogorov-Feller	30
3.2 Corollaires et remarques	35
Appendice	36
Conclusion	39
Bibliographie	42

Introduction

Les lois limites jouent un rôle essentiel dans la théorie des probabilités et en statistiques. Dans ce mémoire on s'intéresse à l'extension de la loi faible des grands nombres de Kolmogorov-Feller pour le maximum des sommes pondérées de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées, par la méthode des suites sommables établi par Naderi et al [11]. La loi forte des grands nombres a fait aussi l'objet de plusieurs études récentes, généralisant les résultats obtenus par Kolmogorov, Marcinkiewicz-Zygmund, Stoica [9] et d'autres. Ce travail est aussi consacré à l'étude des lois fortes des grands nombres pour des différences de martingale identiquement distribuées traité par Miao et al [10].

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier nous rappelons les résultats essentiels obtenus sur les martingales et différences de martingales qui sont utiles pour l'étude de la convergence presque sûre des sommes de différences de martingales. Une partie est consacrée aux fonctions à variations régulières, qui interviennent dans l'étude de la condition nécessaire et suffisante pour la convergence en probabilité du maximum des sommes pondérées de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Le deuxième chapitre est consacré au développement de l'article "Limit theorem for identically distributed martingale difference" [10]. Nous rappelons la loi forte des grands nombres due à Kolmogorov ainsi que la loi forte des grands nombres de Marcinkiewicz-zygmund, nous énonçons le théorème de la convergence presque sûre des sommes de différences de martingales identiquement distribuées. La dernière section est consacrée à l'étude de la vitesse de convergence.

Finalement le dernier chapitre est la présentation des résultats obtenus par Naderi et al.[11]. Nous rappelons la loi faible des grands nombres, la loi faible des grands nombres de Kolmogorov-Feller. Nous énonçons le théorème principal de Naderi et al. en donnant la condition nécessaire et suffisante pour la convergence

en probabilité du maximum des sommes pondérées, sous l'hypothèse que $P(|X| > x)$ soit à variations régulières, avec des conditions supplémentaires sur le poids. On termine ce chapitre en donnant quelques exemples.

Abréviations & Notations

Ω	: l'espace des observables
ω	: l'évènement élémentaire
$\mathbb{P}(A)$	: La probabilité de l'évènement A .
$\mathbb{E}(X)$	: L'espérance mathématique de la variable aléatoire X .
$\mathbb{I}(A)$	: La fonction indicatrice de l'ensemble A
$Var(X)$	: La variance de la variable aléatoire X .
$\mathcal{F}(A)$	: La tribu de l'évènement A .
$ x $	: Valeur absolue de la variable x .
$\max(A)$	: Maximum de l'ensemble A .
$\min(A)$	: Minimum de l'ensemble A .
$x \wedge y$	: Le minimum entre x et y .
$x \vee y$	: Le maximum entre x et y .
x^+	: $\max(x, 0)$.
x^-	: $\min(-x, 0)$.
$\sim$	: Le rapport des quantités de chaque côté tend vers 1.
$v.a$	: Variable aléatoire.
$i.i.d$	: Indépendantes et identiquement distribuées.
$p.s$	: Presque sûrement.
L.F.G.N	: La loi forte des grands nombres.
$X_n \xrightarrow{p.s} X$	: La suite de variables aléatoires (X_n) converge presque sûrement vers X .
$X_n \xrightarrow{p} X$	: La suite de variables aléatoires (X_n) converge en proba vers X .
$\square$	: Fin de démonstration.

Martingales et fonctions à variations régulières

Dans ce chapitre on rappelle quelques propriétés et inégalités de martingales essentielles au développement du dernier chapitre. Une partie du chapitre est réservée aux principales notions sur les fonctions à variation régulière.

1.1 Martingales

La construction de suite de différence de martingale est essentielle à l'étude des lois limites vues qu'en pratique il n'est toujours pas évident d'avoir des variables indépendantes, pour cela cette partie est consacrée aux martingales.

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et X_n une suite de variables aléatoires

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1. (Filtration)

On appelle filtration toute suite $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ qui est croissante pour l'inclusion.

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré.

La filtration donnée par $\mathcal{F}_n^0 = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ est appelée filtration naturelle de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite adaptée à cette filtration si pour tout $n \in \mathbb{N}$ (i.e X_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable).

Définition 1.1.2. (Martingale)

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires, on dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- 1- X_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable.

2- $\mathbb{E}|X_n| < \infty$.

3- L'équation de martingale est vérifiée, $X_n = \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$ p.s

Définition 1.1.3. Une famille de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale (resp. sousmartingale) par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1- X_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable.

2- $\mathbb{E}|X_n| < \infty$.

3- $X_n \geq \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$ (resp. $X_n \leq \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$)

Exemples 1.1.1. 1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a réelles centrées intégrables et indépendantes avec $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$, alors $\{S_n = \sum_{k=1}^n X_k, n \geq 1\}$ est une martingale, en effet :

1- S_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable par construction.

2- $\mathbb{E}|S_n| \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k| < \infty$.

3- $\mathbb{E}(S_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n + X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n/\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$
comme $S_n \in \mathcal{F}_n$

$\mathbb{E}(S_{n+1}) = S_n + \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = S_n + \mathbb{E}(X_{n+1}) = S_n$ (car X_n sont indépendantes et centrées)

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a indépendantes et intégrables avec $\mathbb{E}(X_n) = 1$. Posons $M_0 = 1$, $M_n = \prod_{k=1}^n X_k, n \geq 1$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$

1- M_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable par construction.

2- $\mathbb{E}(|M_n|) = \mathbb{E}(|\prod_{k=1}^n X_k|) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(|X_k|) < \infty$

3- $\mathbb{E}(M_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_n X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = M_n \mathbb{E}(X_{n+1}) = M_n$.

Proposition 1.1.1. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a.r, soit la fonction :

$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(|\phi(X_{n+1})|) < \infty$

1- Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale et ϕ convexe alors : $\{\phi(X_n), n \geq 0\}$ est une sous-martingale .

2- Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale, ϕ convexe et croissante alors : $\{\phi(X_n), n \geq 0\}$ est une sous-martingale.

Exemples 1.1.2. 1. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale, donc

i $(X_n^2)_{n \geq 0}$, $(X_n^-)_{n \geq 0}$, $(X_n^+)_{n \geq 0}$ sont des sous-martingales.

ii Si $p \geq 1$, alors $(|X_n|^p)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale

2. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale, donc

- i $(X_n^2)_{n \geq 0}$, $(X_n^-)_{n \geq 0}$, $(X_n^+)_{n \geq 0}$ sont des sous-martingales.
- ii Si $p \geq 1$, $\mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ alors $(|X_n|^p)$ est une sous-martingale

Passons maintenant à la construction de différences de martingale qui sont utiles en théorie des probabilités.

Définition 1.1.4. (différences de martingale) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P}), (X_n)_{n \geq 0}$ un espace de probabilité filtré, une suite de v.a $\mathcal{F}_n$ -adaptées avec $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \forall n \geq 0$.

- (X_n) est une suite de différences de martingale si :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

- (X_n) est une suite de différences de sous-martingale si :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geq 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

- (X_n) est une suite de différences de surmartingale si :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Une définition équivalente de suite de différences de martingale est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.1.1. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires adapté avec $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \forall n \geq 0$. Posons $U_n = \sum_{k=1}^n X_k, n \geq 0$ alors

- (i) $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de différences de martingale ssi $(U_n)_{n \geq 0}$ est martingale (resp. une suite de différences de surmartingale ssi $(U_n)_{n \geq 0}$ est une surmartingale, et une suite de différences de sous-martingale ssi $(U_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale).
- (ii) Une suite de différences de martingale a une espérance constante égale à 0, une suite de différences de surmartingale a une espérance positive et une suite de différences de sous-martingale à une espérance négative

Démonstration. (i) - Montrons que :

$(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de différences de martingale $\implies (U_n)_{n \geq 0}$ est une martingale :

- 1- $\sum_{k=0}^n X_k$ est $\mathcal{F}_n$ -mesurable.
 - 2- $\mathbb{E}(|U_n|) = \mathbb{E}(|\sum_{k=0}^n X_k|) \leq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(|X_k|) < \infty$ alors : $U_n \in \mathbb{L}^1$
 - 3- $\mathbb{E}(U_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\sum_{k=0}^n X_k + X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = U_n + \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = U_n$.
- Donc U_n est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_n$.

A présent montrons que :

$(U_n)_{n \geq 0}$ est une martingale $\implies (X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de différences de martingale :

U_n une martingale $\implies \mathbb{E}(U_{n+1}/\mathcal{F}_n) = U_n$ alors on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U_{n+1}/\mathcal{F}_n) - U_n &= 0 \\ \mathbb{E}(U_n + X_{n+1}/\mathcal{F}_n) - U_n &= 0 \\ U_n + \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) - U_n &= 0 \\ \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) &= 0\end{aligned}$$

Donc $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de différences de martingale .

- (ii) Soit $(X_n)_{(n \geq 0)}$ une suite de différences de martingale , par le point (i) $(U_n)_{n \geq 0}$ une martingale :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}(U_n - \sum_{k=1}^{n-1} X_k) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(U_n - \sum_{k=0}^{n-1} X_k / \mathcal{F}_{n-1})) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(U_n / \mathcal{F}_{n-1}) - \mathbb{E}(\sum_{k=0}^{n-1} X_k / \mathcal{F}_{n-1})) \\ &= \mathbb{E}(U_{n-1}) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(U_{n-1} / \mathcal{F}_{n-1})) \\ &= \mathbb{E}(U_{n-1}) - \mathbb{E}(U_{n-1}) = 0\end{aligned}$$

□

Exemples 1.1.3. Soit $\{Y_n, n \geq 0\}$ une suite $\mathcal{F}_n$ -mesurable, posons $X_0 = Y_0$ et

$$X_n = \sum_{k=1}^n (Y_k - \mathbb{E}(Y_k / \mathcal{F}_{k-1})), \quad n \geq 1$$

$Y_k \in \mathcal{F}_n$ pour $1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n+1} (Y_k - \mathbb{E}(Y_k / \mathcal{F}_{k-1})) / \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(Y_{n+1} - \mathbb{E}(Y_{n+1} / \mathcal{F}_n) / \mathcal{F}_n) + X_n \\ &= X_n + \mathbb{E}(Y_{n+1} / \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(Y_{n+1} / \mathcal{F}_n) = X_n.\end{aligned}$$

Ainsi $(X_n)_{n \geq 1}$ est une martingale et par le point (i) de Théorème (1.1.1) $(Y_n - \mathbb{E}(Y_n/\mathcal{F}_{n-1}))_{n \geq 1}$ est une suite de différences de martingale.

1.1.2 Inégalités

Les martingales vérifient des inégalités très utiles notamment dans l'étude des convergences.

Théorème 1.1.2. (Inégalité maximale faible de Doob)

1- Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une sur martingale, $n \geq 1, \lambda > 0$ alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{0 \leq k \leq n} X_k > \lambda \right) &\leq \frac{1}{\lambda} \left[\mathbb{E}(X_0) - \int_{\max_{0 \leq k \leq n}} X_n dp \right] \\ &\leq \frac{1}{\lambda} (\mathbb{E}(X_0) - \mathbb{E}(X_n^-)) \end{aligned}$$

2- Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une sous-martingale, $n \geq 1, \lambda > 0$ alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{0 \leq k \leq n} X_k > \lambda \right) &\leq \frac{1}{\lambda} \int_{\max_{0 \leq k \leq n}} X_n dP \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X_n^+) \end{aligned}$$

3- En particuliers si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale on a :

$$\mathbb{P} \left(\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| > \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(|X_n|)$$

Corollaire 1.1.1. soit $(X_n)_n$ une sous-martingale positive (resp une martingale) dans $\mathbb{L}^p$, ($p \geq 1$) alors :

$\forall n \geq 0, \forall \lambda > 0$

$$\mathbb{P} \left(\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| > \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|X_n\|_{\mathbb{L}^p}^p$$

Démonstration. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ un sous-martingale, par le point (2) du Théorème (1.1.2) $|X_n|^p$ une sous-martingale positive :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| > \lambda \right) &= \mathbb{P} \left(\max_{0 \leq k \leq n} |X_k|^p > \lambda^p \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda^p} \mathbb{E}(|X_n|^p) = \frac{\|X_n\|_{\mathbb{L}^p}^p}{\lambda^p} \end{aligned}$$

□

Théorème 1.1.3 (Burkholder). Soit $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une martingale, ($X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, $n \geq 1$) avec $\{Y_k, k \geq 0\}$ une suite de différences de martingale, posons $X_n^* = \max_{0 \leq k \leq n} |X_k|$, $s_n(X) = (\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k^2 / \mathcal{F}_{k-1}))$ et soit ϕ une fonction convexe positive, satisfait la condition $\phi(2x) \leq c\phi(x)$, $x > 0$ pour $c > 0$. Alors il existe une constante C qui dépend seulement de c , tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\phi(X_n^*)) &\leq C \left(\mathbb{E}(\phi(s_n(X))) + \mathbb{E}(\max_{0 \leq k \leq n} \phi(Y_k)) \right) \\ &\leq 2C \max\{\mathbb{E}(\phi(s_n(X))), \mathbb{E}(\max_{0 \leq k \leq n} \phi(Y_k))\}. \end{aligned}$$

Corollaire 1.1.2. Soient $p \geq 2$ et $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ une martingale et $\{Y_k, k \geq 1\}$ une suite de différences de martingale avec $s_n(X) = (\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k^2 / \mathcal{F}_{k-1}))$. Alors il existe une constante D_p qui dépend seulement de p , tel que

$$\begin{aligned} \|X_n\|^p &\leq D_p \left(\|s_n\|_p + \left\| \max_{1 \leq k \leq n} Y_k \right\|_p \right) \\ &\leq D_p \left(\|s_n\|_p + \sum_{k=1}^n \|Y_k\|_p \right) \\ &\leq 2D_p \max\{\|s_n\|_p, \sum_{k=1}^n \|Y_k\|_p\} \end{aligned}$$

Dans cette partie nous rappelons quelques notions importantes sur les fonctions à variation régulière. On s'est basé essentiellement sur le livre de Bingham [2]

1.2 Fonctions à variation régulière

Définition 1.2.1. Soit U une fonction mesurable et positive, on dit que U est une fonction à variation régulière à l'infini avec exposant $\rho \in \mathbb{R}$, si pour tout $t > 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(tx)}{U(x)} = t^\rho,$$

et on note par $U \in \mathcal{RV}(\rho)$.

Remarque 1.2.1. Si $\rho = 0$ on dit que U est varié lentement à l'infini et on note par $U \in \mathcal{SV}$.

Exemples 1.2.1. Soit $L : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par :

$$\forall x \in (1, \infty), L(x) = (1 + x^{-1}) \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + (tx)^{-1}) \ln(tx)}{(1 + x^{-1}) \ln(x)} = 1$$

Alors L est une fonction à variation lente à l'infini.

Théorème 1.2.1. [2] Soient $X > 0$ et f une fonction à variation régulière d'exposant ρ , et localement bornée dans $[X, \infty)$:

i- pour tout $\sigma \geq -(\rho + 1)$

$$x^{\sigma+1} f(x) / \int_X^x t^\rho f(t) dt \longrightarrow \sigma + \rho + 1 \quad \text{quand } x \rightarrow \infty$$

ii- pour tout $\sigma < -(\rho + 1)$ (et pour $\sigma = -(\rho + 1)$ si $\int_x^\infty t^{-(\rho+1)} f(t) dt < \infty$)

$$x^{\sigma+1} f(x) / \int_x^\infty t^\rho f(t) dt \longrightarrow -(\sigma + \rho + 1) \quad \text{quand } x \rightarrow \infty$$

Proposition 1.2.1. Si l est une fonction à variation lente, X est assez grands tel que $l(x)$ soit localement bornée dans $[X, \infty)$ et $\alpha > -1$, alors :

$$\int_X^x t^\alpha l(t) dt \sim x^{\alpha+1} l(x) / (\alpha + 1) \quad (x \rightarrow \infty)$$

Quelques lois limites pour des différences de martingale

Ce chapitre est consacré au développement de l'article [10]. On commence par rappeler la loi forte des grands nombres due à Kolmogorov, la loi forte des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund ainsi que quelques extensions de ces lois.

2.1 L.F.G.N pour des variables aléatoires i.i.d

Nous énonçons quelques résultats et techniques essentiels au développement de l'article [10]. Parmi ces techniques on cite la technique de la troncature d'une suite de variables aléatoires et du fait que cette suite et sa troncature ont le même comportement asymptotique, Kolmogorov s'est basé sur cette technique pour démontrer la loi forte des grands nombres. Pour les différents résultats de cette section on cite comme référence le livre de A. Gut [6].

Définition 2.1.1. *On dit que deux suites de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots$ et $Y_1, Y_2, \dots$ sont équivalentes si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) < \infty$$

Proposition 2.1.1. *Supposons que $X_1, X_2, \dots$ sont des v.a.i.i.d, et soit $r > 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i- $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$.
- ii- $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| > n^{1/r} \varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$.
- iii- $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_1| > n^{1/r} \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.
- iv- $\frac{X_n}{n^{1/r}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s} 0$.

Pour montrer cette proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Soit X une variables aléatoires positive, alors*

$$\mathbb{E}X < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) < \infty.$$

Démonstration. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) < \infty$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n x dF(x) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(n-1 < X \leq n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(n-1 < X \leq n) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(n-1 < X \leq n) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X > k-1) \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) < \infty \end{aligned}$$

Pareille, pour l'autre coté, puisque

$$\mathbb{E}X \geq \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \mathbb{P}(n-1 < X \leq n).$$

□

Remarque 2.1.1. *Par le lemme précédent on a :*

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(|X| \geq k) \leq \mathbb{E}(|X|) \leq 1 + \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(|X| \geq k)$$

Démonstration. de la Proposition 2.1.1

D'après le lemme (2.1.1) on a

$$\mathbb{E}|X_1|^r < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1|^r \geq n) < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| \geq n^{1/r} \varepsilon) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Donc (i) est équivalente à (ii) ce qui est équivalent à (iii) par le lemme de Borel-Cantelli. L'équivalence entre (iii) et (iv) est une conséquence du lemme de Borel-Cantelli et la définition de convergence presque sûre. $\square$

Proposition 2.1.2. *Supposons que $X_1, X_2, \dots$ sont des v.a.r.i.i.d., telles que $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$ pour $r > 0$, et soit*

$$Y_n = X_n \mathbb{I}_{\{|X_n| \leq n^{1/r}\}}, n \geq 1.$$

Alors $\{X_n, n \geq 1\}$ et $\{Y_n, n \geq 1\}$ sont équivalentes.

Démonstration. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \mathbb{I}_{\{|X_n| > n^{1/r}\}}),$$

d'après la proposition précédente (i $\iff$ ii)

$$\mathbb{E}|X_1|^r < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > n^{1/r} \varepsilon) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \mathbb{I}_{\{|X_n| > n^{1/r}\}}) < \infty.$$

$\square$

Lemme 2.1.2. *Soit $0 < r < 2$. Supposons que $X, X_1, X_2, \dots$ sont des v.a.r.i.i.d., telles que*

$$Y_n = X_n \mathbb{I}_{\{|X_n| \leq n^{1/r}\}}, n \geq 1.$$

Si $\mathbb{E}|X|^r < \infty$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}\left(\frac{Y_n}{n^{1/r}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Y_n)}{n^{2/r}} < \infty$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}\left(\frac{Y_n}{n^{1/r}}\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{n^{2/r}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^2 \mathbb{I}_{\{|X| \leq n^{1/r}\}})}{n^{2/r}} \\
 &= \mathbb{E} \left(X^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{I}_{\{|X| \leq n^{1/r}\}}}{n^{2/r}} \right) = \mathbb{E} \left(X^2 \sum_{n \geq |X|^r \vee 1} \frac{1}{n^{2/r}} \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(X^2 \sum_{n \geq |X|^r} \frac{1}{n^{2/r}} (\mathbb{I}_{\{1 \leq |X| < 2^{1/r}\}} + \mathbb{I}_{\{|X| \geq 2^{1/r}\}}) \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(X^2 \sum_{n \geq |X|^r} \frac{1}{n^{2/r}} \mathbb{I}_{\{1 \leq |X| < 2^{1/r}\}} \right) + \mathbb{E} \left(X^2 \sum_{n \geq |X|^r} \frac{1}{n^{2/r}} \mathbb{I}_{\{|X| \geq 2^{1/r}\}} \right) \\
 &= \text{II} + \text{III} \\
 &\leq 2^{2/r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/r}} + \frac{2^{(2/r)-1}}{(2/r) - 1} \mathbb{E} X^2 \frac{1}{(|X|^r)^{(2/r)-1}} \\
 &= C_{1,r} + C_r \mathbb{E}|X|^r < \infty.
 \end{aligned}$$

En effet

$$\text{II} \leq 2^{2/r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/r}} = C_{1,r} \quad \text{car c'est une série de Riemman convergente,}$$

$$\text{III} \leq \frac{2^{(2/r)-1}}{(2/r) - 1} \mathbb{E} X^2 \frac{1}{(|X|^r)^{(2/r)-1}} = C_r \mathbb{E}|X|^r \quad (\text{par l'application de Lemme (3.4)})$$

□

A présent, on rappelle la loi forte des grands nombres due à Kolmogorov et Marcinkiewicz-Zygmund.

Théorème 2.1.1. (*L.F.G.N de Kolmogorov*)

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

(i) Si $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ et $\mathbb{E}X_1 = \mu$, alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s} \mu \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

(ii) Si $S_n/n \xrightarrow{p.s} c$ avec c une constante, quand $n \rightarrow \infty$, alors

$$\mathbb{E}|X_1| < \infty \quad \text{et } c = \mathbb{E}X_1.$$

(iii) Si $\mathbb{E}X_1 = \infty$, alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = +\infty.$$

Théorème 2.1.2. (*L. F.G.N de Marcinkiewicz-Zygmund*)

Soit $0 < r < 2$. Supposons que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles i.i.d, et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour $n \geq 1$.

Si $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$, et $\mathbb{E}X_1 = 0$ quand $1 \leq r < 2$, alors

$$\frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{p.s} 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Posons

$$Y_k = X_k \mathbb{I}_{\{|X_k| \leq n^{1/r}\}}$$

Alors par la Proposition (2.1.2) $X_1, X_2, \dots$ et $Y_1, Y_2, \dots$ sont équivalentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n^{1/r}}\right| > 1\right) < \infty,$$

de plus par le Lemme (2.1.2) on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}\left(\frac{Y_n}{n^{1/r}}\right) < \infty,$$

et on appliquons le critère de convergence de Kolmogorov Théorème (3.4) donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n - \mathbb{E}(Y_n)}{n^{1/r}} \text{ converge p.s}$$

et par Lemme de Kroneker(3.1) on a :

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^n (Y_k - \mathbb{E}(Y_k)) \xrightarrow{p.s} 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

on veut montrer que :

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Pour conclure que :

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^n Y_k \xrightarrow{p.s} 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

pour $0 < r < 1$

$$\begin{aligned}
 |\mathbb{E}(S'_n)| &= \mathbb{E}(|\sum_{k=1}^n Y_k|) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|X_k| \mathbb{I}_{\{|X_k| \leq k^{1/r}\}}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|X_k| \mathbb{I}_{\{|X_k| \leq k^{1/(2r)}\}}) + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|X_k| \mathbb{I}_{\{k^{1/(2r)} < |X_k| \leq k^{1/r}\}}) \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \left(k^{1/(2r)}\right)^{1-r} \mathbb{E}(|X_k|^r \mathbb{I}_{\{|X_k| \leq k^{1/(2r)}\}}) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \left(k^{1-r}\right)^{1/(2r)} \mathbb{E}(|X_k|^r \mathbb{I}_{\{k^{1/(2r)} < |X_k| \leq k^{1/r}\}}) \\
 &\leq \sum_{k=1}^n k^{(1-r)/(2r)} \mathbb{E}(|X_k|^r) + \sum_{k=1}^n k^{(1/r)-1} \mathbb{E}(|X_k|^r \mathbb{I}_{\{|X_k| > k^{1/(2r)}\}}) \\
 &\leq Cn^{(1+r)/(2r)} \mathbb{E}|X_1|^r + \sum_{k=1}^n k^{(1/r)-1} \mathbb{E}(|X_1|^r \mathbb{I}_{\{|X_1| > k^{1/(2r)}\}})
 \end{aligned}$$

alors on a :

$$0 < \frac{|\mathbb{E}S'_n|}{n^{1/r}} \leq n^{(1/2)-(1/r)} \mathbb{E}|X_1|^r + \frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^n k^{(1/r)-1} \mathbb{E}|X_1|^r \mathbb{I}_{\{|X_1| > k^{1/(2r)}\}}.$$

Puisque $0 < r < 1$, $(1/2) - (1/r) < 0$ et $\mathbb{E}(|X_1|^r) < \infty$ on a alors :

$$n^{(2/r)-(1/2)} \mathbb{E}(|X_1|^r) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Ensuite en utilisant le Lemme(3.3), on trouve

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^n k^{(1/r)-1} \mathbb{E}(|X_1|^r \mathbb{I}_{\{|X_1| > k^{1/(2r)}\}}) < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|X_1|^r \mathbb{I}_{\{|X_1| > k^{1/(2r)}\}}) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Ainsi

$$\frac{|\mathbb{E}(S'_n)|}{n} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Pour $1 < r < 2$, utilisons le Lemme (3.3)

$$\begin{aligned}
 |\mathbb{E}S'_n| &= \left| \sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{\{|X_k| \leq k^{1/r}\}} \right| \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k| \mathbb{I}_{\{|X| > k^{1/(2r)}\}} \\
 &\leq \sum_{k=1}^n (k^{1/r})^{1-r} \mathbb{E}|X_k|^r \mathbb{I}_{\{|X_k| > k^{1/r}\}} \\
 &= \sum_{k=1}^n k^{(1/r)-1} \mathbb{E}|X_1|^r \mathbb{I}_{\{|X_1| > k^{1/r}\}}
 \end{aligned}$$

donc on a :

$$\frac{|\mathbb{E}S'_n|}{n^{1/r}} \leq \frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^n k^{(1/r)-1} \mathbb{E}|X|^r \mathbb{I}_{\{|X| > k^{1/r}\}} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Finalement pour tout $0 < r < 2$ on a

$$\frac{|\mathbb{E}(S'_n)|}{n^{1/r}} \rightarrow 0$$

et donc par le critère de Kolmogorov le Théorème (3.4) on obtient

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^n Y_k \rightarrow 0 \text{ p.s}$$

. comme X_n et Y_n sont équivalente alors

$$\frac{(S_n)}{n^{1/r}} \rightarrow 0 \text{ p.s}$$

□

HypothèseA

.

Soient g une fonction positive et croissante et h une fonction positive telle que la fonction $\phi(x) = g(x)h(x)$ satisfait les conditions suivantes :

- i. Pour $d \geq 0$, ϕ est strictement croissante sur $[d, \infty)$ à valeurs dans $[0, \infty)$.
- ii. ils existent deux constantes a et b telle que

$$\phi^2(s) \int_s^\infty \frac{1}{\phi^2(x)} dx < as + b, \quad s > d$$

- iii. ils existent M et un entier positive k_0 tel que $\frac{\phi(x+1)}{\phi(x)} \leq M, x \geq k_0$.

Théorème 2.1.3. (Jajte.R(2003)[7]) Soient $h, g, \phi = (h * g)$ satisfions l'Hypothèse (A) et $\{X, X_1, X_2, \dots\}$ une suite de v.a.r. i.i.d. Posons que

$$m_k = \mathbb{E}[X_k \mathbb{I}_{\{|X_k| \leq \phi(k)\}}] \tag{2.1.1}$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^n \frac{X_k - m_k}{h(k)} = 0 \text{ p.s} \tag{2.1.2}$$

$$\mathbb{E}[\phi^{-1}(|X|)] < \infty \quad (2.1.3)$$

ou ϕ^{-1} est inverse de ϕ

Démonstration. Montrons $(2.1.2) \implies (2.1.3)$

$\lim_{k \rightarrow \infty} (m_k / \phi(k)) = 0$ la condition (2.1.2)

implique $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k / \phi(k)) = 0$ p.s.

Par consequent

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_k| \geq \phi(k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\phi^{-1}(|X|) \geq k) < \infty$$

Par le Lemme (2.1.1) $\mathbb{E}[\phi^{-1}(|X|)] < \infty$.

Montrons l'autre cotè : $(2.1.3) \implies (2.1.2)$.

Soit $\mathbb{E}[\phi^{-1}(|X|)] < \infty$, utilisons la Remarque (2.1.1) pour obtenir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_k| \geq \phi(k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\phi^{-1}(|X|) \geq k) \leq \mathbb{E}[\phi^{-1}(|X|)] < \infty.$$

Posons

$$X'_n = X_n \mathbb{I}_{\{|X_n| \leq \phi(n)\}}$$

donc

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X_k \neq X'_k) < \infty$$

Par lemme de Borel-Contelli, on peut montrer que

$$\frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^n \frac{(X'_k - m_k)}{h(k)} \rightarrow 0 \quad \text{p.s}$$

Pour ce la on estime la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E} X_k'^2}{\phi(k)^2} = \mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^2}{\phi(k)^2} \mathbb{I}_{\{|X| \leq \phi(k)\}}$$

Notons que $|X| = \phi(\phi^{-1}(|X|))$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^2}{\phi(k)^2} \mathbb{I}_{\{|X| \leq \phi(k)\}} &\leq k_0 + C^2 \sum_{k_0+1=1}^{\infty} \frac{X^2}{\phi(k+1)^2} \mathbb{I}_{\{|X| \leq \phi(k)\}} \\
 &\leq k_0 + C^2 X^2 \int_{\phi^{-1}(|X|)}^{\infty} \frac{1}{\phi(x)} dx \\
 &\leq k_0 + C^2 a \phi^{-1}(|X|) + C^2 b.
 \end{aligned}$$

Par (2.1.3) on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n'^2)}{\phi(k)^2} < \infty$$

qui implique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\frac{X'_k - m_k}{\phi(k)} \right]^2 < \infty$$

Par conséquent, la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X'_n - m_n}{\phi(n)}$$

converge par lemme de Kronecker

□

2.2 Lois fortes des grands nombres pour les différences de martingale

Cette partie du Chapitre est consacrée à la présentation des principaux résultats obtenus sur la loi forte des grands nombres pour des suites de différence de martingale.

Théorème 2.2.1 (Chow(1960,1967)). *Soit $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une suite de différence de martingale. Soit C_n une suite positive décroissante. Pour $\alpha \geq 1$ et $2\alpha \geq \beta > 0$, s'il existe i_0 tel que pour $i \geq i_0$*

$$i^{\alpha-1} c_i^{2\alpha-\beta} \leq A \quad \sum_{k=i}^{\infty} c_k^{2\alpha} k^{\alpha-2} \leq A c_i^{\beta} \quad (2.2.1)$$

où A est une constante indépendante de i .

Si

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\beta} \mathbb{E}|X_k|^{2\alpha} < \infty \quad (2.2.2)$$

alors :

$$c_n \sum_{k=1}^n X_k \longrightarrow 0 \quad p.s$$

En particuliers si

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1+\alpha)} \mathbb{E}|X_k|^{2\alpha} < \infty$$

alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \longrightarrow 0 \quad p.s$$

intuitivement, si on prends $c_n = n^{\frac{1-\alpha}{2\alpha-\beta}}$ pour $\beta > 2$, $\alpha > 1$ et $2\alpha \geq \beta > 0$ et supposons que $\sup_{k \geq 1} \mathbb{E}|X_k|^{2\alpha} < \infty$ alors les conditions (2.2.1) , (2.2.2) sont vérifiées.

À présent on passe au développement de l'article "**Limit theorems for identically distributed martingale difference**" [10]. Sous la condition notée par (A) :

On a le théorème suivant :

Théorème 2.2.2. Soient $\{X, X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ suite de différences de martingale identiquement distribuées et h, g satisfaisent l'Hypothèse A. Posons

$$m_k = \mathbb{E}[X_k \mathbb{I}_{\{|X_k| \leq \phi(k)\}} | \mathcal{F}_{k-1}]$$

Si

$$\mathbb{E}[\phi^{-1}(|X|)] < \infty \quad \text{avec } \phi^{-1} \text{ l'inverse de } \phi \quad (2.2.3)$$

alors

$$\frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{h(k)} (X_k - m_k) \longrightarrow 0 \quad p.s \quad (2.2.4)$$

Démonstration. Pour tout n , posons $X'_n = X_n \mathbb{I}_{\{|X_n| \leq \phi(n)\}}$, on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_k \neq X'_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_k| \geq \phi(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\phi^{-1}(|X|) \geq k) \leq \mathbb{E}[\phi^{-1}(|X|)] < \infty \quad (*) \end{aligned}$$

Pour $(*)$ on a utilisé la Remarque (2.1.1).

Ainsi les deux suites $(X_n)_{\{n \geq 1\}}$ et $(X'_n)_{\{n \geq 1\}}$ sont équivalentes, il suffit alors démontrer que

$$\frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{h(k)} (X'_k - m_k) \rightarrow 0 \text{ p.s} \quad (2.2.5)$$

En utilisant le Théorème de Loève (1978) 3.2, on se ramène à montrer que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X'_n - m_n)^2}{\phi^2(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi^2(n)} \mathbb{E}(X_n'^2 + m_n^2 - 2X'_n m_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi^2(n)} (\mathbb{E}(X_n'^2) + \mathbb{E}^2(X'_n) - 2\mathbb{E}(X'_n \mathbb{E}(X'_n / \mathcal{F}_{n-1}))) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi^2(n)} (\mathbb{E}(X_n'^2) - \mathbb{E}^2(X'_n)) \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi^2(n)} \mathbb{E} X^2 \mathbb{I}_{\{|X| \leq \phi(n)\}} \\ &\leq Ck_0 + C\mathbb{E} \left[\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{X^2}{\phi^2(n+1)} \mathbb{I}_{\{|X| \leq \phi(n)\}} \right] \\ &\leq Ck_0 + C\mathbb{E} \left[X^2 \int_{\phi^{-1}(|X|)}^{\infty} \frac{1}{\phi^2(x)} dx \right] \\ &\leq Ck_0 + C(a\mathbb{E}\phi^{-1}(|X|) + b) < \infty \quad (**) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

sans préciser la constante C (qui n'est pas forcément la même pour chaque inégalité)

Pour $(**)$ on a utilisé le point (ii) de l'Hypothèse (A).

Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X'_n - m_n)}{\phi(n)} \text{ converge p.s}$$

Et par le lemme de Kronecker, on a :

$$\frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{h(k)} (X'_k - m_k) \rightarrow 0 \text{ p.s}$$

□

Corollaire 2.2.1. *soit $\{X, X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une suite de différences de martingale. Pour $\alpha > 0, \beta > \frac{1}{2}$
Si*

$$\mathbb{E} [\phi^{-1}(|X|)] < \infty \quad (2.2.7)$$

où ϕ^{-1} est l'inverse de $\phi(x) = x^\beta \log^\alpha x$, qui vérifie l'Hypothèse A. alors on a

$$\frac{1}{\log^\alpha n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta} X_k \rightarrow 0 \quad p.s \quad (2.2.8)$$

et

$$\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\log^\alpha k} X_k \rightarrow 0 \quad p.s \quad (2.2.9)$$

Démonstration. Pour (2.2.8), on a $g(x) = \log^\alpha x$ et $h(x) = x^\beta$, et pour (2.2.9), on prend $g(x) = x^\beta$ et $h(x) = \log^\alpha x$. □

Corollaire 2.2.2. *Soient $\{X, X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une suite de différences de martingale. Pour $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ et $\alpha + \beta > \frac{1}{2}$, avec la fonction $\phi(x) = x^{\alpha+\beta}$ qui vérifie les conditions de l'Hypothèse(A) :*

i- ϕ est strictement croissante dans $[0, \infty)$

ii- $\phi^2(s) \int_s^\infty \frac{1}{\phi^2(x)} dx = \frac{s}{2\alpha+\beta-1}$

iii- $\frac{\phi(x+1)}{\phi(x)} = \frac{(x+1)^{-1/(\alpha+\beta)}}{x^{-1/(\alpha+\beta)}} = (1 + \frac{1}{x})^{\alpha+\beta} \leq 2$, pour $x \geq 1$ $M = 2, k_0 = 1$

Si :

$$\mathbb{E} (|X|^{1/(\alpha+\beta)}) < \infty \quad (2.2.10)$$

alors :

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta} X_k \rightarrow 0 \quad p.s \quad (2.2.11)$$

Démonstration. il suffit de prendre $h(x) = x^\alpha$ et $g(x) = x^\beta$. □

Remarque 2.2.1. *Si on prend $\beta = 0, \alpha = 1$ on peut appliquer la loi forte des grands nombres de Kolmogorov, et si $\beta = 0, \alpha > \frac{1}{2}$ on applique la loi forte des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund*

Corollaire 2.2.3. *soit $\{X, X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une suite de différences de martingale. Pour $\alpha \geq 1, \beta > 2$ et $2\alpha \geq \beta > 0$ avec $\phi(x) = x^{\alpha-1/2\alpha-\beta}$ qui vérifie les conditions de Hypothèse (A) :*

i- ϕ est strictement croissante dans $[0, \infty)$

ii- $\phi^2(s) \int_s^\infty \frac{1}{\phi^2(x)} dx = \frac{2-\beta}{2\alpha-\beta} s$

iii- $\frac{\phi(x+1)}{\phi(x)} = 1 + \frac{1}{x^{\alpha-1/2\alpha-\beta}} \leq 2$ pour $x \geq 1$ $M = 2$ $k_0 = 1$

Si

$$\mathbb{E} \left(|X|^{\frac{2\alpha-\beta}{1-\alpha}} \right) < \infty \quad (2.2.12)$$

alors

$$n^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha-\beta}} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow 0 \text{ p.s} \quad (2.2.13)$$

Remarque 2.2.2. sous la condition du Corollaire (2.2.3), et pour $\frac{2\alpha-\beta}{\alpha-1} < 2\alpha$ ce corollaire améliore le Théorème de Chow (2.2.1)

2.2.1 Vitesse de convergence de loi forte des grands nombres

La vitesse de convergence dans la loi forte des grands nombres est généralement l'étude des majorations fines de la queue de la fonction de répartition des sommes partielles. Dans cette partie du travail, on considère les deux hypothèses suivantes notées B (resp C)

Hypothèse B

Soient l et ϕ deux fonctions positives satisfaisant les conditions suivantes :

- i. pour $d \geq 0$, ϕ strictement croissante, $l(x)/\phi(x)$ est monotone $l(x)/\phi(x)^2$ est non croissante sur $[d, \infty)$ dans $[0, \infty)$.
- ii. ils existent des constantes a et b tel que

$$\phi^2(s) \int_s^\infty \frac{l(x)}{\phi^2(x)} dx \leq a s l(s), \quad s > d$$

et

$$\phi(s) \int_d^s \frac{l(x)}{\phi(x)} dx \leq a s l(s) + b, \quad s > d$$

- iii. ils existent un M et un entier positif k_0 tel que

$$\frac{\phi(x+1)}{\phi(x)} \leq M, \quad \frac{l(x)\phi^2(x+1)}{l(x+1)\phi^2(x)} \leq M, \quad x \geq k_0$$

Hypothèse C :

Soient l et ϕ deux fonctions vérifiant les conditions suivantes :

- i. pour $d \geq 0$ et $p > 2$, ϕ est strictement croissante, $xl(x)/\phi(x)$ est monotone et $x^{p/2}l(x)/\phi^p(x)$ est non croissante sur $[d, \infty)$ dans $[0, \infty)$.
- ii. pour $p > 2$, ils existent des constantes a et b tel que :

$$\phi^p(s) \int_s^\infty \frac{l(x)x^{p/2}}{\phi^p(x)} dx \leq as^{1+\frac{p}{2}}l(s) + b, \quad s > d$$

et

$$\phi(s) \int_d^s \frac{xl(x)}{\phi(x)} dx \leq as^2l(s) + b, \quad s > d$$

- iii. ils existent un réel M et un entier positif k_0 tel que

$$\frac{\phi(x+1)}{\phi(x)} \leq M, \quad \frac{l(x)\phi^{p/2}(x+1)}{l(x+1)\phi^{p/2}(x)} \leq M, \quad x \geq k_0$$

Théorème 2.2.3. Soit $\{X, X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une suite de différences de martingale identiquement distribuées, et l, ϕ satisfaisant l'Hypothèse (B). Alors pour tout $r > 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(n)}{n} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j X_k \right| \geq r\phi(n) \right) < \infty$$

si la condition suivante est vérifiée

$$\mathbb{E} [\phi^{-1}(|X|)l[\phi^{-1}(|X|)]] < \infty$$

avec ϕ^{-1} l'inverse de ϕ

Démonstration. Pour $1 \leq k \leq n$, soit

$$X'_{nk} = X_k \mathbb{I}_{\{|X_k| \leq \phi(n)\}}, \quad X''_{nk} = X_k \mathbb{I}_{\{|X_k| > \phi(n)\}} \quad (2.2.14)$$

il suffit alors de démontrer que pour tout $r > 0$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(n)}{n} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j (X'_{nk} - \mathbb{E}(X'_{nk} | \mathcal{F}_{k-1})) \right| \geq r\phi(n) \right) < \infty \quad (2.2.15)$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(n)}{n} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j (X''_{nk} - \mathbb{E}(X''_{nk} | \mathcal{F}_{k-1})) \right| \geq r\phi(n) \right) < \infty \quad (2.2.16)$$

Comançons par prouver (2.2.15), en utilisant l'inégalité de Doob (1.1.1) et le point(ii) de l'Hypothèse (B) .

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(n)}{n} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j (X'_{nk} - \mathbb{E}(X'_{nk} | \mathcal{F}_{k-1})) \right| \leq r \phi(n) \right) \\
 & \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(n)}{n \phi^2(n)} \mathbb{E} \sum_{k=1}^n (X'_{nk} - \mathbb{E}(X'_{nk} | \mathcal{F}_{k-1}))^2 \\
 & \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(n)}{\phi^2(n)} \mathbb{E} X^2 \mathbb{I}_{\{|X| \leq \phi(n)\}} \\
 & \leq C \left(k_0 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{l(n)}{\phi^2(n)} \mathbb{E} X^2 \mathbb{I}_{\{|X| \leq \phi(n)\}} \right) \\
 & \leq C \left(k_0 + \mathbb{E}(X^2 \int_{\phi^{-1}|X|}^{\infty} \frac{l(x)}{\phi^2(x)} dx) \right) \\
 & \leq C k_0 + C(a \mathbb{E}[\phi^{-1}(X) l[\phi^{-1}(X)]] + b) < \infty
 \end{aligned}$$

sans préciser la constante C (qui n'est pas forcément la même pour chaque inégalité) et pour (2.2.16) utilisons le point (ii) de l'Hypothèse(B) on a :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(n)}{n} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j (X''_{nk} - \mathbb{E}(X''_{nk} | \mathcal{F}_{k-1})) \right| \geq r \phi(n) \right) \\
 & \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(n)}{\phi(n)} \mathbb{E} |X| \mathbb{I}_{\{|X| > \phi(n)\}} \\
 & = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(n)}{\phi(n)} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} X \mathbb{I}_{\{\phi(k) < |X| \leq \phi(k+1)\}} \\
 & \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \phi(k+1) \mathbb{P}(\phi(k) < |X| \leq \phi(k+1)) \sum_{n=1}^k \frac{l(n)}{\phi(n)} \\
 & \leq C + C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \mathbb{P}(\phi(k) < |X| \leq \phi(k+1)) \phi(k) \int^k \frac{l(x)}{\phi(x)} dx \\
 & \leq C + C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \mathbb{P}(\phi(k) < |X| \leq \phi(k+1)) (a k l(k) + b) \\
 & \leq C + C(a \mathbb{E}[\phi^{-1}(X) l[\phi^{-1}(X)]] + b) < \infty
 \end{aligned}$$

sans préciser la constante C (qui n'est pas forcément la même pour chaque inégalité) $\square$

Corollaire 2.2.4. Soient $\{X, X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$, une suite de différences de martingale et ϕ satisfait l'Hypothèse (B). Si :

$$\mathbb{E} [\phi^{-1}|X|] < \infty$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j X_k \right| \geq r\phi(n) \right) < \infty \quad (2.2.17)$$

Remarque 2.2.3. Le corollaire (2.2.4) montre la généralisation de Spitzer de lois fortes des grands nombres (voir Spitzer [12]), qui considère des v.a.r.i.i.d et donne la condition suivante : $\forall r > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j X_k \right| \geq rn \right) < \infty$$

si et seulement si $\mathbb{E}(X_i) = 0$.

Évidemment, si on choisit $\phi(x) = x$, alors la condition (ii) de l'Hypothèse (B) n'est pas vérifiée, la condition $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ n'est pas suffisante. Maio et al [9] on obtenu le résultat (2.2.17) pour les différences de martingale sous la condition $\mathbb{E}(|X| \log^+(|X|)) < \infty$.

Le Corollaire suivant est obtenu par Mai et al [9]

Corollaire 2.2.5. Soit $\{X, X_n, \mathcal{F}_n, n \leq 1\}$ et ϕ satisfait l'Hypothèse (C) une suite de différence martingale, posons $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ pour $1 \leq p < 2$ puis pour tout $0 \leq \alpha < 2$ avec $\alpha \leq p$ (si $p = \alpha$ on suppose $p = \alpha \neq 1$), on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p/\alpha-2} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j X_k \right| \geq rn^{1/\alpha} \right) < \infty \quad \text{pour tout } r > 0.$$

Démonstration. en considérant $\phi(x) = x^{1/\alpha}$, $l(x) = x^{p/1-\alpha}$, qui vérifie on trouve le résultat. $\square$

Théorème 2.2.4. Soient $\{X, X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une suite de différences de martingale identiquement distribuées et satisfait Hypothèse (C), pour tout $r > 0$ Si :

$$\mathbb{E} \left[[\phi^{-1}(X)]^{1+p/2} l[\phi^{-1}(X)] \right] < \infty, \quad \text{pour } p > 2$$

alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(n) \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j X_k \right| \geq r\phi(n) \right) < \infty$$

Démonstration. Soient $(X'_n)_{(n \geq 1)}$ et $(X''_n)_{(n \geq 1)}$ définis en (2.2.14).

Utilisons l'inégalité de Doob (1.1.1), l'inégalité de Burkholder (1.1.2), C_r -inégalité (3.1) et le point (ii) de l'Hypothèse (C).

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\infty} l(n) \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n (X'_{nk} - \mathbb{E}(X'_{nk} | \mathcal{F}_{k-1})) \right| \leq r\phi(n) \right) \\
 & \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l(n)}{\phi^p(n)} \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n (X'_{nk} - \mathbb{E}(X'_{nk} | \mathcal{F}_{k-1})) \right|^p \\
 & \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l(n)}{\phi^p(n)} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \mathbb{E} [(X'_{nk} - \mathbb{E}(X'_{nk} | \mathcal{F}_{k-1}))^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \right]^{p/2} \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{k=1}^n \mathbb{E} |X'_{nk} - \mathbb{E}(X'_{nk} | \mathcal{F}_{k-1})|^p \right\} \\
 & \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(n)n^{p/2}}{\phi^p(n)} \mathbb{E} |X|^p \mathbb{I}_{\{|X| \leq \phi(n)\}} \\
 & \leq C + C \mathbb{E} \left(|X|^p \int_{\phi^{-1}(|X|)}^{\infty} \frac{l(x)x^{p/2}}{\phi^p(x)} dx \right) \\
 & \leq C + Ca \mathbb{E} \left([\phi^{-1}(X)]^{1+\frac{p}{2}} l[\phi^{-1}(X)] \right) < \infty
 \end{aligned}$$

sans préciser la constante C (qui n'est pas forcément la même pour chaque inégalité)

Similaire pour :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\infty} l(n) \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n (X''_{nk} - \mathbb{E}(X''_{nk} | \mathcal{F}_{k-1})) \right| \geq r\phi(n) \right) \\
 & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nl(n)}{\phi(n)} \mathbb{E} |X| \mathbb{I}_{\{|X| > \phi(n)\}} \\
 & = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nl(n)}{\phi(n)} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E} |X| \mathbb{I}_{\{\phi(k) < |X| \leq \phi(k+1)\}} \\
 & \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \phi(k+1) \mathbb{P}(\phi(k) < |X| \leq \phi(k+1)) \sum_{n=1}^k \frac{nl(n)}{\phi(n)} \\
 & \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\phi(k) < |X| \leq \phi(k+1)) \phi(k) \int_1^k \frac{xl(x)}{\phi(x)} dx \\
 & \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\phi(k) < |X| \leq \phi(k+1)) \phi(k+1) (ak^2l(k) + b) \\
 & \leq C \left(a \mathbb{E} [\phi^{-1}(X)]^2 l[\phi^{-1}(X)] + b \right) < \infty
 \end{aligned}$$

sans préciser la constante C (qui n'est pas forcément la même pour chaque inégalité) $\square$

Corollaire 2.2.6. *Soit $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \leq 1\}$ une suite de différences martingale identiquement distribuées*

Si :

$$\mathbb{E} \left([\phi(X)]^{1+p/2} l[\phi^{-1}(X)] \right) < \infty, \text{ pour } p > 4$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{\alpha} n}{n} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j X_k \right| \leq r \sqrt{n \log n} \right) < \infty \text{ pour tout } r > 0$$

Démonstration. En considérant $\phi(x) = \sqrt{x \log x}, l(x) = \log^{\alpha} x/x$ qui vérifient l'Hypothèse (C) $\square$

Loi faible des grands nombres de Kolmogorov-Feller pour le maximum des sommes pondérées

Ce dernier chapitre est consacré à l'étude de la loi faible des grands nombres de Kolmogorov-Feller pour le maximum des sommes pondérées de v.a iid en utilisant les suites presque sûrement sommables par la méthode (h,g) utilisée par Jajte(2003)[7] définie dans le Chapitre 2. Nous commençons alors par rappeler la loi faible des grands nombres et celle de Kolmogorov-Feller Notre principale référence pour ce chapitre est l'article de H.Nederi,P.Matula,M.Amini and H.Ahmadzade [11]

3.1 Lois faible des grands nombres de kolmogorov-Feller

Nous rappelons tout d'abord les conditions sous lesquelles on a la loi faible des grands nombres, la convergence ne s'applique pas pour des lois de probabilité sans espérance.

Théorème 3.1.1 (loi faible des grands nombres). *Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a i.i.d avec une espérance μ finis et soit $S_n, n \geq 1$ la suite des sommes partielles Alors :*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu$$

L'extension due à Kolmogorov-Feller de la loi faible des grands nombres revient au fait que pour certains exemples de lois de probabilité la convergence a lieu sans satisfaire la condition espérance finie.

Théorème 3.1.2 (Loi faible des grands nombres de Kolmogorov-Feller). *Supposons que $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v a i.i.d, soit la suite de somme partielle $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1$ alors :*

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}X_1\mathbb{I}_{\{|X_1| \leq n\}}}{n} \xrightarrow{p} 0$$

ssi

$$n\mathbb{P}(|X_1| > n) \longrightarrow 0$$

Pour démontrer le Théorème (3.1.2) on a besoin d'énoncer le théorème suivant (voir [6])

Théorème 3.1.3. *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a indépendentes avec $\{S_n, n \geq 1\}$ la suite de somme partielle et $\{b_n, n \geq 0\}$ une suite réelle positive croissante vers ∞ . Soit $k = 1, 2, \dots, n, n \geq 1$*

$$Y_{k,n} = X_k \mathbb{I}_{\{|X_k| \leq b_n\}}, S'_n = \sum_{k=1}^n Y_{k,n}, \mu_n = \mathbb{E}(S'_n)$$

Si

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|X_k| > b_n) \longrightarrow 0, \quad p.s \text{ quand } n \longrightarrow \infty \quad (3.1.1)$$

et

$$\frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(Y_{k,n}) \longrightarrow 0 \quad p.s \text{ quand } n \longrightarrow \infty \quad (3.1.2)$$

alors

$$\frac{S_n - \mu_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty \quad (3.1.3)$$

Si

$$\frac{\mu_n}{b_n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty \quad (3.1.4)$$

alors

$$\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty \quad (3.1.5)$$

Inversement, si on a la loi faible (3.1.3), alors on a (3.1.1) et (3.1.2)

À présent nous passons à l'illustration des résultats obtenus par H.Nederi, P.Matula, M.Amini et H.Ahmadzade [11] qui donne la condition nécessaire et suffisante pour la convergence en proba du maximum des sommes pondérées des variables aléatoires i.i.d sous l'hypothèse que la fonction $\mathbb{P}(|X_1| > x)$ soit à variation régulière d'indice $\rho \geq -2$ avec des coefficient de normalisation vérifiant les hypothèses suivantes :

Hypothèses

Soient $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions non negative et posons $\phi(y) = g(y)h(y)$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfait :

(A1) h est croissante et ϕ est strictement croissant avec $\phi([0, \infty)) = [0, \infty)$

(A2) Il existe une constante $b > 0$ tel que :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{h^2(i)} \leq b \frac{n}{h^2(n)}$$

Théorème 3.1.4. Soient g, h et ϕ , satisfaisant les conditions (A1) et (A2). Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a i.i.d tel que $\mathbb{P}(|X_1| > x) \in \mathcal{RV}(\rho)$, pour $\rho \geq -2$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} n\mathbb{P}(|X_1| > \phi(n)) = 0 \quad (3.1.6)$$

ssi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \frac{X_i - m_1(n)}{h(i)} \right| > \varepsilon g(n) \right) = 0, \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \quad (3.1.7)$$

Démonstration. Montrons que (3.1.6) $\implies$ (3.1.7) : pour $k \geq 1$, on défine

$$S_k = \sum_{i=1}^k \frac{X_i - m_1(n)}{h(i)}, S'_k = \sum_{i=1}^k \frac{X'_i - m_1(n)}{h(i)}$$

où $X'_i = X_i \mathbb{I}_{\{|X_i| \leq \phi(n)\}}$. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > \varepsilon g(n) \right) &\leq \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \frac{X_i \mathbb{I}_{\{|X_i| > \phi(n)\}} + X_i \mathbb{I}_{\{|X_i| \leq \phi(n)\}} - m_1(n)}{h(i)} \right| > \varepsilon \phi(n) \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \frac{X_i \mathbb{I}_{\{|X_i| > \phi(n)\}}}{h(i)} \right| > \varepsilon \phi(n) \right) + \\ &\quad \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \frac{X'_i - m_1(n)}{h(i)} \right| > \varepsilon \phi(n) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(|X_i| > \phi(n)) + \mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S'_k| > \varepsilon g(n)) = \text{II} + \text{III} \end{aligned}$$

Par (3.1.6) on voit facilement que II $\longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. Par l'inégalité de

Kolmogorov Théorème (3.3) et (A2) on a :

$$\begin{aligned}
 \text{III} &= \mathbb{P} \left(\left| \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k \frac{X'_i - m_1(n)}{h(i)} \right| > \varepsilon g(n) \right) \\
 &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 g^2(n)} \sum_{i=1}^n \frac{\text{Var}(X'_i)}{h^2(i)} \\
 &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 g^2(n)} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E} X_i'^2}{h^2(i)} \\
 &\leq \frac{b}{\varepsilon^2 \phi^2(n)} \mathbb{E} X_1'^2 \\
 &= \frac{b}{\varepsilon^2 \phi^2(n)} \mathbb{E} |X_1|^2 \mathbb{I}_{\{|X_1| \leq \phi(n)\}} \\
 &\leq C \frac{n}{\phi^2(n)} \int_0^{\phi(n)} y \mathbb{P}(|X_1| > y) dy
 \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Comme $\mathbb{P}(|X_1| > x) \in \mathcal{RV}(\rho)$, par le Théorème de Bingham et al(1987)[2], il suit qu'il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\int_0^{\phi(n)} y \mathbb{P}(|X_1| > y) dy \leq C \phi^2(n) \mathbb{P}(|X_1| > \phi(n))$$

Donc par (3.1.8) et (3.1.6) on obtient (3.1.7).

Maintenant on montre que (3.1.7) $\implies$ (3.1.6).

$$\begin{aligned}
 \frac{X_n - m_1(n)}{h(n)} &= S_n - S_{n-1} \\
 \frac{|X_n - m_1(n)|}{h(n)} &= |S_n - S_{n-1}| \leq |S_n| + |S_{n-1}|
 \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

On utilisant (A1) et (3.1.9) on peut facilement trouver que :

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{|X_k - m_1(n)|}{\phi(n)} \leq \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{g(n)} \frac{|X_k - m_1(n)|}{h(k)} \leq 2 \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{g(n)} |S_k|$$

De plus :

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k - m_1(n)| > \varepsilon \phi(n) \right) \leq \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > \frac{\varepsilon}{2} g(n) \right)$$

On a

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k - m_1(n)| > \varepsilon \phi(n) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n |X_k - m_1(n)| > \varepsilon \phi(n) \right) \\
 &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n |X_k - m_1(n)| \leq \varepsilon \phi(n) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - (1 - \mathbb{P}(|X_1 - m_1(n)| > \varepsilon \phi(n)))^n \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Par le Théorème (2.1) page 270 de A.Gut [6] et le Lemme (3.2) on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{P}(|X_n - m_1| > \phi(n)\varepsilon) = 0 \quad (3.1.10)$$

d'autre part $m_1(n) = \mathbb{E}(X_1 \mathbb{I}_{\{|X_1| \leq \phi(n)\}})$ alors $|m_1(n)| \leq \phi(n)$

et $|X_1 - m_1(n)| \geq |X_1| - |m_1(n)|$

on trouve

$$\mathbb{P}(|X_n - m_1| > \varepsilon \phi(n)) \geq \mathbb{P}(|X_n| > (1 + \varepsilon)\phi(n)) \quad (3.1.11)$$

Parsuite (3.1.10) et (3.1.11) impliquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{P}(|X_n - m_1| > \phi(n)) = 0$$

□

Corollaire 3.1.1. Soient g, h, ϕ satisfaisant les conditions (A1), (A2), soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a i.i.d tel que $\mathbb{P}(|X_1| > x) \in \mathcal{RV}(\rho)$, pour $\rho \geq -2$ et $\{\frac{\phi(n)}{n}\}$ une suite croissante. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n)\mathbb{P}(|X_1| > \phi(n)) = 0$ alors (3.1.7) est satisfaite.

Démonstration. Comme

$$n\mathbb{P}(|X_1| > \phi(n)) = \frac{n}{\phi(n)}\phi(n)\mathbb{P}(|X_1| > \phi(n))$$

et

$$\frac{\phi(n)}{n} \geq \phi(1) \quad , \forall n \geq 1$$

donc

$$0 \leq n\mathbb{P}(|X_1| > \phi(n)) \leq \phi(1)\phi(n)\mathbb{P}(|X_1| > \phi(n))$$

et puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n)\mathbb{P}(|X_1| > \phi(n)) = 0$

donc

$$n\mathbb{P}(|X_1| > \phi(n)) \rightarrow 0 \quad p.s$$

et le résultat est obtenu en appliquant le Théorème (3.1.4)

□

3.2 Corollaires et remarques

Quelques remarques sur les fonctions qui vérifient les conditions (A1) et (A2) sont les suivantes :

Remarque 3.2.1. *considérons la fonction puissance $h(x) = x^\alpha$, la condition (A2) est valable pour $0 \leq \alpha < 1/2$.
 $h(x) = (\ln(x))^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfait aussi (A2) (en précisant $h(x) = (\ln(x))^\alpha$ pour $x \geq e$ et $h(x) = \frac{x}{e}$ pour $0 \leq x < e$). Ceci en utilisant la proposition de Bingham (1.2.1)*

Corollaire 3.2.1. *Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite v a i.i.d tel que $\mathbb{P}(|X_1| > x) \in \mathcal{RV}(\rho)$, pour $\rho \geq -2$. Alors pour $0 \leq \alpha < 1/2$ et $\beta > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{P}(|X_1| > n^{\alpha+\beta}) = 0$$

Ssi

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{n^\beta} \sum_{i=1}^k \frac{X_i(n) - m_1(n)}{k^\alpha} \xrightarrow{p} 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

où $h(x) = x^\alpha$, $g(x) = x^\beta$.

Exemples 3.2.1. *Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a indépendentes avec une fonction de répartition donnée par :*

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{e}{x}\right)^p \frac{1}{(\ln(x))^q} & \text{si } x > e, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $p \leq 2$ et $q > 0$.

$$\mathbb{P}(|X_1| > x) = 1 - \mathbb{P}(|X_1| \leq x) = 1 - \mathbb{P}(-x \leq X_1 \leq x) = 1 - F_{X_1}(x) + F_{X_1}(-x)$$

$$= \begin{cases} 2 - \left(\frac{e}{-x}\right)^p \frac{1}{(\ln(-x))^q} & \text{si } x < -e \\ 1 & \text{si } -e \leq x \leq e \\ \left(\frac{e}{x}\right)^p \frac{1}{(\ln(x))^q} & \text{si } x > e \end{cases}$$

or pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(tx)}{U(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(|X_1| > tx)}{\mathbb{P}(|X_1| > x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^q}{(\ln tx)^q t^p} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{\ln tx} \right)^q t^{-p} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\ln t}{\ln x}\right)} t^{-p} = t^{-p} \end{aligned}$$

d'où $\mathbb{P}(|X_1| > x) \in \mathcal{RV}(-p)$.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_1| > n^{\alpha+\beta}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{e}{n^{\alpha+\beta}} \right)^p \frac{1}{(\ln n^{\alpha+\beta})^q} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^p n^{1-p(\alpha+\beta)} \frac{1}{(\alpha + \beta \ln n)^q} = 0\end{aligned}$$

pour $1 - p(\alpha + \beta) < 0$

d'où la condition $p(\alpha + \beta) > 1$

Corollaire 3.2.2. Soit $\{X_n, n \leq 1\}$ une suite de variable aléatoire i.i.d tel que $\mathbb{P}(|X_1| > x) \in \mathcal{RV}(p)$ pour $p \geq -2$. Alors pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{P}(|X_1| > n^\beta (\ln(n))^\alpha)$$

Si

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{n^\beta} \sum_{i=1}^k \frac{X_i - m_1(n)}{(\ln(i))^\alpha} \xrightarrow{p} 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Exemples 3.2.2.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{P}(|X_1| > n^\beta \ln(n)^\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \mathbb{P}(|X_1| > n^\beta \ln(n)^\alpha)}{n^{\beta\gamma} \ln(n)^{\alpha\gamma}} n^{\beta\gamma} \ln(n)^{\alpha\gamma} \right) \\ &= \frac{n}{n^{\beta\gamma} \ln(n)^{\alpha\gamma}} = 0\end{aligned}$$

avec $\beta\gamma > 1$.

Appendice

On rappelle dans cet Appendice quelques lemmes et théorèmes utiles.

Théorème 3.1. Soient $r > 0$, X et Y deux v.a.r. Supposons que $\mathbb{E}|X|^r < \infty$ et $\mathbb{E}|Y|^r < \infty$. Alors

$$\mathbb{E}|X + Y|^r \leq c_r(\mathbb{E}|X|^r + \mathbb{E}|Y|^r),$$

avec

$$c_r = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq 1, \\ 2^{r-1} & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

Théorème 3.2 (Loève 1978). si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{b_n^2} < \infty$$

avec $b_n \uparrow \infty$, alors

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{\infty} \{X_k - \mathbb{E}(X_k | X_1, \dots, X_{k-1})\} \longrightarrow 0 \text{ p.s.}$$

soient X un v a et x varie on $[0, +\infty)$. Si $\mathbb{E}|X|^p < \infty$, $0 < p < 2$

$$\mathbb{P}(|X_n| > x) < \mathbb{P}(|X| > x)$$

ou

$$\mathbb{P}(|X_n| > x/X_1, \dots, X_{n-1}) < \mathbb{P}(|X| > x/X_1, \dots, X_{n-1})$$

avec $p \neq 1$ ou $p = 1$ Alors :

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^n (X_k - \eta_k) \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

avec $\eta_k=0$ où $\eta_k = \mathbb{E}(X_k/X_1, \dots, X_{n-1})$ à condition que $0 < p < 1$ or $1 \leq p < 2$.

Théorème 3.3 (inégalité de Kolmogorov). Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a. indépendante avec $\mathbb{E}X_n = 0, \forall n \geq 1$ et supposons que $\text{Var}(X_k) < \infty$ pour tout k . Alors, pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leq k \leq n} |S_k| > x) \leq \frac{\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)}{x^2}$$

En particulier si la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ est identiquement distribuée, alors

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leq k \leq n} |S_k| > x) \leq \frac{n \text{Var}(X_1)}{x^2}$$

Théorème 3.4. (Critère de convergence de Kolmogorov) Soient $X, X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec $S_n, n \geq 1$ la suite des sommes partielles.

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n) < \infty$$

alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \mathbb{E}(X_n)) < \infty \quad p.s$$

Et, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n) < \infty$$

alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ converge p.s}$$

Lemme 3.1. (Lemme de Kronecker)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a., $a_0 = 0$ et $\{a_n, n \geq 1\}$ une suite des réels positifs $\nearrow \infty$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{a_k} \text{ converge p.s} \implies \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s} 0$$

Lemme 3.2. Pour $n \geq 1$, soit $0 \leq a_n < \delta < 1$, alors

$$(1 - a_n)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \iff na_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

De plus, dans les deux cas, étant donné $\delta \in (0, 1)$, on a $na_n < \delta(1 - \delta) < 1$ pour n assez grand, et

$$(1 - \delta)na_n \leq 1 - (1 - a_n)^n \leq na_n/(1 - \delta).$$

Lemme 3.3. Supposons $a_n \in \mathbb{R}, n \geq 1$. Si $a_n \rightarrow a$ quand $n \rightarrow \infty$ alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow a \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Si, $w_k \in \mathbb{R}^+, k \geq 1$, et $B_n = \sum_{k=1}^n w_k, n \geq 1$, alors :

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n w_k a_k \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Lemme 3.4. Pour $\alpha > 0, n \geq 2$,

$$\frac{1}{\alpha n^\alpha} \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{\alpha(n-1)^\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{\alpha n^\alpha}$$

cependant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}$$

Conclusion

Dans ce mémoire on s'est focalisé sur l'étude des lois des grands nombres de kolmogorov-Feller en utilisant les suites sommables par la méthode (h,g) employée par Jajte(2003)[7] où il a exhibé la condition nécessaire et suffisante pour la convergence p.s la somme des v.a i.i.d. A cet effet Matula et al ont donné la condition nécessaire et suffisante de la convergence en probabilité du maximum des sommes pondérées de v.a i.i.d sous l'hypothèse que la fonction $\mathbb{P}(|X| > x)$ soit à variation régulières d'indice ($\rho \geq -2$).

Nous avons aussi étudié la convergence presque sûre des sommes de différences de martingale traitées par Miao et al [9] leur travail est la généralisation de plusieurs résultats antérieurs parmi eux la loi forte de Marcinkiewicz-Zygmund et d'autres .

Ces deux articles nous ont conduits à rappeler l'essentiel sur les martingales, différences de martingale ainsi que les fonctions à variations régulières.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'étude des lois des grands nombres pour des différences de martingale identiquement distribuées ainsi que la généralisation de la loi de Kolmogorov-Feller pour le maximum des sommes pondérées de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées.

Abstract

The goal of this master thesis is to study the laws of large numbers for differences of identically distributed martingale. The generalisation of Kolmogorov-Feller law is also investigated for the maximum of weighted sums of independent and identically distributed real random variables.

Bibliographie

- [1] Boukhalifa, A. (2019). *Quelques lois fortes des grands nombres. Mémoire de Master.*
- [2] Bingham, N.H., G.M. Goldie, and T. Teugels. 1987. *Régulière varying.* Cambridge University Press Cambridge.
- [3] Chow, Y. S. (1960). *A martingale inequality and the law of large numbers. Proceedings of the American Mathematical Society 11 :107–11.*
- [4] Chow, Y. S. (1967). *On a strong law for martingales. Annals of Annals of Mathematical Statistics 38 :610.*
- [5] Fazekas, I., P. Matuła, and M. Ziemba. 2017. *A note on the weighted strong law of large numbers under general conditions, Publicationes Mathematicae Debrecen, 90 (3-4), 373–386.*
- [6] Gut, A. (2013). *Probability : A Graduate Course.*
- [7] Jajte, R. (2003). *On the strong law of large numbers. Annals of Probability 31 (1) :409–412.*
- [8] Loève, M. (1978). *Probability theory : II. 4th edn. New York, Heidelberg : Springer-Verlag.*
- [9] Miao, Y., Yang, G. Y., Stoica, G. (2015). *On the rate of convergence in the strong law of large numbers for martingales. Stochastics 87 (2) :185–98.*
- [10] Maio Y., J. Mu and S. Zhang. (2020). *Limit theorems for identically distributed martingale difference. Communications in Statistics - Theory and Methods (6) :1435–45.*
- [11] Naderi, H., P. Matula, M. Amini, and H. Ahmadzade. (2018). *A version of the Kolmogorov-Feller weak law large numbers for maximal weighted sums of random variables. Communications in Statistics - Theory and Methods 48 : 5414–18.*
- [12] Spitzer, F. (1956). *A combinatorial lemma and its application to probability theory. Transactions of the American Mathematical Society 82 :323–39.*
- [13] Stoica, G. (2005). *Series of moderate deviation probabilities for martingales. Journal of Mathematical Analysis and Applications 336 :759–63.*