

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEM



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Biomathématique et Modélisation

présenté par

KHENDAF Manel

Soutenu le : 29 / 11 / 2020

**Mathématiques appliquées à quelques
modèles épidémiologiques**

Soutenu devant le jury composé de :

M. B. ABDELLAOUI	Professeur, Université de Tlemcen	Président
M. K. YADI	Professeur, Université de Tlemcen	Examinateur
M. M. BOUIZEM	MCB, Université de Tlemcen	Examinateur
M. A. MOUSSAOUI	Professeur, Université de Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire: 2019-2020

Résumé

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre général de l'étude de la dynamique des populations. On s'intéresse à la modélisation et l'analyse mathématique de quelques modèles en épidémiologie en particulier le modèle SIR avec dynamique vitale, le modèle $SIRS$ avec immunité temporaire et un modèle SIR avec transmission verticale ainsi qu'une version non-linéaire d'un modèle $SIRVS$ structuré en âge de rétablissement et en âge de vaccination.

Abstract

This dissertation is part of the general study of population dynamics. It consists of modelling and mathematical analysis of some models in epidemiology in particular the *SIR* model with vital dynamics, the *SIRS* model with temporary immunity and an *SIR* model with vertical transmission, as well as a non-linear version of a structured *SIRVS* model in recovery age and vaccination age.

Ce mémoire est dédié à

Maman et Papa, *sans lesquels*

je n'aurais jamais vu le jour,

A mes frères, mes amis et

collègues qui ont été toujours à

mes cotés

A une personne très chère à

moi "N.M.E".

*"If you can't explain it simply, you
don't understand it well enough ."*
Albert Einstein

Remerciement

Tout d'abord, je remercie DIEU de m'avoir donnée la motivation, le courage et la santé afin de parfaire ce travail.

La réalisation de ce mémoire m'a offert une expérience professionnelle et personnelle très enrichissante notamment grâce aux personnes avec lesquelles j'ai eu la chance d'interagir et d'échanger durant ces deux années, j'en remercierai ici quelques-unes.

Mes remerciements les plus sincères vont tout naturellement à mon encadreur de ce mémoire, **Mr. MOUSSAOUI Ali**, sans qui ce travail n'aurait pas pu voir le jour. Bien qu'aucun mot ne pourra être à la hauteur de ma reconnaissance, je le remercie profondément de sa confiance, de son soutien, et de sa patience sans faille pendant ces mois. Avoir effectué mon mémoire sous sa direction fût un honneur et une chance dont j'espère m'être montré digne.

Ensuite, je voudrais exprimer toute ma gratitude à **Mr. ABDELLAOUI Boumediène**, **Mr. YADI Karim** et **Mr. BOUIZEM Mohammed** pour l'honneur qu'ils m'ont fait de participer au jury de soutenance.

Un merci tout particulier à **Mr. TOUAOULA Mohammed Tarik** pour sa confiance dans ma capacité à réaliser ce travail et pour ses orientations.

Un spécial remerciement à tous les enseignants qui ont concourus dans mon cursus universitaire et qui m'ont encouragé particulièrement **Mr. ABDELLAOUI Boumediène**.

Enfin, mes derniers remerciements vont à mon trésor, mes parents, mes frères, à Mr. N.M.E, à mes proches et à tous les êtres qui ont su m'être important, pour leur soutien sans égale durant ses années.

Table des matières

1	Préliminaires	4
1.1	Quelques notions de stabilité	4
1.2	Définitions et propriétés	5
1.2.1	Ensemble ω -limite	6
1.3	Méthodes de Lyapunov, Principe d'Invariance de LaSalle	7
1.4	Théorie des graphes	9
1.5	Les espaces de Lebesgue et de Sobolev	12
1.6	Généralités sur les systèmes dynamiques	13
1.7	Principe du minimum de Pontryagin (PMP)	15
2	Connaissance de base en épidémiologie	18
2.1	Introduction	18
2.2	Brève histoire du le modèle <i>SIR</i>	18
2.3	Structure générale d'un système bilinéaire	24
2.3.1	Population totale constante	26
2.3.1.1	Cas A: Modèles épidémiques pour lesquels la matrice \tilde{A} est W -antisymétrisable	30
2.3.1.2	Cas B : Modèles épidémiques pour lesquels $-\left[\tilde{A} + \text{diag}\left(\frac{-b_1(z)}{z_1 z_1^*}, \dots, \frac{-b_n(z)}{z_n z_n^*}\right)\right] \in S_W$	32
2.3.2	Population totale non constante	38
2.4	Conclusion	41
3	Dynamique et contrôle optimal d'un modèle épidémique SIRVS structuré en âge	42
3.1	Introduction et présentation du modèle	42

TABLE DES MATIÈRES

3.2	Analyse mathématique du modèle (3.1)–(3.2)	43
3.3	Stabilité de l'état sans maladie (<i>DFSS</i>)	56
3.4	Stratégies optimales d'intervention	63
3.5	Résultats numériques	76
3.6	Discussion et conclusion	81
	Bibliographie	82

Introduction générale

La modélisation mathématique est un outil important en épidémiologie. Elle fournit une manière de bien comprendre et étudier la dynamique d'une maladie. Dans ce travail, nous étudions quelques modèles épidémiologiques qui décrivent la propagation d'une épidémie dans une population humaine.

On est particulièrement intéressé d'abord par celui qui montre le comportement de la maladie à travers différentes classes d'âge humaines ainsi qu'à travers le temps. Une hypothèse majeure en épidémiologie est que la population est divisée en un ensemble de compartiments distincts. Ces compartiments regroupent l'état des individus face à la maladie dans la population. Le modèle *SIR* général, qui est utilisé pour simuler le comportement de nombreuses maladies, se compose de trois compartiments : susceptible (*S*), infecté (*I*) et réfractaire (*R*). Depuis que le modèle *SIR* général a été développé pour la première fois en 1927 par Kermack et McKendrick sur l'épidémie de peste en Inde [35].

Notre second intérêt est d'étudier un modèle épidémique *SIRVS* structuré en âge de rétablissement et en âge de vaccination tel qu'il est proposé dans le dernier chapitre. Le modèle se compose d'un système couplé de quatre équations : deux équations différentielles ordinaires, décrivant la variation pour les susceptibles et les infectés en fonction du temps et deux équations aux dérivées partielles, décrivant la dynamique des personnes réfractaires et les personnes vaccinées en temps et en âge.

L'analyse de ce modèle nous permet d'étudier la stabilité locale et globale de l'équilibre sans maladie. Dans le cas où l'équilibre endémique existe on utilise des stratégies de contrôle optimal afin de contrôler l'épidémie.

Notations

\mathbb{N} : ensemble des nombres naturels.

\mathbb{R} : ensemble des nombres réels.

\mathbb{C} : ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{R}^{*+} :=]0, +\infty)$: ensemble des nombres réels strictement positifs.

\mathbb{R}^+ : ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

\mathbb{R}^n : $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ n fois.

\mathbb{R}_{*+}^n : $\mathbb{R}_{*+} \times \dots \times \mathbb{R}_{*+}$ n fois.

$\partial\Omega$: la frontière de Ω .

$x' = \frac{dx}{dt}$ dérivée de x par rapport à t .

$|\cdot|$: valeur absolue, ou module.

$\|\cdot\|$: norme.

$\bar{\Omega}$: la fermeture de Ω .

$\sigma(A)$: le spectre de A .

A^T : la matrice transposé de A .

$\Re(z)$: partie réelle du nombre complexe z .

$\Im(z)$: partie imaginaire du nombre complexe z .

R_0 : nombre de reproduction de base.

GAS : globalement asymptotiquement stable.

$D(A)$: le domaine de A .

Id : identité.

p.p. : presque partout.

det : déterminant.

max : maximum.

min : minimum.

sup : borne supérieure.

inf : borne inférieure.

lim : limite.

\limsup : limite supérieure.

\liminf : limite inférieure.

1.1 Quelques notions de stabilité

On considère le système autonome suivant :

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{1.1}$$

soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n avec $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction localement lipschitzienne sur Ω pour assurer l'existence et l'unicité locale. La recherche des points d'équilibre vérifiant $f(x^*) = 0$ est l'approche principale dans les systèmes dynamiques.

En pratique, on s'intéresse aux points d'équilibre qui possèdent certaines propriétés de stabilité. Cette dernière signifie que si un système est en équilibre, il restera dans cet état quand le temps varie. L'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov consiste à étudier des trajectoires du système quand l'état initial est proche d'un état d'équilibre. L'objectif de la stabilité est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires.

Définition 1.1 [4] *On dit qu'un point d'équilibre x^* est dit stable au sens de Lyapunov pour le système (1.1) si*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \|x(0) - x^*\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq 0.$$

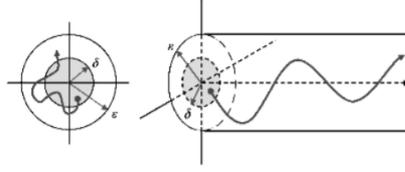


Figure 1.1: Une illustration de la stabilité au sens de Lyapunov [8].

Le point d'équilibre est dit instable s'il n'est pas stable.

Définition 1.2 (Équilibre attractif)[4] On dit que l'équilibre x^* de (1.1) est attractif si

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } \|x(0) - x^*\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

Cette définition veut dire que x^* est le point vers lequel convergent les solutions $x(t)$ si elles démarrent suffisamment près de ce point. Notons que la stabilité et l'attractivité sont deux notions différentes et qu'elles ne s'impliquent pas. D'où la définition de la stabilité asymptotique.

Définition 1.3 (Équilibre asymptotiquement stable)[4] On dit qu'un point d'équilibre x^* est localement asymptotiquement stable s'il est stable et attracteur.

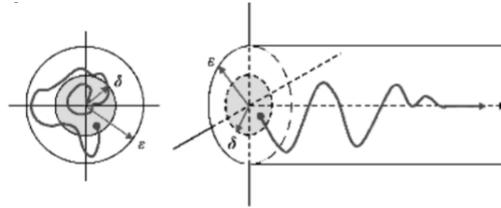


Figure 1.2: Une illustration de la stabilité asymptotique [8].

1.2 Définitions et propriétés

Définition 1.4 (Système de type Volterra)[17] Les systèmes de Volterra sont exprimé par les équations différentielles suivantes

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \Gamma\{x_j\} \quad 1 < i, j < N,$$

où $\Gamma\{x_j\}$ sont des fonctions affines :

$$\Gamma\{x_j\} = \gamma_i - \sum_{j=1}^N v_{ij} x_j.$$

Définition 1.5 [7] On dit qu'une matrice réelle A ($n \times n$) est antisymétrique si

$$A^T = -A.$$

Définition 1.6 [7] On dit qu'une matrice réelle A ($n \times n$) est W -antisymétrisable s'il existe une matrice réelle, diagonale et positive W telle que WA est antisymétrique.

Définition 1.7 [5] Une matrice réelle symétrique M est dite définie positive si $x^T Mx > 0$ pour tout x dans \mathbb{R}^n non nul. Formellement

$$M \text{ définie-positive} \iff x^T Mx > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Définition 1.8 [7] On dit qu'une matrice A ($n \times n$) est dans S_W (resp. Volterra Lyapunov stable) s'il existe une matrice réelle, diagonale et positive W telle que $WA + A^T W$ est définie positive (resp. semi-définie positive).

Définition 1.9 [5] Soit A ($n \times n$). $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ses valeurs propres. Le rayon spectrale de A est défini par :

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

Propriété 1.1 [5] Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice symétrique de taille 2×2 .

A est définie positive si ses valeurs propres sont strictement positives.

Les valeurs propres de A sont strictement positives :

1 Si et seulement si $a > 0$ et $ad - b^2 > 0$.

2 Si et seulement si les pivots sont positifs : $a > 0$ et $\frac{ac-b^2}{a} > 0$.

Sinon, si $a < 0$ et $|A| = ac - b^2 > 0$, A est définie négative ($A < 0$).

1.2.1 Ensemble ω -limite

Définition 1.10 [3] Soit p_0 un point qui appartient au domaine de définition du système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

on note l'ensemble w -limite de p_0 par

$$w(p_0) = \bigcup_{t \geq 0} \overline{\{(x(s, p_0), y(s, p_0)), \quad s \geq t\}},$$

avec $(x(s, p_0), y(s, p_0))$ les solutions de condition initiale (s, p_0) . On peut montrer que (x, y) est dans $w(p_0)$, s'il existe une suite $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $t_i \rightarrow +\infty$ quand $i \rightarrow +\infty$ tel que $(x(t_i, p_0), y(t_i, p_0)) \rightarrow (x, y)$ lorsque $i \rightarrow +\infty$.

Définition 1.11 [3] Un domaine D du plan est dit positivement invariant si quelle que soit la condition initiale $(x_0, y_0) \in D$, la trajectoire correspondante reste dans D lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Définition 1.12 [3] On appelle domaine attractant une région D du plan bornée et compacte telle que toute trajectoire partant du bord ∂D de D entre dans l'intérieur de D .

Théorème 1.1 (Poincaré–Bendixson) [3] Soit T un domaine borné attractant du plan. Toute trajectoire de T admet comme w -limite

- Soit un point d'équilibre.
- Soit une orbite périodique.
- Soit un ensemble constitué de la réunion de points d'équilibre et les orbites régulières qui les joignent (hétéroclines ou homoclines).

1.3 Méthodes de Lyapunov, Principe d'Invariance de LaSalle

Dans ce paragraphe, on va introduire quelques théorèmes de Lyapunov pour étudier la stabilité globale du point d'équilibre. On suppose que 0 est un point d'équilibre pour le système (1.1). Soit Ω un voisinage ouvert de 0 .

Définition 1.13 [7] Une fonction

$$V : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

est "semi-définie positive" dans Ω si elle est continue dans Ω , $V(0) = 0$ et

$$V(z) \geq 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

La fonction V est dite "définie positive" dans Ω si elle est semi-définie positive dans Ω et

$$V(z) > 0, \quad \forall z \in \Omega - \{0\}.$$

La fonction V est "semi-définie négative (définie négative)" dans Ω si $-V$ est semi-définie positive (définie positive) dans Ω .

Lemme 1.1 (Sylvester)[5] *La forme quadratique*

$$z^T A z = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_i z_j, \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

associée à une matrice symétrique $n \times n$ ($A = A^T$) est définie positive si

$$\det(a_{ij}, i, j = 1, \dots, s) > 0, \quad \text{pour tout } s = 1, \dots, n.$$

Considérons l'équation différentielle (1.1) où $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ (avec D un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n). On suppose que $0 \in D$ et que $f(0) = 0$.

Soient $\Omega \subset D$ un sous ensemble ouvert de D dans \mathbb{R}^n et $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Définissons \dot{V} par rapport au système (1.1) comme suit :

$$\dot{V}(z) = \text{grad}V(z) \cdot f(z), \quad z \in \Omega. \quad (1.2)$$

Si $z(t)$ est une solution de (1.1), alors la dérivée de V par rapport à $t \in \mathbb{R}_+$ est

$$\frac{d}{dt}V(z(t)) = \dot{V}(z(t)).$$

On dit que \dot{V} est la dérivée de V le long de la trajectoire de (1.1).

Théorème 1.2 (Lyapunov)[29] *S'il existe une fonction $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ définie positive sur un sous ensemble $\Omega \subset D$, telle que $0 \in \Omega$, avec \dot{V} semi-définie négative dans Ω , alors $z = 0$ est stable pour le système (1.1). Si en outre \dot{V} définie négative dans Ω , alors $z = 0$ est asymptotiquement stable pour le système (1.1), globalement dans Ω .*

Lemme 1.2 (Lyapunov)[29],[10] *Soit A une matrice réelle $n \times n$ et C une matrice symétrique définie positive, si A est une matrice stable, c'est-à-dire $\text{Re}\lambda < 0$ pour tout $\lambda \in \sigma(A)$ alors l'équation matricielle*

$$A^T B + B A = -C, \quad (1.3)$$

admet une solution définie positive B (qui est symétrique).

Comme application du Lemme 1.2, considérons le système différentiel linéaire suivant

$$\frac{dz}{dt} = A z, \quad (1.4)$$

et la fonction scalaire :

$$V(z) = z^T B z, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

D'après le Lemme 1.2, si A est stable, on peut choisir B pour que $A^T B + B A$ soit définie négative. Ainsi, la stabilité de A implique la stabilité (globale) asymptotique

de 0 pour le système (1.4).

Soit $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ une fonction définie positive sur un ensemble ouvert $\Omega \subset D$ telle que $0 \in \Omega$. On dit que V est une “fonction de Lyapunov ” pour le système (1.1) si

$$\dot{V}(z) = \text{grad}V(z) \cdot f(z) \leq 0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.5)$$

Théorème 1.3 (*Principe d’Invariance de LaSalle*)[38] Soit Ω un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n ; supposons qu’il est positivement invariant pour le système (1.1). Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 pour le système (1.1) telle que :

1 $\dot{V} \leq 0$ dans Ω .

2 Soient $E = \{z \in \Omega \mid \dot{V}(z) = 0\}$ et M le plus grand ensemble invariant contenu dans E .

Alors, toute solution bornée commençant dans Ω tend vers l’ensemble M lorsque $t \rightarrow \infty$.

Corollaire 1.1 [7] Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 1.2, si $M = \{z^*\}$ alors z^* est un point d’équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (1.1) défini sur Ω .

Corollaire 1.2 [29] Si V est une fonction de Lyapunov dans \mathbb{R}^n , minorée et telle que $V(z) \rightarrow +\infty$ quand $\|z\| \rightarrow +\infty$, alors chaque orbite positive de (1.1) est bornée et s’approche du plus grand sous-ensemble invariant M de E , quand $t \rightarrow +\infty$. En particulier, si $M = \{z^*\}$ alors l’équilibre z^* est globalement asymptotiquement stable dans \mathbb{R}^n pour le système (1.1).

Définition 1.14 [44] On dit que la fonction $f : X \rightarrow X$ est une contraction, s’il existe $0 < k < 1$ telle que

$$\forall x, y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Théorème 1.4 (*Banach–Caccioppoli*)[29] Soit $F : X \rightarrow X$ une contraction où X est un espace métrique complet. Alors il existe un unique point fixe $x_0 \in X$, c’est-à-dire que

$$F(x_0) = x_0.$$

1.4 Théorie des graphes

Un **graphe** est constitué :

- d'un ensemble fini de points appelés sommets (ou nœuds).
- d'un ensemble fini de lignes, appelées arête, chaque arête relie deux sommets appelés ses extrémités.

Si les deux extrémités d'une arête sont égales on dit que l'arête est une boucle. Notons que deux arêtes différentes peuvent avoir les même extrémités.

On dit que deux sommets sont voisins s'ils sont reliés par une arête.

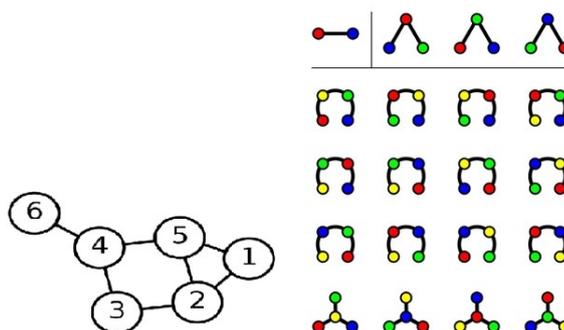


Figure 1.3: Quelques exemples de graphes [15].

Bien qu'il existe différents types de graphes en fonction du nombre de sommets, du nombre d'arêtes, de l'inter-connectivité de leur structure globale, voici quelques exemples parmi les plus courants :

Définition 1.15 (Graphe simple) [13] *Un graphe sans boucles et avec au maximum une arête entre deux sommets est appelé graphe simple. Par exemple*

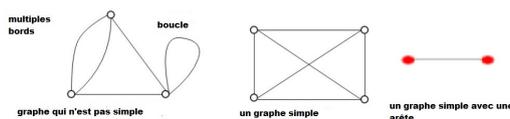


Figure 1.4: Comparaison entre graphe simple et non simple [13].

Dans la figure ci-dessus, le premier graphe n'est pas un graphe simple car il a deux arêtes entre certains de ces sommets et il a également une boucle (Loop).

Définition 1.16 (Graphe orienté) [22] *Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientés par des flèches. Les graphes orientés sont également connus sous le nom de digraphes (voir exemple de la figure 1.5).*

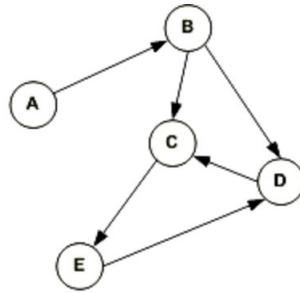


Figure 1.5: Graphe orienté [22].

Définition 1.17 (Arbre)[6] *Un arbre est un graphe non orienté dans lequel deux sommets quelconques sont reliés par un chemin (un chemin est une suite finie ou infinie d'arêtes qui rejoint une suite de sommets), ou de manière équivalente un graphe acyclique (c'est-à-dire un graphe sans cycle) non orienté.*

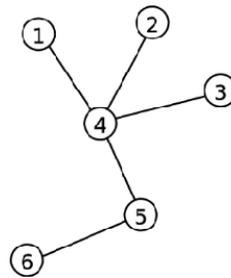


Figure 1.6: Un arbre étiqueté avec 6 sommets et 5 arêtes [6].

Définition 1.18 (Chaîne et cycle)[13] *Une chaîne d'un graphe G est une suite alternée de sommets et d'arêtes $e_0, x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, x_n, e_n$ commençant et se terminant par des sommets dans laquelle chaque arête est incidente avec les deux sommets qui la précède et la suivent immédiatement. Cette chaîne relie x_0 et x_n . La chaîne est fermée si $x_0 = x_n$ et ouverte dans le cas contraire. Si la chaîne est fermée, elle est appelée un cycle, à condition que ses sommets soient disjoints.*

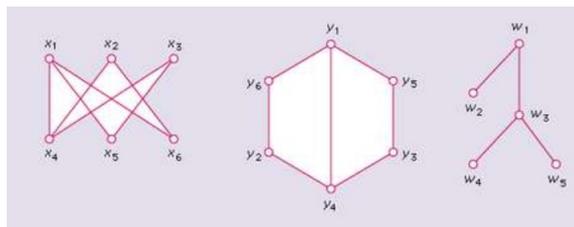


Figure 1.7: Exemple d'une chaîne, cycle et arbre [13].

1.5 Les espaces de Lebesgue et de Sobolev

Définition 1.19 [12] *Considérons le nombre réel p*

- Si $p \in [1, \infty[$, on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p} < \infty\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

- Si $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \exists C \text{ telle que } |f(x)| < C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Notons que

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C, |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Théorème 1.5 [12] *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ l'espace vectoriel L^p est muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p}$.*

Théorème 1.6 (Fischer-Riesz) [12] *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ l'espace L^p est dit un espace de Banach.*

Théorème 1.7 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)[12] *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de L^1 . Supposons que*

♣ $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω .

♣ Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω . Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Définition 1.20 [12] *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par*

$$W^{1,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega), \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } i = 1, \dots, n\},$$

muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)},$$

ou parfois, si $1 \leq p \leq +\infty$ de la norme équivalente :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$, la norme associée à l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ est donnée par :

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} |\nabla u|.$$

Lorsque $p = 2$, l'espace de Hilbert H^1 est muni de produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Proposition 1.1 [12] Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. On dit que l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Définition 1.21 [12] $C_0^1(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, de plus il est réflexif si $1 < p < \infty$.

1.6 Généralités sur les systèmes dynamiques

Des solutions intégrales aux problèmes non homogènes de Cauchy [45]

On considère le problème de Cauchy non homogène

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = x_0.$$

Hypothèses 1.1 Supposons que

- 1** A est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Banach X telle que $\lambda Id - A$ a un inverse borné pour $\lambda > w$ et

$$\|(\lambda Id - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > w$, M , w sont des constantes.

- 2** $x_0 \in X_0 := \overline{Dom(A)}$.

- 3** $f : [0, +\infty) \rightarrow X$ est continue.

Solutions pour des problèmes de Cauchy abstrait qui laissent invariant un ensemble convexe fermé [45]

On considère le problème de Cauchy abstrait

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + F(t)u(t), \quad t > t_0 \geq 0, \quad u(t_0) = x_0, \quad (1.6)$$

Hypothèses 1.2 *Supposons que*

- 1** A est un opérateur fermé sur un espace de Banach X . $(\lambda Id - A)$ a un inverse linéaire borné sur X et

$$\|(\lambda Id - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > w$ avec M , w des constantes réelles strictement positives.

- 2** Soit $X_0 = \overline{Dom(A)}$. On suppose que la valeur initiale x_0 dans (1.6) est un élément de X_0 . En fait, nous cherchons une solution u dont les valeurs se trouvent dans

$$C_0 = C \cap X_0,$$

C étant un sous-ensemble convexe fermé de l'espace de Banach X . Notons que C_0 est également un sous-ensemble convexe fermé. Nous supposons donc que

$$x_0 \in C_0.$$

- 3** Nous supposons les propriétés suivantes de l'opérateur

$$F(t) : C_0 \rightarrow X.$$

a Pour tout $x \in C_0$, $F(t)x$ est une fonction continue en $t \geq 0$.

b Pour tout $t \geq 0$, $x \in C_0$ il existe $\delta, \Lambda > 0$ telle que

$$\|F(s)y - F(s)z\| \leq \Lambda\|y - z\|,$$

si $t \leq s \leq t + \delta$, $y, z \in C_0$, $\|y - x\|, \|z - x\| \leq \delta$.

c Pour tout $\tau > 0$, il existe des constantes $c > 0$ telle que

$$\|F(t)x\| \leq c(1 + \|x\|),$$

si $0 \leq t \leq \tau$, $x \in X_0$.

Remarque 1.1 [45] Ce problème présente la particularité que A n'est pas défini de manière dense dans X , mais que la non-linéarité de $F(t)$ peut être définie seulement sur un sous-ensemble de $X_0 = \overline{Dom(A)}$ dans X .

En général, on ne peut pas résoudre (1.6) dans cette formulation forte, si $x_0 \in C_0 \setminus D(A)$. Donc pour $x_0 \in C_0$, on la résout sous la forme intégrée

$$u(t) = x_0 + A \int_{t_0}^t u(s)ds + \int_{t_0}^t F(s)u(s)ds, \quad t \geq t_0. \quad (1.7)$$

Une solution de (1.7) est appelée une solution intégrale de (1.6).

Théorème 1.8 [45] Supposons que les hypothèses 2 sont satisfaites. Alors, il existe une unique solution de (1.6) avec des valeurs dans C_0 si

1 $\lambda(\lambda Id - A)^{-1}$ envoie C dans lui-même pour $\lambda > w$ suffisamment grand.

2 $\frac{1}{h}dist(y + hF(t), C) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, $t \geq 0$, $y \in C_0$.

1.7 Principe du minimum de Pontryagin (PMP)

Le principe de minimum de Pontryagin (développé dans [23]) nous permet d'écrire une condition d'optimalité pour un minimum du problème comme un système différentiel avec des conditions aux limites. Pour une preuve de ce dernier on se réfère à [11] ou [9].



Figure 1.8: Lev Pontryagin [48].

Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble compact non-vidé. On considère $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et soit ℓ et ϕ deux applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

On propose le problème de contrôle optimal suivant

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J(u) := \int_0^T \ell(x_u(t), u(t)) dt + \phi(x_u(T)), \quad \forall T > 0, \quad (1.8)$$

où $x_u(\cdot)$ peut-être interprété comme l'unique solution du problème de Cauchy sur $[0, T]$ telle que

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Notons que $\mathcal{U} := \{u : [0, T] \rightarrow U, u \text{ mesurable}\}$ l'ensemble des contrôles admissibles, c'est-à-dire l'ensemble des contrôles tels que la trajectoire associée soit bien définie sur $[0, T]$.

Soit $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ le Hamiltonien associé au problème (1.8), il s'écrit sous la forme suivante :

$$H(x, p, u) = p \cdot f(x, u) + \ell(x, u).$$

Afin d'exprimer le principe de minimum de Pontryagin (PMP), on annonce le Théorème suivant

Théorème 1.9 [33] *On note par $u(\cdot)$ le contrôle optimal et x la trajectoire associée sur $[0, T]$. Alors*

1 *L'équation adjointe s'écrit comme suit*

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

1.7. PRINCIPE DU MINIMUM DE PONTRYAGIN (PMP)

où $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est absolument continue.

2 La condition de transversalité est $p(T) = \nabla\phi(x(T))$.

3 Le contrôle $u(\cdot)$ satisfait la condition de minimisation :

$$u(t) \in \arg \min_{w \in U} H(x(t), p(t), w) \quad p.p. \quad t \in [0, T].$$

2.1 Introduction

Un problème clé dans la modélisation de la dynamique d'évolution des maladies infectieuses est la représentation mathématique du mécanisme de transmission de la contagion. Les concepts de “force d'infection” et de “champ de forces d'infection ” (lorsqu'il s'agit de populations structurées) représentent les cas incidents d'infection. Dans les modèles dynamiques, cette force dépend, d'une part, de la probabilité de s'infecter après contact avec un individu infecté, éventuellement en prenant en compte le comportement des individus, d'autre part, elle dépend également de la proportion des individus infectés (prévalence de l'infection).

Dans ce chapitre, nous allons traiter les modèles de base en épidémiologie et déterminer une fonction de Lyapunov à travers la formule de Beretta et Capasso [7] afin d'étudier la stabilité globale de l'équilibre non trivial.

2.2 Brève histoire du le modèle SIR

Le modèle a été présenté pour la première fois par Kermack et McKendrick en 1927 [35] pour expliquer a posteriori l'évolution de l'épidémie de peste à Bombay en 1905-1906.



Figure 2.1: McKendrick et Kermack [48].

À chaque fois on décide de diviser la population en trois catégories (qu'on appelle "compartiments" dans le langage de l'épidémiologie) :

- les individus "**Sains**" ou "Susceptibles" (S) : ceux qui n'ont jamais eu la maladie, et peuvent la contracter.
- les individus "**Infectés**" (I) : les malades, ceux sont aussi les contagieux (c'est une hypothèse de ce modèle).
- les individus "**Rétablis**" (R) : ceux qui ont déjà eu la maladie et sont désormais immunisés contre cette maladie. On inclut dans ce groupe les personnes décédées (puisqu'elles ne peuvent plus contracter la maladie).

Il paraît plus naturel de travailler avec le nombre de personnes dans chaque catégorie, mais certains calculs seront plus simples si on utilise plutôt la proportion des personnes dans chaque catégorie, ce qui nous permet de bien connaître la progression de l'épidémie. On note donc : $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ la proportion d'individus de chacune des catégories (les sains, les infectés, les rétablis) à l'instant t .

Afin d'écrire une formulation mathématique, nous introduisons des équations différentielles pour les taux de transfert d'un compartiment à un autre. Le modèle de Kermack et McKendrick se présente sous la forme d'un système de trois équations différentielles

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= f_1(S, I, R) \\ \frac{dI}{dt} &= f_2(S, I, R) \\ \frac{dR}{dt} &= f_3(S, I, R)\end{aligned}\tag{2.1}$$

2.2. BRÈVE HISTOIRE DU LE MODÈLE SIR

où

$$\begin{aligned}f_1(S, I, R) &= -kSI \\f_2(S, I, R) &= +kSI - \lambda I \\f_3(S, I, R) &= \lambda I\end{aligned}\tag{2.2}$$

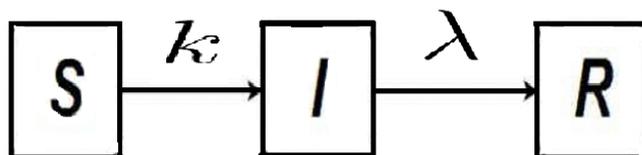


Figure 2.2: Schéma du modèle *SIR*.

avec k et λ des constantes positives qui représentent respectivement le taux de transmission de la maladie et le taux de guérison.

Comme la population totale $N = S + I + R$ est constante ($N = 1$), on peut supprimer la troisième équation du système car elle est indépendante des deux premières équations. Le modèle (2.2) se réduit alors au système algèbro-différentiel suivant

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -kSI, \\ \frac{dI}{dt} = +kSI - \lambda I, \end{cases}\tag{2.3}$$

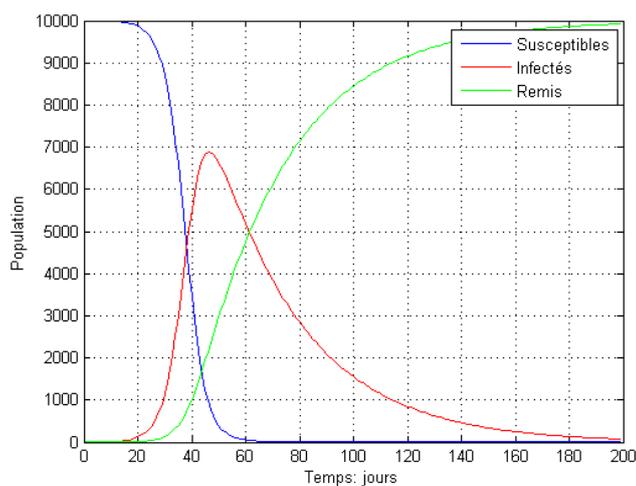


Figure 2.3: Simulation numérique pour le modèle *SIR*.

2.2. BRÈVE HISTOIRE DU LE MODÈLE SIR

Les solutions du système (2.3) avec les conditions initiales $S(0) = 10000$, $I(0) = 1$ et $R(0) = 0$ sur une période d'environ 200 jours et les valeurs des paramètres $k = 0.00003$, $\lambda = 0.03$ sont simulées dans la figure 2.3.

Pour le modèle *SIR* les règles retenues sont les suivantes :

- ▶ La maladie est une maladie assez brève : on néglige les phénomènes démographiques (naissances, décès, immigration). La taille de la population étudiée peut donc être considérée comme fixe.
- ▶ La seule façon pour qu'un individu quitte le groupe des sains est de devenir infecté. Il est raisonnable de penser que le nombre de nouveaux cas sur une durée donnée est proportionnel au nombre de contacts sur cette durée entre les individus susceptibles et les individus infectés ($S(t) \times I(t)$). On note ce coefficient de proportionnalité k .
- ▶ Les personnes malades (infectées) sont toutes contagieuses : elles peuvent transmettre la maladie.
- ▶ Chaque personne qui a guéri de cette maladie est immunisée pour toujours contre cette maladie : la personne ne peut plus être contaminée de nouveau.
- ▶ Nous faisons aussi l'hypothèse que toutes les personnes tombées malades finissent par guérir et ne plus retomber malade, ainsi qu'une proportion λ des individus infectés passe dans le groupe des individus rétablis quotidiennement. Par exemple si la durée moyenne d'infection est de $\gamma = 4$ jours, en moyenne chaque jour $\lambda = 1/4$ de la population infectée se rétablit.

Taux de reproduction de base R_0 : on peut l'interpréter comme le nombre moyen de nouveaux cas infectés, engendré par un individu infecté au court de la période où il est contagieux, dans une population entièrement considérée comme susceptible. Depuis son introduction le taux de reproduction de base R_0 s'est imposé comme un concept-clef en épidémiologie, il permet entre autre de prédire si une épidémie peut ou non s'installer dans une population.

Comment est-il calculé ?

Le R_0 se calcule à partir d'une population qui est entièrement susceptible d'être infectée (c'est-à-dire qui n'a pas encore été vaccinée ni immunisée contre l'infection). Il correspond au produit de trois facteurs :

$$R_0 = \beta c D,$$

où

- β : est le risque de contracter l'agent infectieux lors d'un contact (d'où le respect d'une distance sociale d'au moins 1 mètre recommandée en ce moment de la pandémie de la COVID-19).

- c : est le nombre de contacts sur une unité de temps : si l'on diminue le nombre de contacts de moitié, on diminue le R_0 de moitié.
- D : est le nombre de jours où une personne infectée est contagieuse.

Dans l'article [46] les auteurs proposent une méthode basée sur le calcul du rayon spectral d'une matrice appelée matrice de la génération suivante (en anglais : Next Generation Matrix) pour calculer le taux de reproduction de base.

Modèle *SIR* avec dynamique vitale [7]

L'invariance de la population totale peut être maintenue si l'on introduit une dynamique vitale intrinsèque des individus dans la population totale au moyen d'une mortalité naturelle μN compensée par un apport égal à la naissance dans la classe des susceptibles.

De ces hypothèses, le modèle est représenté par le système *EDO* suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -kIS - \mu S + \mu N, \\ \frac{dI}{dt} = +kIS - \lambda I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \lambda I - \mu R, \end{cases} \quad (2.4)$$

où

- k : le taux de transmission de la maladie.
- λ : le taux de guérison.
- μ : le taux de mortalité et de naissance.

Les solutions du système (2.4) avec les conditions initiales $S(0) = 10000$, $I(0) = 1$ et $R(0) = 0$ sur une période d'environ 200 jours et les valeurs des paramètres $k = 0.00003$, $\lambda = 0.08$ et $\mu = 0.01$ sont simulées dans la figure 2.4.

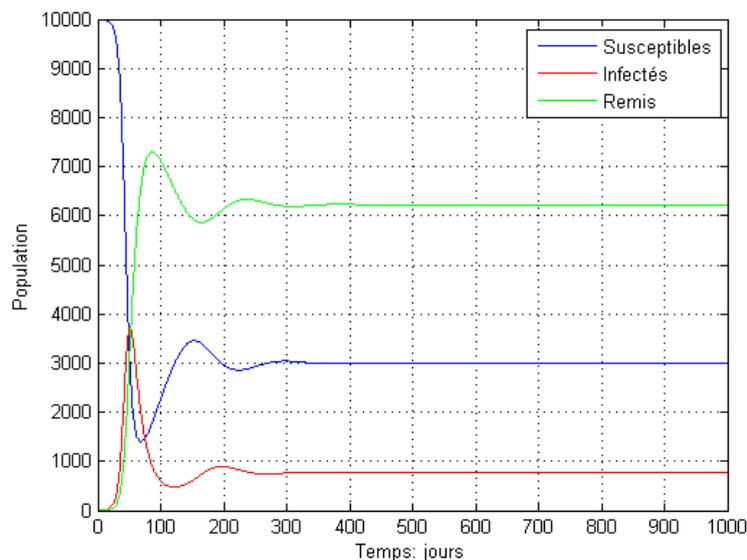


Figure 2.4: Simulation numérique pour le modèle *SIR* avec dynamique vitale.

Après normalisation le modèle précédent (2.4) devient :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -kIS - \mu S + \mu, \\ \frac{dI}{dt} = +kIS - \lambda I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \lambda I - \mu R, \end{cases} \quad (2.5)$$

Modèle *SIRS* avec immunité temporaire : [30]

Ce modèle dérive du modèle *SIR* classique, mais le rétablissement ne donne qu'une immunité temporaire, c'est-à-dire les individus du compartiment *R* réintègrent après un délai le compartiment des susceptibles. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -kSI - \mu S + \mu + \alpha R, \\ \frac{dI}{dt} = kSI - \lambda I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \lambda I - \mu R - \alpha R, \end{cases} \quad (2.6)$$

les paramètres ont la même définition que dans le modèle précédent et α est taux journalier de perte d'immunité et rentre dans la classe des susceptibles.

Pour effectuer la simulation numérique du système (2.6) on choisit les conditions initiales $S(0) = 10000$, $I(0) = 1$ et $R(0) = 0$ sur une période d'environ 200 jours avec

les valeurs des paramètres $k = 0.00003$, $\lambda = 0.08$, $\mu = 0.01$ et $\alpha = 0.003$.

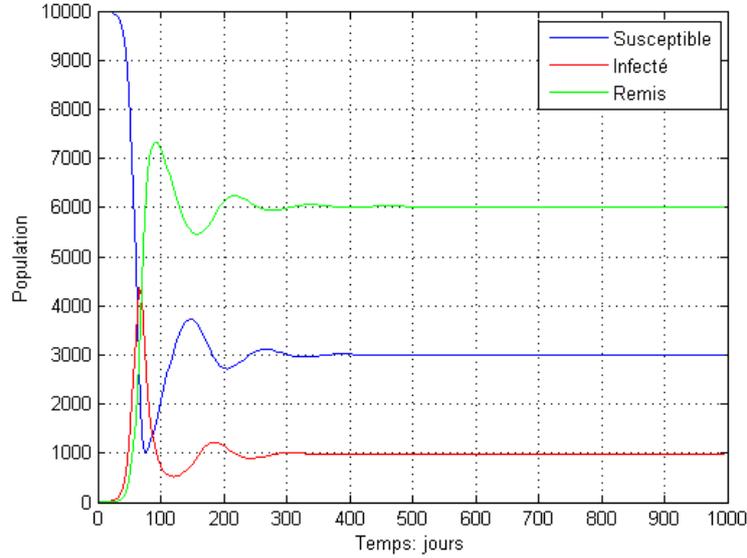


Figure 2.5: Simulation numérique pour le modèle *SIRS* avec immunité temporaire.

2.3 Structure générale d'un système bilinéaire

En utilisant la formulation donnée par Beretta et Capasso [7], on peut écrire les modèles précédents sous la forme générale suivante :

$$\frac{dz}{dt} = \text{diag}(z)(e + Az) + c, \quad (2.7)$$

avec

$$\begin{aligned} z &\in \mathbb{R}^n, & n \text{ est le nombre de compartiments.} \\ e &\in \mathbb{R}^n, & \text{vecteur constant.} \\ A &= (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, & \text{matrice constante.} \\ c &\in \mathbb{R}^n, & \text{vecteur constant.} \end{aligned}$$

Pour le modèle *SIR* avec dynamique vitale (Modèle (2.5))

Comme la population totale est constante, on néglige la troisième équation.

Notons que $z = (S, I)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} -\mu \\ -(\mu + \lambda) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Pour le modèle $SIRS$ avec immunité temporaire (Modèle (2.6))

Afin d'écrire le modèle $SIRS$ sous la forme générale (2.7), faisons le changement de variable suivant : $\tilde{S} = S + \frac{\alpha}{k}$.

En tenant compte du fait que $S + I + R = 1$ (constante dans le temps), le système (2.6) se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{S}}{dt} = -k\tilde{S}I - (\mu + \alpha)\tilde{S} + (\mu + \alpha)(1 + \frac{\alpha}{k}), \\ \frac{dI}{dt} = k\tilde{S}I - (\lambda + \mu + \alpha)I. \end{cases} \quad (2.9)$$

D'où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} -(\mu + \alpha) \\ -(\lambda + \mu + \alpha) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} (\mu + \alpha)(1 + \frac{\alpha}{k}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Modèle SIR avec transmission verticale [14]

On propose un modèle SIR classique pour inclure la transmission verticale et la vaccination. On suppose que b et b' sont les taux de naissance des parents non infectés et infectés respectivement, r et r' sont les taux de mortalité correspondants, v est le taux de guérison, γ est le taux qu'une personne immunitaire perd leurs immunités, p est la probabilité des nouveaux nés qui ne sont pas infectés venant des parents infectés, q est le taux de transmission verticale ($p + q = 1$) (de la maman vers le bébé) et m est la fraction de ceux nés des parents non infectés qui ont acquis une immunité grâce à la vaccination, le reste va dans la classe des susceptibles. Dans ce modèle il est supposé que le vaccin n'est pas efficace pour les enfants des parents infectés.

Ainsi le modèle se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -kSI + (1 - m)b(S + R) + pb'I - rS + \gamma R, \\ \frac{dI}{dt} = +kSI + qb'I - r'I - vI, \\ \frac{dR}{dt} = vI - (r + \gamma)R + mb(S + R). \end{cases} \quad (2.10)$$

Afin de maintenir la population totale constante $S + I + R = 1$, on suppose que $b = r$, $b' = r'$. Ce qui permet de réduire le système précédent au système de deux équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = kSI + (1 - m)b(1 - I) + pb'I + \gamma - (\gamma + b)S - \gamma I, \\ \frac{dI}{dt} = +kSI - (pb' + v)I. \end{cases} \quad (2.11)$$

Notons par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} -b - \gamma \\ -pb' - v \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} (1-m)b + \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & (m-1)b + pb' - \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système (2.11) peut être écrit sous la forme :

$$\frac{dz}{dt} = \text{diag}(z)(e + Az) + c + Bz, \quad (2.12)$$

qui généralise l'équation (2.7) en y ajoutant le terme Bz .

Structure générale

Dans le but d'analyser les systèmes précédents on a besoin de généraliser l'équation (2.7) et l'écrire sous une forme plus générale

$$\frac{dz}{dt} = \text{diag}(z)(e + Az) + b(z), \quad (2.13)$$

où

$$b(z) = c + Bz, \quad (2.14)$$

avec

(i) $c \in \mathbb{R}_+^n$

et

(ii) $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, une matrice réelle constante telle que

$$\begin{aligned} b_{ij} &\geq 0, & i, j &= 1, \dots, n, \\ b_{ii} &= 0, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

2.3.1 Population totale constante

En utilisant les résultats dus à Beretta et Capasso [7], nous donnerons dans ce paragraphe une analyse du comportement asymptotique du système (2.13). On considère au début le cas où la population totale N est constante.

Une conséquence directe de ce qui précède est que toute trajectoire $\{z(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ du système (2.13) est contenue dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ où $\Omega = \{z(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ et qui vérifie l'hypothèse (H1).

(H1) Ω est positivement invariant.

2.3. STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN SYSTÈME BILINÉAIRE

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$F(z) = \text{diag}(z)(e + Az) + b(z) \quad (2.15)$$

il est clair que $F \in C^1(\Omega)$.

Soit D_i l'hyperplan de \mathbb{R}^n :

$$\{z \in \mathbb{R}^n \mid z_i = 0\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Comme conséquence de l'hypothèse (H1) pour tout $i = 1, \dots, n$, on a :

- 1** $D_i \cap \Omega$ est positivement invariant si $b_i|_{D_i} = 0$.
- 2** $D_i \cap \Omega$ est un ensemble répulsif si $b_i|_{D_i} > 0$ auquel cas F pointera à l'intérieur de Ω sur D_i .

En raison de l'invariance de Ω et du fait que $F \in C^1(\Omega)$, le théorème de point fixe standard [40] (Voir chapitre 1, section 4) assure l'existence d'au moins un équilibre de (2.13) dans Ω . Supposons qu'il existe un équilibre z^* strictement positif pour le système (2.13) ($z_i^* > 0$, $i = 1, \dots, n$), cet équilibre vérifie :

$$\text{diag}(z^*)(e + Az^*) + b(z^*) = 0,$$

on en déduit que :

$$e = -Az^* - \text{diag}(z^{*-1})b(z^*), \quad (2.16)$$

où

$$z^{*-1} := \left(\frac{1}{z_1^*}, \dots, \frac{1}{z_n^*} \right)^T.$$

Par substitution de cette expression dans (2.13), on obtient :

$$\frac{dz}{dt} = \text{diag}(z)[A + \text{diag}(z^{*-1})B](z - z^*) - \text{diag}(z - z^*)\text{diag}(z^{*-1})b(z). \quad (2.17)$$

Soit la fonction classique de Volterra-Goh Lyapunov [24]

$$V(z) := \sum_{i=1}^n w_i \left(z_i - z_i^* - z_i^* \ln \frac{z_i}{z_i^*} \right), \quad z \in \mathbb{R}_+^{n*},$$

où $w_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, sont des constantes réelles (appelées souvent poids), où la notation \mathbb{R}_+^{n*} désigne l'ensemble :

$$\mathbb{R}_+^{n*} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z_i > 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Soit $f_i(x) = x - z_i^* - z_i^* \ln \frac{x}{z_i^*}$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $i = 1, \dots, n$. Alors

$$f_i : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

2.3. STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN SYSTÈME BILINÉAIRE

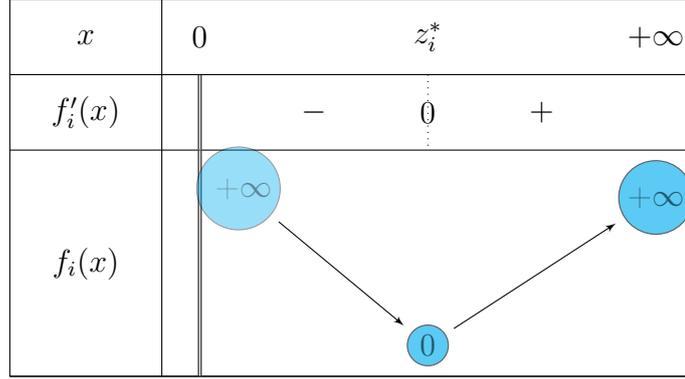
Étudions maintenant la fonction f_i

$$f'_i(x) = 1 - \frac{z_i^*}{x}, \text{ pour tout } i = 1, \dots, n,$$

donc

$$f'_i(x) = 0 \iff x = z_i^*, \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Ainsi, le tableau de variation de f_i , $i = 1, \dots, n$ s'écrit comme suit :

x	0	z_i^*	$+\infty$
$f'_i(x)$	-	0	+
$f_i(x)$	 $+\infty$	0	$+\infty$

c'est-à-dire

$$f_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

On déduit alors que

$$V : \mathbb{R}_+^{n*} \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

La dérivée de V le long des trajectoires de (2.13) est donnée par :

$$\dot{V}(z) = \sum_{i=1}^n (z_i - z_i^*) \text{diag}(w_i) [A + \text{diag}(z_i^{*-1})B] (z_i - z_i^*) - \sum_{i=1}^n w_i \frac{b_i(z)}{z_i z_i^*} (z_i - z_i^*)^2,$$

c'est-à-dire

$$\dot{V}(z) = (z - z^*)^T W \tilde{A} (z - z^*) - \sum_{i=1}^n w_i \frac{b_i(z)}{z_i z_i^*} (z_i - z_i^*)^2, \quad (2.18)$$

qui peut s'écrire

$$\dot{V}(z) = (z - z^*)^T W \left[\tilde{A} + \text{diag} \left(\frac{-b_1(z)}{z_1 z_1^*}, \dots, \frac{-b_n(z)}{z_n z_n^*} \right) \right] (z - z^*), \quad (2.19)$$

où $W := \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$ et

$$\tilde{A} := A + \text{diag}(z^{*-1})B. \quad (2.20)$$

La structure de (2.18) et (2.19) permet d'étudier les deux cas suivants :

(A) \tilde{A} est W -antisymétrisable.

$$(B) - \left[\tilde{A} + \text{diag} \left(\frac{-b_1(z)}{z_1 z_1^*}, \dots, \frac{-b_n(z)}{z_n z_n^*} \right) \right] \in S_W.$$

Dans le cas (B)

$$\dot{V}(z) \leq 0, \quad z \in \mathbb{R}_+^{n*}.$$

Ainsi l'égalité s'applique si et seulement si $z = z^*$. La stabilité asymptotique globale de z^* découle du théorème classique de Lyapunov (Chapitre 1, Section 3).

Ainsi, nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.1 [7] *Si le système (2.13) admet un équilibre strictement positif $z^* \in \Omega$ ($z_i > 0, i = 1, \dots, n$) et la condition (B) est satisfaite, alors z^* est globalement asymptotiquement stable dans Ω .*

Considérons maintenant le cas (A). Puisque $W\tilde{A}$ est antisymétrique, de (2.18) on obtient

$$(z - z^*)^T W\tilde{A}(z - z^*) = 0,$$

donc

$$\dot{V}(z) = - \sum_{i=1}^n w_i \frac{b_i(z)}{z_i z_i^*} (z_i - z_i^*)^2. \quad (2.21)$$

Comme $b_i(z) \geq 0$, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^{n*}$, $i = 1, \dots, n$, on a

$$\dot{V}(z) \leq 0.$$

Désignons par $R \subset \Omega$ l'ensemble des points où $\dot{V}(z) = 0$, clairement

$$R = \{z \in \Omega \mid z_i = z_i^* \text{ si } b_i(z) > 0, \quad i = 1, \dots, n\}. \quad (2.22)$$

Soit M le plus grand sous-ensemble invariant dans R . Par le principe d'invariance de LaSalle (Théorème 3.1) on peut dire que toute solution s'approche de M quand $t \rightarrow \infty$.

Afin de donner plus d'informations sur la structure de M , nous utilisons la théorie des graphes.

Puisque dans le cas (A) les éléments de \tilde{A} ont des signes antisymétrique, on peut alors associer un graphe à \tilde{A} par les règles suivantes :

(α) chaque composante $i \in \{1, \dots, n\}$ est représenté par un noeud identifié par :

(a.1) “o” si $b_i(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$.

(a.2) “•” sinon.

(β) Si pour une paire de nœuds (i, j) telle que $\tilde{a}_{ij} \tilde{a}_{ji} < 0, \forall i \neq j$ alors les deux nœuds i et j sont reliés par un arc (Voir des exemples dans le chapitre 1, section 4).

Nous citons le lemme suivant :

Lemme 2.1 [7] *Supposons que \tilde{A} est W -antisymétrisable. Si le graphe associé est soit*

□ *un arbre et $n - 1$ des nœuds terminaux sont •*
ou

□ *une chaîne et deux nœuds internes consécutifs sont •*
ou

□ *un cycle et deux nœuds consécutifs sont •.*
Alors $M = \{z^*\}$ dans R .

Comme conséquence de ce lemme et les arguments ci-dessus, nous citons le théorème de stabilité globale de l'équilibre intérieur.

Théorème 2.2 [7] *Si le système (2.13) admet un équilibre $z^* \in \Omega$ ($z_i^* > 0, i = 1, \dots, n$) et la condition (A) est satisfaite sous l'une des hypothèses du Lemme 2.1, alors l'équilibre positif z^* est GAS dans Ω (l'unicité de z^* découle de la stabilité globale).*

L'intérêt des théorèmes 2.1 et 2.2 réside dans le fait qu'ils fournissent des conditions suffisantes pour qu'un équilibre du système lorsqu'il existe il soit GAS.

Des conditions suffisantes pour l'existence d'un état endémique non trivial sont données dans le Corollaire suivant :

Corollaire 2.1 *Si le vecteur c dans (2.14) est strictement positif, alors le système (2.13) admet un équilibre $z^* \in \Omega_+$ strictement positif. Dans les deux cas (A) et (B) l'équilibre positif z^* est GAS (et donc unique) dans Ω_+ .*

2.3.1.1 Cas A: Modèles épidémiques pour lesquels la matrice \tilde{A} est W -antisymétrisable

Modèle SIR avec dynamique vitale (2.4)

On voit clairement à partir de (2.20) que puisque dans ce cas $B = 0$, nous avons $\tilde{A} = A$ et $b(z) = c = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme \tilde{A} est antisymétrique et même W -antisymétrique (on peut choisir la matrice $W = Id_{\mathbb{R}^2}$), puisque $b_1(z) \neq 0$ on la représente par • et $b_2(z) = 0$ est représentée par ◦

reliées par une arête alors le graphe associé est donné par $\bullet \text{---} \circ$.

Dans ce cas, l'état endémique non trivial est donné par

$$S^* = \frac{\lambda + \mu}{k}, \quad I^* = \frac{\mu}{k} \left(\frac{1}{S^*} - 1 \right), \quad (2.23)$$

cet équilibre existe si :

$$\sigma = \frac{k}{\lambda + \mu} > 1. \quad (2.24)$$

Notons que si $\sigma \leq 1$ alors le seul point d'équilibre du système est $(1, 0)^T$.

Le système (2.4) admet comme point d'équilibre z^* avec $z^* = (S^*, I^*)^T$ qui est positive, d'après le Théorème 2.2, cet équilibre est *GAS*.

Modèle *SIRS* avec immunité temporaire

Rappelons le modèle *SIRS* avec immunité temporaire :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -kSI - \mu S + \mu + \alpha R, \\ \frac{dI}{dt} = kSI - \lambda I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \lambda I - \mu R - \alpha R, \end{cases}$$

encore une fois dans ce cas

$$\tilde{A} = A, \quad \text{et} \quad b(z) = c.$$

Comme \tilde{A} est antisymétrique on déduit que le graphe associé est le suivant $\bullet \text{---} \circ$.

Dans ce cas, l'état endémique est donné par $z^* := (S^*, I^*)^T$, où

$$S^* = \frac{\lambda + \mu}{k} := \frac{1}{\sigma},$$

$$I^* = \frac{(\mu + \alpha)(\sigma - 1)}{k + \alpha\sigma}.$$

Notons que cet équilibre existe si $\sigma > 1$. Sinon, pour $\sigma \leq 1$, le seul point d'équilibre du système est $(1, 0)^T$.

Comme z^* est un équilibre positif alors par le Théorème 2.2 il est *GAS*.

Modèle *SIR* avec transmission verticale

Rappelons ici le modèle *SIR* avec transmission verticale

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -kSI + (1-m)b(S+R) + pb'I - rS + \gamma R, \\ \frac{dI}{dt} = +kSI + qb'I - r'I - vI, \\ \frac{dR}{dt} = vI - (r+\gamma)R + mb(S+R). \end{cases}$$

Dans ce cas $b(z) = c + Bz$.

Ce système admet comme point d'équilibre :

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{pb'+v}{k}, \\ I^* &= \frac{((1-m)b+\gamma)k - (b+\gamma)(pb'+v)}{(v+(1-m)b+\gamma)k}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

qui existe si

$$m < \frac{(b+\gamma)(k - pb' - v)}{bk}, \quad (2.26)$$

en conséquence

$$\tilde{A} := A + \text{diag}(z^{*-1})B = \begin{pmatrix} 0 & k \frac{(m-1)b - \gamma - v}{pb'+v} \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

$(m-1)b, -\gamma, -v$ sont toutes des constantes négatives ou nulles. Pour exclure les autres cas on suppose qu'ils sont tous négatifs. On peut trouver une matrice diagonale positive $W = \text{diag}(w_1, w_2)$, telle que $W\tilde{A}$ est antisymétrique.

$$W\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -w_1 k \frac{(1-m)b + \gamma + v}{pb'+v} \\ w_2 k & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(W\tilde{A})^T = \begin{pmatrix} 0 & w_2 k \\ -w_1 k \frac{(1-m)b + \gamma + v}{pb'+v} & 0 \end{pmatrix}.$$

On choisit $w_2 = 1$, donc $w_1 = \frac{pb'+v}{(1-m)b + \gamma + v}$

$W\tilde{A}$ sera égale à $\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$ (cas **(A)**). Par le Théorème 2.2, le graphe associé est donné par $\bullet \text{---} \circ$, donc l'état endémique (2.25) est GAS (si la condition (2.26) est vérifiée).

2.3.1.2 Cas B : Modèles épidémiques pour lesquels $-\left[\tilde{A} + \text{diag}\left(\frac{-b_1(z)}{z_1 z_1^*}, \dots, \frac{-b_n(z)}{z_n z_n^*}\right)\right] \in S_W$.

Modèle de la gonorrhée [16] [31]

La gonorrhée (dite aussi chaude-pisse) est une infection sexuellement transmissible causée par la bactérie *Neisseria gonorrhoeae*. Cette maladie est plus asymptoma-

tique chez la femme que chez l'homme et peut donc être transmise sans même savoir que l'on est infecté. Une personne peut être infectée par la gonorrhée plusieurs fois dans sa vie.

Considérons ici le modèle simple de la gonorrhée proposé par Cooke et Yorke [16]. Il peut être considéré comme un modèle *SIS* pour deux populations en interaction, si on désigne par $S_i, I_i, i = 1, 2$, la population des susceptibles et infectés pour deux groupes (hommes et femmes), on a

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = -k_{12}S_1I_2 + \alpha_1I_1, \\ \frac{dI_1}{dt} = k_{12}S_1I_2 - \alpha_1I_1, \\ \frac{dS_2}{dt} = -k_{21}S_2I_1 + \alpha_2I_2, \\ \frac{dI_2}{dt} = k_{21}S_2I_1 - \alpha_2I_2, \end{cases} \quad (2.27)$$

avec

- k_{ij} : est le taux de transmission de l'infection d'un individu infecté du groupe j à un individu susceptible du groupe i ($i \neq j$), $i, j = 1, 2$.
- α_i : est le taux de guérison des individus du groupe i ($i = 1, 2$).

Il est clair que si $S_i + I_i = c_i$ (constante), on peut limiter l'analyse du système (2.27) au système suivant (pour simplifier on prend $k_{12} = k_{21} = 1$)

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = -I_1I_2 - \alpha_1I_1 + c_1I_2, \\ \frac{dI_2}{dt} = -I_1I_2 - \alpha_2I_2 + c_2I_1, \end{cases} \quad (2.28)$$

qui peut être écrit sous la forme

$$\frac{dz}{dt} = \text{diag}(z)(e + Az) + Bz, \quad t > 0 \quad (2.29)$$

où $z = (I_1, I_2)^T$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour ce modèle,

$$b(z) = Bz = \begin{pmatrix} c_1I_2 \\ c_2I_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-I_1^* + c_1}{I_1^*} \\ \frac{-I_2^* + c_2}{I_2^*} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S_1^*}{I_1^*} \\ \frac{S_2^*}{I_2^*} & 0 \end{pmatrix}.$$

Par un simple calcul

$$\text{diag}\left(\frac{-b(z)}{zz^*}\right) = \text{diag}\left(\frac{-b_1(z)}{z_1z_1^*}, \frac{-b_2(z)}{z_2z_2^*}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-c_1I_2}{I_1I_1^*} & 0 \\ 0 & \frac{-c_2I_1}{I_2I_2^*} \end{pmatrix}.$$

On considère la matrice

$$W\left[\tilde{A} + \text{diag}\left(\frac{-b(z)}{zz^*}\right)\right] = \begin{pmatrix} -w_1\frac{c_1I_2}{I_1I_1^*} & w_1\frac{S_1^*}{I_1^*} \\ w_2\frac{S_2^*}{I_2^*} & -w_2\frac{c_2I_1}{I_2I_2^*} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

qui est une matrice symétrique si l'on choisit $w_1 > 0$, et $w_2 > 0$ tels que

$$w_2\left(\frac{S_2^*}{I_2^*}\right) = w_1\left(\frac{S_1^*}{I_1^*}\right).$$

La matrice symétrique (2.30) est définie négative. Les éléments diagonaux sont négatifs et

$$\left(\frac{c_1I_2}{I_1I_1^*} \frac{c_2I_1}{I_2I_2^*} - \frac{S_1^*S_2^*}{I_1^*I_2^*}\right)w_1w_2 = \frac{w_1w_2}{I_1^*I_2^*}\left(c_1c_2 - S_1^*S_2^*\right) > 0,$$

du fait que $0 < S_i^* < c_i$, $i = 1, 2$ et puisque $z^* = (I_1^*, I_2^*)^T$ est un équilibre positif alors le Théorème 2.1 assure que l'équilibre z^* est *GAS*.

Modèle *SIS* dans deux communautés avec migration [30]

Les maladies transmissibles se propagent parfois d'un pays à l'autre et dans le monde entier. Certains modèles de propagation spatiale ont été analysés. Une question fascinante est de savoir si une maladie pourrait rester endémique en se déplaçant géographiquement dans une région. Dans ce modèle *SIS* à dynamique vitale, on suppose que les individus immigrer et émigrent entre deux communautés à un rythme égal (pour assurer l'homogénéité). Une conclusion est que la migration peut maintenir la maladie endémique dans deux groupes de population, même si sans migration, la maladie finirait par disparaître dans l'un des groupes.

Chaque communauté est décrite par (S_i, I_i) , $i = 1, 2$ tel que

$$S_i + I_i = 1, \quad i = 1, 2. \quad (2.31)$$

Donc on peut limiter l'analyse au système *EDO* suivant

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = k_1I_1(1 - I_1) - \gamma_1I_1 - \delta_1I_1 + \theta(I_2 - I_1), \\ \frac{dI_2}{dt} = k_2I_2(1 - I_2) - \gamma_2I_2 - \delta_2I_2 + \theta(I_1 - I_2), \end{cases} \quad (2.32)$$

où

2.3. STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN SYSTÈME BILINÉAIRE

- k_i : le taux de transmission de la maladie entre un individu infecté et un individu susceptible de la même communauté, $i=1,2$.
- γ_i : le taux de guérison, $i=1,2$.
- δ_i : le taux de mortalité, $i=1,2$.
- θ : le taux de migration entre les sites.

Le système (2.32) peut être écrit comme suit

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = (k_1 - \gamma_1 - \delta_1 - \theta)I_1 - k_1I_1^2 + \theta I_2, \\ \frac{dI_2}{dt} = (k_2 - \gamma_2 - \delta_2 - \theta)I_2 - k_2I_2^2 + \theta I_1, \end{cases}$$

qui peut être mis sous la forme (2.29) si on pose

$$z = (I_1, I_2)^T$$

et

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} k_1 - \gamma_1 - \delta_1 - \theta \\ k_2 - \gamma_2 - \delta_2 - \theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Le modèle (2.32) peut-être réécrit comme le système (2.29), avec

$$b(z) = Bz = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta I_2 \\ \theta I_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{A} = A + \text{diag}(z^{*-1})B = \begin{pmatrix} -k_1 & \frac{\theta}{I_1^*} \\ \frac{\theta}{I_2^*} & -k_2 \end{pmatrix}.$$

Soit l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ défini comme

$$\Omega := \{z = (I_1, I_2)^T \in \mathbb{R}_+^2 \mid 0 \leq I_i \leq 1, i = 1, 2\}.$$

Par le Théorème 2.1, une condition suffisante pour la stabilité asymptotique d'un équilibre positif z^* dans Ω est

$$-\left[\tilde{A} + \text{diag}\left(\frac{-b_1(z)}{I_1 I_1^*}, \frac{-b_2(z)}{I_2 I_2^*}\right)\right] \in S_W.$$

On peut observer que

$$\begin{aligned} W\left[\tilde{A} + \text{diag}\left(\frac{-b_1(z)}{I_1 I_1^*}, \frac{-b_2(z)}{I_2 I_2^*}\right)\right] &= \begin{pmatrix} -w_1 k_1 - w_1 \frac{\theta I_2}{I_1 I_1^*} & w_1 \frac{\theta}{I_1^*} \\ w_2 \frac{\theta}{I_2^*} & -w_2 k_2 - w_2 \frac{\theta I_1}{I_2 I_2^*} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -w_1 \frac{\theta I_2}{I_1 I_1^*} & w_1 \frac{\theta}{I_1^*} \\ w_2 \frac{\theta}{I_2^*} & -w_2 \frac{\theta I_1}{I_2 I_2^*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w_1 k_1 & 0 \\ 0 & -w_2 k_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ainsi

$$W[\tilde{A} + \text{diag}\left(\frac{-b_1(z)}{I_1 I_1^*}, \frac{-b_2(z)}{I_2 I_2^*}\right)] = \begin{pmatrix} -w_1 \frac{\theta I_2}{I_1 I_1^*} & w_1 \frac{\theta}{I_1^*} \\ w_2 \frac{\theta}{I_2^*} & -w_2 \frac{\theta I_1}{I_2 I_2^*} \end{pmatrix} + \text{diag}(-w_1 k_1, -w_2 k_2). \quad (2.33)$$

La première matrice du second membre de l'égalité (2.33) est symétrique si on choisit

$$w_1 \left(\frac{\theta}{I_1^*}\right) = w_2 \left(\frac{\theta}{I_2^*}\right),$$

c'est-à-dire

$$w_1 > 0, \text{ et } w_2 = w_1 \left(\frac{I_2^*}{I_1^*}\right).$$

Cette matrice est semi-définie négative puisque

$$\left(\frac{\theta I_2}{I_1 I_1^*} \frac{\theta I_1}{I_2 I_2^*} - \frac{\theta^2}{I_1^* I_2^*}\right) = 0.$$

En raison de la présence d'une matrice diagonale négative dans le second membre de (2.33), la condition suffisante du Théorème 2.1 est satisfaite si $k_1, k_2 > 0$.

Sous ces hypothèses, s'il existe un équilibre z^* positif, alors il est *GAS* dans Ω .

Modèle *SIS* pour deux groupes dissemblables [30] [36] [47]

Dans ce cas, la population est divisée en deux groupes dissemblables en raison de l'âge, de la structure sociale, de la structure spatiale,... etc. Les deux groupes peuvent interagir par le processus d'infection.

Étudiant le système épidémiologique suivant :

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = (k_{11}I_1 + k_{12}I_2)(1 - I_1) - \gamma_1 I_1 - \delta_1 I_1, \\ \frac{dI_2}{dt} = (k_{21}I_1 + k_{22}I_2)(1 - I_2) - \gamma_2 I_2 - \delta_2 I_2, \end{cases} \quad (2.34)$$

Commençons d'abord par le premier groupe : les personnes susceptibles (S_1) peuvent recevoir l'infection soit des infectés du premier groupe (I_1) par un taux de transmission k_{11} ou des infectés du deuxième groupe (I_2) par un taux de transmission k_{12} et les personnes infectées du premier groupe ont un taux de guérison γ_1 et un taux mortalité δ_1 . Ensuite, les personnes susceptibles du deuxième groupe (S_2) peuvent recevoir l'infection soit des infectés du premier groupe (I_1) par un taux de transmission k_{21} ou des infectés du deuxième groupe (I_2) par un taux de transmission k_{22} et les personnes infectées du deuxième groupe ont un taux de guérison γ_2 et un taux mortalité δ_2 .

Le système (2.34) peut s'écrire

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = (k_{11} - \gamma_1 - \delta_1)I_1 - k_{11}I_1^2 - k_{12}I_1I_2 + k_{12}I_2, \\ \frac{dI_2}{dt} = (k_{22} - \gamma_2 - \delta_2)I_2 - k_{22}I_2^2 - k_{21}I_2I_1 + k_{21}I_1, \end{cases} \quad (2.35)$$

complété par

$$S_1 + I_1 = 1, \quad S_2 + I_2 = 1.$$

Le système (2.35) peut être mis à nouveau sous la forme (2.29) avec

$$z = (I_1, I_2)^T$$

et

$$A = \begin{pmatrix} -k_{11} & -k_{12} \\ -k_{21} & -k_{22} \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} k_{11} - \gamma_1 - \delta_1 \\ k_{22} - \gamma_2 - \delta_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & k_{12} \\ k_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est un cas particulier (deux groupes) du cas plus général (n groupes, $n \geq 2$) analysé par Lajmanovich et Yorke [36].

Soit

$$b(z) = Bz = \begin{pmatrix} k_{12}I_1 \\ k_{21}I_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{A} = A + \text{diag}(z^{*-1})B = \begin{pmatrix} -k_{11} & \frac{k_{12}}{I_1^*}(1 - I_1^*) \\ \frac{k_{21}}{I_2^*}(1 - I_2^*) & -k_{22} \end{pmatrix}.$$

Par un simple calcul

$$\tilde{A} + \text{diag}\left(\frac{-b_1(z)}{I_1I_1^*}, \frac{-b_2(z)}{I_2I_2^*}\right) = \begin{pmatrix} -k_{11} - \frac{k_{12}I_2}{I_1I_1^*} & \frac{k_{12}}{I_1^*}(1 - I_1^*) \\ \frac{k_{21}}{I_2^*}(1 - I_2^*) & -k_{22} - \frac{k_{21}I_1}{I_2I_2^*} \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$W \left[\tilde{A} + \text{diag}\left(\frac{-b_1(z)}{I_1I_1^*}, \frac{-b_2(z)}{I_2I_2^*}\right) \right] = \begin{pmatrix} -w_1k_{11} - w_1\frac{k_{12}I_2}{I_1I_1^*} & w_1\frac{k_{12}}{I_1^*}(1 - I_1^*) \\ w_2\frac{k_{21}}{I_2^*}(1 - I_2^*) & -w_2k_{22} - w_2\frac{k_{21}I_1}{I_2I_2^*} \end{pmatrix},$$

qui peut s'écrire

$$W \left[\tilde{A} + \text{diag}\left(\frac{-b_1(z)}{I_1I_1^*}, \frac{-b_2(z)}{I_2I_2^*}\right) \right] = \begin{pmatrix} -w_1\frac{k_{12}I_2}{I_1I_1^*} & w_1\frac{k_{12}}{I_1^*}(1 - I_1^*) \\ w_2\frac{k_{21}}{I_2^*}(1 - I_2^*) & -w_2\frac{k_{21}I_1}{I_2I_2^*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w_1k_{11} & 0 \\ 0 & -w_2k_{22} \end{pmatrix},$$

d'où

$$W \left[\tilde{A} + \text{diag} \left(\frac{-b_1(z)}{I_1 I_1^*}, \frac{-b_2(z)}{I_2 I_2^*} \right) \right] = \begin{pmatrix} -w_1 \frac{k_{12} I_2}{I_1 I_1^*} & w_1 \frac{k_{12}}{I_1^*} (1 - I_1^*) \\ w_2 \frac{k_{21}}{I_2^*} (1 - I_2^*) & -w_2 \frac{k_{21} I_1}{I_2 I_2^*} \end{pmatrix} + \text{diag}(-w_1 k_{11}, -w_2 k_{22}), \quad (2.36)$$

où la matrice à droite de (2.36) est symétrique si on choisit

$$w_1 > 0, w_2 > 0 \text{ tq } w_1 \frac{k_{12}}{I_1^*} (1 - I_1^*) = w_2 \frac{k_{21}}{I_2^*} (1 - I_2^*).$$

De plus, puisque $0 < I_i^* < 1$, $i = 1, 2$ alors cette matrice est définie négative. En fait,

$$\left(\frac{k_{12} I_2}{I_1 I_1^*} \frac{k_{21} I_1}{I_2 I_2^*} - \frac{k_{12}}{I_1^*} (1 - I_1^*) \frac{k_{21}}{I_2^*} (1 - I_2^*) \right) w_1 w_2 > 0.$$

Donc, si $k_{11} \geq 0$, $k_{22} \geq 0$,

$$-\left[\tilde{A} + \text{diag} \left(-\frac{k_{21} I_2}{I_1 I_1^*}, -\frac{k_{21} I_1}{I_2 I_2^*} \right) \right] \in S_W.$$

Ainsi, le Théorème 2.1 assure la stabilité asymptotique de l'équilibre positif z^* dans $\Omega = \{z \in \mathbb{R}_+^* \mid I_i < 1, i = 1, 2\}$.

2.3.2 Population totale non constante

Dans certains cas, la population totale

$$N(t) = \sum_{i=1}^n z_i(t), \quad (2.37)$$

n'est pas constante, mais plutôt dynamique. Nous considérons dans la suite un exemple spécifique de ce type.

Considérons le modèle *SIS* avec dynamique vitale, proposé par Anderson et May [2]

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (r - b)S - \rho SI + (\mu + r)I, \\ \frac{dI}{dt} = -(\theta + b + \mu)I + \rho SI, \end{cases} \quad (2.38)$$

où

- ρ : le taux de transmission de l'infection.
- b : le taux de mortalité naturelle.
- θ : le taux de mortalité dû à la maladie.

- μ : le taux de rétablissement.
- r : le taux de naissance.

On note par $z = (S, I)^T$ et on définit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} (r-b)\gamma \\ -(\theta + b + \mu) \end{pmatrix},$$

$$c = 0_{\mathbb{R}^2}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \mu + r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas

$$\frac{dN}{dt}(t) = (r-b)N(t) - \theta I(t),$$

où $N(t) = S(t) + I(t)$.

Il est clair que si la population totale dépend du temps plutôt qu'une constante, nous devons abandonner l'hypothèse **(H1)**.

Pour ces systèmes, on travaille dans l'espace Euclidien \mathbb{R}_+^n . On ne peut pas appliquer le Théorème standard de point fixe. On peut seulement assumer que

(H2) \mathbb{R}_+^n est positivement invariant.

Nous donnons maintenant une étude plus détaillée du système (2.13).

Définition 2.1 [7] *Nous dirons que z^* est un équilibre partiellement réalisable chaque fois qu'un sous ensemble propre non vide et ses composantes sont nulles. Notons par $N = \{1, \dots, n\}$, l'ensemble $I \subset N$ existe, tel que $I \neq \emptyset$, $I \neq N$ et $z_i^* = 0$ pour tout $i \in I$.*

Supposons maintenant que c'est le cas, étant donnés les matrices

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \quad \text{et} \quad B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Dans le système (2.13), on définit une nouvelle matrice

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1,\dots,n},$$

comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= a_{ij} + \frac{b_{ij}}{z_i^*}, \quad i \in N - I, \quad j \in N, \\ \tilde{a}_{ij} &= a_{ij}, \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Avec les notations ci-dessus, le système (2.13) peut être réécrit comme suit

$$\frac{dz_i}{dt} = z_i \sum_{j \in N} \tilde{a}_{ij}(z_j - z_j^*) - \frac{(z_i - z_i^*)}{z_i^*} b_i(z), \quad i \in N - I, \quad (2.39)$$

$$\frac{dz_i}{dt} = z_i \left(e_i + \sum_{j \in N} a_{ij} z_j \right), \quad i \in I. \quad (2.40)$$

On introduit une nouvelle fonction de Lyapunov suggérée par Goh [24], [25], [26].

$$V(z) = \sum_{i \in N-I} w_i \left(z_i - z_i^* - z_i^* \ln \frac{z_i}{z_i^*} \right) + \sum_{i \in I} w_i z_i,$$

où $w_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Clairement $V \in C^1(R_I^n)$, où on définit

$$R_I^n = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z_i > 0, i \in N - I; z_i \geq 0 \ i \in I\}. \quad (2.41)$$

Soit R le sous-ensemble de R_I^n défini comme suit

$$R := \{z \in R_I^n \mid z_i = 0, i \in I, z_i = z_i^* \text{ pour tout } i \in N - I; \text{ si } b_i(z) > 0\} \quad (2.42)$$

et soit M le plus grand sous-ensemble invariant de R par rapport au système (2.13). En raison de (2.39) et (2.40), la dérivée de V le long de la trajectoire du système (2.13) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) = & \sum_{i \in N-I} w_i \frac{(z_i - z_i^*)}{z_i} \left\{ z_i \sum_{j \in N} \tilde{a}_{ij} (z_j - z_j^*) - \frac{(z_i - z_i^*)}{z_i} b_i(z) \right\} + \sum_{i \in I} w_i z_i (e_i + \\ & \sum_{j \in N} a_{ij} z_j) + \sum_{i \in I} w_i b_i(z). \end{aligned} \quad (2.43)$$

En utilisant la notation matricielle, $W = \text{diag}(w_i, i = 1, \dots, n)$ on peut écrire l'équation précédente comme suit :

$$\dot{V}(z) = (z - z^*)^T W \tilde{A} (z - z^*) - \sum_{i \in N-I} w_i \frac{b_i(z)}{z_i z_i^*} (z_i - z_i^*)^2 + \sum_{i \in I} w_i \left\{ z_i \left(e_i + \sum_{j \in N} a_{ij} z_j \right) + b_i(z) \right\}. \quad (2.44)$$

Il est clair que

$$R = \left\{ z \in R_I^n \mid \dot{V}(z) = 0 \right\}.$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 2.3 [7] *Soit z^* un équilibre partiellement réalisable pour le système (2.13), avec $z_i^* = 0$ pour $i \in I \subset N$, $I \neq \emptyset, I \neq N$. Supposons que*

(a) \tilde{A} est W -antisymétrisable,

(b) $e_i + \sum_{j \in N} a_{ij} z_j^* \leq 0$, $i \in I$,

(c) $b_i(z) \equiv 0$, $i \in I$,

(d) $M \equiv \{z^*\}$.

Alors z^* est globalement asymptotiquement stable dans R_I^n .

Preuve :

Puisque \tilde{A} est W -antisymétrique, alors le premier terme dans (2.44) disparaît. Par l'hypothèse (b), $\dot{V}(z) < 0$ dans R_I^n . On peut alors appliquer le principe d'invariance de LaSalle [37], pour dire que z^* est GAS dans R_I^n .

Le Corollaire suivant est une conséquence directe du Théorème 2.3.

Corollaire 2.2 [7] *Soit z^* un équilibre réalisable de (2.13) et supposons que \tilde{A} est W -antisymétrique. Si $M \equiv \{z^*\}$ alors z^* est globalement asymptotiquement stable dans \mathbb{R}_{*+}^n .*

Ce Corollaire peut être vu comme une nouvelle formulation du Théorème 2.3 dans le cas où (A1) est remplacé par (A2).

Sous les mêmes conditions de ce Corollaire, on peut observer que si le graphe associé à \tilde{A} avec (α) et (β) ne satisfait aucune des hypothèses du Lemme 2.1, alors on a $M \equiv \{z^*\}$ dans R .

On peut maintenant résoudre le modèle précédent. À condition que $r > b$, $\theta > r - b$, le système (2.38) admet un équilibre réalisable $z^* \in \mathbb{R}_{*+}^2$:

$$S^* = \frac{\theta + b + \mu}{\rho}, \quad I^* = \frac{r - b}{\theta + b - r} S^*. \quad (2.45)$$

Si $r \leq b$, ou $r > \theta + b$, l'équilibre (2.45) n'est pas réalisable et l'origine est le seul d'équilibre de (2.38). Ici $b(z) \equiv Bz = ((\mu + r), 0)^T$. Quand l'équilibre z^* est réalisable la matrice $\tilde{A} = A + \text{diag}(z^{*-1})B$ est donnée par

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -(\rho - \frac{\mu+r}{S^*}) \\ \rho & 0 \end{pmatrix},$$

puisque $S^* = \frac{\theta+b+\mu}{\rho}$, si $\theta > r - b$ alors matrice \tilde{A} est W -antisymétrique c'est à dire

$$W\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -w_1(\rho - \frac{\mu+r}{S^*}) \\ w_2\rho & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(W\tilde{A})^T = \begin{pmatrix} 0 & w_2\rho \\ -w_1(\rho - \frac{\mu+r}{S^*}) & 0 \end{pmatrix},$$

par calcul

$$w_2 = w_1(1 - \frac{\mu + r}{\mu + \theta + b}), \text{ à condition que } \theta > r - b.$$

Par un choix de w_1 , on trouve que

$$W\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -(\rho - \frac{\mu+r}{S^*}) \\ \rho & 0 \end{pmatrix},$$

qui est W -antisymétrique. Comme $b_1(z) \geq 0$, le graphe associé avec \tilde{A} est $\bullet \text{---} \circ$, ainsi par le Corollaire 2.2 on assure la stabilité globale de z^* dans \mathbb{R}_+^2 .

Lorsque $r \leq b$, $r > \theta + b$ le Théorème 2.3 ne peut pas s'appliquer pour étudier l'attractivité de l'origine car l'hypothèse **(b)** n'est pas vérifiée.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques modèles de base en épidémiologie utilisés dans la littérature. Le but est d'appliquer une approche étudiée dans le livre de Beretta et Capasso [7] pour montrer la stabilité globale des équilibres (sans maladie et endémique). Cette approche est basée principalement sur la théorie des graphes.

Dynamique et contrôle optimal d'un modèle épidémique *SIRVS*
structuré en âge

3.1 Introduction et présentation du modèle

La vaccination et le traitement sont deux méthodes efficaces pour contrôler la propagation des maladies infectieuses. C'est pourquoi dans ce chapitre, nous étudions un modèle d'épidémie *SIRVS* structuré en âge de vaccination et de guérison. Ce modèle a été proposé et étudié par Duan et .al [18]. Nous calculons le taux de reproduction de base et nous étudions la stabilité locale et globale de l'équilibre sans maladie. Afin de contrôler la maladie, on étudie un problème de contrôle optimal en évaluant le coût des stratégies de contrôle (vaccination et traitement) en utilisant le principe du maximum de Pontryagin. Les résultats montrent que la période de guérison joue un rôle important dans le contrôle, plus précisément, le contrôle par vaccination n'a d'effet que lorsque la période d'immunité acquise n'est pas supérieure à la période d'immunité vaccinale, sinon, elle joue un rôle important dans la lutte contre la maladie.

Considérons le modèle *SIRVS* suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - (\mu + \psi)S + \int_0^\infty \delta(a)R(a, t) da + \int_0^\infty \alpha(\theta)v(\theta, t) d\theta, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu + \nu + \gamma)I, \\ \frac{\partial R(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial R(a, t)}{\partial t} = -(\mu + \delta(a))R(a, t), \\ \frac{\partial v(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial v(\theta, t)}{\partial t} = -(\mu + \alpha(\theta))v(\theta, t). \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Avec les conditions initiales et au bord

$$\begin{cases} R(0, t) = \gamma I(t), & v(0, t) = \psi S(t) \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(a, 0) = R_0(a), \quad v(\theta, 0) = v_0(\theta), \end{cases} \quad (3.2)$$

où v est la classe des vaccinées structurée en âge de vaccination θ et R la classe des réfractaires structurée en âge de guérison a . Les paramètres $\Lambda, \beta, \mu, \nu, \psi, \gamma, \delta(a)$ et $\alpha(\theta)$ sont définis dans le Tableau 0.

Paramètre	Interprétation
Λ	taux de recrutement des susceptibles.
β	taux de transmission de l'infection.
μ	taux de mortalité naturelle.
ν	taux de mortalité dû à la maladie.
ψ	taux de vaccination des susceptibles.
γ	taux de guérison des individus infectés.
$\delta(a)$	taux perte de l'immunité.
$\alpha(\theta)$	taux perte de l'immunité après le vaccin.

TABLEAU 0: Interprétation des paramètres utilisés pour le modèle (3.1).

3.2 Analyse mathématique du modèle (3.1)–(3.2)

Hypothèses 3.1 *On suppose que*

- 1** Les fonctions $\delta(a), \alpha(\theta)$ appartiennent à $L^\infty((0, +\infty), \mathbb{R}) \setminus \{0_{L^\infty}\}$.
- 2** Les fonctions $R_0(a), v_0(\theta)$ sont intégrables.

On définit l'espace des fonctions

$$X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}),$$

avec la norme $\|\cdot\|$

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| + \|x_3(\cdot)\|_{L^1} + \|x_4(\cdot)\|_{L^1},$$

pour $x = (x_1, x_2, x_3(\cdot), x_4(\cdot))$.

La population totale $N(t)$ est donnée par :

$$N(t) = S(t) + I(t) + \int_0^\infty v(\theta, t) d\theta + \int_0^\infty R(a, t) da. \quad (3.3)$$

Par un simple calcul de la troisième et la quatrième équations du système (3.1), on trouve :

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty R(a, t) da = \gamma I(t) - \int_0^\infty (\mu + \delta(a)) R(a, t) da, \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty v(\theta, t) da = \psi S(t) - \int_0^\infty (\mu + \alpha(\theta)) v(\theta, t) d\theta, \quad (3.5)$$

en faisant la somme des deux premières équations de (3.1) avec (3.4) et (3.5), on obtient

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu N(t) - \nu I(t),$$

$$\frac{dN(t)}{dt} \leq \Lambda - \mu N(t),$$

par la méthode du facteur intégrant

$$N(t) \leq N(0) \exp(-\mu t) + \frac{\Lambda}{\mu} (1 - \exp(-\mu t)). \quad (3.6)$$

Par conséquent

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Nous pouvons citer donc la proposition suivante :

Proposition 3.1 *L'ensemble*

$$D = \left\{ (S, I, R, v) \in X_+ \mid S + I + \int_0^{+\infty} v(\theta, \cdot) d\theta + \int_0^{+\infty} R(a, \cdot) da \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

est positivement invariant pour le système (3.1).

Dans cette section, on va montrer que le système (3.1) est bien posé pour toute valeur initiale dans D , et qu'il admet une unique solution continue $u(t)$ dans D .

Formulation abstraite du système (3.1)

On réécrit maintenant le système (3.1) comme un problème de Cauchy abstrait et on déduit qu'il est bien posé. Afin de prendre en compte la condition au bord, on agrandit l'espace d'état

3.2. ANALYSE MATHÉMATIQUE DU MODÈLE (3.1)–(3.2)

$$\mathcal{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}),$$

$$\mathcal{X}_+ = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times L_+^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times L_+^1((0, +\infty), \mathbb{R})$$

et on considère l'opérateur linéaire $A : \text{Dom}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ défini par

$$A \begin{pmatrix} S \\ I \\ \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\mu + \psi)S \\ -(\mu + \nu + \gamma)I \\ \begin{pmatrix} -R(0) \\ -R' - (\delta(a) + \mu)R \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -v(0) \\ -v' - (\alpha(\theta) + \mu)v \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

avec

$$\text{Dom}(A) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \{0\} \times W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R}),$$

où $W^{1,1}$ est un espace de Sobolev, alors $\overline{\text{Dom}(A)} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \{0\} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R})$ n'est pas dense dans \mathcal{X} . En effet, soit $x \in \mathcal{X}$ et supposons qu'il existe une suite $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq \overline{\text{Dom}(A)}$ telle que :

$$\|x_n - x\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Notons par $x_n = (u_n, v_n, \begin{pmatrix} 0 \\ w_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z_n \end{pmatrix})$ et $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ avec $x_3 \neq 0$ et $x_5 \neq 0$.

Comme $x_n \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$ alors

- $u_n \rightarrow x_1$.
- $v_n \rightarrow x_2$.
- $0 \rightarrow x_3$, or $x_3 \neq 0$ ce qui est absurde.

On considère une application non linéaire $F : \overline{\text{Dom}(A)} \rightarrow \mathcal{X}$, qui est définie par

$$F \begin{pmatrix} S \\ I \\ \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda - \beta S(t)I(t) + \int_0^\infty \delta(a)R(a, t) da + \int_0^\infty \alpha(\theta)v(\theta, t) d\theta \\ \beta S(t)I(t) \\ \begin{pmatrix} \gamma I(t) \\ 0_{L^1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \psi S(t) \\ 0_{L^1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

et posons

$$u(t) = \left(S(t), I(t), \begin{pmatrix} 0 \\ R(\cdot, t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v(\cdot, t) \end{pmatrix} \right)^T.$$

Soit

$$\mathcal{X}_0 := \overline{Dom(A)} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \{0\} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R})$$

et

$$\mathcal{X}_{0+} := \overline{Dom(A)} \cap \mathcal{X}_+ = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times L^1_+((0, +\infty), \mathbb{R}) \times \{0\} \times L^1_+((0, +\infty), \mathbb{R}).$$

En se la basant de ce qui précède, on peut reformuler le système (3.1) comme le problème de Cauchy abstrait suivant

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(u(t)) \quad \text{pour } t \geq 0, \quad \text{avec } u(0) = u^0 \in \mathcal{X}_0, \quad (3.7)$$

on définit une solution du problème (3.7) comme étant la solution de l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = u^0 + A \int_0^t u(s) ds + \int_0^t F(u(s)) ds, \quad (3.8)$$

une solution continue de (3.8) est appelée équation intégrale du problème (3.7).

On définit $D_0 = D \cap \overline{Dom(A)}$. Pour démontrer que le problème (3.7) est bien posé on utilise le Théorème 1.8 (Voir chapitre 1, Section 6). Pour cela il faut vérifier les conditions suivantes

- 1** A est un opérateur linéaire fermé sur \mathcal{X} . $(\lambda - A)$ a un inverse borné sur \mathcal{X} et

$$\|(\lambda - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \quad (3.9)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > w$ et M, w sont des constantes.

- 2** $F : D_0 \rightarrow \mathcal{X}$ est un opérateur borné. De plus, F est localement lipschitzienne, c'est à dire il existe une constante $L > 0$ et $\epsilon > 0$ telle que

$$\|F(y) - F(z)\| \leq L \|y - z\|,$$

pour tout $y, z \in D_0$ et $\|y - z\| \leq \epsilon$.

- 3** $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ envoie D dans lui même pour $\lambda > w$ suffisamment grand.

- 4** Pour tout $u \in D_0$,

$$\frac{1}{h} dis(u + hF(u), D) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad h \rightarrow 0.$$

Pour compléter la preuve, on vérifie les assertions ci-dessus

1 A est un opérateur linéaire.

Pour vérifier l'estimation, soit $f \in \mathcal{X}$ avec les coordonnées

$$f = \left(f_0, f_1, \begin{pmatrix} \xi_2 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_3 \\ f_3 \end{pmatrix} \right)^T$$

et on considère l'équation $(\lambda - A)u = f$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \lambda S(t) + (\mu + \psi)S(t) \\ \lambda I(t) + (\mu + \nu + \gamma)I(t) \\ \begin{pmatrix} R(0) \\ \lambda R + R' + (\delta(a) + \mu)R \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v(0) \\ \lambda v + v' + (\alpha(\theta) + \mu)v \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \begin{pmatrix} \xi_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \xi_3 \\ f_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

par identification

a $\lambda S + (\mu + \psi)S = f_0$, donc

$$S(t) = \frac{f_0}{\lambda + \mu + \psi}, \text{ avec } \lambda \neq -(\mu + \psi).$$

b De la même façon, on a, $\lambda I(t) + (\mu + \nu + \gamma)I(t) = f_1$, c'est-à-dire

$$I(t) = \frac{f_1}{\lambda + (\mu + \nu + \gamma)}, \text{ avec } \lambda \neq -(\mu + \nu + \gamma).$$

c $R(0) = \xi_2$.

d $R' + (\lambda + \delta(a) + \mu)R = f_2$, ceci donne :

$$\left(R(a)e^{\lambda a + \int_0^a (\mu + \delta(s)) ds} \right)' = f_2 e^{\lambda a + \int_0^a (\mu + \delta(s)) ds}$$

par intégration, on trouve

$$R(a) = \xi_2 e^{-\lambda a} P_0(a) + \int_0^a f_2(s) e^{-\lambda(a-s)} \frac{P_0(a)}{P_0(s)} ds$$

où

$$P_0(a) = e^{-\int_0^a (\mu + \delta(s)) ds}.$$

e $v(0) = \xi_3$.

f $v' + (\lambda + \alpha(\theta) + \mu)v = f_3$, par la même méthode utiliser pour trouver la

solution associée à R , on obtient

$$v(\theta) = \xi_3 e^{-\lambda\theta} K_0(\theta) + \int_0^\theta f_3(s) e^{-\lambda(\theta-s)} \frac{K_0(\theta)}{K_0(s)} ds$$

où

$$K_0(\theta) = e^{-\int_0^\theta (\mu + \alpha(s)) ds}.$$

Alors

$$u = (\lambda - A)^{-1} f = \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \frac{f_0}{\lambda + \mu + \psi} \\ \frac{f_1}{\lambda + (\mu + \nu + \gamma)} \\ 0 \\ \xi_2 e^{-\lambda a} P_0(a) + \int_0^a f_2(s) e^{-\lambda(a-s)} \frac{P_0(a)}{P_0(s)} ds \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ \xi_3 e^{-\lambda\theta} K_0(\theta) + \int_0^\theta f_3(s) e^{-\lambda(\theta-s)} \frac{K_0(\theta)}{K_0(s)} ds \end{array} \right) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

supposons que $\lambda > \max\{-(\mu + \psi), -(\mu + \nu + \gamma)\}$. On a

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A)^{-1} f\| &= \left\| \frac{f_0}{\lambda + \mu + \psi} \right\|_{L^1((0, +\infty), \mathbb{R})}, \\ &\leq \frac{\|f_0\|}{\lambda + (\mu + \psi)}, \\ &\leq \frac{\|f\|}{\lambda - (-(\mu + \psi))}, \end{aligned}$$

ainsi

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{(\lambda - w)} \quad \text{avec } w = -(\mu + \psi) \text{ et } \lambda \neq w.$$

De plus

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A)^{-1} f\| &= \left\| \frac{f_1}{\lambda + \mu + \nu + \gamma} \right\|_{L^1}, \\ &\leq \frac{\|f_1\|}{\lambda + (\mu + \nu + \gamma)}, \\ &\leq \frac{\|f\|}{\lambda - (-(\mu + \nu + \gamma))}, \end{aligned}$$

donc

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{(\lambda - w)} \quad \text{avec } w = -(\mu + \nu + \gamma) \text{ et } \lambda \neq w.$$

D'ou l'estimation suivante

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{(\lambda - w)},$$

pour $w = \min\{(\mu + \psi), (\mu + \nu + \gamma)\}$ (car $w = \max\{-(\mu + \psi), -(\mu + \nu + \gamma)\} = -\max\{(\mu + \psi), (\mu + \nu + \gamma)\} = \min\{(\mu + \psi), (\mu + \nu + \gamma)\}$). Par itération de l'estimation ci-dessus n fois on obtient l'inégalité (3.9).

2 Comme les fonctions $\delta(a)$, $\alpha(\theta)$ sont bornées, il n'est pas difficile de prouver que F est un opérateur borné. Il reste à démontrer que F est Lipschitzienne, pour cela on a :

$$\begin{aligned} F_1(u) - F_1(\bar{u}) &= \Lambda - \beta SI + \int_0^\infty \alpha(\theta)v(\theta, \cdot)d\theta + \int_0^\infty \delta(a)R(a, \cdot)da, \\ &= \Lambda + \beta\bar{S}\bar{I} - \int_0^\infty \alpha(\theta)\bar{v}(\theta, \cdot)d\theta - \int_0^\infty \delta(a)\bar{R}(a, \cdot)da, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} F_1(u) - F_1(\bar{u}) &= \beta S(\bar{I} - I) + \beta\bar{I}(\bar{S} - S) - \int_0^\infty \alpha(\theta)(\bar{v}(\theta, \cdot) - v(\theta, \cdot))d\theta \\ &\quad - \int_0^\infty \delta(a)(\bar{R}(a, \cdot) - R(a, \cdot))da, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|F_1(u) - F_1(\bar{u})\| &\leq \beta|S|\|\bar{I} - I\| + \beta\|\bar{I}\|\|\bar{S} - S\| + \int_0^\infty \|\alpha(\theta)\| |\bar{v}(\theta, \cdot) - v(\theta, \cdot)|d\theta \\ &\quad + \int_0^\infty \|\delta(a)\| |\bar{R}(a, \cdot) - R(a, \cdot)|da, \end{aligned}$$

comme $u \in D_0 = D \cap \overline{Dom(A)}$ alors $u \in D$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \|F_1(u) - F_1(\bar{u})\| &\leq \beta\frac{\Lambda}{\mu}\|\bar{I} - I\| + \beta\frac{\Lambda}{\mu}\|\bar{S} - S\| + \|\alpha(\theta)\|_{L^\infty} \int_0^\infty |\bar{v}(\theta, \cdot) - v(\theta, \cdot)|d\theta \\ &\quad + \|\delta(a)\|_{L^\infty} \int_0^\infty |\bar{R}(a, \cdot) - R(a, \cdot)|da, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|F_1(u) - F_1(\bar{u})\| &\leq l \left(\|\bar{S} - S\| + \|\bar{I} - I\| + \int_0^\infty |\bar{v}(\theta, \cdot) - v(\theta, \cdot)|d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty |\bar{R}(a, \cdot) - R(a, \cdot)|da \right), \\ &\leq l \|u - \bar{u}\|, \quad \text{où } l = \sup\left(\frac{\beta\Lambda}{\mu}, \|\alpha(\theta)\|_{L^\infty}, \|\delta(a)\|_{L^\infty}\right). \end{aligned}$$

Regardons avec la deuxième composante de F , on trouve :

$$\begin{aligned} F_2(u) - F_2(\bar{u}) &= \beta SI - \beta\bar{S}\bar{I}, \\ &= \beta S(I - \bar{I}) + \beta\bar{I}(S - \bar{S}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\|F_2(u) - F_2(\bar{u})\| \leq \beta|S||I - \bar{I}| + \beta|\bar{I}||S - \bar{S}|,$$

or, on sait que $S \in D$ et $\bar{I} \in D$, on obtient

$$\begin{aligned} \|F_2(u) - F_2(\bar{u})\| &\leq \beta \frac{\Lambda}{\mu} |I - \bar{I}| + \beta \frac{\Lambda}{\mu} |S - \bar{S}|, \\ &\leq \beta \frac{\Lambda}{\mu} |I - \bar{I}| + \beta \frac{\Lambda}{\mu} |S - \bar{S}| + \int_0^\infty |\bar{v}(\theta, \cdot) - v(\theta, \cdot)| d\theta \\ &+ \int_0^\infty |\bar{R}(a, \cdot) - R(a, \cdot)| da, \\ &\leq m \|u - \bar{u}\|, \text{ où } m = \sup\left(\frac{\beta\Lambda}{\mu}, 1\right). \end{aligned}$$

Ensuite, avec la troisième composante

$$F_3(u) - F_3(\bar{u}) = \gamma(I - \bar{I}),$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \|F_3(u) - F_3(\bar{u})\| &\leq \gamma |I - \bar{I}|, \\ &\leq \gamma |I - \bar{I}| + |S - \bar{S}| + \int_0^\infty |\bar{v}(\theta, \cdot) - v(\theta, \cdot)| d\theta \\ &+ \int_0^\infty |\bar{R}(a, \cdot) - R(a, \cdot)| da, \\ &\leq M \|u - \bar{u}\|, \text{ où } M = \sup(\gamma, 1). \end{aligned}$$

Enfin pour la dernière composante

$$F_4(u) - F_4(\bar{u}) = \psi(S - \bar{S}),$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \|F_4(u) - F_4(\bar{u})\| &\leq \psi |S - \bar{S}|, \\ &\leq \psi |S - \bar{S}| + |I - \bar{I}| + \int_0^\infty |\bar{v}(\theta, \cdot) - v(\theta, \cdot)| d\theta \\ &+ \int_0^\infty |\bar{R}(a, \cdot) - R(a, \cdot)| da, \\ &\leq n \|u - \bar{u}\|, \text{ où } n = \sup(\psi, 1). \end{aligned}$$

Posons $L = \sup(l, m, M, n)$, alors

$$\|F(u) - F(\bar{u})\| \leq L \|u - \bar{u}\|,$$

ce qui montre que F est un opérateur Lipschitzien.

3 Pour $f \in D$, utilisant (3.10) et multiplions par λ

$$\lambda(\lambda - A)^{-1}f = \begin{pmatrix} \frac{\lambda f_0}{\lambda + \mu + \psi} \\ \frac{\lambda f_1}{\lambda + (\mu + \nu + \gamma)} \\ 0 \\ \left(\lambda \xi_2 e^{-\lambda a} P_0(a) + \lambda \int_0^a f_2(s) e^{-\lambda(a-s)} \frac{P_0(a)}{P_0(s)} ds \right) \\ 0 \\ \left(\lambda \xi_3 e^{-\lambda \theta} K_0(\theta) + \lambda \int_0^\theta f_3(s) e^{-\lambda(\theta-s)} \frac{K_0(\theta)}{K_0(s)} ds \right) \end{pmatrix},$$

en prenant en compte la première quantité, on remarque que

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda - A)^{-1}f &\leq \frac{\lambda \|f_0\|_{L^1}}{\lambda + \mu + \psi}, \\ &\leq \frac{\lambda \|f\|_{L^1}}{\lambda - w}, \quad w = -(\mu + \psi) \text{ et } w \neq \lambda, \\ \lambda(\lambda - A)^{-1}f &\leq \|f\|, \end{aligned}$$

on applique la même chose pour la deuxième composante, donc on obtient l'estimation $\lambda(\lambda - A)^{-1}f \leq \|f\|$ pour $w = -(\mu + \nu + \gamma)$ et $w \neq \lambda$, pour la troisième (resp. quatrième) composante on n'a pas cette estimation car les deux quantités tendent vers 0 quand $a \rightarrow \infty$ ($\theta \rightarrow \infty$). Alors $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ envoie D dans lui même pour $\lambda > w$ suffisamment grand.

4 Il nous reste la dernière condition.

Soit $u \in D_0$. Il suffit de montrer que $u + hF(u) \in D$, tout d'abord il faut prouver que $u + hF(u) \in \mathcal{X}_+$

$$u + hF(u) = \begin{pmatrix} S \\ I \\ \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \Lambda - \beta SI + \int_0^{+\infty} \delta(a) R(a, t) da + \int_0^\infty \alpha(\theta) v(\theta, t) d\theta \\ \beta SI \\ \begin{pmatrix} \gamma I \\ 0_{L^1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \psi S \\ 0_{L^1} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$u + hF(u) = \begin{pmatrix} S + h\Lambda - h\beta SI + h \int_0^{+\infty} \delta(a) R(a, t) da + h \int_0^\infty \alpha(\theta) v(\theta, t) d\theta \\ I + h\beta SI \\ \begin{pmatrix} h\gamma I \\ R \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} h\psi S \\ v \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

il est clair que pour h assez petit $u + hF(u) \in \mathcal{X}_+$. Par la formule de $u + hF(u)$ donnée ci-dessus et par la définition de la limite, on peut toujours trouver un h assez petit telle que

$$u + hF(u) \longrightarrow \begin{pmatrix} S \\ I \\ \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \end{pmatrix} = u \in D \text{ avec } h \rightarrow 0,$$

alors $u + hF(u) \in D$, et comme $u \in D$ donc $F(u) \in D$.

On définit $\hat{F} : \mathcal{X}_{0+} \rightarrow \mathcal{X}_+$ telle que $\hat{F}(u) = F(u) + ku$, où $k > \frac{\beta\Lambda}{\mu}$.

$$\frac{1}{h} \text{dist}(u + hF(u), D) = \frac{1}{h} \text{dist}(u + h\hat{F}(u) - khu, D).$$

On a $k > \frac{\beta\Lambda}{\mu} \Rightarrow -kh < \frac{-\beta\Lambda h}{\mu}$, de plus $u \in D_0$ i.e $u \in D$ et $u \in \overline{\text{Dom}(A)}$.

$$\begin{aligned} u \in D \text{ i.e } u &\leq \frac{\Lambda}{\mu}, \\ -khu &< \frac{-\beta h \Lambda}{\mu} \frac{\Lambda}{\mu}, \\ u - khu &< \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\beta h \Lambda}{\mu} \frac{\Lambda}{\mu}, \\ &< \frac{\Lambda}{\mu} \underbrace{\left(1 - \frac{\beta h \Lambda}{\mu}\right)}_{\leq 1}, \\ &< \frac{\Lambda}{\mu}, \end{aligned}$$

donc $u - khu \in D$.

$\hat{F}(u)$ est donnée par

$$\hat{F}(u) = F(u) + ku.$$

on sait que $F(u) \in D$ et $u \in D$ alors $\hat{F}(u) \in D$, et par la suite $h\hat{F}(u) \in D$ pour h assez petit.

En conclusion

$$\frac{1}{h} \text{dist}(u - khu + h\hat{F}(u), D) = 0.$$

Existence et unicité du système (3.1)

Afin de prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1), on utilise la méthode de point fixe.

Tout d'abord on définit l'application:

$$\begin{aligned}\omega : C([0, +\infty[, D) &\rightarrow C([0, +\infty[, D) \\ \mapsto (\omega u)(t) &= u^0 + \int_0^t Au(s)ds + \int_0^t F(u(s))ds.\end{aligned}$$

Ensuite on définit l'espace

$$\mathcal{X}_\alpha = C([0, +\infty[, D) = \{\varphi \in C([0, +\infty[, D), \text{ tq } \sup_{t>0} e^{-\alpha t} \|\varphi(t)\| < \infty\},$$

pour dire que l'application ω admet un point fixe il faut montrer que :

► $\omega : \mathcal{X}_\alpha \rightarrow \mathcal{X}_\alpha$.

► ω est une contraction.

Démonstration :

1 ω est une contraction ?

$$\begin{aligned}e^{-\alpha t} \|\omega(u)(t) - \omega(\bar{u})(t)\| &= e^{-\alpha t} \left\| \int_0^t A(u(s) - \bar{u}(s))ds + \int_0^t (F(u(s)) - F(\bar{u}(s)))ds \right\|, \\ &\leq e^{-\alpha t} \int_0^t \|A\| \|u(s) - \bar{u}(s)\| ds + \\ &\quad e^{-\alpha t} \int_0^t \|F(u(s)) - F(\bar{u}(s))\| ds, \\ &\leq \|A\| \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} e^{-\alpha s} \|u(s) - \bar{u}(s)\| ds + \\ &\quad L \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} e^{-\alpha s} \|u(s) - \bar{u}(s)\| ds, \\ &\leq \|A\| \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|u - \bar{u}\|_\alpha ds + L \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|u - \bar{u}\|_\alpha ds, \\ \|\omega - \bar{\omega}\|_\alpha &\leq \frac{\|A\| + L}{\alpha} \|u - \bar{u}\|_\alpha,\end{aligned}$$

on choisit $\|A\| + L < \alpha$, dans ce cas ω est une contraction.

2 $\omega : \mathcal{X}_\alpha \rightarrow \mathcal{X}_\alpha$?

On a $(\omega u)(t) = u^0 + \int_0^t Au(s)ds + \int_0^t F(u(s))ds$,

$$\|(\omega u)(t)\| \leq \|u^0\| + \|A\| \int_0^t \|u(s)\| ds + \int_0^t \|F(u(s))\| ds,$$

or

$$\begin{aligned}F(u(s)) &= F(u(s)) + F(0) - F(0), \\ |F(u(s))| &\leq |F(u(s)) + F(0) - F(0)|, \\ |F(u(s))| &\leq L|u(s)| + |F(0)|,\end{aligned}$$

en remplaçant

$$\begin{aligned} \|(\omega u)(t)\| &\leq |u^0| + \|A\| \int_0^t \|u(s)\| ds + L \int_0^t \|u(s)\| ds + \int_0^t c ds \text{ avec } c = F(0), \\ e^{-\alpha t} \|(\omega u)(t)\| &\leq e^{-\alpha t} |u^0| + \|A\| \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|u\|_\alpha ds + L \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|u\|_\alpha ds + \\ &\quad e^{-\alpha t} \int_0^t c ds, \\ \|u\|_\alpha &\leq \|u^0\|_\alpha + \|A\| \frac{\|u\|_\alpha}{\alpha} + L \frac{\|u\|_\alpha}{\alpha} + cte^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \|A\| + L + \epsilon$,

$$\begin{aligned} \frac{\|A\|+L+\epsilon-(\|A\|+L)}{\|A\|+L+\epsilon} \|u\|_\alpha &\leq \|u^0\| + cte^{-\alpha t}, \\ \|u\|_\alpha &\leq \frac{\|A\|+L+\epsilon}{\epsilon} \|u^0\|_\alpha + \frac{\|A\|+L+\epsilon}{\epsilon} cte^{-\alpha t} < \infty. \end{aligned}$$

D'où l'existence d'un point fixe.

Taux de reproduction de base et les états stationnaires

Le taux qu'une personne vaccinée quitte son compartiment est donné par $\mu + \alpha(\theta)$, d'où la probabilité pour que cette personne soit encore immunisée et être en vie après un temps θ est donnée par

$$k_0(\theta) = e^{-\int_0^\theta (\mu + \alpha(s)) ds}, \quad (3.11)$$

La probabilité qu'une personne vaccinée quitte son compartiment à cause de la diminution de l'effet du vaccin tout en restant vivante après un temps θ est donnée par :

$$K(\theta) = \alpha(\theta) e^{-\int_0^\theta (\mu + \alpha(s)) ds}. \quad (3.12)$$

Soit

$$\mathcal{K}_0 = \int_0^\infty k_0(\theta) d\theta,$$

Par un simple calcul, nous avons :

$$\mathcal{K} = \int_0^\infty (\alpha(\theta) + \mu) e^{-\int_0^\theta (\mu + \alpha(s)) ds} d\theta - \mu \int_0^\infty e^{-\int_0^\theta (\mu + \alpha(s)) ds} d\theta,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{K} = - \int_0^\infty \left(e^{-\int_0^\theta (\mu + \alpha(s)) ds} \right)' d\theta - \mu \int_0^\infty K_0(\theta) d\theta.$$

Ainsi la formulation

$$\mathcal{K} = 1 - \mu \int_0^\infty K_0(\theta) d\theta := 1 - \mu \mathcal{K}_0. \quad (3.13)$$

3.2. ANALYSE MATHÉMATIQUE DU MODÈLE (3.1)–(3.2)

Puis, sur la base de la définition du nombre de reproduction de base, sachant que l'état sans maladie est donné par

$$E^0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu + \psi - \psi\mathcal{K}}, 0, 0, \psi SK_0(\theta) \right) \text{ avec } \mathcal{K} \neq \frac{\mu + \psi}{\psi},$$

alors le taux de reproduction de base pour le système (3.1) est donné par l'expression suivante :

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda}{(\mu + \nu + \gamma)(\mu + \psi - \psi\mathcal{K})} = \frac{\beta\Lambda}{\mu(\mu + \nu + \gamma)(1 + \psi\mathcal{K}_0)}, \quad (3.14)$$

qui peut également être donné par un processus de renouvellement (Voir Yang et al [52]).

Évidemment, le système (3.1) a toujours un état sans maladie $E^0 = (S^0, 0, 0, v^0(\theta))$, qui satisfait

$$\begin{cases} \Lambda = (\mu + \psi)S^0 - \int_0^\theta \alpha(\theta)v^0(\theta) d\theta, \\ \frac{dv^0}{d\theta} = -(\mu + \alpha(\theta))v^0(\theta), \\ v(0) = \psi S. \end{cases} \quad (3.15)$$

En résolvant les deux dernières équations différentielles, on obtient

$$v^0(\theta) = \psi S^0 K_0(\theta). \quad (3.16)$$

En remplaçant (3.16) dans la première équation de (3.15), on obtient

$$S^0 = \frac{\Lambda}{\mu + \psi - \psi\mathcal{K}} = \frac{\Lambda}{\mu(1 + \psi\mathcal{K}_0)}. \quad (3.17)$$

On déduit que

$$DFSS = E^0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu(1 + \psi\mathcal{K}_0)}, 0, 0, \psi S^0 K_0(\theta) \right).$$

Soit

$$\begin{aligned} P_0(a) &:= e^{-\int_0^a (\mu + \delta(s)) ds}, & \mathcal{P}_0 &= \int_0^\infty P_0(a) da, \\ P(a) &:= \delta(a)P_0(a), & \mathcal{P} &= \int_0^\infty P(a) da. \end{aligned} \quad (3.18)$$

On a

$$\mathcal{P} = \int_0^\infty P(a) da = 1 - \mu\mathcal{P}_0. \quad (3.19)$$

3.3. STABILITÉ DE L'ÉTAT SANS MALADIE (DFSS)

Un état stationnaire $(S^*, I^*, R^*(a), v^*(\theta))$ du système (3.1) doit satisfaire les équations suivantes

$$\begin{cases} \Lambda = (\mu + \psi)S^* + \beta S^* I^* - \int_0^\infty \alpha(\theta)v^*(\theta) d\theta - \int_0^\infty \delta(a)R^*(a) da, \\ 0 = \beta S^* I^* - (\mu + \nu + \gamma)I^*, \\ \frac{d}{da}R^*(a) = -(\mu + \delta(a))R^*(a), \\ \frac{d}{d\theta}v^*(\theta) = -(\mu + \alpha(\theta))v^*(\theta), \\ R^*(0) = \gamma I^*, \\ v^*(0) = \psi S^*, \end{cases} \quad (3.20)$$

de la deuxième équation du système (3.20), on obtient

$$S^* = \frac{\mu + \nu + \gamma}{\beta}, \quad (3.21)$$

la résolution de la quatrième et cinquième équations du système (3.20), respectivement donne

$$R^*(a) = \gamma P_0(a)I^*, \quad v^*(\theta) = \psi K_0(\theta)S^*. \quad (3.22)$$

En remplaçant (3.22) dans la première équation de (3.20), on obtient

$$\Lambda = (\mu + \psi)S^* + \beta S^* I^* - \psi \mathcal{K}S^* - \gamma \mathcal{P}I^*. \quad (3.23)$$

Il résulte alors de (3.21) et (3.23) que

$$I^* = \frac{\Lambda}{\mu + \nu + \gamma \mu \mathcal{P}_0} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right). \quad (3.24)$$

Alors il y a un unique état d'équilibre $E^* = (S^*, I^*, R^*(a), v^*(\theta))$ si $R_0 > 1$.

Résumant la discussion ci-dessus, on peut citer le Théorème suivant.

Théorème 3.1 [18] *Le système (3.1) admet un unique équilibre sans maladie (DFSS) noté E^0 si $R_0 < 1$, il a deux équilibres E^0 et E^* si $R_0 > 1$.*

Dans ce qui suit, on considère uniquement la stabilité de E^0 pour le système (3.1).

3.3 Stabilité de l'état sans maladie (DFSS)

Théorème 3.2 [18] *Si $R_0 < 1$ l'équilibre sans maladie E^0 est localement asymptotiquement stable et il est instable lorsque $R_0 > 1$.*

Preuve : Posons : $S(t) = x(t) + S^0$, $I(t) = y(t)$, $R(a, t) = z(a, t)$ et $v(\theta, t) = w(\theta, t) + v^0(\theta)$.

1 Pour la première équation du système (3.1)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \Lambda - \beta x(t)y(t) - \beta S^0 y(t) - (\mu + \psi)(x(t) + S^0) + \int_0^\infty \delta(a)z(a, t) da \\ &+ \int_0^\infty \alpha(\theta)(w(\theta, t) + v^0(\theta)) d\theta, \end{aligned}$$

en négligeant les termes d'ordre 2 et sachant que $\Lambda = (\mu + \psi)S^0 - \int_0^\infty \alpha(\theta)v^0(\theta) d\theta$, on obtient l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt} = -\beta S^0 y(t) - (\mu + \psi)x(t) + \int_0^\infty \delta(a)z(a, t) da + \int_0^\infty \alpha(\theta)w(\theta, t) d\theta.$$

2 On remplace maintenant $I(t)$ par $y(t)$ dans (3.1)

$$\frac{dy}{dt} = \beta(x(t) + S^0)y(t) - (\mu + \nu + \gamma)y(t),$$

en négligeant les termes d'ordre 2, on aura

$$\frac{dy}{dt} = \beta S^0 y(t) - (\mu + \nu + \gamma)y(t).$$

3 Il est clair que Z vérifie

$$\frac{\partial z(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial z(a, t)}{\partial t} = -(\mu + \delta(a))z(a, t), \quad \text{avec } z(0, t) = \gamma y(t).$$

4 On voit que

$$-(\alpha(\theta) + \mu)(w(\theta, t) + v^0(\theta)) = \frac{\partial w(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial w(\theta, t)}{\partial t} - (\alpha(\theta) + \mu)v^0(\theta),$$

donc

$$\frac{\partial w(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial w(\theta, t)}{\partial t} = -(\alpha(\theta) + \mu)w(\theta, t), \quad \text{avec } w(0, t) = \psi x(t).$$

3.3. STABILITÉ DE L'ÉTAT SANS MALADIE (DFSS)

On résume tous ses calculs dans le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -\beta S^0 y(t) - (\mu + \psi)x(t) + \int_0^\infty \delta(a)z(a, t) da + \int_0^\infty \alpha(\theta)w(\theta, t) d\theta, \\ \frac{dy}{dt} = \beta S^0 y(t) - (\mu + \nu + \gamma)y(t), \\ \frac{\partial z(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial z(a, t)}{\partial t} = -(\mu + \delta(a))z(a, t), \\ z(0, t) = \gamma y(t), \\ \frac{\partial w(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial w(\theta, t)}{\partial t} = -(\alpha(\theta) + \mu)w(\theta, t), \\ w(0, t) = \psi x(t). \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Pour analyser le comportement asymptotique autour de l'équilibre E^0 , on pose

$$x(t) = \bar{x}e^{\lambda t}, \quad y(t) = \bar{y}e^{\lambda t}, \quad z(a, t) = \bar{z}(a)e^{\lambda t}, \quad w(\theta, t) = \bar{w}(\theta)e^{\lambda t},$$

alors on obtient le problème de valeur propre suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \bar{x} = -\beta S^0 \bar{y} - (\mu + \psi)\bar{x} + \int_0^\infty \delta(a)\bar{z}(a) da + \int_0^\infty \alpha(\theta)\bar{w}(\theta) d\theta, \\ \lambda \bar{y} = \beta S^0 \bar{y} - (\mu + \nu + \gamma)\bar{y}, \\ \frac{d\bar{z}(a)}{da} = -(\lambda + \mu + \delta(a))\bar{z}(a), \\ \bar{z}(0) = \gamma \bar{y}, \\ \frac{d\bar{w}(\theta)}{d\theta} = -(\lambda + \alpha(\theta) + \mu)\bar{w}(\theta), \\ \bar{w}(0) = \psi \bar{x}, \end{array} \right. \quad (3.26)$$

il résulte de la deuxième équation de (3.26), si $\bar{y} \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \lambda &= \beta S^0 - (\mu + \nu + \gamma), \\ &= (\mu + \nu + \gamma) \left(\frac{\beta \Lambda}{\mu(\mu + \nu + \gamma)(1 + \psi \kappa)} \right), \\ &= (\mu + \nu + \gamma)(R_0 - 1) < 0. \end{aligned}$$

C'est une valeur propre du problème (3.26), en résolvant les équations différentielles par la méthode de facteur intégrant, on obtient

$$\bar{z}(a) = \bar{z}(0)e^{-\lambda a} P_0(a) = \gamma \bar{y} e^{-\lambda a} P_0(a) \quad (3.27)$$

et

$$\bar{w}(\theta) = \bar{w}(0)e^{-\lambda \theta} K_0(\theta) = \psi \bar{x} e^{-\lambda \theta} K_0(\theta) \quad (3.28)$$

3.3. STABILITÉ DE L'ÉTAT SANS MALADIE (DFSS)

en remplaçant (3.27) et (3.28) dans la première et la deuxième équation de (3.26), si $\bar{y} \neq 0$ on obtient

$$\begin{cases} \lambda \bar{x} + \beta S^0 \bar{y} + (\mu + \psi) \bar{x} - \psi \bar{x} \int_0^\infty \alpha(\theta) e^{-\lambda \theta} K_0(\theta) d\theta - \delta \bar{y} \int_0^\infty \delta(a) e^{-\lambda a} P_0(a) da = 0, \\ \lambda \bar{y} - \beta S^0 \bar{y} + (\mu + \nu + \gamma) \bar{y} = 0, \end{cases}$$

ce système peut être écrit sous la forme matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda + (\mu + \psi) - \psi \int_0^\infty \alpha(\theta) e^{-\lambda \theta} K_0(\theta) d\theta & \beta S^0 - \delta \int_0^\infty \delta(a) e^{-\lambda a} P_0(a) da \\ 0 & \lambda - \beta S^0 + (\mu + \nu + \gamma) \end{pmatrix}}_{:=T} \times \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant le déterminant associé à la matrice T

$$\det T = \left(\lambda + (\mu + \psi) - \psi \int_0^\infty \alpha(\theta) e^{-\lambda \theta} K_0(\theta) d\theta \right) * \left(\lambda - \beta S^0 + (\mu + \nu + \gamma) \right),$$

$$\det T = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda + (\mu + \psi) - \psi \int_0^\infty \alpha(\theta) e^{-\lambda \theta} K_0(\theta) d\theta \right) * \left(\lambda - \beta S^0 + (\mu + \nu + \gamma) \right) = 0,$$

i.e

$$\lambda + (\mu + \psi) - \psi \int_0^\infty \alpha(\theta) e^{-\lambda \theta} K_0(\theta) d\theta = 0,$$

ou

$$\lambda - \beta S^0 + (\mu + \nu + \gamma) = 0, \quad (\text{c'est vrai si } \bar{y} \neq 0),$$

de plus, on sait que $\lambda = \beta S^0 - (\mu + \nu + \gamma) < 0$.

D'où l'équation caractéristique suivante

$$\lambda + (\mu + \psi) - \psi \int_0^\infty \alpha(\theta) e^{-\lambda \theta} K_0(\theta) d\theta = 0. \quad (3.29)$$

Supposons qu'il existe une racine λ de l'équation (3.29) avec une partie réelle non-négative ($\Re(\lambda) \geq 0$)

$$\begin{aligned} \psi < |\lambda + \mu + \psi| &= |\psi \int_0^{+\infty} \alpha(\theta) e^{-\lambda \theta} e^{-\mu \theta} e^{-\int_0^\theta \alpha(s) ds} d\theta|, \\ &< |\psi \int_0^{+\infty} \alpha(\theta) e^{-\mu \theta} e^{-\int_0^\theta \alpha(s) ds} d\theta|, \\ &< |\psi \int_0^{+\infty} \alpha(\theta) e^{-\int_0^\theta \alpha(s) ds} d\theta| = |\psi \int_0^{+\infty} (e^{-\int_0^\theta \alpha(s) ds})' d\theta| = \psi. \end{aligned}$$

On conclue donc que toutes les racines de l'équation (3.29) et donc de l'équation (3.26) ont des parties réelles négatives, ce qui est absurde. Ainsi l'état stationnaire sans maladie (DFSS) $(S^0, 0, 0, v^0(\theta))$ du système (3.1) est localement stable si $R_0 < 1$ et instable si $R_0 > 1$.

3.3. STABILITÉ DE L'ÉTAT SANS MALADIE (DFSS)

Dans ce qui suit, on utilisera le Lemme de Fluctuation pour prouver la stabilité globale de l'équilibre sans maladie E^0 .

On note par :

$$g_\infty = \liminf_{t \rightarrow \infty} g(t) \quad \text{et} \quad g^\infty = \limsup_{t \rightarrow \infty} g(t).$$

Alors le Lemme de Fluctuation est donné comme suit :

Lemme 3.1 (Lemme de Fluctuation)[32] *Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et continument différentiable. Alors il existe une suite $\{s_n\}$ et $\{t_n\}$ telle que $s_n \rightarrow \infty$, $t_n \rightarrow \infty$, $g(s_n) \rightarrow g_\infty$, $g'(s_n) \rightarrow 0$, $g(t_n) \rightarrow g^\infty$ et $g'(t_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.*

Lemme 3.2 [34] *Supposons que $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée. Alors*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(\theta) f(t - \theta) d\theta \leq f^\infty \|h\|_1,$$

où $\|h\|_1 = \int_0^\infty h(s) ds$.

Théorème 3.3 [18] *Si $R_0 < 1$ l'équilibre sans maladie E^0 est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve : En utilisant la méthode des caractéristiques pour tout $t > 0$, les termes $R(a, t)$ et $v(\theta, t)$ peuvent être résolus.

◆ Pour $t > a \Rightarrow t = a + h$.

Posons

$$w(a) = R(a, a + h),$$

on obtient

$$\frac{dw}{da}(a) = -(\mu + \delta(a))w(a),$$

par la méthode de facteur intégrant on obtient

$$w(a) = w(0)e^{-\int_0^a (\mu + \delta(s)) ds} = w(0)P_0(a),$$

c'est à dire

$$R(a, t) = R(0, t - a)P_0(a),$$

donc

$$R(a, t) = \gamma I(t - a)P_0(a), \quad \text{si } t \geq a.$$

◆ Pour $a > t \Rightarrow a = t + h$.

Posons

$$w(t) = R(t + h, t),$$

3.3. STABILITÉ DE L'ÉTAT SANS MALADIE (DFSS)

de la même manière, on aura

$$R(a, t) = \frac{P_0(a)}{P_0(a-t)} R(a-t, 0), \quad \text{si } a \geq t,$$

en conclusion

$$R(a, t) = \begin{cases} \gamma I(t-a) P_0(a), & \text{si } t \geq a, \\ \frac{P_0(a)}{P_0(a-t)} R(a-t, 0), & \text{si } a \geq t. \end{cases} \quad (3.30)$$

Par la même méthode $v(\theta, t)$ est déterminée comme suit

$$v(\theta, t) = \begin{cases} \psi S(t-\theta) K_0(\theta), & \text{si } t \geq \theta, \\ \frac{K_0(\theta)}{K_0(\theta-t)} v(\theta-t, 0), & \text{si } \theta \geq t. \end{cases} \quad (3.31)$$

Du système (3.1), on a

$$S'(t) = \Lambda - \beta SI - (\mu + \psi)S + \int_0^\infty \delta(a) R(a, t) da + \int_0^\infty \alpha(\theta) v(\theta, t) d\theta.$$

Or $R(a, t)$ et $v(\theta, t)$ sont définies explicitement dans (3.30) resp. (3.31), donc

$$\begin{aligned} S'(t) &= \Lambda - \beta SI - (\mu + \psi)S + \int_0^t \delta(a) \gamma I(t-a) P_0(a) da + \int_0^\infty \delta(a) \frac{P_0(a+t)}{P_0(a)} R(a, 0) da \\ &+ \int_0^t \alpha(\theta) \psi S(t-\theta) K_0(\theta) d\theta + \int_0^\infty \alpha(\theta) \frac{K_0(\theta+t)}{K_0(\theta)} v(\theta, 0) d\theta. \end{aligned}$$

Comme $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $I : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$) est une fonction bornée (car $S \in D$) et continument différentiable alors d'après le Lemme de Fluctuation il existe une suite $\{t_n\}$ telle que quand $t_n \rightarrow \infty$, $S(t_n) \rightarrow S^\infty$ et $S'(t_n) \rightarrow 0$ (resp. $I(t_n) \rightarrow I^\infty$ et $I'(t_n) \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} S'(t_n) &= \Lambda - \beta S(t_n) I(t_n) - (\mu + \psi)S(t_n) + \int_0^{t_n} \delta(a) \gamma I(t_n - a) P_0(a) da \\ &+ \int_0^\infty \delta(a + t_n) \frac{P_0(a+t_n)}{P_0(a)} R(a, 0) da + \int_0^\infty \delta(a + t_n) \frac{P_0(a+t_n)}{P_0(a)} R(a, 0) da \\ &+ \int_0^{t_n} \alpha(\theta) \psi S(t_n - \theta) K_0(\theta) d\theta + \int_0^\infty \alpha(\theta + t_n) \frac{K_0(\theta+t_n)}{K_0(\theta)} v(\theta, 0) d\theta, \end{aligned}$$

mais

$$\int_0^\infty \delta(a + t_n) \frac{P_0(a+t_n)}{P_0(a)} R(a, 0) da = \int_0^\infty \delta(a + t_n) R_0(a) \frac{e^{-\int_0^{a+t_n} (\mu+\delta(s)) ds}}{e^{-\int_0^a (\mu+\delta(s)) ds}} da,$$

quand $t_n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &\leq \|\delta\|_\infty \int_0^\infty R_0(a) \frac{e^{-\int_0^\infty (\mu+\delta(s)) ds}}{e^{-\int_0^a (\mu+\delta(s)) ds}} da, \\ &\leq \|\delta\|_\infty \int_0^\infty R_0(a) \frac{e^{-\mu\infty + \int_0^\infty \delta(s) ds}}{e^{-\int_0^a (\mu+\delta(s)) ds}} da \rightarrow 0. \end{aligned}$$

3.3. STABILITÉ DE L'ÉTAT SANS MALADIE (DFSS)

De même pour le terme $\int_0^\infty \alpha(\theta + t_n) \frac{K_0(\theta+t_n)}{K_0(\theta)} v(\theta, 0) d\theta \rightarrow 0$ quand $t_n \rightarrow 0$, donc

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda - \beta S^\infty I^\infty - (\mu + \psi) S^\infty + \gamma I^\infty \mathcal{P} + \psi S^\infty \mathcal{K}, \\ \beta S^\infty I^\infty + \mu(1 + \psi \mathcal{K}_0) S^\infty &= \Lambda + \gamma I^\infty \mathcal{P}, \\ \beta S^\infty I^\infty + \mu(1 + \psi \mathcal{K}_0) S^\infty &\leq \Lambda, \end{aligned}$$

il est clair que

$$\mu(1 + \psi \mathcal{K}_0) S^\infty \leq \Lambda,$$

on obtient alors

$$S^\infty \leq \frac{\Lambda}{\mu(1 + \psi \mathcal{K}_0)}.$$

Il résulte de la deuxième équation du système (3.1) que

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - (\mu + \nu + \gamma)I(t), \\ &\leq (\beta S^\infty - (\mu + \nu + \gamma))I(t), \\ &\leq \left(\frac{\beta \Lambda}{\mu(1 + \psi \mathcal{K}_0)} - (\mu + \nu + \gamma) \right) I(t) = \frac{1}{(\mu + \nu + \gamma)} (\mathcal{R}_0 - 1) I(t), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$I(t) \leq I_0 e^{((\mu + \nu + \gamma)(\mathcal{R}_0 - 1))t}.$$

Notons que si $\mathcal{R}_0 < 1$. Ça mène à $I^\infty \rightarrow 0$.

Appliquant encore une fois le Lemme de Fluctuation, comme $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $I : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$) est une fonction bornée et continument différentiable alors il existe une suite $\{t_n\}$ telle que $S(t_n) \rightarrow S_\infty$ et $S'(t_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \frac{dS(t_n)}{dt} &= \Lambda - \beta S(t_n)I(t_n) - (\mu + \psi)S(t_n) + \psi \int_0^{t_n} \alpha(\theta) K_0(\theta) S(t_n - \theta) d\theta \\ &+ \gamma \int_0^{t_n} P_0(a) I(t_n - a) \delta(a) da + \int_{t_n}^\infty \alpha(\theta) \frac{K_0(\theta)}{K_0(\theta - t_n)} v(\theta - t_n, 0) d\theta \\ &+ \int_{t_n}^\infty \delta(a) \frac{P_0(a)}{P_0(a - t_n)} R(a - t_n, 0) da, \end{aligned}$$

qui peut être mise sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{dS(t_n)}{dt} &= \Lambda - \beta S(t_n)I(t_n) - (\mu + \psi)S(t_n) + \psi \int_0^{t_n} \alpha(\theta) K_0(\theta) S(t_n - \theta) d\theta \\ &+ \gamma \int_0^{t_n} P_0(a) I(t_n - a) \delta(a) da + \int_0^\infty \alpha(\theta + t_n) \frac{K_0(\theta+t_n)}{K_0(\theta)} v(\theta, 0) d\theta \\ &+ \int_0^\infty \delta(a + t_n) \frac{P_0(a+t_n)}{P_0(a)} R(a, 0) da \end{aligned}$$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \alpha(\theta + t_n) \frac{K_0(\theta+t_n)}{K_0(\theta)} v(\theta, 0) d\theta + \int_0^\infty \delta(a + t_n) \frac{P_0(a+t_n)}{P_0(a)} R(a, 0) da = 0$. Pour

$n \rightarrow \infty$, par l'utilisation du Lemme 3.2, on a alors d'une part

$$(E) \quad \begin{aligned} 0 &= \Lambda - \beta S_\infty I^\infty - (\mu + \psi)S_\infty + \psi S_\infty \mathcal{K} + \gamma I^\infty \mathcal{P}, \\ 0 &= \Lambda - \beta S_\infty I^\infty - \mu(1 + \psi \mathcal{K}_0)S_\infty + \gamma I^\infty \mathcal{P}, \end{aligned}$$

d'autre part

$$(F) \quad 0 = \beta S_\infty I^\infty - (\mu + \nu + \gamma)I^\infty.$$

En additionnant la deuxième équation de (E) et (F) on trouve

$$0 = \Lambda - \mu(1 + \psi \mathcal{K}_0)S_\infty - (\nu + \mu(1 + \gamma \mathcal{P}_0))I^\infty,$$

sachant que $I^\infty \rightarrow 0$, on obtient

$$0 = \Lambda - \mu(1 + \psi \mathcal{K}_0)S_\infty,$$

c'est à dire

$$\mu(1 + \psi \mathcal{K}_0)S_\infty = \Lambda,$$

qu'on peut l'écrire comme suit

$$\mu(1 + \psi \mathcal{K}_0)S_\infty \geq \Lambda,$$

ainsi

$$S_\infty \geq \frac{\Lambda}{\mu(1 + \psi \mathcal{K}_0)}.$$

On a donc $\frac{\Lambda}{\mu(1 + \psi \mathcal{K}_0)} \leq S_\infty \leq S^\infty \leq \frac{\Lambda}{\mu(1 + \psi \mathcal{K}_0)}$. C'est, $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{\Lambda}{\mu + \psi(1 - \mathcal{K})}$. Il résulte de (3.31) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(\theta, t) = \frac{\psi \Lambda}{\mu(1 + \psi \mathcal{K}_0)} K_0(\theta).$$

Par conséquent, $(S(t), I(t), R(a, t), v(\theta, t)) \rightarrow E^0$ dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times L_+^1 \times L_+^1$ quand $t \rightarrow \infty$. Ceci complète la preuve.

Le résultat de stabilité globale de l'équilibre sans maladie E^0 nous indique que la maladie disparaîtra si le nombre de reproduction de base R_0 est contrôlé pour être inférieur à 1. Dans la section suivante, on va analyser quelques stratégies optimales pour contrôler la maladie lorsque le nombre de reproduction de base R_0 est supérieur à 1.

3.4 Stratégies optimales d'intervention

Pour diminuer le nombre d'individus susceptibles et infectés à la fois avec un minimum d'investissement, on considère l'utilisation d'une stratégies de contrôle optimale sous

la forme d'un renforcement de la vaccination et d'une amélioration de l'efficacité du traitement. Premièrement, l'effort de vaccination déplace les individus susceptibles vers la classe des vaccinées avec un taux $\psi(1 + \varepsilon_1(t))$ à l'instant t , où $\varepsilon_1(t)$ est le taux de vaccination en cours à l'instant t qui correspond au vaccin actuel ψ . En second place, $\varepsilon_2(t)$ est la proportion des personnes infectieuses qui reçoivent un traitement au temps t .

Les termes de contrôle $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ vérifient $0 < \varepsilon_{1 \min} \leq \varepsilon_1(t) \leq \varepsilon_{1 \max}$, $0 < \varepsilon_{2 \min} \leq \varepsilon_2(t) \leq \varepsilon_{2 \max} < 1$. En outre, les personnes infectées recevant un traitement auront un taux de guérison ($\tilde{\gamma} > \gamma$) plus élevé et une diminution du taux de décès réduit par l'infection ($\tilde{\nu} < \nu$).

Sur la base des hypothèses ci-dessus, en utilisant les mêmes paramètres et les noms des compartiments comme le système (3.1), on formule un modèle épidémique structuré en âge sous contrôle comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}S(t) = \Lambda - \beta SI - (\mu + \psi)(1 + \varepsilon_1(t))S(t) + \int_0^\infty \delta(a)R(a, t) da + \int_0^\infty \alpha(\theta)v(\theta, t) d\theta, \\ \frac{d}{dt}I(t) = \beta S(t)I(t) - (\nu + \gamma)(1 - \varepsilon_2(t))I(t) - \mu I(t) - (\tilde{\nu} + \tilde{\gamma})\varepsilon_2(t)I(t), \\ \frac{\partial R(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial R(a, t)}{\partial t} = -(\mu + \delta(a))R(a, t), \\ R(0, t) = \gamma(1 - \varepsilon_2(t))I(t) + \tilde{\gamma}\varepsilon_2(t)I(t), \\ \frac{\partial v(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial v(\theta, t)}{\partial t} = -(\mu + \alpha(\theta))v(\theta, t), \\ v(0, t) = \psi(1 + \varepsilon_1(t))S(t), \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(a, 0) = R_0(a), \quad v(\theta, 0) = v_0(\theta). \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Remarque 3.1 Avec les conditions au bord et les conditions initiales ci-dessus et une fonction de contrôle suffisamment lisse, on démontre l'existence d'une solution unique pour le système (3.32), qui reste bornée et non-négative pour $t > 0$.

Pour considérer le coût de la lutte contre la maladie, on définit la fonction objective suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) &= \int_0^{T_f} D[\tilde{\nu}\varepsilon_2(t)I(t) + \nu(1 - \varepsilon_2(t))I(t)] \\ &+ D_1\psi\varepsilon_1(t)S(t) + B_1\varepsilon_1^2(t) + D_2\varepsilon_2(t)I(t) + B_2\varepsilon_2^2(t) dt, \end{aligned} \quad (3.33)$$

où D , D_1 , D_2 , B_1 et B_2 sont des coefficients d'équilibrage transformant l'intégrale en coût dépensé sur une période finie de T_f jours. La première somme de l'intégrale, multipliée par D , est le coût de mortalité dû à la maladie et les expressions principales sont les coûts de mise en œuvre des deux contrôles. Les expressions quadratiques des contrôles sont incluses pour indiquer les coûts non linéaires pouvant survenir à des niveaux de traitement élevés.

Nous considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\mathcal{J}(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*) = \min_{\mathcal{U}} \mathcal{J}(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad (3.34)$$

sur l'ensemble des contrôles

$$\mathcal{U} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in L^\infty(\ell) : \varepsilon_{1 \min} \leq \varepsilon_1(\cdot) \leq \varepsilon_{1 \max}, \quad \varepsilon_{2 \min} \leq \varepsilon_2(\cdot) \leq \varepsilon_{2 \max}\},$$

où $\ell := [0, T_f] \times [0, T_f]$, $\varepsilon_{1 \min}$, $\varepsilon_{1 \max}$, $\varepsilon_{2 \min}$, $\varepsilon_{2 \max}$ sont des constantes données positives.

L'existence de la paire de contrôle optimal peut être obtenue en utilisant un résultat de Fleming et Rishel [21] et de Lukes [39].

Preuve : Pour prouver l'existence et l'unicité d'un couple de contrôle optimal, on refondra le système (3.32).

Tout d'abord, notons que la formule de solution pour $R(a, t)$ et $v(\theta, t)$ peut être obtenue en utilisant resp. la méthode des caractéristiques comme

◆ Pour $t > a \Rightarrow t = a + h$.

Posons

$$w(t) = R(t, a + h),$$

donc

$$\frac{dw}{da}(a) = -(\mu + \delta(a))w(a),$$

par la méthode de facteur intégrant, on obtient

$$w(a) = w(0)e^{-\int_0^a (\mu + \delta(s)) ds} = w(0)P_0(a),$$

c'est-à-dire

$$R(a, t) = R(0, t - a)P_0(a),$$

alors

$$R(a, t) = (\gamma(1 - \varepsilon_2(t - a)) + \tilde{\gamma}\varepsilon_2(t - a))I(t - a)P_0(a), \quad \text{si } t \geq a.$$

◆ Pour $a > t \Rightarrow a = t + h$.

Posons

$$w(t) = R(t + h, t),$$

donc

$$\frac{dw}{dt}(t) = -(\mu + \delta(t + h))w(t),$$

c'est-à-dire

$$R(a, t) = \frac{P_0(a)}{P_0(a - t)}R(a - t, 0).$$

$$R(a, t) = \frac{P_0(a)}{P_0(a - t)}R(a - t, 0) \quad \text{si } a \geq t.$$

En conclusion

$$R(a, t) = \begin{cases} (\gamma(1 - \varepsilon_2(t - a)) + \tilde{\gamma}\varepsilon_2(t - a))I(t - a)P_0(a), & \text{si } t \geq a, \\ \frac{P_0(a)}{P_0(a-t)}R(a - t, 0), & \text{si } a \geq t. \end{cases} \quad (3.35)$$

En appliquant le même raisonnement pour $v(\theta, t)$, on trouve

$$v(\theta, t) = \begin{cases} \psi(1 + \varepsilon_1(t - \theta))S(t - \theta)K_0(\theta), & \text{si } t \geq \theta, \\ \frac{K_0(\theta)}{K_0(\theta-t)}v(\theta - t, 0), & \text{si } \theta \geq t. \end{cases} \quad (3.36)$$

En remplaçant (3.35) et (3.36) dans le système (3.32), il devient alors

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - (\mu + \psi(1 + \varepsilon_1(t)))S(t) + \int_0^t \psi(1 + \varepsilon_1(t - \theta))K(\theta)S(t - \theta) d\theta \\ -\beta S(t)I(t) + \int_0^t (\gamma + \varepsilon_2(t - a)(\tilde{\gamma} - \gamma))P(a)I(t - a) da + h_v(t), \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - [\mu + \nu + \gamma + \varepsilon_2(t)(\tilde{\gamma} - \gamma + \tilde{\nu} - \nu)]I(t), \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \end{cases} \quad (3.37)$$

où

$$h_v(t) = \int_t^\infty \delta(a) \frac{P_0(a)}{P_0(a-t)} R_0(a-t) da + \int_t^\infty \alpha(\theta) \frac{K_0(\theta)}{K_0(\theta-t)} v_0(\theta-t) d\theta. \quad (3.38)$$

Soit $f(t, \vec{x}, \vec{\varepsilon})$ le côté droit de (3.37) avec $\vec{x} = [S, I]^{tr}$ et $\vec{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2]^{tr}$. Pour prouver l'existence d'une paire de contrôle optimal, il est facile de vérifier que

1 f est de classe \mathcal{C}^1 et il existe une constante C telle que

$$|f(t, \vec{0}, \vec{0})| \leq 0, \quad |f_{\vec{x}}(t, \vec{x}, \vec{\varepsilon})| \leq C \left(1 + (|\varepsilon_1|^2 + |\varepsilon_2|^2)^{\frac{1}{2}} \right), \quad |f_{\vec{\varepsilon}}(t, \vec{x}, \vec{\varepsilon})| \leq C.$$

2 L'ensemble admissible \mathcal{F} pour tous $(S_0, I_0, \vec{\varepsilon})$ de telle sorte que $\vec{\varepsilon}$ est Lebesgue-intégrable sur l'intervalle $[0, T_f]$ avec des valeurs en \mathcal{U} et la solution de (3.37) satisfait les conditions initiales sont non vides.

3 Le côté droit du système d'état (3.37) est borné par une fonction linéaire dans l'état et les variables de contrôle $\vec{\varepsilon}$.

4 L'ensemble de contrôle \mathcal{U} est convexe, fermé et compact.

5 L'intégrale de la fonctionnelle objective (3.33) est convexe et est bornée par $\omega_2 + \omega_1(|\varepsilon_1|^2 + |\varepsilon_2|^2)^{\frac{\kappa}{2}}$ pour certains $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ et $\kappa > 1$.

Il est clair que f est de \mathcal{C}^1 . De plus, on a

$$\begin{aligned} |f(t, \vec{0}, \vec{0})| &= \left| \begin{pmatrix} \Lambda + h_v(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right|, \\ &= \left| \begin{pmatrix} \Lambda + \int_0^\infty \delta(a+t) \frac{P_0(a+t)}{P_0(a)} R_0(a) da + \int_0^\infty \alpha(\theta+t) \frac{K_0(\theta+t)}{K_0(\theta)} v_0(\theta) d\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right|, \\ &= \left| \begin{pmatrix} \Lambda + \int_0^\infty \frac{P(a+t)}{P_0(a)} R_0(a) da + \int_0^\infty \frac{K_0(\theta+t)}{K_0(\theta)} v_0(\theta) d\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right|, \end{aligned}$$

comme P et K sont bornées, donc

$$|f(t, \vec{0}, \vec{0})| \leq C.$$

Maintenant, on calcule la dérivé de f par rapport aux composantes du vecteur x (i.e S et I)

$$\begin{aligned} |f_{\vec{x}}(t, \vec{x}, \vec{\varepsilon})| &= \left| \begin{pmatrix} -(\mu + \psi) + \int_0^t \psi K(\theta) d\theta - \beta I(t) & -\beta S(t) + \int_0^t \gamma P(a) da \\ \beta I(t) & \beta S(t) - (\mu + \nu + \gamma) \end{pmatrix} \right| \\ &+ \left| \begin{pmatrix} -\mu + \int_0^t \psi K(\theta) d\theta & \int_0^t (\tilde{\gamma} - \gamma) P(a) da \\ 0 & -(\tilde{\gamma} - \gamma + \tilde{\nu} - \nu) \end{pmatrix} \right| |\vec{\varepsilon}|, \\ |f_{\vec{\varepsilon}}(t, \vec{x}, \vec{\varepsilon})| &= \left| \begin{pmatrix} -\psi S(t) + \int_0^t \psi K(\theta) S(t - \theta) d\theta & \int_0^t (\tilde{\gamma} - \gamma) P(a) I(t - a) da \\ 0 & -(\tilde{\gamma} - \gamma + \tilde{\nu} - \nu) I(t) \end{pmatrix} \right|, \end{aligned}$$

encore une fois, comme P , K , S et I sont bornées on trouve

$$\begin{aligned} |f_{\vec{x}}(t, \vec{x}, \vec{\varepsilon})| &\leq C + C|\vec{\varepsilon}| \quad \text{avec} \quad |\vec{\varepsilon}| = \sqrt{|\varepsilon_1|^2 + |\varepsilon_2|^2}, \\ &\leq C + C\sqrt{|\varepsilon_1|^2 + |\varepsilon_2|^2}, \\ &\leq C(1 + \sqrt{|\varepsilon_1|^2 + |\varepsilon_2|^2}). \end{aligned}$$

Remarque 3.2 cela implique qu'il existe une solution de système (3.32) pour un contrôle constant, ce qui implique la condition 2. L'exigence selon laquelle f est une fonction linéaire en $\vec{\varepsilon}$ peut être remplacée par la Condition 3. Les Conditions 4 et 5 sont évidentes d'après la définition.

Théorème 3.4 [18] Il existe des fonctions de contrôle ε_1^* , ε_2^* , telle que

$$\mathcal{J}(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*) = \min_{\mathcal{U}} \mathcal{J}(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

On prévoit d'obtenir la fonction de contrôle optimale en utilisant le principe de minimum de Pontryagin [41]. Pour cela, on introduit un multiplicateur de Lagrange

ou une variable adjointe $Y = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(a, t), \xi_4(\theta, t))$, une variable d'état $Z = (S, I, R, v)$, une variable de contrôle $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, et on définit le Lagrangien :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(Z, \varepsilon, Y) = & \mathcal{J}(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) + \int_0^{T_f} \xi_1(t) \left[\frac{dS(t)}{dt} - (\Lambda - \beta S(t)I(t) \right. \\
 & \left. - (\mu + \psi)(1 + \varepsilon_1(t))S(t) + \int_0^\infty \delta(a)R(a, t) da + \int_0^\infty \alpha(\theta)v(\theta, t) d\theta \right] dt \\
 & + \int_0^{T_f} \xi_2(t) \left[\frac{dI(t)}{dt} - (\beta S(t)I(t) - (\nu + \gamma)(1 - \varepsilon_2(t))I(t) - \mu I(t) - (\tilde{\nu} + \tilde{\gamma})\varepsilon_2(t)I(t)) \right] dt \\
 & + \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_3(a, t) \left(\frac{\partial R(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial R(a, t)}{\partial t} + (\mu + \delta(a))R(a, t) \right) da dt \\
 & + \int_0^{T_f} \xi_3(0, t) (R(0, t) - \gamma(1 - \varepsilon_2(t))I(t) - \tilde{\gamma}\varepsilon_2(t)I(t)) dt \\
 & + \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_4(\theta, t) \left(\frac{\partial v(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial v(\theta, t)}{\partial t} + (\mu + \alpha(\theta))v(\theta, t) \right) d\theta dt \\
 & + \int_0^{T_f} \xi_4(0, t) (v(0, t) - \psi(1 + \varepsilon_1(t))S(t)) dt.
 \end{aligned}$$

Théorème 3.5 [18] *Étant donnée les contrôles optimaux et les solutions correspondante à l'équations de contrainte (3.32) qui minimisent la fonctionnelle objective (3.33), il existe une variable adjointe $Y = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(a, t), \xi_4(\theta, t))$, vérifiant :*

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{d\xi_1(t)}{dt} = -D_1\psi\varepsilon_1(t) + \xi_1(t)(\mu + \psi(1 + \varepsilon_1(t)) + \beta I(t)) - \xi_2(t)\beta I(t) \\
 -\xi_4(0, t)\psi(1 + \varepsilon_1(t)), \\
 \frac{d\xi_2(t)}{dt} = -D_2\varepsilon_2(t) + D[\tilde{\nu}\varepsilon_2(t) + \nu(1 - \varepsilon_2(t))] + \xi_1(t)\beta S(t) \\
 + \xi_2(t)(\mu - \beta S(t) + (\nu + \gamma)(1 - \varepsilon_2(t)) + (\tilde{\nu} + \tilde{\gamma})\varepsilon_2(t) \\
 - \xi_3(0, t)(\gamma(1 - \varepsilon_2(t)) + \tilde{\gamma}\varepsilon_2(t)), \\
 \frac{\partial \xi_3}{\partial a} + \frac{\partial \xi_3}{\partial t} = -\delta(a)\xi_1(t) + (\mu + \delta(a))\xi_3(a, t), \\
 \lim_{a \rightarrow \infty} \xi_3(a, t) = 0, \\
 \frac{\partial \xi_4}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_4}{\partial t} = \xi_4(\theta, t)(\alpha(\theta) + \mu) - \xi_1(t)\alpha(\theta), \\
 \lim_{\theta \rightarrow \infty} \xi_4(\theta, t) = 0, \\
 \xi_1(T_f) = 0, \quad \xi_2(T_f) = 0, \quad \xi_3(a, T_f) = 0, \quad \xi_4(\theta, T_f) = 0.
 \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Notons que les conditions aux limites en temps final (conditions de transversalité) sont nulles, car il n'y a pas de dépendance des états au moment final dans la fonctionnelle objective. De plus, si $(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*)$ dans \mathcal{U} est un contrôle optimal minimisant (3.33)

alors il est caractérisé par

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^*(t) &= \max \left(\varepsilon_{1 \min}, \min(\varepsilon_{1 \max}, \hat{\varepsilon}_1(t)) \right), \\ \varepsilon_2^*(t) &= \max \left(\varepsilon_{2 \min}, \min(\varepsilon_{2 \max}, \hat{\varepsilon}_2(t)) \right),\end{aligned}\tag{3.40}$$

où

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_1(t) &= \frac{(\xi_1(t) - \xi_4(0,t))\psi S(t) - D_1\psi S(t)}{2B_1}, \\ \hat{\varepsilon}_2(t) &= \frac{\xi_2(t)(\bar{\nu} + \bar{\gamma} - \nu - \gamma)I(t) - \xi_3(0,t)(\bar{\gamma} - \gamma)I(t) - D(\bar{\nu} - \nu)I(t) - D_2I(t)}{2B_2}.\end{aligned}$$

Le système d'optimalité se compose du système d'état (3.32) couplé au système adjoint (3.39) avec les conditions initiales et les conditions finales ainsi que les expressions (3.40) pour les fonctions de contrôle.

Idée de la preuve de ce Théorème : Pour obtenir l'équation adjointe on dérive le Lagrangien par rapport à $Z = (S, I, R, v)$.

◇ Premièrement on veut calculer $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S}$, on dérive terme à terme pour trouver la formule finale

1

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial S} = \int_0^{T_f} D_1\psi\varepsilon_1(t) dt.$$

2

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial S} \int_0^{T_f} \xi_1(t)S'(t) dt &= \frac{\partial}{\partial S} [\xi_1(t)S(t)]_0^{T_f} - \frac{\partial}{\partial S} \int_0^{T_f} \xi_1'(t)S(t) dt, \\ &= \frac{d}{dS} (\xi_1(0)S_0) - \int_0^{T_f} \xi_1'(t) \frac{d}{dS} S(t) dt, \text{ car} \\ &\quad \xi_1(T_f) = 0 \text{ (condition de transversalité)} \\ &= - \int_0^{T_f} \xi_1'(t) dt.\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}\frac{d}{dS} \int_0^{T_f} \xi_1(t) \left(-\Lambda + \beta S(t)I(t) + (\mu + \psi(1 + \varepsilon_1(t)))S(t) \right) dt &= \\ \int_0^{T_f} \xi_1(t) \left(\beta I(t) + (\mu + \psi(1 + \varepsilon_1(t))) \right) dt.\end{aligned}$$

4

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(- \int_0^{T_f} \xi_1(t) \left(\int_0^\infty \delta(a)R(a,t) da + \int_0^\infty \alpha(\theta)v(\theta,t) d\theta \right) \right) = 0.$$

5

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial S} \int_0^{T_f} \xi_2(t) I'(t) &= \frac{\partial}{\partial S} \left([I(t)\xi_2(t)]_0^{T_f} - \int_0^{T_f} \xi_2'(t) I(t) dt \right), \\
 &= \frac{\partial}{\partial S} (\xi_2(0)I_0) - \int_0^{T_f} \frac{d}{dS} \xi_2'(t) I(t) dt, \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial S} \int_0^{T_f} \xi_2(t) \left(-(\beta S(t)I(t) - (\nu + \gamma)(1 - \varepsilon_2(t))I(t) - \mu I(t) - \right. \\
 \left. (\tilde{\nu} + \tilde{\gamma})\varepsilon_2(t)I(t)) \right) dt = - \int_0^{T_f} \xi_2(t) \beta I(t) dt.
 \end{aligned}$$

7

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial S} \left(\int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_3(a, t) \left(\frac{\partial R(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial R(a, t)}{\partial t} + (\mu + \delta(a))R(a, t) \right) da dt + \right. \\
 \left. \int_0^{T_f} \xi_3(0, t) (R(0, t) - \gamma(1 - \varepsilon_2(t))I(t) - \tilde{\gamma}\varepsilon_2(t)I(t) dt + \right. \\
 \left. \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_4(\theta, t) \left(\frac{\partial v(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial v(\theta, t)}{\partial t} + (\mu + \alpha(\theta))v(\theta, t) \right) d\theta dt \right) = 0.
 \end{aligned}$$

8

$$\frac{\partial}{\partial S} \int_0^{T_f} \xi_4(0, t) (v(0, t) - \psi(1 + \varepsilon_1(t))S(t) dt = - \int_0^{T_f} \xi_4(0, t) \psi(1 + \varepsilon_1(t)) dt.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} &= \int_0^{T_f} D_1 \psi \varepsilon_1(t) - \xi_1'(t) + \xi_1(t) \left(\beta I(t) + (\mu + \psi(1 + \varepsilon_1(t))) \right) \\
 &\quad - \xi_2(t) \beta I(t) - \xi_4(0, t) \psi(1 + \varepsilon_1(t)) dt.
 \end{aligned}$$

Si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} = 0$, on trouve

$$\begin{cases} \xi_1'(t) = D_1 \psi \varepsilon_1(t) + \xi_1(t) (\beta I(t) + (\mu + \psi(1 + \varepsilon_1(t)))) \\ -\xi_2(t) \beta I(t) - \xi_4(0, t) \psi(1 + \varepsilon_1(t)), \\ \xi_1(T_f) = 0. \end{cases}$$

◇ Maintenant on calcule $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I}$.

1

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial I} = \int_0^{T_f} D[\tilde{\nu}\varepsilon_2(t) + \nu(1 - \varepsilon_2(t))] + D_2 \varepsilon_2(t) dt.$$

2

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial I} \int_0^{T_f} \xi_1(t) S'(t) dt &= \frac{\partial}{\partial I} [\xi_1(t) S(t)]_0^{T_f} - \frac{\partial}{\partial I} \int_0^{T_f} \xi_1'(t) S(t) dt, \\ &= \frac{d}{dI} (\xi_1(0) S_0) - \int_0^{T_f} \xi_1'(t) \frac{d}{dI} S(t) dt, \quad (\text{car } \xi_1(T_f) = 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

3

$$\frac{d}{dI} \int_0^{T_f} \xi_1(t) \left(-\Lambda + \beta S(t) I(t) + (\mu + \psi(1 + \varepsilon_1(t))) S(t) \right) dt = \int_0^{T_f} \xi_1(t) \beta S(t) dt.$$

4

$$\frac{\partial}{\partial I} \left(- \int_0^{T_f} \xi_1(t) \left(\int_0^\infty \delta(a) R(a, t) da + \int_0^\infty \alpha(\theta) v(\theta, t) d\theta \right) \right) = 0.$$

5

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial i} \int_0^{T_f} \xi_2(t) I'(t) &= \frac{\partial}{\partial i} \left([I(t) \xi_2(t)]_0^{T_f} - \int_0^{T_f} \xi_2'(t) I(t) dt \right), \\ &= \frac{d}{dI} (\xi_2(0) I_0) - \int_0^{T_f} \frac{d}{dI} \xi_2'(t) I(t) dt, \\ &= - \int_0^{T_f} \xi_2'(t) dt. \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial I} \int_0^{T_f} \xi_2(t) \left(- (\beta S(t) I(t) - (\nu + \gamma)(1 - \varepsilon_2(t)) I(t) - \mu I(t) - \right. \\ \left. (\tilde{\nu} + \tilde{\gamma}) \varepsilon_2(t) I(t) \right) dt &= \int_0^{T_f} \xi_2(t) \left(- \beta S(t) + (\nu + \gamma)(1 - \varepsilon_2(t)) + \right. \\ &\quad \left. \mu + (\tilde{\nu} + \tilde{\gamma}) \varepsilon_2(t) \right) dt. \end{aligned}$$

7

$$\frac{\partial}{\partial I} \left(\int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_3(a, t) \left(\frac{\partial R(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial R(a, t)}{\partial t} + (\mu + \delta(a)) R(a, t) \right) da dt \right) = 0.$$

8

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial I} \left(\int_0^{T_f} \xi_3(0, t) (R(0, t) - \gamma(1 - \varepsilon_2(t)) I(t) - \tilde{\gamma} \varepsilon_2(t) I(t) dt \right) &= \\ - \int_0^{T_f} \xi_3(0, t) \left(\gamma(1 - \varepsilon_2(t)) + \tilde{\gamma} \varepsilon_2(t) \right) dt. \end{aligned}$$

9

$$\frac{\partial}{\partial I} \left[\int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_4(\theta, t) \left(\frac{\partial v(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial v(\theta, t)}{\partial t} + (\mu + \alpha(\theta))v(\theta, t) \right) d\theta dt \right] = 0.$$

10

$$\frac{\partial}{\partial I} \left(\int_0^{T_f} \xi_4(0, t)(v(0, t) - \psi(1 + \varepsilon_1(t))S(t) dt \right) = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I} = & \int_0^{T_f} D[\tilde{\nu}\varepsilon_2(t) + \nu(1 - \varepsilon_2(t))] + D_2\varepsilon_2(t) + \xi_1(t)\beta S(t) + \xi_2(t) \left(-\beta S(t) \right. \\ & \left. + (\nu + \gamma)(1 - \varepsilon_2(t)) + \mu + (\tilde{\nu} + \tilde{\gamma})\varepsilon_2(t) \right) - \xi_2'(t) - \xi_3(0, t) \left(\gamma(1 - \varepsilon_2(t)) + \right. \\ & \left. \tilde{\gamma}\varepsilon_2(t) \right) dt. \end{aligned}$$

 En mettant $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I} = 0$, on obtient

$$\begin{cases} \xi_2'(t) = T_f D \left(\tilde{\nu}\varepsilon_2(t) + \nu(1 - \varepsilon_2(t)) \right) + D_2\varepsilon_2(t) + \xi_1(t)\beta S(t) + \xi_2(t) \left(-\beta S(t) + \right. \\ \quad \left. (\nu + \gamma)(1 - \varepsilon_2(t)) + \mu + (\tilde{\nu} + \tilde{\gamma})\varepsilon_2(t) \right) - \xi_2'(t) - \xi_3(0, t) \left(\gamma(1 - \varepsilon_2(t)) + \tilde{\gamma}\varepsilon_2(t) \right), \\ \xi_2(T_f) = 0. \end{cases}$$

 ◇ Ensuite on s'intéresse à étudier l'équation des remis, c'est-à-dire on calcule $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R}$.

1

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \int_0^{T_f} \xi_1(t) \left(\frac{dS}{dt} - \Lambda + \beta S(t)I(t) + (\mu + \psi(1 + \varepsilon_1(t))S(t) - \int_0^\infty \delta(a)R(a, t) da - \right. \\ \left. \int_0^\infty \alpha(\theta)v(\theta, t) d\theta \right) dt, \\ = -\frac{\partial}{\partial R} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_1(t)\delta(a)R(a, t) da dt, \\ = -\int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_1(t)\delta(a)\frac{d}{dR}R(a, t) da dt, \\ = -\int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_1(t)\delta(a) da dt. \end{aligned}$$

2

$$\frac{\partial}{\partial R} \int_0^{T_f} \xi_2(t) \left(\frac{dI(t)}{dt} - \beta S(t)I(t) + (\nu + \gamma)(1 - \varepsilon_2(t))I(t) - \mu I(t) - (\tilde{\nu} + \tilde{\gamma})\varepsilon_2(t)I(t) \right) dt = 0.$$

3

$$\frac{\partial}{\partial R} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_3(a, t) \left(\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial t} + (\delta(a) + \mu)R(a, t) \right) da dt \text{ --- } (*)$$

•

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial R} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_3(a, t) \left(\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial t} \right) da dt, \\ &= \frac{\partial}{\partial R} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_3(a, t) \frac{\partial R}{\partial a} da dt + \frac{\partial}{\partial R} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_3(a, t) \frac{\partial R}{\partial t} da dt, \\ &= \frac{\partial}{\partial R} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_3(a, t) \frac{\partial R}{\partial a} da dt + \frac{\partial}{\partial R} \int_0^\infty \int_0^{T_f} \xi_3(a, t) \frac{\partial R}{\partial t} dt da, \\ &= \frac{\partial}{\partial R} \int_0^{T_f} [\xi_3(a, t)R(a, t)]_0^\infty dt - \frac{\partial}{\partial R} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial a} R(a, t) da dt + \\ & \frac{\partial}{\partial R} \int_0^\infty [\xi_3(a, t)R(a, t)]_0^{T_f} da - \frac{\partial}{\partial R} \int_0^\infty \int_0^{T_f} \frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial t} R(a, t) dt da, \\ & \text{or } \lim_{a \rightarrow \infty} R(a, t) = 0 \text{ et } \xi_3(a, T_f) = 0, \\ &= -\frac{\partial}{\partial R} \int_0^{T_f} \xi_3(0, t)R(0, t) dt - \frac{\partial}{\partial R} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial a} R(a, t) da dt - \\ & \frac{\partial}{\partial R} \int_0^\infty \xi_3(a, 0)R_0(a) da - \frac{\partial}{\partial R} \int_0^\infty \int_0^{T_f} \frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial t} R(a, t) dt da, \\ &= -\int_0^{T_f} \int_0^\infty \frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial a} \frac{\partial}{\partial R} R(a, t) da dt - \int_0^\infty \int_0^{T_f} \frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial R} R(a, t) dt da, \\ &= -\int_0^{T_f} \int_0^\infty \left(\frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial t} \right) da dt. \end{aligned}$$

•

$$\frac{\partial}{\partial R} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_3(a, t) (\delta(a) + \mu) R(a, t) da = \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_3(a, t) (\delta(a) + \mu) da dt.$$

Alors

$$(*) = \int_0^{T_f} \int_0^\infty -\left(\frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial t} \right) + \xi_3(a, t) (\delta(a) + \mu) da dt.$$

4

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\int_0^{T_f} \xi_3(0, t) (R(0, t) - \gamma(1 - \varepsilon_2(t))I(t) - \tilde{\gamma}\varepsilon_2(t)I(t) dt) \right) = 0.$$

5

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_4(\theta, t) \left(\frac{\partial v(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial v(\theta, t)}{\partial t} + (\mu + \alpha(\theta))v(\theta, t) \right) d\theta dt \right) = 0.$$

6

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\int_0^{T_f} \xi_4(0, t) (v(0, t) - \psi(1 + \varepsilon_1(t))S(t) dt) \right) = 0.$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = \int_0^{T_f} \int_0^\infty -\xi_1(t)\delta(a) - \left(\frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial t} \right) + \xi_3(a, t)(\delta(a) + \mu) da dt.$$

Si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = 0$, on trouve

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial \xi_3(a, t)}{\partial t} = -\xi_1(t)\delta(a) + \xi_3(a, t)(\delta(a) + \mu), \\ \xi_3(a, T_f) = 0, \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \xi_3(a, t) = 0. \end{cases}$$

◇ Ensuite, on va calculer $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}$.

1

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \int_0^{T_f} \xi_1(t) \left(\frac{dS}{dt} - \Lambda + \beta S(t)I(t) + (\mu + \psi(1 + \varepsilon_1(t))S(t) - \int_0^\infty \delta(a)R(a, t) da - \int_0^\infty \alpha(\theta)v(\theta, t) d\theta) \right) dt, \\ = -\frac{\partial}{\partial v} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_1(t)\alpha(\theta)v(\theta, t) d\theta dt, \\ = -\int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_1(t)\alpha(\theta) \frac{d}{dv} v(\theta, t) d\theta dt, \\ = -\int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_1(t)\alpha(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

2

$$\frac{\partial}{\partial v} \int_0^{T_f} \xi_2(t) \left(\frac{dI(t)}{dt} - \beta S(t)I(t) + (\nu + \gamma)(1 - \varepsilon_2(t))I(t) - \mu I(t) - (\tilde{\nu} + \tilde{\gamma})\varepsilon_2(t)I(t) \right) dt = 0.$$

3

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_3(a, t) \left(\frac{\partial R(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial R(a, t)}{\partial t} + (\mu + \delta(a))R(a, t) \right) da dt + \int_0^{T_f} \xi_3(0, t)(R(0, t) - \gamma(1 - \varepsilon_2(t))I(t) - \tilde{\gamma}\varepsilon_2(t)I(t)) dt \right) \right] = 0.$$

4

$$\frac{\partial}{\partial v} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_4(\theta, t) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial t} + (\alpha(\theta) + \mu)v(\theta, t) \right) d\theta dt \text{ --- (**)}$$

•

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_4(\theta, t) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) d\theta dt, \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_4(\theta, t) \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta dt + \frac{\partial}{\partial v} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_4(\theta, t) \frac{\partial v}{\partial t} d\theta dt, \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_4(\theta, t) \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta dt + \frac{\partial}{\partial v} \int_0^\infty \int_0^{T_f} \xi_4(\theta, t) \frac{\partial v}{\partial t} dt d\theta, \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \int_0^{T_f} [\xi_4(\theta, t)v(\theta, t)]_0^\infty dt - \frac{\partial}{\partial v} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial \theta} v(\theta, t) d\theta dt + \\ & \frac{\partial}{\partial v} \int_0^\infty [\xi_4(\theta, t)v(\theta, t)]_0^{T_f} d\theta - \frac{\partial}{\partial v} \int_0^\infty \int_0^{T_f} \frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial t} v(\theta, t) dt d\theta, \\ & \text{or } \lim_{\theta \rightarrow \infty} v(\theta, t) = 0 \text{ et } \xi_4(\theta, T_f) = 0, \\ &= -\frac{\partial}{\partial v} \int_0^{T_f} \xi_4(0, t)v(0, t) dt - \frac{\partial}{\partial v} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial \theta} v(\theta, t) d\theta dt - \\ & \frac{\partial}{\partial v} \int_0^\infty \xi_4(\theta, 0)v_0(\theta) d\theta - \frac{\partial}{\partial v} \int_0^\infty \int_0^{T_f} \frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial t} v(\theta, t) dt d\theta, \\ &= -\int_0^{T_f} \int_0^\infty \frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial v} v(\theta, t) d\theta dt - \int_0^\infty \int_0^{T_f} \frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} v(\theta, t) dt d\theta, \\ &= -\int_0^{T_f} \int_0^\infty \left(\frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial t} \right) d\theta dt. \end{aligned}$$

•

$$\frac{\partial}{\partial v} \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_4(\theta, t)(\alpha(\theta) + \mu)v(\theta, t) d\theta = \int_0^{T_f} \int_0^\infty \xi_4(\theta, t)(\alpha(\theta) + \mu) d\theta dt.$$

Alors

$$(**) = \int_0^{T_f} \int_0^\infty -\left(\frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial t} \right) + \xi_4(\theta, t)(\alpha(\theta) + \mu) d\theta dt.$$

5

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[\int_0^{T_f} \xi_4(0, t)(v(0, t) - \psi(1 + \varepsilon_1(t))S(t) dt \right] t = 0.$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \int_0^{T_f} \int_0^\infty -\xi_1(t)\alpha(\theta) - \left(\frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial t} \right) + \xi_4(\theta, t)(\alpha(\theta) + \mu) d\theta dt.$$

Si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = 0$, on trouve

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_4(\theta, t)}{\partial t} = -\xi_1(t)\alpha(\theta) + \xi_4(\theta, t)(\alpha(\theta) + \mu), \\ \xi_4(\theta, T_f) = 0, \\ \lim_{\theta \rightarrow \infty} \xi_4(\theta, t) = 0. \end{cases}$$

Finalement pour trouver la formule donnée de $\hat{\varepsilon}_1(t)$ et $\hat{\varepsilon}_2(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_1} = 0 &\implies \int_0^{T_f} D_1 \psi S(t) + 2B_1 \varepsilon_1(t) dt - \int_0^{T_f} \xi_1(t) \psi S(t) + \xi_4(0, t) \psi S(t) dt = 0. \\ &\implies 2B_1 \varepsilon_1(t) = -D_1 \psi S(t) + (\xi_1(t) - \xi_4(0, t)) \psi S(t). \\ &\implies \hat{\varepsilon}_1(t) = \frac{(\xi_1(t) - \xi_4(0, t)) \psi S(t) - D_1 \psi S(t)}{2B_1}. \end{aligned}$$

Par la même méthode

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_2} = 0 &\implies \int_0^{T_f} D \tilde{\nu} I(t) - D \nu I(t) + D_2 I(t) + 2B_2 \varepsilon_2(t) dt + \\ &\int_0^{T_f} \xi_2(t)(\nu + \gamma) I(t) dt - \int_0^{T_f} \xi_3(0, t)(\gamma I(t) - \tilde{\gamma} I(t)) dt = 0. \\ &\implies 2B_2 \varepsilon_2(t) = \xi_2(t)(\tilde{\nu} - \tilde{\gamma} - \nu - \gamma) I(t) - \xi_3(0, t)(\tilde{\gamma} - \gamma) I(t) \\ &\quad - D_2 I(t) - D(\tilde{\nu} - \nu) I(t) \\ &\implies \hat{\varepsilon}_2(t) = \frac{\xi_2(t)(\tilde{\nu} - \tilde{\gamma} - \nu - \gamma) I(t) - \xi_3(0, t)(\tilde{\gamma} - \gamma) I(t) - D_2 I(t) - D(\tilde{\nu} - \nu) I(t)}{2B_2}. \end{aligned}$$

3.5 Résultats numériques

Système dynamique (3.32)

On peut déterminer une solution optimale pour le problème (3.34) en résolvant le système d'optimalité (3.32), (3.39), et (3.40). Notons que ce système est un problème de valeur limite en deux points, où le système d'état (3.32) avec les conditions initiales et le système adjoint (3.39) avec les conditions finales sont couplés. De nombreuses approches pratiques utilisent des algorithmes d'optimisation pour résoudre le système d'optimalité couplé. On considère une méthode basée sur le gradient pour découpler

3.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

le système et l'algorithme utilisé dans Abia et Lopez–Marcos [1] et Gunzburger [27]. Dans ce qui suit, on prend un jour comme unité de temps et choisissons les valeurs de $\delta(a)$ et $\alpha(\theta)$ comme suit :

- Le taux de diminution de l'immunité acquise des personnes remis, $\delta(a)$, est supposé comme suit (Voir Duan et al [19])

$$\delta(a) = \begin{cases} 0.85, & \text{si } \tau^* < a < \bar{a} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- La baisse du taux de vaccination, $\alpha(\theta)$ est supposé

$$\alpha(\theta) = \begin{cases} \hat{\alpha}(1 - \exp^{-0.1(\theta-0.9)}) & \text{si } \tau^* < \theta < \bar{\theta}, \text{ avec } \hat{\alpha} = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où \bar{a} et $\bar{\theta}$ désignent l'âge maximum de récupération et l'âge maximum de vaccination, resp. Nous adoptons que $\bar{a} = \bar{\theta} = 300$ jours dans cette section.

Paramètres	Valeurs	Unité	Source
Λ	$(2.269741 \times 10^8)/70/365$	jour ⁻¹	[53], [50], [54]
μ	$1/70/365$	jour ⁻¹	[50]
ν	0.077	jour ⁻¹	[49]
γ	[0.5,3.5]	jour ⁻¹	[50]
β	0.078×10^{-7}	jour ⁻¹	assumé
$\tilde{\nu}$	0.017	jour ⁻¹	assumé
$\tilde{\gamma}$	[1.4,5.6]/7	jour ⁻¹	assumé
ψ	0.0005	jour ⁻¹	assumé

TABLEAU 1 : Valeurs des paramètres utilisées pour les simulations de modèle.

Paramètres	Valeurs	Unité	Source
S_0	2.069741×10^8	individus	assumé
I_0	0.2×10^8	individus	assumé
$R_0(a)$	0	individus	assumé
$v_0(\theta)$	0	individus	assumé

TABLEAU 2 : Conditions initiales utilisées pour la simulation de modèle.

Il découle de $\delta(a)$, $\alpha(\theta)$ et les valeurs des paramètres dans le **Tableau 1** que le nombre de reproduction de base $R_0 = 7.7914 > 1$, par le Théorème 3.1, donc il existe un état stationnaire endémique E^* du système (3.1). Pour effectuer les

3.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

simulations du contrôle optimal, supposons que le taux d'efficacité du vaccin est limité par $\varepsilon_{1min} = 1$ et $\varepsilon_{1max} = 9$, l'efficacité du traitement est limité par $\varepsilon_{2min} = 0,3$ et $\varepsilon_{2max} = 0,8$. Ensuite, étant donné que le coût de mise en œuvre du traitement est plus élevé que celui de la vaccination, il est raisonnable de supposer que $D_2 > D_1$. Dans cette section, les poids de la fonction objective sont choisis à des fins d'illustration comme suit

$$D = 1000, \quad D_1 = 100, \quad D_2 = 1000, \quad B_1 = 5000, \quad B_2 = 10000.$$

La vaccination et le traitement sont tous les deux des outils utiles dans la lutte contre la maladie. Comme mentionné ci-dessus, la période de protection minimale contre la vaccination est 90 jours en $\alpha(\theta)$.

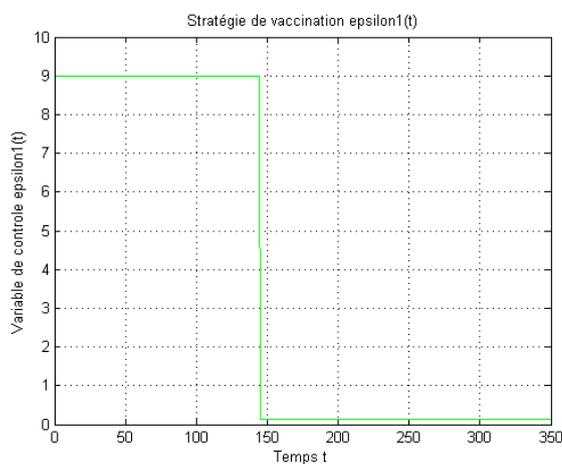


Figure 3.1: (A) Stratégie de vaccination $\varepsilon_1(t)$.

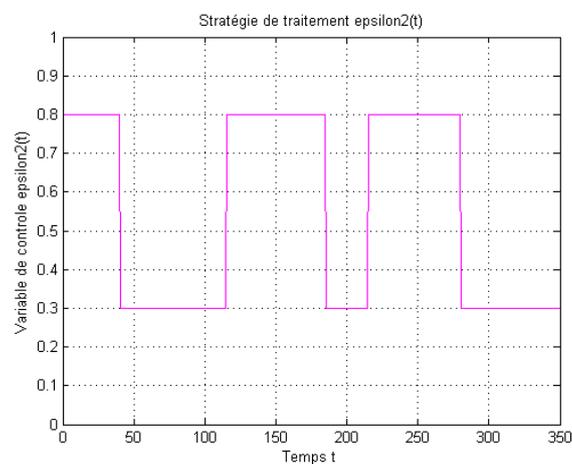


Figure 3.2: (B) Stratégie de traitement $\varepsilon_2(t)$.

3.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

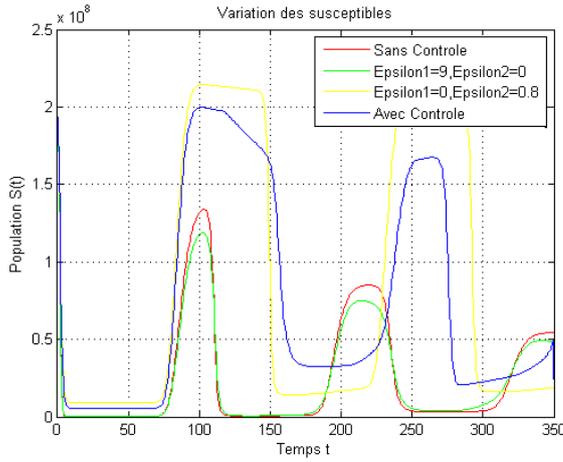


Figure 3.3: (C) Dynamique de $S(t)$.

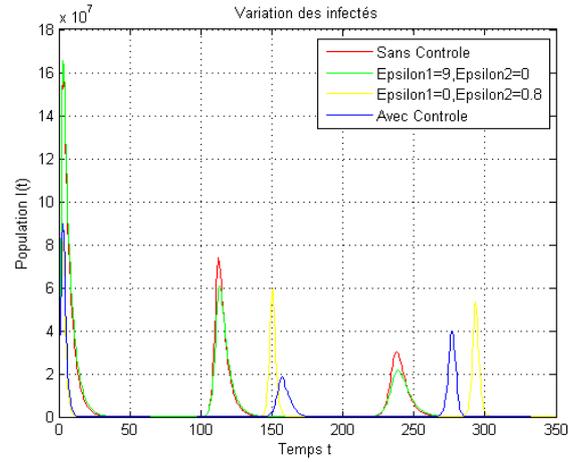


Figure 3.4: (D) Dynamique de $I(t)$.

FIGURES 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 : Supposons que $\tau^* = 80$. Les stratégies de contrôle optimal (A), $\varepsilon_1(t)$ et (B), $\varepsilon_2(t)$. (C), Le comportement dynamique de $S(t)$ dans les conditions : sans contrôle (rouge), avec le contrôle optimal (bleu), avec traitement uniquement, i.e, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2max}$ (jaune), avec vaccination uniquement, i.e, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1max}$ (vert). (D), Le comportement dynamique de $I(t)$ dans les conditions : sans contrôle (rouge), avec un contrôle optimal (bleu), avec traitement uniquement, i.e, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2max}$ (jaune), avec vaccination uniquement, i.e, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1max}$ (vert).

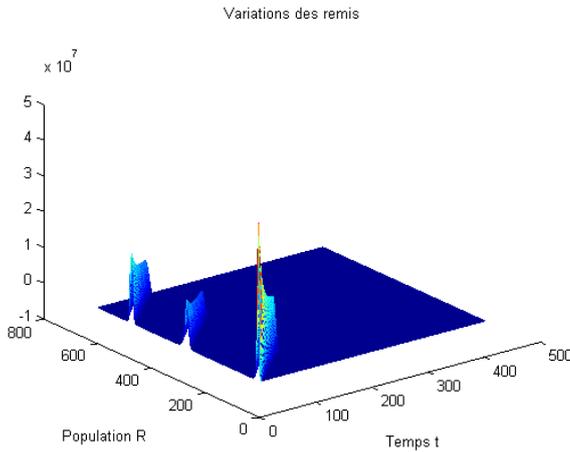


Figure 3.5: (A) Distribution d'âge pour $R(a, t)$.

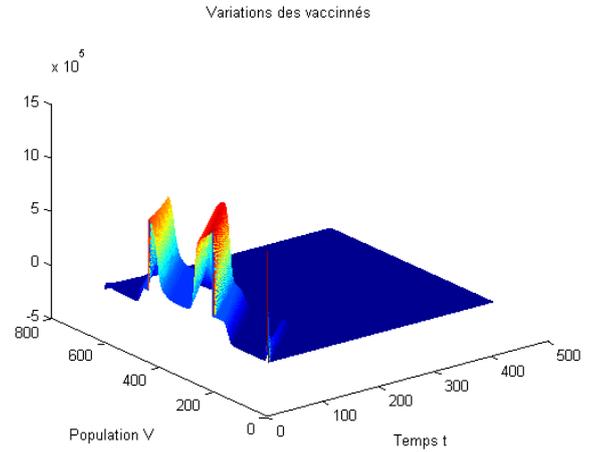


Figure 3.6: (B) Distribution d'âge pour $v(\theta, t)$.

3.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

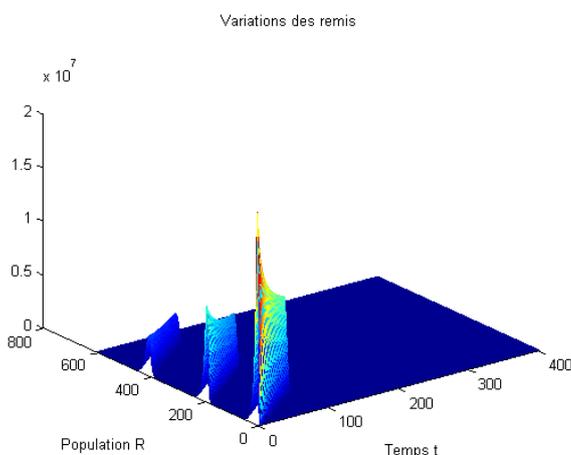


Figure 3.7: (C) Distribution d'âge pour $R(a, t)$.

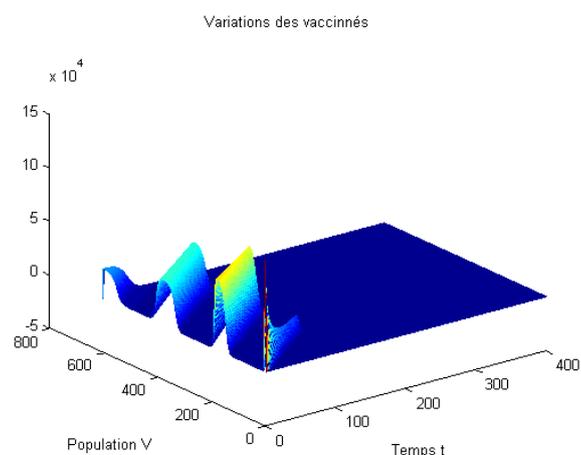


Figure 3.8: (D) Distribution d'âge pour $v(\theta, t)$.

FIGURES 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 : Supposons que $\tau^* = 80$ (A, B) la dynamique de $R(a, t)$ et $v(\theta, t)$ avec des stratégies de contrôle optimales. (C, D) Le comportement dynamique de $R(a, t)$ et $v(\theta, t)$ sans contrôle.

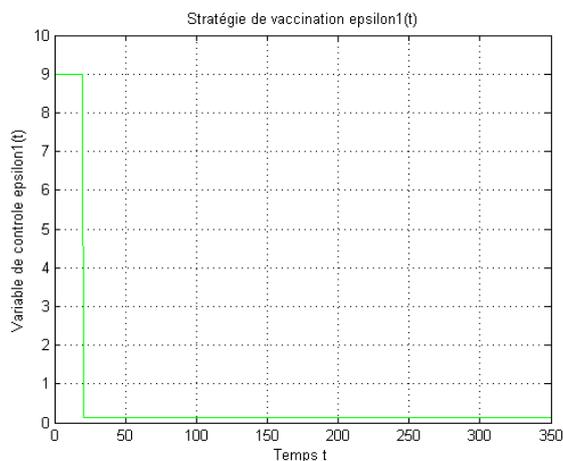


Figure 3.9: (A) Stratégie de vaccination $\varepsilon_1(t)$.

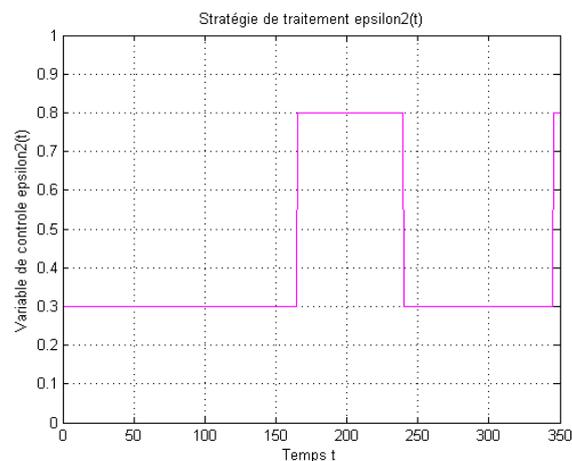


Figure 3.10: (B) Stratégie de traitement $\varepsilon_2(t)$.

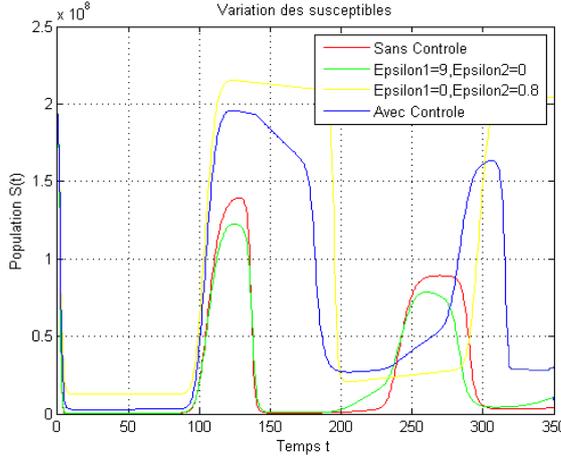


Figure 3.11: (C) Dynamique de $S(t)$.

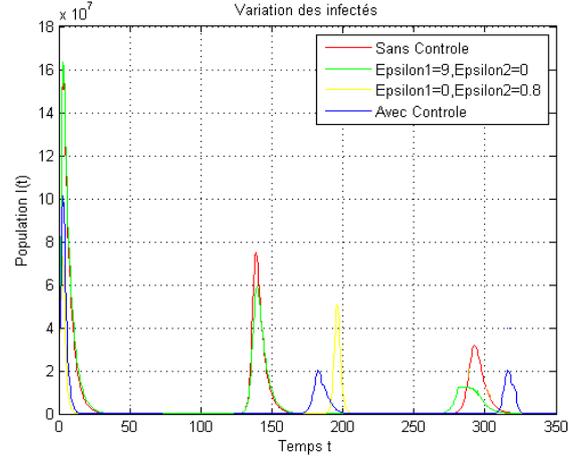


Figure 3.12: (D) Dynamique de $I(t)$.

FIGURES 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 : Supposons que $\tau^* = 100$. Les stratégies de contrôle optimal (A), $\varepsilon_1(t)$ et (B), $\varepsilon_2(t)$. (C), le comportement dynamique de $S(t)$ dans les conditions : sans contrôle (rouge), avec le contrôle optimal (bleu), avec traitement uniquement, i.e, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2max}$ (jaune), avec vaccination uniquement, i.e, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1max}$ (vert). (D), Le comportement dynamique de $I(t)$ dans les conditions : sans contrôle (rouge), avec un contrôle optimal (bleu), avec traitement uniquement, i.e, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2max}$ (jaune), avec vaccination uniquement, i.e, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1max}$ (vert).

Le traitement prend τ^* jours. Pendant la simulation, nous prenons le pas de temps $\Delta t = \Delta \theta = \Delta a = 0,6$. Pour montrer le rôle de τ^* dans le contrôle optimal, en supposant que $\tau^* = 80, 100$ et 120 resp., afin d'effectuer les simulations numériques (voir les exemples 1–3) sous les conditions initiales données dans le Tableau 2.

Exemple 3.1 Supposons que $\tau^* = 80$ jours, avec l'algorithme, nous obtenons les stratégies de contrôle optimales pour le système (3.32) à l'aide de Matlab, les comportements dynamiques du système (3.1) et du système de contrôle optimal (3.32) sont simulés pendant la période $[0, 350]$ jours.

Exemple 3.2 Supposons que $\tau^* = 100$ jours, nous simulons les processus de contrôle optimaux pendant 350 jours (Voir FIGURES 3.9, 3.10, 3.11, 3.12).

3.6 Discussion et conclusion

Dans ce chapitre, un modèle d'épidémie $SIRVS$ avec des âges de guérison et de vaccination a été étudié. En utilisant le nombre de reproduction de base R_0 , nous avons

prouvé que l'état d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable si $R_0 < 1$. Comme le nombre de reproduction de base R_0 est une fonction décroissante du taux de vaccination ψ , il est possible d'éliminer la maladie en augmentant le taux ψ . Si $R_0 > 1$, pour contrôler la maladie, un problème de contrôle optimal a été étudié, impliquant le coût des stratégies de contrôle et utilisant le principe du minimum de Pontryagin. Les résultats montrent que l'âge de la vaccination et l'âge de rétablissement sont tous les deux présents dans les expressions des variables de contrôle optimal et influencent sur l'efficacité du contrôle optimal.

Les résultats des simulations montrent que

- (i) le contrôle optimal avec la vaccination et le traitement est meilleur que les autres stratégies.
- (ii) l'âge de rétablissement affecte sur l'efficacité des stratégies de contrôle, c'est à dire que le contrôle avec traitement seulement n'a aucun effet lorsque la période d'immunité acquise n'est pas supérieure à la période d'immunité vaccinale, sinon, il joue un rôle important dans le contrôle de la maladie.

Bibliographie

- [1] ABIA, L.M., LOPEZ-MARCOS, J.C. RUNGE-KUTTA METHODS FOR AGE-STRUCTURED POPULATION MODELS. APPL NUMER MATH. 17.1(1995), 1-17.
- [2] ANDERSON, R.M., MAY, R.M. THE POPULATION DYNAMICS OF MICROPARASITES AND THEIR INVERTEBRATE HOSTS. PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON. B, BIOLOGICAL SCIENCES. 291.1054 (1981), 451-524.
- [3] AUGER, P., LETT, C., AND POGGIALE, J. C. MODÉLISATION MATHÉMATIQUE EN ÉCOLOGIE-2E ÉD.: COURS ET EXERCICES CORRIGÉS. Dunod, (2015).
- [4] BASTIN. G., WERTZ. V. MODÉLISATION ET ANALYSE DES SYSTEMES DYNAMIQUES. LECTURES NOTES, LOUVAIN SCHOOL OF ENGINEERING 31, (2013).
- [5] BELLMAN, R. INTRODUCTION TO MATRIX ANALYSIS. SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS, 1997.
- [6] BENDER, E.A., WILLIAMSON, S.G. WITH AN INTRODUCTION TO PROBABILITY. LISTS, DECISIONS AND GRAPHS, (2010).
- [7] BERETTA, E., CAPASSO, V. ON THE GENERAL STRUCTURE OF EPIDEMIC SYSTEMS. GLOBAL ASYMPTOTIC STABILITY. COMPUTERS AND MATHEMATICS WITH APPLICATIONS, 12.6 (1986), 677-694.
- [8] BHIRI, B. STABILITÉ ET STABILISATION EN TEMPS FINI DES SYSTÈMES DYNAMIQUES. (DOCTORAL DISSERTATION), (2017).

- [9] BONNANS, J. F., ZIDANI, H. OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH PARTIALLY POLYHEDRIC CONSTRAINTS. SIAM JOURNAL ON CONTROL AND OPTIMIZATION, 37-6, (1999) : 1726-1741.
- [10] BRAUER, F., NOHEL, J.A. THE QUALITATIVE THEORY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. INC., NEW YORK (1969).
- [11] BRESSAN, A. PICCOLI. B, INTRODUCTION TO MATHEMATICAL CONTROL THEORY, AIMS SER. APPL. MATH., VOL. 2 (2007).
- [12] BREZIS, H. ANALYSE FONCTIONNELLE: THÉORIE ET APPLICATION. PARIS : DONUD, (1999).
- [13] BRITANNICA, ENCYCLOPAEDIA. BRITANNICA CONCISE ENCYCLOPEDIA. ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA, INC., (2008).
- [14] BUSENBERG, S., COOKE, K. VERTICALLY TRANSMITTED DISEASES: MODELS AND DYNAMICS (VOL 23). SPRINGER SCIENCE AND BUSINESS MEDIA, (2012).
- [15] CLARKE, L. E. ON CAYLEY'S FORMULA FOR COUNTING TREES. JOURNAL OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY. 1.4 (1958) : 471-474.
- [16] COOKE, K.L., YORKE, J.A. SOME EQUATIONS MODELLING GROWTH PROCESSES AND GONORRHEA EPIDEMICS. MATHEMATICAL BIOSCIENCES 16.1-2 (1973), 75-101.
- [17] COSTE, J., PEYRAUD, J., COULLET, P., AND CHENCINER, A. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES DE VOLTERRA. LE JOURNAL DE PHYSIQUE COLLOQUES, 39.C5 (1978): C5-45.
- [18] DUAN, X.C., JUNG, I.H., LI, X.Z., AND MARTCHEVA, M. DYNAMICS AND OPTIMAL CONTROL OF AN AGE-STRUCTURED SIRVS EPIDEMIC MODEL. MATHEMATICAL METHODS IN THE APPLIED SCIENCES 43.7 (2020) : 4239-4256.
- [19] DUAN, X.C., YIN, J.F., AND LI, X.Z. GLOBAL HOPF BIFURCATION OF AN SIRS EPIDEMIC MODEL WITH AGE-DEPENDENT RECOVERY. CHAOS SOLITONS FRACT 104 (2017): 613-624.
- [20] FLEMING, W.H., RISHEL, R.W. DETERMINISTIC AND STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL. SPRINGER SCIENCE AND BUSINESS MEDIA, (2012).
- [21] FLEMING, W.H., RISHEL, R.W. DETERMINISTIC AND STOCHASTIC CONTROL THEORY. BULL. AMER. MATH. SOC. 82.6 (1975), 869-870.

- [22] FOURNIER, J.C. THÉORIE DES GRAPHS ET APPLICATION : AVEC EXERCICES ET PROBLÈMES. LAVOISIER, (2011).
- [23] GAMKRELIDZE, R.V., PONTRJAGIN, L.S., AND BOLTJANSKIJ, V.G.E. THE MATHEMATICAL THEORY OF OPTIMAL PROCESSES. MACMILLAN COMPANY, (1964).
- [24] GOH, B.S. GLOBAL STABILITY IN A CLASS OF PREDATOR-PREY MODELS. BULLETIN OF MATHEMATICAL BIOLOGY 40.4 (1978): 525-533.
- [25] GOH, B.S. GLOBAL STABILITY IN MANY SPECIES SYSTEMS. THE AMERICAN NATURALIST 111.977 (1977): 135-143.
- [26] GOH, B.S. GLOBAL STABILITY IN TWO SPECIES INTERACTIONS. JOURNAL OF MATHEMATICAL BIOLOGY 3(3-4) (1976): 313-318.
- [27] GUNZBURGER, M.D. PERSPECTIVES IN FLOW CONTROL AND OPTIMIZATION. SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS, 2002.
- [28] HAFFAF, K., RACHIK, M., SAADI, S., AND YOUSFI, N. OPTIMAL CONTROL OF TREATMENT IN A BASIC VIRUS INFECTION MODEL. *App. Math. Scien.* 3.17-20 (2009), 949-958.
- [29] HALE, J.K. ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 26.1 (1969): 39-59.
- [30] HETHCOTE, H.W. QUALITATIVE ANALYSES OF COMMUNICABLE DISEASE MODELS. MATHEMATICAL BIOSCIENCES 28.3-4 (1976): 335-356.
- [31] HETHCOTE, H.W., YORKE, J.A. GONORRHEA TRANSMISSION DYNAMICS AND CONTROL. SPRINGER, 2014.
- [32] HIRSCH, W.M., HANISCH, H., AND GABRIEL, J.P. DIFFERENTIAL EQUATION MODELS OF SOME PARASITIC INFECTIONS: METHODS FOR THE STUDY OF ASYMPTOTIC BEHAVIOR. COMMUN. PURE AND APP MATH. 38.6 (1985), 733-753.
- [33] [HTTPS ://IMAG.UMONTPELLIER.FR/~BAYEN/COURS/MODULE-DOCTORALE-2016/PENSE-BETE-PMP.PDF](https://imag.umontpellier.fr/~bayen/cours/module-doctorale-2016/pense-bete-pmp.pdf).
- [34] IANNELLI, M. MATHEMATICAL THEORY OF AGE-STRUCTURED POPULATION DYNAMICS. GIARDINI EDITORI E STAMPATORI IN PISA, 1995.
- [35] KERMACK, W.O., MCKENDRICK, A.G. A CONTRIBUTION TO THE MATHEMATICAL THEORY OF EPIDEMICS. PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON. SERIE A, CONTAINING PAPERS OF A MATHEMATICAL AND PHYSICAL CHARACTER. 115.772 (1927) : 700-721.

- [36] LAJMANOVICH, A., YORKE, J.A. A DETERMINISTIC MODEL FOR GONORRHEA IN A NONHOMOGENEOUS POPULATION. MATHEMATICAL BIOSCIENCES 28.3-4 (1976): 221-236.
- [37] LASALLE, J.P., LEFSCHETZ, S. STABILITY OF LYAPUNOV'S DIRECT METHOD WITH APPLICATION IN ACADEMIC PRESS. NEW YORK, 1961.
- [38] LASALLE, J.P. *The stability of dynamical systems*. SOC. INDUS. APP. MATH, 1976.
- [39] LUKES, D.L. DIFFERENTIAL EQUATIONS: CLASSICAL TO CONTROLLED. MATH SCI ENG 162. NEWYORK: ACADEMIC PRESS; 1982.
- [40] PICCININI, L.C., STAMPACCHIA, G., AND VIDOSSICH, G. LINEAR SYSTEMS. ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN RN. SPRINGER, NEW YORK, NY, 1984, 79-131.
- [41] PONTRYAGIN, L.S., BOLTYANSKII, V.G., GAMKRELIDZE, R.V., AND MISHCHENKO, E.F. THE MATHEMATICAL THEORY OF OPTIMAL PROCESSES, INTERSCIENCE. 1962
- [42] SOLIMANO, F., BERETTA, E. GRAPH THEORETICAL CRITERIA FOR STABILITY AND BOUNDEDNESS OF PREDATOR-PREY SYSTEMS. BULL. MATH. BIOL. 44.4 (1982), 579-585.
- [43] SZIJJARTO, L.J. AN AGE-STRUCTURE SIR MODEL FOR CHOLERA EPIDEMICS. 2013.
- [44] STAHL, J. P., INFECTIOLOGIE, C. H. U., GRENOBLE, U. J. F. LES ENCÉPHALITES INFECTIEUSES. LA REVUE DU PRATICIEN (PARIS), 61.10 (2011): 1353-1357.
- [45] THIEME, H.R. SEMIFLOWS GENERATED BY LIPSCHITZ PERTURBATIONS OF NON-DENSELY DEFINED OPERATORS. DIFFERENTIAL AND INTEGRAL EQUATIONS 3.6 (1990): 1035-1066.
- [46] VAN DEN DRIESSCHE, P., WATMOUGH, J. REPRODUCTION NUMBERS AND SUB-THRESHOLD ENDEMIC EQUILIBRIA FOR COMPARTMENTAL MODELS OF DISEASE TRANSMISSION. MATHEMATICAL BIOSCIENCES 180.1-2 (2002): 29-48.
- [47] WATSON, R.K. ON AN EPIDEMIC IN A STRATIFIED POPULATION. JOURNAL OF APPLIED PROBABILITY 9.3 (1972): 659-666.
- [48] WIKIPÉDIA.

- [49] XIAO, Y., SUN, X., TANG, S., AND WU, J. TRANSMISSION POTENTIAL OF THE NOVEL AVIAN INFLUENZA A(H7N9) INFECTION IN MAINLAND CHINA. *J. Theor. Biol.* 352 (2014), 1-5.
- [50] XING, Y., SONG, L., SUN, G.Q., JIN, Z., AND ZHANG, J. ASSESSING REAPPEARANCE FACTORS OF H7N9 AVIAN INFLUENZA IN CHINA. *Appl. Math. Comput.* 309 (2017), 192-204.
- [51] YANG, J., MODNAK, C., AND WANG, J. DYNAMICAL ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL FOR AN AGE-STRUCTURED CHOLERA TRANSMISSION MODEL. *J. Franklin. Inst.* 356.15 (2019), 8438-8467.
- [52] YANG, J., XU, R., AND LI, J. THRESHOLD DYNAMICS OF AN AGE-SPACE STRUCTURED BRUCELLOSIS DISEASE MODEL WITH NEUMANN BOUNDARY CONDITION. *Nonlinear Anal: RWA.* 50 (2019), 192-217.
- [53] ZHANG, J., JIN, Z., SUN, G.Q., SUN, X.D., WANG, Y.M., AND HUANG, B. DETERMINATION OF ORIGINAL INFECTION SOURCE OF H7N9 AVIAN INFLUENZA BY DYNAMICAL MODEL. *Sci. Rep.* 4.1 (2014), 1-16.
- [54] 2012 HUMAN POPULATION DISTRIBUTION OF PROVINCES AND AUTONOMOUS REGIONS IN MAINLAND CHINA. [HTTP://HONGDOU.GXNEWS.COM.CN/VIEWTHREAD-8235482.HTML](http://hongdou.gxnews.com.cn/viewthread-8235482.html).