REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université ABOU-BEKR BELKAID Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Mémoire en vue de l'obtention du diplôme du Master

Option : *Probabilités et Statistiques*

Sous le thème

Estimation Paramétrique dans une Petite Diffusion

Présenté par

Mlle. HADJOU BELAID Asma

Soutenu publiquement le 23 Juin 2015 devant le jury composé de :

Mr. T.Mourid	Professeur UABT	Président.
Mme. M.Dali Youcef	M.C UABT	Examinateur.
Mme. W.Benyahya	M.C UABT	Rapporteur.

Année Universitaire : 2014/2015

Estimation Paramétrique dans une Petite Diffusion

A mes parents…

A mes sœurs et frères…

A mes jolis nièces et neveux…

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu de m'avoir donné le courage, la morale et la santé pour mener à bien ce travail.

Je remercie mon encadreuse Madame W.BENYAHYA pour ses conseils précieux qui m'ont été énormément utiles ainsi que pour le soutient constant et bienveillant qu'elle m'a apporté.

Je remercie chaleureusement Mr. T.MOURID de bien vouloir présider le jury de soutenance ainsi un grand merci à Mme. M.DALI YOUCEF d'avoir accepté la pénible tâche de lire ce manuscrit et surtout pour tout son soutien et encouragement.

J'en profite pour remercier avec tous mes sentiments de respectueuse gratitude mes enseignants et particulièrement l'équipe des Probabilité-Statistiques qui ont été à la hauteur et je leur en suis reconnaissante.

J'adresse aussi un remerciement tout particulier à Mr. MEBKHOUT de m'avoir donné ce qui a peut-être été le meilleur conseil de tout mon carrière universitaire, ainsi que pour son disponibilité surtout dans les moments délicats...!

Je remercie également toutes les personnes qui m'ont aidé, et qui ont contribué de proche ou de loin à la réalisation de ce travail, sans oublier mes camarades de parcours qui sont la source d'une bonne ambiance, humeur et complicité qui ont régné pendant ces années.

Merci enfin à mes parents, mes sœurs, mes frères pour son soutient qui n'a jamais discontinuité, et notamment Zakia qui a été toujours derrière moi pour m'encourager.

Table des Matières

Introduction

La nature aléatoire de nombreux phénomènes évolutifs, dans des domaines très divers, nécessite la description par des équations différentielles stochastiques, qui peuvent être un outil puissant dans la modélisation. Dans ce travail on s'intéresse à des problèmes de la théorie de l'estimation paramétrique avec des observations d'un processus de diffusion de type

$$dX_t = S_t\left(X_t\right)dt + \varepsilon dW_t, \qquad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où W_t est un mouvement brownien et $S_t\left(.\right)$ est une fonction qui va dépendre d'un parametre $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ avec $\varepsilon \in (0,1)$.

Dans le premier chapitre, on a essayé de donner des rappels de base concernant les processus stochastiques, ainsi que des résultats importants et des propriétés de mouvement brownien. Aussi on a abordé la notion de l'intégrale stochastique pour pouvoir définir une équation différentielle stochastique.

Le deuxième chapitre sera consacré aux estimations paramétriques, on donnera alors les hypothèses de régularité ainsi que la condition de normalité asymptotique locale (LAN). On étudiera ensuite la construction de l'estimateur de maximum de vraisemblance et l'estimateur de Bayes avec leurs comportements asymptotiques quand $\varepsilon \to 0$.

Dans le dernier chapitre on traitera le processus de diffusion d'Ornstein-Uhlenbeck qui sera un exemple illustratif. On prouvera qu'il vérifie des hypothèses de régularité. Enfin, moyennant le language de programmation R, on va tracer quelques trajectoires pour ce processus ainsi qu'un graphe reliant la consistance de l'emv et la valeur de ε.

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Généralité sur les processus stochastiques

1.1.1 Introduction

L'origine des processus stochastiques remonte aux progrès faits au début du XXe siècle dans certaines branches appliquées, telles que la mécanique statistique (par Gibbs, Boltzmann, Poincaré, Smoluchowski et Langevin). Les bases théoriques ont été formulées plus tard (1930-1940). C'est durant cette période que le mot "stochastique", qui provient du grec stokhastikos "conjectural", a commencé à être employé.

1.1.2 Définition des processus

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet, et T un ensemble d'indices $(T = [a, b]\,,\ T = [0, \infty[\,, ...)$. Un processus stochastique $X(t, \omega)$ à valeur dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est une application de $T \times \Omega$ dans E qui est mesurable par rapport à la mesure du produit $\lambda.P$ où λ est la mesure de Lebesgue sur T . Il est noté indifféremment $X_t(\omega)$ ou $X(t, \omega)$. La fonction $t \mapsto X(t, \omega)$ est appelée *trajectoire* ou réalisation de X_t . À t fixé, la fonction $\omega \mapsto X(t, \omega)$ est une variable aléatoire. $\{X_t, t \in T\}$ est *adapté* à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si X_t est $\mathcal{F}_t - mesurable$. Le théorème de Kolmogorov assure l'existence des processus stochastiques. $\{X_t, t \in T\}$ est un processus centré si son espérance est nulle $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
Si X_t est dans L^2 i.e. $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$, on définit :

La fonction moyenne du processus

$$m(t) = \mathbb{E}(X_t) = \int_{\Omega} X_t(\omega)\, dP(\omega),$$

La variance

$$\sigma^2(t) = \mathbb{E}\left[|X_t - \mathbb{E}(X_t)|^2\right],$$

La fonction de covariance

$$\Gamma(s,t) = \mathbb{E}(X_t X_s) - \mathbb{E}(X_t)\,\mathbb{E}(X_s).$$

La régularité des trajectoires est déterminée par le théorème de Kolmogorov.

Définition 1.1 *On appelle une **filtration** une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ notée par $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. La tribu $\mathcal{F}_t$ est une description mathématique de toute l'information dont on dispose à l'instant t. Cette information nous permet d'attribuer des probabilités cohérentes aux événements pouvant intervenir.*

Définition 1.2 *Un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est dit **adapté** à la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ si pour chaque t, X_t est $\mathcal{F}_t -$ mesurable. Un processus adapté est celui pour lequel une description probabiliste est réalisable.*

1.1.3 Processus stochastiques particuliers

Définition 1.3 *Un processus X_t est **strictement stationnaire** si pour tout entier n, tous réels $t_1, t_2, ...t_n$, et tout $h > 0$, les vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ et $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_n+h})$ ont la même loi.*

Définition 1.4 *Un processus X_t est dit **stationnaire** (ou **faiblement stationnaire**) si:*
•*son espérance $\mathbb{E}(X_t)$ est une constante indépendante du temps t.*
•*sa fonction de corrélation $R(s,t)$ ne dépend que de la différence $\tau = t - s$.*
•*$R(\tau)$ est continue (à l'origine).*

Définition 1.5 *On dit qu'un processus X_t est **gaussien** si pour tout entier n et pour tous réels $t_1, t_2, ...t_n$ les vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ ont une distribution gaussienne.*

Si on note $m(t)$ l'espérance de X_t et $R(s,t)$ la fonction de corrélation du processus, alors sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned}
\Phi_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \mathbb{E}\left(\exp i\sum_{j=1}^{n} x_j X_{t_j}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\exp i\sum_{j=1}^{n} x_j m(t_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k R(t_j,t_k)\right).
\end{aligned}$$

Un processus gaussien est entièrement déterminé par la donnée de sa valeur moyenne $m(t)$ et de sa fonction de corrélation $R(s,t)$.

1.2 Mouvement brownien

1.2.1 Introduction

Le mouvement brownien est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une grosse particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les petites molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule, qui a été décrit pour la première fois en 1827 par le biologiste Robert Brown alors qu'il observait du pollen de Clarkia pulchella (une espèce de fleur sauvage nord-américaine), puis de diverses autres plantes, en suspension dans l'eau. La description physique la plus élémentaire du phénomène est la suivante:

1. Entre deux chocs, la grosse particule se déplace en ligne droite avec une vitesse constante.
2. La grosse particule est accélérée lorsqu'elle rencontre une molécule de fluide ou une paroi.

1.2.2 Construction d'un mouvement brownien

Ce processus de diffusion peut être construit par différentes approches, (construction par une limite d'une marche aléatoire, construction par le développement de Karhunen-Loève (D.K.L)) et celle la plus utilisée:

Construction par un processus gaussien

Un processus stochastique $\{W_t, t \geq 0\}$ est dit un *mouvement brownien* ou un *processus de Wiener* si $W_0 = 0$ (on dit que W_t est issu de 0), et si pour tous réels $0 < t_1 < ... < t_n$ les variables aléatoires $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$(dites accroissements) sont indépendantes et suivent une distribution gaussienne telle que $\forall h > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(W_{t+h} - W_t\right) &= 0, \\ \mathbb{E}\left(W_{t+h} - W_t\right)^2 &= h. \end{aligned}$$

On dit que le mouvement brownien est standard si $m = 0, \sigma = 1$, et le vecteur $(W_{t_0}, W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ est un vecteur gaussien donc le processus W_t suit une loi gaussienne de moyenne m_t et de variance σ_t.
On peut facilement simuler une trajectoire de mouvement brownien dans un intervalle de temps $[0, T]$, il suffit de fixer un pas de temps $\Delta t > 0$ et d'écrire

$$W_{\Delta t} = W_{\Delta t} - W_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \Delta t\right) = \sqrt{\Delta t}\mathcal{N}\left(0, 1\right).$$

Les accroissements $\left(W_{n\Delta t} - W_{(n-1)\Delta t}\right)$, où $0 \leq n \leq N$ et $N > 0$, étant indépendants et gaussiens, il suffit donc de simuler une loi gaussienne

$$W_{t+\Delta t} - W_t \sim \mathcal{N}\left(0, \Delta t\right) = \sqrt{\Delta t}\mathcal{N}\left(0, 1\right).$$

Ainsi, nous pouvons simuler facilement une seule trajectoire brownienne de la façon suivante: on considère la subdivision de l'intervalle de temps $[0, T]$ suivante $0 = t_1 < t_2 < ... < t_N < t_{N+1} = T$, avec $t_{i+1} - t_i = \Delta t$, pour $i = 1$ on a $W_0 = W_{t_1} = 0$. On donne l'algorithme suivant:

- Générer une variable aléatoire Z de distribution gaussienne $\mathcal{N}\left(0, 1\right)$.
- $i = i + 1$.
- $W_{t_i} = W_{t_{i-1}} + Z\sqrt{\Delta t}$.

- Si $i \leq N+1$, réitérer à l'étape 1. $(voir$ [6])

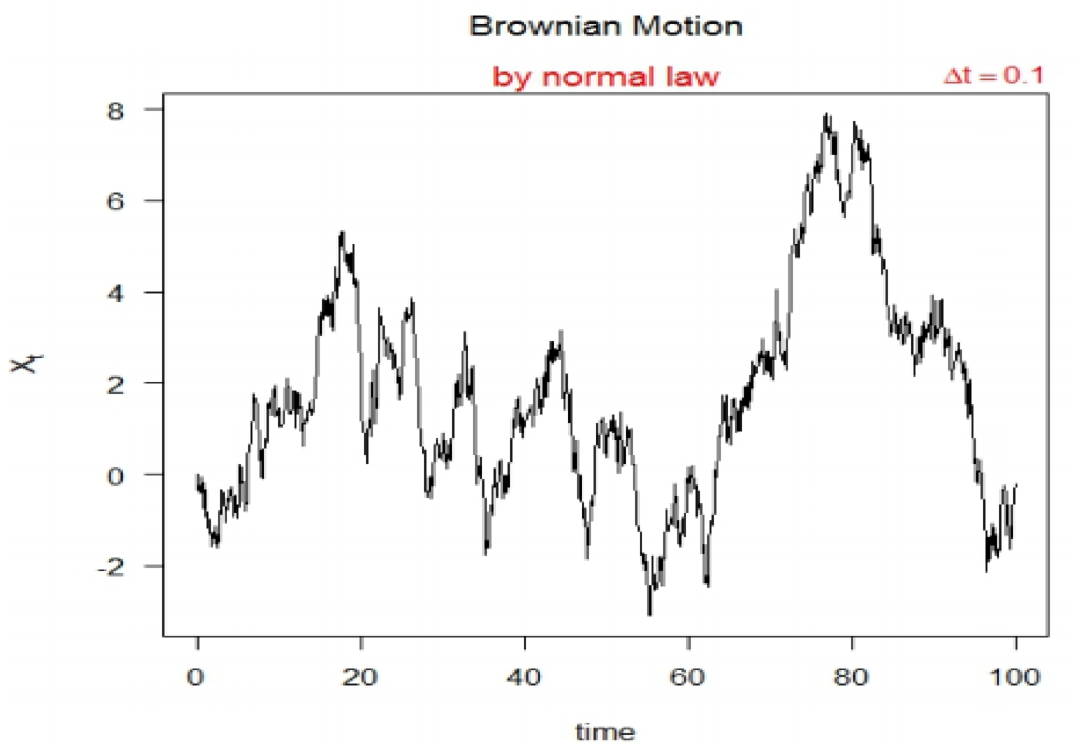

Figure1.1 Trajectoire brownienne simule partir d'une distribution gaussienne.

1.2.3 Continuité des trajectoires

Dire qu'un processus aléatoire $\{X_t, t \geq 0\}$ est continu c'est, par définition, dire que

$$\lim_{h \to 0} |X_{t+h} - X_t| = 0.$$

Selon le type de convergence de cette variable aléatoire, on obtient une continuité plus ou moins forte. La plus faible des notions de continuité est liée à la convergence en loi, elle est évidement vérifiée.

Propriété 1.1 *Soit $\varepsilon > 0, \{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard. On a*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} P\left(|W_{t+h} - W_t| > \varepsilon\right) = 0.$$

1.2.4 Régularité des trajectoires

Le mouvement brownien a de nombreuses propriétés dont certaines peuvent être prises comme définition.

Propriété 1.2 *Le processus $\{W_t, t \geq 0\}$ est un processus à accroissements indépendants de fonction de covariance*

$$\Gamma(s,t) = \mathbb{E}(W_t W_s) = (s \wedge t)\,\sigma^2.$$

Propriété 1.3 *La densité de $\Delta W = \left(W_{t_t} - W_{t_0}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\right)$ est donnée par*

$$f_{\Delta W}(x_1, ..., x_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp \frac{-x_j^2}{2(t_j - t_{j-1})}.$$

Propriété 1.4 *La densité de $W = (W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ est*

$$f_W(x_1, ..., x_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp \sum_{j=1}^{n} \frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}.$$

Propriété 1.5 *Pour un mouvement brownien standard $(m = 0, \sigma = 1)$ et pour tout n, l'espérance*

$$\mathbb{E}(W_{t+h} - W_t)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2/2h} dx = 1.3...(2n-1)\,h^n.$$

Presque toutes les réalisations du mouvement brownien sont continues.

Propriété 1.6 *Soit $\{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard. On a presque sûrement*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \sup \frac{W_t}{\sqrt{t}} &= +\infty, \qquad \lim_{t\to 0} \sup \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty,\\
\lim_{t\to\infty} \inf \frac{W_t}{\sqrt{t}} &= -\infty, \qquad \lim_{t\to 0} \inf \frac{W_t}{\sqrt{t}} = -\infty,
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0.$$

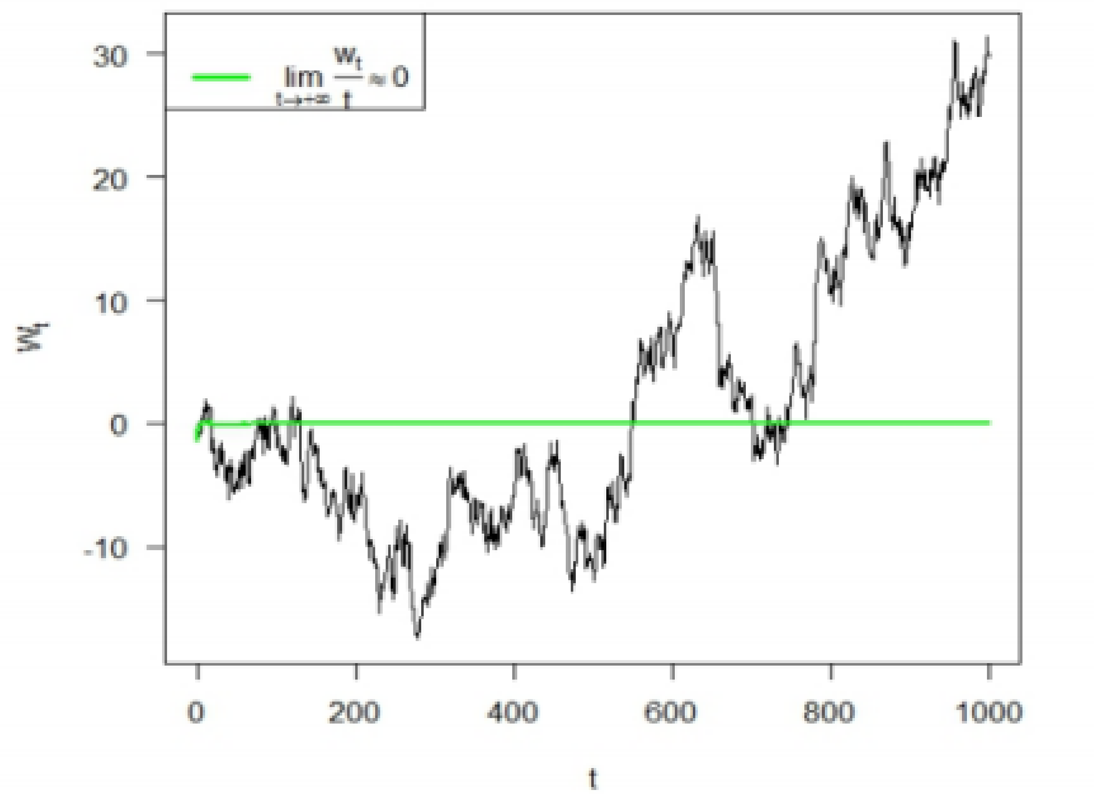

Figure1.2 *La limite de mouvement brownien standart par rapport au temps* (*cf* [6])

Propriété 1.7 *Si* $\{W_t, t \geq 0\}$ *est un mouvement brownien, alors il en est de même pour les processus suivants*

- $X_t = \frac{1}{a} W_{a^2 t}$ *pour a constante non nulle (invariance par changement d'échelle).*
- $X_t = t W_{1/t}$ *pour tout* $t > 0$ *et* $X_0 = 0$ *(invariance par inversion de temps).*
- $X_t = W_{T-t} - W_T$ *avec* $T > 0$ *et* $t \in [0, T]$ *(invariance par retournement du temps).*

Lemme 1.1 *Pour tout* $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}\exp\left\{\lambda \sup_{0\leq t\leq T} |W_t|\right\} \leq 1 + \lambda\sqrt{8\pi T} e^{\frac{T\lambda^2}{2}}.$$

Preuve: Notons par $F(x)$ la fonction de répartition de la v.a. $\sup\limits_{0\leq t\leq T} |W_t|$ et soit $\lambda > 0$, alors par intégration par parties on obtient

$$\mathbb{E}\exp\left\{\lambda \sup_{0\leq t\leq T} |W_t|\right\} = \int_0^\infty e^{\lambda x} dF(x) = -\int_0^\infty e^{\lambda x} d[1 - F(x)] = 1 + \lambda \int_0^\infty e^{\lambda x} [1 - F(x)]\, dx$$

or le processus de Wiener a comme propriété (*voir* [9] *p*.30)

$$P\left\{\sup_{0\leq t\leq T} W_t > N\right\} = 2P\{W_T > N\}, \quad N > 0$$

donc

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{0\leq t\leq T} |W_t| > N\right\} &< P\left\{\sup_{0\leq t\leq T} W_t > N\right\} + P\left\{\inf_{0\leq t\leq T} W_t < -N\right\} \\ &= P\left\{\sup_{0\leq t\leq T} W_t > N\right\} + P\left\{\sup_{0\leq t\leq T} (-W_t) > N\right\} = 4P\{W_T > N\}, \end{aligned}$$

de plus on a (*voir* [9] *p*.31)

$$P\{W_T > N\} \leq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{N}\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\right) e^{-\frac{N^2}{2T}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\exp\left\{\lambda \sup_{0\leq t\leq T} |W_t|\right\} &\leq 1 + 4\lambda \int_0^\infty e^{\lambda x} P\{W_T > x\}\, dx \leq 1 + 2\lambda \int_0^\infty \exp\left\{\lambda x - \frac{x^2}{2T}\right\} dx \\ &< 1 + 2\lambda e^{\frac{T\lambda^2}{2}} \int_\infty^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2T}(x - T\lambda)^2\right\} dx \\ &= 1 + \sqrt{8\pi T} e^{\frac{T\lambda^2}{2}}. \end{aligned}$$

■

1.3 Intégrales stochastiques

1.3.1 L'intégrale d'Itô

On considère un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. On appelle *tribu des prévisibles* sur $\Omega \times [0, \infty[$ la plus petite tribu rendant mesurable tous les processus continus adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Un processus ou un ensemble est *prévisibles* s'il est mesurable par rapport à cette tribu. Supposons donné un processus de Wiener standard $\{W_t, t \geq 0\}$, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ et tel que pour tout $0 \leq s \leq t$ l'accroissement $W_t(\omega) - W_s(\omega)$ soit indépendant de $\mathcal{F}_t$. On note l'ensemble Λ^2 des processus $\varphi_t(\omega)$ définis pour $t \in [0, T]$, $\mathcal{F}_t - mesurables$ et de carré intégrable presque sûrement. Dans ces conditions, si φ est dans Λ^2 et si $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ est une subdivision de l'intervalle $[0, t]$, alors φ est indépendant des incréments $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$, en d'autres termes φ est prévisible.

Le but de l'intégrale stochastique est de donner un sens à des équations de la forme

$$\frac{dX_t}{dt} = b(X_t) + \sigma(X_t)\frac{dW_t}{dt}. \tag{1.1}$$

Le problème est que les trajectoires du processus de Wiener ne sont pas différentiables, ni même à variations bornées. Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, on interprête une solution de l'équation différentielle (1.1) comme une solution de l'équation intégrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dW_s.$$

Pour toute fonction φ de Λ^2, on définit l'intégrale stochastique d'Itô comme la limite dans L^2 des accroissements ci-dessous. On définit ainsi l'intégrale stochastique comme la limite des sommes de Riemann.

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s(\omega)\,dW_s(\omega) := \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_{t_i}(\omega)\left(W_{t_{i+1}\wedge t}(\omega) - W_{t_i\wedge t}(\omega)\right).$$

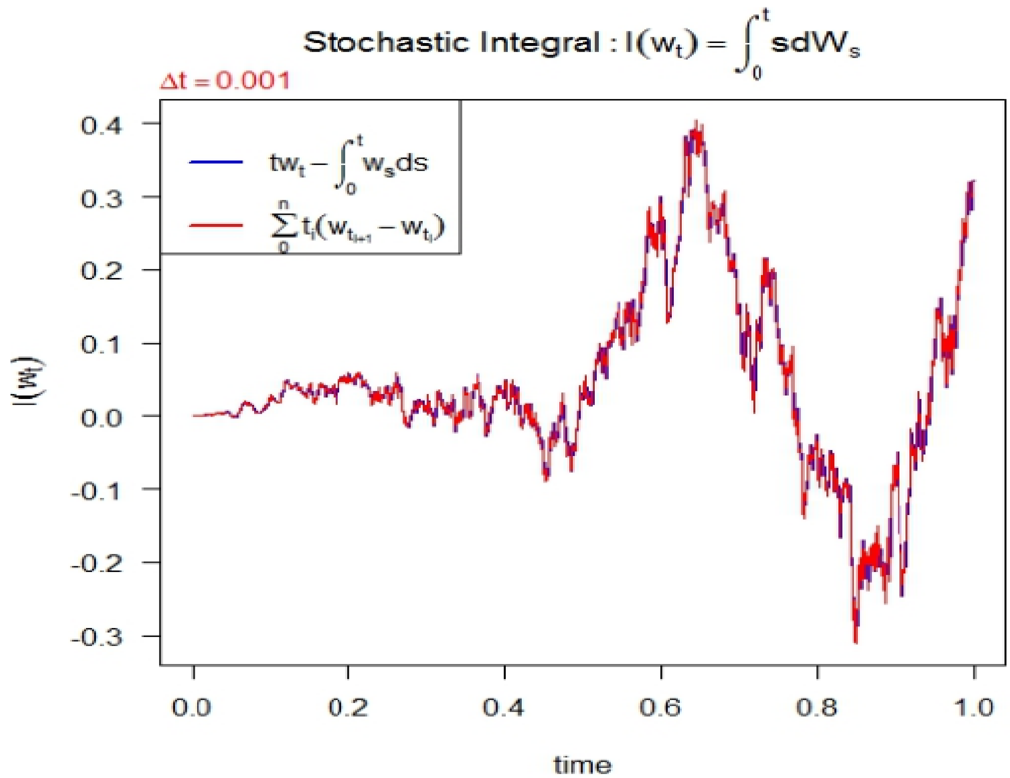

Figure1.3 Simulation de l'intgrale stochastique d'Ito (cf [6])

On a de plus quelques propriétés complémentaires liées à la dépendance aléatoire de φ.

Propriété 1 *Pour tout $\varphi, \psi \in \Lambda^2$ et tout s, t tels que $0 < s < t$, on a*

- $t \mapsto I_t(\varphi)$ *est à trajectoire continue $P - p.s.$*
- $I(\varphi) = (I_t(\varphi))_{t \geq 0}$ *est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.*
- $\mathbb{E}(I_t(\varphi)) = 0$, *et* $Var(I_t(\varphi)) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \varphi_s^2 ds\right)$.
- $\mathbb{E}(I_t(\varphi) - I_s(\varphi) \mid \mathcal{F}_s) = 0$.
- $\mathbb{E}\left((I_t(\varphi) - I_s(\varphi))^2 \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_s^t \varphi_u^2 du \mid \mathcal{F}_s\right)$.
- $\mathbb{E}[I_t(\varphi) I_s(\psi)] = \mathbb{E}\int_0^{t \wedge s} \varphi_u \psi_u du$.

- $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\left(I_{t-s}\left(\varphi\right)-I_{s}\left(\varphi\right)\right)^{2}\right]\leq 4\mathbb{E}\left(\int\limits_{s}^{s+T}\varphi_{u}^{2}du\right).$

- ***Inégalité de Lenglart**: Pour tout $\delta>0$ et $\gamma>0$*

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int\limits_{0}^{t}\varphi_{s}\left(\omega\right)dW_{s}\right|>\delta\right)\leq\frac{\gamma}{\delta^{2}}+P\left(\left\|\varphi\left(\omega\right)\right\|^{2}>\gamma\right). \tag{1.2}$$

- *Si pour tout $m\geq 1$ on a $\int\limits_{0}^{T}\mathbb{E}\left|\varphi_{t}\right|^{2m}dt<\infty,$ alors*

$$\mathbb{E}\left(I_{T}\left(\varphi\right)\right)^{2m}\leq\left[m\left(2m-1\right)\right]^{m}T^{m-1}\int\limits_{0}^{T}\mathbb{E}\left|\varphi_{t}\right|^{2m}dt. \tag{1.3}$$

- *Enfin on a*

$$\mathbb{E}\exp\left(\int\limits_{0}^{T}\varphi_{t}dW_{t}-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{T}\varphi_{t}^{2}dt\right)\leq 1. \tag{1.4}$$

Corollaire 1.1 .

- *Si pour tout $t\in[0,T]$ la somme $\int\limits_{0}^{t}\mathbb{E}\left(\varphi_{s}^{2}\right)ds<\infty$ alors l'intégrale stochastique $I_{t}\left(\varphi\right)$ est une martingale.*

- ***Isométrie d'Itô**: si $\int\limits_{0}^{t}\mathbb{E}\left(\varphi_{u}^{2}\right)du<\infty$ on a*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_{0}^{t}\varphi_{s}dW_{s}\right)^{2}\right]=\int\limits_{0}^{t}\mathbb{E}\left(\varphi_{s}^{2}\right)ds. \tag{1.5}$$

- *D'après la défnition le processus $I\left(\varphi\right)$ est gaussien centré de covariance*

$$Cov\left(I_{t}\left(\varphi\right),I_{s}\left(\varphi\right)\right)=\mathbb{E}\left(\int\limits_{0}^{t\wedge s}\varphi_{u}^{2}du\right).$$

Supposons que pour tout $\varepsilon \in (0,1]$ et pour tout $\theta \in \Theta$, où Θ est non vide, on a le processus stochastique vectoriel $\left\{ f_t^{(\varepsilon)}(\theta), 0 \leq t \leq T \right\} \in \Lambda^2$, et notons par $|.|$ la norme matricielle. Le lemme suivant ($cf.$[9]) nous donne le théorème central limite pour l'intégrale stochastique:

Lemme 1.2 *Si la convergence*

$$P - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T f_t^{(\varepsilon)}(\theta) f_t^{(\varepsilon)}(\theta)^T \, dt = \sigma(\theta),$$

où $0 < |\sigma(\theta)| < \infty$, *est uniforme en* $\theta \in \Theta$ *alors l'intégrale stochastique* $\int_0^T f_t^{(\varepsilon)}(\theta) \, dW_t$ *est uniformément asymptotiquement normale avec les paramètres* $(0, \sigma(\theta))$.

1.3.2 Processus d'Itô

On appelle **processus d'Itô**, un processus $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \qquad t \in [0,T] \tag{1.6}$$

avec

1- $b = \{b_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $\sigma = \{\sigma_t, 0 \leq t \leq T\}$ sont des processus adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

2- $P\left(\int_0^T |b_s| \, ds < \infty \right) = 1.$

3- $P\left(\int_0^T |\sigma_s|^2 \, ds < \infty \right) = 1.$

Écrit sous sa forme différentielle, le processus d'Itô devient

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t. \tag{1.7}$$

1.3.3 Formule d'Itô

Soit le processus stochastique X vérifiant

$$X_{t_2} - X_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} b_s(X_s)\,ds + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_s(X_s)\,dW_s,$$

on note sous forme différentielle

$$dX_t = b_t(X_t)\,dt + \sigma_t(X_t)\,dW_t.$$

La formule d'Itô permet de déterminer de manière générale l'effet d'un changement de variables sur une différentielle stochastique. Si $f(t,x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ alors $Y_t = f(t, X_t)$ est aussi un processus d'Itô et il admet une intégrale stochastique par rapport au même processus de Wiener donnée par la *formule d'Itô*

$$dY_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t) + b_t\frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)\right)dt + \sigma_t\frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\,dW_t.$$

1.4 Equations différentielles stochastiques

1.4.1 Introduction et définitions

De manière informelle, on appelle équation différentielle stochastique une équation différentielle ordinaire perturbée par un terme stochastique. Plus précisément, c'est une équation du type suivant :

$$dX_t = b_t(X_t)\,dt + \sigma_t(X_t)\,dW_t, \qquad X_0. \tag{1.8}$$

Dans cette équation, dW_t est la différentielle d'un mouvement brownien standard W_t, et b, σ sont les coefficients de l'équation (ce sont des fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et X_0 est la valeur initiale. Tous ces termes sont donnés.

Définition 1.6 *Rechercher une* ***solution*** *de l'équation* (1.8) *consistera à rechercher un proces-*

sus $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ *satisfaisant l'équation intégrale*

$$X_t = x_0 + \int_0^t b_s(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma_s(X_s)\, dW_s,$$

où la seconde intégrale est une intégrale stochastique.

Définition 1.7 *Quand les coefficients* b *et* σ *ne dependent pas du temps et sont seulement des fonctions définies sur* $\mathbb{R}^d$, *on dit que l'équation est* ***homogène****.*
Le coefficient b *est appelé le* ***coefficient de dérive****, tandis que* σ *est le* ***coefficient de diffusion****. Un processus qui résout l'équation* (1.8) *est appelé* ***processus de diffusion*** *ou, tout simplement, une* ***diffusion****.*

1.4.2 Existence et unicité des solutions de l'EDS

Soit $T > 0, b(t,x)$ et $\sigma(t,x)$ deux fonctions mesurables de $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ verifiant les conditions $\mathcal{L}$ suivantes:

(1) *Condition de Lipschitz:* il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|.$$

(2) *Condition de croissance* : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|b(x,t)| + |\sigma(x,t)| \leq C(1+|x|).$$

(3) X_0 est une variable aléatoire indépendante de la tribu $\sigma\{W_t, t \geq 0\}$ et $\mathbb{E}|X_0|^2 < \infty$.

Alors l'équation différentielle stochastique d'Itô (1.8) admet une solution unique X_t dont presque toutes les réalisations sont continues, et vérifiant $\mathbb{E}\left(\sup\limits_{t\in[0,T]} |X_t|^2\right) < \infty$.

Remarque 1.1 .

(1) *Une équation peut admettre une solution locale sans admettre de solution globale. Par exemple sur* $[0,1]$ *l'équation*

$$\frac{dX_t}{dt} = X_t^2, \qquad X_0 = 1,$$

admet une solution unique locale sur $[0,1[$

$$X_t = \frac{1}{1-t}, \qquad t \in [0,1[,$$

mais n'admet pas de solution globale sur l'intervalle $[0,1]$.

(2) *La condition de croissance évite que les solutions explosent, i.e. que les solutions* $|X_t|$ *tendent vers l'infini en un temps fini. L'équation*

$$dX_t = \frac{1}{2} a X_t^3 dt, \qquad X_t = \frac{1}{y}, \qquad y > 0$$

admet une solution

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{y^2 - at}}$$

qui diverge dans la direction $y^2 = at$. *Si la condition de croissance n'est pas satisfaite, l'équation peut quand même avoir une solution.*

(3) *La condition de Lipschitz garantit l'unicité. L'équation*

$$dX_t = 3X_t^{2/3} dt, \qquad X_0 = 0$$

admet plus d'une solution

$$X_t = (t-a)^3 \, \mathbf{1}_{t>a},$$

car la fonction $f(t,x) = 3x^{2/3}$ *ne vérifie pas la condition de Lipschitz.*

Chapitre 2

Estimation paramétrique dans une petite diffusion

2.1 Introduction et définitions

Dans ce travail nous traitons le processus de type de diffusion

$$dX_t = S_t\left(X_t\right)dt + \varepsilon dW_t, \qquad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.1}$$

où $\varepsilon \in (0,1]$ avec $\varepsilon \to 0$.

Notons par $x = \{x_t, 0 \leq t \leq T\}$ la solution du processus déterministe:

$$\frac{dx_t}{dt} = S_t\left(x_t\right), \quad x_0, \ 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Nous voudrions illustrer certaines notions et méthodes de la théorie d'évaluation sur le modèle de l'observation du processus de diffusion. supposons que sur l'espace de probabilité $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ avec la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ on se donne le processus de Wiener $\{W_t, \mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ et pour chaque $\theta \in \Theta$ où $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert borné convexe, le processus de diffusion

$$dX_t = S_t\left(\theta, X_t\right)dt + \varepsilon dW_t, \qquad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.3}$$

est défini.

Notre problème est d'estimer le paramètre inconnu θ par les observations (2.3) et pour décrire le comportement asymptotique de l'estimateur quand $\varepsilon \to 0$.

Notons par $(C_T, \mathcal{B}_T)$ l'espace mesurable des fonctions continues sur $[0,T]$ où $\mathcal{B}_T = \sigma\{x_t, 0 \le t \le T\}$, et $P^{(\varepsilon)}$ la mesure induite dans $(C_T, \mathcal{B}_T)$ par le processus de diffusion défini ci-dessus.

Dans ce travail nous supposons toujours des fonctions $S_t(\theta, .)$, $\theta \in \Theta$ satisfont les conditions $\mathcal{L}$ ainsi l'équation (2.3) a une solution forte unique et toutes les mesures $P_\theta^{(\varepsilon)}$ induites par le processus (2.3) dans l'espace mesurable $(C_T, \mathcal{B}_T)$ sont équivalentes où $\varepsilon \in (0,1]$, donc on a une suite de processus indexés par ε. Comme d'habitude dans les problèmes asymptotiques, si on a une observation X_t avec un petit ε, on intègre ce problème dans une suite de problèmes avec $\varepsilon \to 0$ puis on applique le résultat obtenu à l'original.

Un estimateur θ_ε du paramètre θ est défini comme une application mesurable

$$\theta_\varepsilon : C_T \to \bar{\Theta},$$

où $\bar{\Theta}$ est la fermeture de Θ et nous supposons que Θ est fourni avec la $\sigma - alg\grave{e}bre$ des sous-ensembles boreliens de $\mathbb{R}^d$.

Cet arrangement des observations est intéressant pour quelques problèmes appliqués par exemple si le comportement d'un certain vrai système dynamique est décrit par équation (2.2), dite thermique, et un petit bruit qui perturbe son second membre inconnu, alors le problème de l'identification de ce système surgissent naturellement.

Définition 2.1 *On dit que l'estimateur θ_ε est* ***consistent*** *si pour tout $\theta \in \Theta$ et tout $\delta > 0$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_\theta^{(\varepsilon)} \{|\theta_\varepsilon - \theta| > \delta\} = 0,$$

et on note cette convergence comme

$$P_\theta - \lim_{\varepsilon \to 0} \theta_\varepsilon = \theta.$$

Il est dit ***uniformément consistent*** *si pour tout compact $\mathbb{k} \subset \Theta$ et $\delta > 0$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\theta \in \mathbb{k}} P_\theta^{(\varepsilon)} \{|\theta_\varepsilon - \theta| > \delta\} = 0.$$

Définition 2.2 *On appelle* ***biais*** *d'un estimateur θ_ε l'écart entre sa moyenne et la vraie valeur du paramètre θ, et on le note $b_\varepsilon(\theta)$ tel que*

$$b_\varepsilon(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\theta_\varepsilon) - \theta,$$

l'estimateur θ_ε est dit ***sans biais*** *ou bien* ***nonbiaisé*** *si*

$$b_\varepsilon(\theta) = 0,$$

il est dit ***asymptotiquement sans biais*** *si*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} b_\varepsilon(\theta) = 0.$$

Notation 2 *Notons par $I(\theta)$ la matrice de l'****information de Fisher*** *telle que*

$$I(\theta) = \int_0^T \dot{S}_t(\theta, x_t)\, \dot{S}_t(\theta, x_t)^T \, dt, \quad \theta \in \Theta,$$

où $\dot{S}_t(\theta, X_t) = \dfrac{\partial}{\partial\theta} S_t(\theta, X_t) \in \mathbb{R}^d$ et T désigne le vecteur transposé.

Le lemme suivant nous permet de savoir "à quelle distance de la limite" nous sommes dans chaque moment.

Lemme 2.1 *Supposons que la fonctionnelle $S_t(.), t \in [0, T]$ satisfait les conditions $\mathcal{L}$, alors avec probabilité* 1

$$|X_t - x_t| \leq C\varepsilon \sup_{0 \leq s \leq t} |W_s|$$

et

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - x_t| \leq C\varepsilon \sup_{0 \leq s \leq T} |W_s|, \quad C > 0.$$

Preuve: Ce lemme est démontré dans [9] $p.30$. ■

2.2 Hypothèses de régularité

Nous étudions les propriétés des estimateurs sous les conditions de régularité suivantes:

I) Les coefficients $\{S_t(\theta, X_t), 0 \leq t \leq T, \theta \in \Theta\}$ satisfont les conditions $\mathcal{L}$ et les constantes de ces conditions ne dépendent pas du θ.

II) La fonction aléatoire $\{S_t(\theta, X_t), 0 \leq t \leq T, \ \theta \in \Theta\}$, est dérivable par rapport à θ en probabilité, et la matrice de l'information de *Fisher* est définie positive uniformément en $\theta \in \Theta$ c.-à-d.

$$0 < \inf_{\theta \in \Theta} \inf_{|l|=1} \langle I(\theta) l, l \rangle, \quad \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{|l|=1} \langle I(\theta) l, l \rangle < \infty.$$

III) $\left\{\dot{S}_t(\theta_0, X_t), 0 \leq t \leq T\right\}$ est uniformément continu dans $L_2[0, T]$ avec probabilité 1 pour $X = \{x_t(\theta_0), 0 \leq t \leq T\}$.

IV) Pour tout $m > \frac{d}{2}$.

$$\sup_{\theta, \theta_1 \in \Theta} \mathbb{E}_{\theta_1} \left\| \left| \dot{S}(\theta, X) \right|^m \right\|^2 < C, \quad C > 0 \tag{2.4}$$

V) Pour tout $\nu > 0$ et tout compact $\mathbb{k} \subset \Theta$

$$\inf_{\theta \in \mathbb{k}} \inf_{|u| > \nu, \theta + u \in \Theta} \| S(\theta + u, x) - S(\theta, x) \| > 0.$$

On va étudier les propriétés asymptotiques de deux types d'estimateurs:

- Estimateur du maximum de vraisemblance.
- Estimateur Bayesien.

2.3 Estimateur du maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_\varepsilon$, pour une observation $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$, vérifiant (2.3), est défini comme la solution de l'équation

$$L\left(\hat{\theta}_\varepsilon, \theta_1; X\right) = \sup_{\theta \in \bar{\Theta}} L(\theta, \theta_1; X), \tag{2.5}$$

où $L(\theta, \theta_1; X)$ s'appelle le rapport de vraisemblance et il est définit par

$$L(\theta, \theta_1; X) = \frac{dP_\theta^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}(X), \quad \theta \in \Theta \tag{2.6}$$

avec θ_1 est une valeur fixée du paramètre θ.

Si l'équation (2.5) a plusieures solutions, alors on prend une d'entre elles comme $\hat{\theta}_\varepsilon$. Le rapport de vraisemblance $L(\theta, \theta_1; X), \theta \in \Theta$ dans notre problème est continu en θ, donc la solution de (2.5) va toujours exister. Mais en général on ne peut pas trouver directement cette solution, il faut alors employer des méthodes numériques d'optimisation. De nombreuses techniques existent pour une telle optimisation.

2.3.1 Processus de rapport de vraisemblance

Notons par $Z_\varepsilon(.)$ le processus de rapport de vraisemblance calculé pour l'observation (2.3)

$$Z_\varepsilon(u) := \frac{dP_{\theta+\varphi_\varepsilon(\theta)u}}{dP_\theta}(X), \quad u \in \mathbb{R}^d$$

où $\theta \in \Theta$ et les valeurs $\theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u$ correspondent aux autres valeurs possibles du paramètre pour une normalisation adéquate φ_ε qui est une matrice $\mathbb{R}^{d\times d}$ telle que $\theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u \in \Theta$.

Nous prendrons les formules de rapport de vraisemblance du théorème suivant:
soit $P^{(\varepsilon)}$ (*resp.* $P_0^{(\varepsilon)}$) la mesure induite dans $(C_T, \mathcal{B}_T)$ par le processus de diffusion $\{X_t, 0 \le t \le T\}$ qui satisfait (2.1) (*resp.* par le processus $\{Y_t = x_0 + \varepsilon W_t, 0 \le t \le T\}$).

Théorème 2.1 *Les conditions*

$$P\left\{\int_0^T S_t(X_t)^2\,dt < \infty\right\} = P\left\{\int_0^T S_t(Y_t)^2\,dt < \infty\right\} = 1 \tag{2.7}$$

sont nécéssaires et suffisantes pour l'équivalence des mesures $P^{(\varepsilon)}$ et $P_0^{(\varepsilon)}$, et si elles sont vérifiées alors la dérivé de Radon-Nikodym est donnée par

$$\frac{dP^{(\varepsilon)}}{dP_0^{(\varepsilon)}}(Y) = \exp\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T S_t(Y_t)\,dY_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T S_t(Y_t)^2\,dt\right]. \tag{2.8}$$

Preuve: La preuve est bien détaillée dans [7] théorème(1) $p.385$. ■

On se donne un processus de diffusion (2.3) , supposons que $S_t(\theta, X)$ satisfait les conditions $\mathcal{L}$ pour tout $\theta \in \Theta$, alors les conditions (2.7) sont aussi vérifiées, en effet par la condition de la croissance on a:

$$|S_t(\theta, X_t)| \leq C(1 + |X_t|)$$

on élève au carré et on integre

$$\int_0^T |S_t(\theta, X_t)|^2 dt \leq C^2 \int_0^T (1 + |X_t|)^2 dt = C^2 \int_0^T \left(1 + |X_t|^2 + 2|X_t|\right) dt$$

or cette quantité est finie en probabilité car elle est finie en moyenne.
De plus pour toutes mesures $P_{\theta_1}^{(\varepsilon)}, P_{\theta_2}^{(\varepsilon)}$ correspondant aux solutions de (2.3) on a par la formule (2.8)

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X) &= \frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_0^{(\varepsilon)}} \frac{dP_0^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X) \\
&= \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T S_t(\theta_1, X_t)\, dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T S_t(\theta_1, X_t)^2\, dt\right\} \times \\
&\quad \times \exp\left\{-\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T S_t(\theta_2, X_t)\, dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T S_t(\theta_2, X_t)^2\, dt\right)\right\} \\
&= \exp\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T [S_t(\theta_1, X_t) - S_t(\theta_2, X_t)]\, dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T \left[S_t(\theta_1, X_t)^2 - S_t(\theta_2, X_t)^2\right] dt\right].
\end{aligned}$$

Or $dX_t = S_t(\theta, X_t)\, dt + \varepsilon dW_t$ alors $P_{\theta_2}^{(\varepsilon)}$ $p.s$

$$\frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X) = \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T [S_t(\theta_1, X_t) - S_t(\theta_2, X_t)]\, dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T [S_t(\theta_1, X_t) - S_t(\theta_2, X_t)]^2\, dt\right]. \tag{2.9}$$

Cette dernière formule va être utilisée dans notre travail comme rapport de vraisemblance.

2.3.2 Condition LAN

la condition de normalité asymptotique locale de LeCam est une notion de base qui joue un rôle important dans l'étude des propriétés asymptotiques des estimateurs de paramètre θ.

Définition 2.3 *Une famille* $\left\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\right\}$ *est dite* ***localement asymptotiquement normale*** (LAN) *au point* $\theta_0 \in \Theta$ *quand* $\varepsilon \to 0$*, si le rapport de vraisemblance admet, sous une normalisation adéquate* $\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(\theta_0)$ *et tout* $u \in \mathbb{R}^d$*, la représentation*

$$Z_\varepsilon(u) := L(\theta_0 + \varphi_\varepsilon(\theta_0) u, \theta_0; X) = \exp\left[\langle u, \Delta_\varepsilon\rangle - \frac{1}{2}|u|^2 + \psi_\varepsilon(u, \theta_0)\right], \tag{2.10}$$

où Δ_ε *et* $\psi_\varepsilon(u, \theta_0)$ *sont des variables aléatoires telles que*

$$\mathcal{L}_{\theta_0}(\Delta_\varepsilon) \Rightarrow \mathcal{N}(0, I), \quad \text{quand } \varepsilon \to 0,$$

et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon(u, \theta_0) = 0, \text{ en probabilité.}$$

Si la famille $\left\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\right\}$ *est* (LAN) *en tout point* $\theta_0 \in \Theta$*, alors on dit qu'elle est* (LAN) *sur* Θ.

Elle est dite ***uniformément asymptotiquement normale*** *si nous avons les relations précédentes pour tout compact* $\mathbb{k}$*, et pour toutes les suites* $\theta_n \subset \mathbb{k}$*,* $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}$ *tq* $\varepsilon_n \to 0$ *et* $(u_n) \subset \mathbb{R}^d$ *tq* $u_n \to u$ *vérifiant* $(\theta_n + \varphi_\varepsilon(\theta_n) u_n) \in \Theta$.

$\langle ., . \rangle$ et $|.|$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$, et $\|.\|$ représente la norme dans $L_2[0, T]$.

2.3.3 Comportement asymptotique de l'EMV

On étudie les propriétés asymptotiques dans le cas régulier c-à-d sous les conditions de régularité données ci-dessus.

Théorème 2.2 *Sous les conditions I) à V), on a uniformément sur tout compact* $\mathbb{k} \subset \Theta$ *quand* $\varepsilon \to 0$,

a) $\hat{\theta}_\varepsilon$ *est consistent*

$$P_\theta - \lim_{\varepsilon\to 0} \hat{\theta}_\varepsilon = \theta,$$

b) $\hat{\theta}_\varepsilon$ *est asymptotiquement normal*

$$\mathcal{L}_\theta \left\{ \varepsilon^{-1} I(\theta)^{1/2} \left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta \right) \right\} \Rightarrow \mathcal{N}(0, I),$$

c) *les moments d'ordre* p *convergent pour tout* $p > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\theta\in\Bbbk} \left| \mathbb{E}_\theta \left| I(\theta)^{1/2} \left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta \right) \right|^p \varepsilon^{-p} - \mathbb{E} \left| \Delta \right|^p \right| = 0,$$

où $\Delta = I(\theta)^{-1/2} \int_0^T \dot{S}_t(\theta, X_t)\, dW_t$ *et* I *est la matrice identité* $d \times d$, *avec* $\mathcal{L}\{\Delta\} \simeq \mathcal{N}(0, I)$.

On va utiliser les trois lemmes suivants pour démontrer ce théorème.

Lemme 2.2 *Supposons que les conditions I) à III) sont vérifiées, alors la famille* $\left\{ P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta \right\}$ *est uniformément* (LAN) *avec la matrice de normalisation* $\varphi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I(\theta)^{-1/2}$ *et on a sous* $P_\theta^{(\varepsilon)}$

$$\Delta(\theta, X) = \varepsilon^{-1} \varphi_\varepsilon(\theta) \int_0^T \dot{S}_t(\theta, x_t)\, dW_t$$

est un vecteur gaussien tel que

$$\mathcal{L}_\theta \{ \Delta(\theta, X) \} = \mathcal{N}(0, I).$$

Preuve: Notons $\theta_{\varepsilon,u} = \theta_\varepsilon + \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon)\, u_\varepsilon$, et supposons que $\theta_\varepsilon \in \Bbbk \subset \Theta$, $u_\varepsilon \to u$ $\left(\in \mathbb{R}^d \right)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Par la condition I toutes les mesures $P_\theta^{(\varepsilon)}$, $\theta \in \Theta$ sont équivalentes et le rapport de vraisemblance

$$Z_\varepsilon(u_\varepsilon) = L(\theta_{\varepsilon,u}, \theta_\varepsilon; X)$$

peut s'écrire sous la forme

$$\ln Z_\varepsilon\left(u_\varepsilon\right)=\varepsilon^{-1}\int\limits_0^T\left[S_t\left(\theta_{\varepsilon,u},X_t\right)-S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)\right]dW_t-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_0^T\left[S_t\left(\theta_{\varepsilon,u},X_t\right)-S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)\right]^2dt$$

Or

$$\begin{aligned}\int\limits_0^T\left\langle I\left(\theta_\varepsilon\right)^{-1/2}u_\varepsilon,\dot S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)\right\rangle dW_t &= \int\limits_0^T u_\varepsilon^T\left(I\left(\theta_\varepsilon\right)^{-1/2}\right)^T\dot S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)dW_t\\ &= u_\varepsilon^T\left(I\left(\theta_\varepsilon\right)^{-1/2}\right)^T\int\limits_0^T\dot S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)dW_t\\ &= \left\langle I\left(\theta_\varepsilon\right)^{-1/2}u_\varepsilon,\int\limits_0^T\dot S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)dW_t\right\rangle\end{aligned}$$

donc

$$\varepsilon^{-1}\int\limits_0^T\left\langle\varphi_\varepsilon\left(\theta_\varepsilon\right)u_\varepsilon,\dot S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)\right\rangle dW_t=\left\langle I\left(\theta_\varepsilon\right)^{-1/2}u_\varepsilon,\int\limits_0^T\dot S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)dW_t\right\rangle,$$

avec $\varphi_\varepsilon\left(\theta\right)=\varepsilon I\left(\theta\right)^{-1/2}$. D'où

$$\begin{aligned}\ln Z_\varepsilon\left(u_\varepsilon\right) &= \varepsilon^{-1}\int\limits_0^T\left[S_t\left(\theta_{\varepsilon,u},X_t\right)-S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)-\left\langle\varphi_\varepsilon\left(\theta_\varepsilon\right)u_\varepsilon,\dot S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)\right\rangle\right]dW_t+\\ &\quad+\left\langle I\left(\theta_\varepsilon\right)^{-1/2}u_\varepsilon,\int\limits_0^T\dot S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)dW_t\right\rangle-\frac{1}{2\varepsilon^2}\left\|S\left(\theta_{\varepsilon,u},X\right)-S\left(\theta_\varepsilon,X\right)\right\|^2\\ &= \left\langle I\left(\theta_\varepsilon\right)^{-1/2}u_\varepsilon,\int\limits_0^T\dot S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)dW_t\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle u_\varepsilon,u_\varepsilon\right\rangle+\\ &\quad\underbrace{+\int\limits_0^T\varepsilon^{-1}\left[\left(S_t\left(\theta_\varepsilon+\varphi_\varepsilon\left(\theta_\varepsilon\right)u_\varepsilon,X_t\right)-S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)\right)-\left\langle\varphi_\varepsilon\left(\theta_\varepsilon\right)u_\varepsilon,\dot S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)\right\rangle\right]dW_t}_{\mathbf{r}_1(u_\varepsilon)}+\\ &\quad\underbrace{-\frac{1}{2}\int\limits_0^T\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\left(S_t\left(\theta_\varepsilon+\varphi_\varepsilon\left(\theta_\varepsilon\right)u_\varepsilon,X_t\right)-S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)\right)^2-\left\langle I\left(\theta_\varepsilon\right)^{-1/2}u_\varepsilon,\dot S_t\left(\theta_\varepsilon,X_t\right)\right\rangle^2\right]dt}_{\mathbf{r}_2(u_\varepsilon)}\end{aligned}$$

car la matrice $I(\theta_\varepsilon)$ par l'hypothèse II est définie positive donc $I(\theta_\varepsilon)^{-1/2}$ l'est aussi et elle est même symetrique, et donc on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\langle I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} u_\varepsilon, \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t) \right\rangle^2 dt &= \int_0^T \left\langle I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} u_\varepsilon, \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t) \right\rangle \left\langle \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t), I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} u_\varepsilon \right\rangle dt \\
&= \int_0^T u_\varepsilon^T \left(I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} \right)^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t) \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)^T I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} u_\varepsilon dt \\
&= u_\varepsilon^T I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} \left[\int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t) \dot{S}_t^T(\theta_\varepsilon, X_t) dt \right] I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} u_\varepsilon \\
&= u_\varepsilon^T I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} I(\theta_\varepsilon) I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} u_\varepsilon = u_\varepsilon^T I(\theta_\varepsilon)^{1/2} I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} u_\varepsilon \\
&= \langle u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle = |u_\varepsilon|^2 .
\end{aligned}$$

d'où il vient que $\forall \theta_\varepsilon \in \Bbbk$

$$\ln Z_\varepsilon(u_\varepsilon) = \left\langle I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} u_\varepsilon, \int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t) dW_t \right\rangle - \frac{1}{2} |u_\varepsilon|^2 + \mathbf{r}_1(u_\varepsilon) - \mathbf{r}_2(u_\varepsilon), \ .$$

Montrons que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathbf{r}_1(u_\varepsilon) = 0$ en probabilité:
On admet que si $\{\theta + sh \mid 0 \leq s \leq 1\} \subset \Theta, \ h \in \mathbb{R}^d$ alors

$$S_t(\theta + h, X) - S_t(\theta, X_t) = \int_0^1 \left\langle h, \dot{S}_t(\theta + sh, X_t) \right\rangle ds, \tag{2.11}$$

cette affirmation résulte de la généralisation de la formule de Newton-Leibniz avec des fonctions à valeures dans un espace de Hilbert $(L_2[0,T])$, $(Voir\ [7])$.

On a alors

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{-2}\left\|S\left(\theta_{\varepsilon,u},X\right)-S\left(\theta_{\varepsilon},X\right)-\left\langle\varphi_{\varepsilon}\left(\theta_{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon},\dot{S}\left(\theta_{\varepsilon},X\right)\right\rangle\right\|^{2} \\
= & \varepsilon^{-2}\left\|\int_{0}^{1}\left\langle\varphi_{\varepsilon}\left(\theta_{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon},\dot{S}\left(\theta_{\varepsilon}+s\varphi_{\varepsilon}\left(\theta_{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon},X\right)\right\rangle ds-\left\langle\varphi_{\varepsilon}\left(\theta_{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon},\dot{S}\left(\theta_{\varepsilon},X\right)\right\rangle\right\|^{2} \\
= & \varepsilon^{-2}\left\|\int_{0}^{1}\left\langle\varphi_{\varepsilon}\left(\theta_{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon},\dot{S}\left(\theta_{\varepsilon}+s\varphi_{\varepsilon}\left(\theta_{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon},X\right)-\dot{S}\left(\theta_{\varepsilon},X\right)\right\rangle ds\right\|^{2} \\
\leq & \varepsilon^{-2}\left\|\left\langle I\left(\theta_{\varepsilon}\right)^{-1/2}\varepsilon u_{\varepsilon},\sup_{|h|<\delta}\left[\dot{S}\left(\theta_{\varepsilon}+h,X\right)-\dot{S}\left(\theta_{\varepsilon},X\right)\right]\right\rangle\right\|^{2} \\
\leq & \left|I\left(\theta_{\varepsilon}\right)^{-1/2}u_{\varepsilon}\right|^{2}\sup_{\theta\in\Bbbk,\ |h|<\delta}\left\|\left|\dot{S}\left(\theta+h,X_{t}\right)-\dot{S}\left(\theta,X\right)\right|\right\|^{2},
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, où cette dernière norme tend vers zéro quand $\delta\to 0$ par la condition III.

Posons à présent:

$$\Delta S_{t}\left(u_{\varepsilon}\right)=\varepsilon^{-1}\left(S_{t}\left(\theta_{\varepsilon}+\varphi_{\varepsilon}\left(\theta_{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon},X_{t}\right)-S_{t}\left(\theta_{\varepsilon},X_{t}\right)\right),$$

En utilisant l'inégalité de *Lenglart* donnée par (1.2), pour tout $\gamma,\delta_1>0$ on obtient

$$\begin{aligned}
P_{\theta}^{(\varepsilon)}\left\{\left|\mathbf{r}_{1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right|>\delta_{1}\right\} &= P_{\theta}^{(\varepsilon)}\left\{\left|\int_{0}^{T}\left[\Delta S_{t}\left(u_{\varepsilon}\right)-\left\langle I\left(\theta_{\varepsilon}\right)^{-1/2}u_{\varepsilon},\dot{S}_{t}\left(\theta_{\varepsilon},X_{t}\right)\right\rangle\right]dWt\right|>\delta_{1}\right\} \\
&\leq \frac{\gamma}{\delta_{1}^{2}}+P_{\theta}^{(\varepsilon)}\left\{\left\|\Delta S\left(u_{\varepsilon}\right)-\left\langle I\left(\theta_{\varepsilon}\right)^{-1/2}u_{\varepsilon},\dot{S}\left(\theta_{\varepsilon},X\right)\right\rangle\right\|^{2}>\gamma\right\}.
\end{aligned}$$

D'où en choisissant δ_1 et γ petits tels que $\gamma\delta_1^{-2}$ reste aussi petit on prouve que

$$P_{\theta}-\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{r}_{1}\left(u_{\varepsilon}\right)=0$$

Pour le deuxième terme $\mathbf{r}_2(u_\varepsilon)$ on a

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_2(u_\varepsilon)|^2 &= \left|\int_0^T \left[\Delta S_t(u_\varepsilon) - \left\langle \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon, \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)\right\rangle\right] \left[\Delta S_t(u_\varepsilon) + \left\langle \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon, \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)\right\rangle\right] dt\right|^2 \\
&\leq \left\|\Delta S(u_\varepsilon) - \left\langle \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon, \dot{S}(\theta_\varepsilon, X)\right\rangle\right\|^2 \left\|\Delta S(u_\varepsilon) + \left\langle \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon, \dot{S}(\theta_\varepsilon, X)\right\rangle\right\|^2 \\
&\leq 2\left\|\Delta S(u_\varepsilon) - \left\langle \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon, \dot{S}(\theta_\varepsilon, X)\right\rangle\right\|^2 \left(\|\Delta S(u_\varepsilon)\|^2 + \left\|\left\langle \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon, \dot{S}(\theta_\varepsilon, X)\right\rangle\right\|^2\right),
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\|\Delta S(u_\varepsilon)\|^2 &\leq \left\|\Delta S(u_\varepsilon) - \left\langle \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon, \dot{S}(\theta_\varepsilon, X)\right\rangle\right\|^2 + \int_0^T \left\langle \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon, \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X)\right\rangle^2 dt \\
&= \left\|\Delta S(u_\varepsilon) - \left\langle \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon, \dot{S}(\theta_\varepsilon, X)\right\rangle\right\|^2 + \langle I(\theta_\varepsilon) \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon\rangle
\end{aligned}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_2(u_\varepsilon)|^2 &\leq 2\left\|\Delta S(u_\varepsilon) - \left\langle \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon, \dot{S}(\theta_\varepsilon, X)\right\rangle\right\|^2 \times \\
&\times \left(\underbrace{\left\|\Delta S(u_\varepsilon) - \left\langle \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon, \dot{S}(\theta_\varepsilon, X)\right\rangle\right\|^2}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + 2\underbrace{\langle I(\theta_\varepsilon) \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) u_\varepsilon\rangle}_{\substack{\wedge \\ \infty}\ par II}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$P_\theta - \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{r}_2(u_\varepsilon) = 0.$$

Montrons à présent la normalité asymptotique de $\Delta(\theta, X)$:

On a, par la propriété (1.2), pour tout $\gamma, \delta > 0$

$$\begin{aligned}
P_\theta^{(\varepsilon)}\left\{\left|\int_0^T \dot{S}_t(\theta, X_t)\, dW_t - \int_0^T \dot{S}_t(\theta, x_t)\, dW_t\right| > \delta\right\} &= P_\theta^{(\varepsilon)}\left\{\left|\int_0^T \left[\dot{S}_t(\theta, X_t) - \dot{S}_t(\theta, x_t)\right] dW_t\right| > \delta\right\} \\
&\leq \frac{\gamma}{\delta^2} + P_\theta^{(\varepsilon)}\left\{\left\|\dot{S}(\theta, X) - \dot{S}(\theta, x)\right\|^2 > \gamma\right\},
\end{aligned}$$

Or d'après le lemme (2.1) on a la convergence uniforme en $\theta \in \Bbbk$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \dot{S}(\theta, X) - \dot{S}(\theta, x) \right\| = 0, \text{ en probabilité.}$$

Alors la v.a $\int_0^T \dot{S}_t(\theta, X_t)\, dW_t$ converge vers la v.a $\int_0^T \dot{S}_t(\theta, x_t)\, dW_t$ en probabilité quand $\varepsilon \to 0$, et donc elle converge en loi.

Mais on sait, d'après les propriétés de l'intégrale d'Itô, que

$$\mathcal{L}\left(\int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, x_t)\, dW_t \right) = \mathcal{N}(0, I(\theta_\varepsilon)),$$

puisque $Var\left(\int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, x_t)\, dW_t \right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, x_t)\, \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, x_t)^T\, dt \right) = I(\theta_\varepsilon)$.

En normalisant, on obtient

$$\mathcal{L}\left(I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} \int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, x_t)\, dW_t \right) = \mathcal{N}(0, I),$$

alors $I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} \int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)\, dW_t$ est uniformément asymptotiquement normal de paramètre $(0, I)$.

On conclut que

$$Z_\varepsilon(u_\varepsilon) = \exp\left\{ \left\langle u_\varepsilon, I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} \int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)\, dW_t \right\rangle - \frac{1}{2} |u_\varepsilon|^2 + \mathbf{r}_1(u_\varepsilon) - \mathbf{r}_2(u_\varepsilon) \right\}, \ \forall \theta_\varepsilon \in \Bbbk.$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left(I(\theta_\varepsilon)^{-1/2} \int_0^T \dot{S}_t(\theta_\varepsilon, X_t)\, dW_t \right) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, I), \text{ quand } \varepsilon \to 0, \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{r}_1(u_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{r}_2(u_\varepsilon) = 0, \qquad \text{en probabilité,} \end{cases}$$

d'où la famille $\left\{ P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta \right\}$ est uniformément LAN avec la matrice de normalisation $\varphi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I(\theta)^{-1/2}$.

■

Lemme 2.3 *Sous les conditions I) à IV) on a pour tout $R, C > 0$ et tout compact $\mathbb{k} \subset \Theta$*

$$\sup_{\theta \in \mathbb{k}} \sup_{|u_i| < R, i=1,2} |u_2 - u_1|^{-2m} \mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{1/2m}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/2m}(u_1) \right|^{2m} \leq C.$$

Preuve: On pose

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta + \varphi_\varepsilon(\theta) u_i, i = 1, 2, \quad \theta(l) = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) l, l \in [0,1], \\ \Delta S_t &= \varepsilon^{-1} [S_t(\theta_2, X_t) - S_t(\theta_1, X_t)], \qquad \text{et } h = \theta_2 - \theta_1. \end{aligned}$$

Soit $m > \dfrac{d}{2}$. Par un changement de la mesure on obtient l'égalité suivante

$$\mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{\frac{1}{2m}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{2m}}(u_1) \right|^{2m} = \mathbb{E}_{\theta_1} \left| L^{\frac{1}{2m}}(\theta_2, \theta_1; X) - 1 \right|^{2m},$$

en effet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{\frac{1}{2m}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{2m}}(u_1) \right|^{2m} &= \int_\Omega \left| \left(\frac{dP_{\theta+\varphi_\varepsilon(\theta)u_2}}{dP_\theta} \right)^{\frac{1}{2m}} - \left(\frac{dP_{\theta+\varphi_\varepsilon(\theta)u_1}}{dP_\theta} \right)^{\frac{1}{2m}} \right|^{2m} dP_\theta \\ &= \int_\Omega \left| \left(\frac{dP_{\theta_2}}{dP_\theta} \right)^{\frac{1}{2m}} - \left(\frac{dP_{\theta_1}}{dP_\theta} \right)^{\frac{1}{2m}} \right|^{2m} dP_\theta \\ &= \int_\Omega \left| \left(\frac{dP_{\theta_2}}{dP_{\theta_1}} \right)^{\frac{1}{2m}} \left(\frac{dP_{\theta_1}}{dP_\theta} \right)^{\frac{1}{2m}} - \left(\frac{dP_{\theta_1}}{dP_\theta} \right)^{\frac{1}{2m}} \right|^{2m} dP_\theta \\ &= \int_\Omega \frac{dP_{\theta_1}}{dP_\theta} \left| \left(\frac{dP_{\theta_2}}{dP_{\theta_1}} \right)^{\frac{1}{2m}} - 1 \right|^{2m} dP_\theta \\ &= \int_\Omega \left| \left(\frac{dP_{\theta_2}}{dP_{\theta_1}} \right)^{\frac{1}{2m}} - 1 \right|^{2m} dP_{\theta_1} \\ &= \mathbb{E}_{\theta_1} \left| L^{\frac{1}{2m}}(\theta_2, \theta_1; X) - 1 \right|^{2m}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
\ln L(\theta_2, \theta_1; X) &= \int_0^T \Delta S_t dW_t - \frac{1}{2} \|\Delta S\|^2 \\
&= \int_0^T \varepsilon^{-1} \left[S_t(\theta_2, X) - S_t(\theta_1, X)\right] dW_t - \frac{\varepsilon^{-2}}{2} \|S(\theta_2, X) - S(\theta_1, X)\|^2,
\end{aligned}
$$

or on a d'après (2.11)

$$
\begin{aligned}
S_t(\theta_2, X_t) - S_t(\theta_1, X_t) &= S_t(\theta_1 + (\theta_2 - \theta_1), X_t) - S_t(\theta_1, X_t) \\
&= S_t(\theta_1 + h, X_t) - S_t(\theta_1, X_t) \overset{(2.11)}{=} \int_0^1 \left\langle h, \dot{S}_t(\theta_1 + hl, X_t) \right\rangle dl \\
&= \int_0^1 \left\langle h, \dot{S}_t(\theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) l, X_t) \right\rangle dl = \int_0^1 \left\langle h, \dot{S}_t(\theta(l), X_t) \right\rangle dl
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\ln L(\theta_2, \theta_1; X) = \varepsilon^{-1} \int_0^T \int_0^1 \left\langle h, \dot{S}_t(\theta(l), X_t) \right\rangle dl dW_t - \varepsilon^{-1} \int_0^T \Delta S_t \int_0^1 \left\langle h, \dot{S}_t(\theta(l), X_t) \right\rangle dl dt
$$

par le théorème de Fubini

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon^{-1} \int_0^1 \int_0^T \left\langle h, \dot{S}_t(\theta(l), X_t) \right\rangle dW_t dl - \varepsilon^{-1} \int_0^1 \int_0^T \Delta S_t \left\langle h, \dot{S}_t(\theta(l), X_t) \right\rangle dt dl \\
&= \varepsilon^{-1} \int_0^1 \left\langle h, \int_0^T \dot{S}_t(\theta(l), X_t) dW_t - \int_0^T \Delta S_t \dot{S}_t(\theta(l), X_t) dt \right\rangle dl \\
&= 2m \int_0^1 \langle h, \psi(\theta(l)) \rangle dl
\end{aligned}
$$

où le vecteur $\psi(.)$ est défini dans cette dernière égalité tel que

$$
\psi(\theta(l)) = (2m\varepsilon)^{-1} \left[\int_0^T \dot{S}_t(\theta(l), X_t) dW_t - \int_0^T \Delta S_t \dot{S}_t(\theta(l), X_t) dt \right].
$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1}\left|L^{\frac{1}{2m}}\left(\theta_2,\theta_1;X\right)-1\right|^{2m} &= \mathbb{E}_{\theta_1}\left|\exp\left\{\int_0^1\left\langle h,\psi\left(\theta\left(l\right)\right)\right\rangle dl\right\}-1\right|^{2m} \\
&\le \mathbb{E}_{\theta_1}\left|\int_0^1\left\langle h,\psi\left(\theta\left(l\right)\right)\right\rangle dl\exp\left\{\int_0^1\left\langle h,\psi\left(\theta\left(v\right)\right)\right\rangle dv\right\}\right|^{2m}
\end{aligned}$$

car $\exp\left(x\right)-1\le x\exp\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$.

De plus par l'inégalité de Jensen

$$\begin{aligned}
&\le \int_0^1\mathbb{E}_{\theta_1}L\left(\theta_2,\theta_1;X\right)\left\langle h,\psi\left(\theta\left(l\right)\right)\right\rangle^{2m}dl \\
&= \int_0^1\left[\int_\Omega L\left(\theta_2,\theta_1;X\right)\left\langle h,\psi\left(\theta\left(l\right)\right)\right\rangle^{2m}dP_{\theta_1}\right]dl \\
&= \int_0^1\left[\int_\Omega \frac{dP_{\theta_2}}{dP_{\theta_1}}\left\langle h,\psi\left(\theta\left(l\right)\right)\right\rangle^{2m}dP_{\theta_1}\right]dl \\
&= \int_0^1\left[\int_\Omega \left\langle h,\psi\left(\theta\left(l\right)\right)\right\rangle^{2m}dP_{\theta_2}\right]dl \\
&= \int_0^1\mathbb{E}_{\theta_2}\left\langle h,\psi\left(\theta\left(l\right)\right)\right\rangle^{2m}dl \\
&= \left(2m\varepsilon\right)^{-2m}\int_0^1\mathbb{E}_{\theta_2}\left|\int_0^T\left\langle h,\dot{S}_t\left(\theta\left(l\right),X_t\right)\right\rangle dW_t\right|^{2m}dl \\
&\overset{par\ (1.3)}{\le} \left(2m\varepsilon\right)^{-2m}\left[m\left(2m-1\right)\right]^m T^{m-1}\int_0^1\mathbb{E}_{\theta_2}\int_0^T\left\langle h,\dot{S}_t\left(\theta\left(l\right),X_t\right)\right\rangle^{2m}dtdl
\end{aligned}$$

par l'inégalité de $Cauchy - Schwarz$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon^{-2m}\left(\frac{2m-1}{4m}\right)^{m} T^{m-1}\int_{0}^{1}\mathbb{E}_{\theta_2}\int_{0}^{T}\left|\dot{S}_t\left(\theta\left(l\right),X_t\right)\right|^{2m}|h|^{2m}\,dtdl \\
&= C\left(m,T\right)|h|^{2m}\int_{0}^{1}\mathbb{E}_{\theta_2}\left(\int_{0}^{T}\left|\dot{S}_t\left(\theta\left(l\right),X_t\right)\right|^{2m}dt\right)dl \\
&\leq C\left(m,T\right)|h|^{2m}\sup_{\theta,\theta'\in\Theta}\mathbb{E}_{\theta'}\left\|\left|\dot{S}\left(\theta,X\right)\right|^{m}\right\|^{2},
\end{aligned}$$

or $h=|\theta_2-\theta_1|=|\theta+\varphi_\varepsilon\left(\theta\right)u_2-\theta-\varphi_\varepsilon\left(\theta\right)u_1|=|\varphi_\varepsilon\left(\theta\right)\left(u_2-u_1\right)|\leq C_2\left|u_2-u_1\right|$, avec C_2 est la norme matricielle de $\varphi_\varepsilon\left(\theta\right)$.

En remplaçant dans l'inégalité précédente

$$\mathbb{E}_{\theta_1}\left|L^{\frac{1}{2m}}\left(\theta_2,\theta_1;X\right)-1\right|^{2m}\leq C\left(m,T\right)C_2^{2m}\left|u_2-u_1\right|^{2m}\sup_{\theta,\theta'\in\Theta}\mathbb{E}_{\theta'}\left\|\left|\dot{S}\left(\theta,X\right)\right|^{m}\right\|^{2}.$$

Pour terminer la démonstration on utilise la condition IV, on obtient donc

$$\mathbb{E}_{\theta}\left|Z_\varepsilon^{\frac{1}{2m}}\left(u_2\right)-Z_\varepsilon^{\frac{1}{2m}}\left(u_1\right)\right|^{2m}\leq C\left|u_2-u_1\right|^{2m},\qquad C>0$$

or on peut prendre le sup sur $\Bbbk$ et sur l'ensemble $\{u,\ tq\ \ |u|<R\}$ pour avoir le résultat souhaité

$$\sup_{\theta\in\Bbbk}\sup_{|u_i|<R,i=1,2}\left|u_2-u_1\right|^{-2m}\mathbb{E}_{\theta}\left|Z_\varepsilon^{\frac{1}{2m}}\left(u_2\right)-Z_\varepsilon^{\frac{1}{2m}}\left(u_1\right)\right|^{2m}\leq C,\qquad R,C>0.$$

■

Notons par **G** l'espace des fonctions $\{g\left(y\right),\ y\geq 0\}$ telles que

$$\lim_{y\to\infty}y^{N}e^{-g(y)}=0.$$

Lemme 2.4 *Sous les conditions $I)$ à $V)$, alors pour tout $p\in(0,1)$ et $\Bbbk\subset\Theta$ il existe une fonction $g\left(\Bbbk,p,u\right)=g\left(|u|\right)\in G$ telle que*

$$\sup_{\theta\in\Bbbk}\mathbb{E}_{\theta}Z_\varepsilon^{p}\left(u\right)\leq e^{-g(|u|)}.$$

Preuve: En utilisant l'inégalité élémentaire suivante

$$a^2 \geq b^2 - 2\left|b\left(a-b\right)\right|$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\left[S_t\left(\theta+u,X_t\right)-S_t\left(\theta,X_t\right)\right]^2 &\geq \left[S_t\left(\theta+u,x_t\right)-S_t\left(\theta,x_t\right)\right]^2-2\left|S_t\left(\theta+u,x_t\right)-S_t\left(\theta,x_t\right)\right|\times \\
&\quad \times\left|S_t\left(\theta+u,X_t\right)-S_t\left(\theta,X_t\right)-S_t\left(\theta+u,x_t\right)+S_t\left(\theta,x_t\right)\right| \\
&\geq \left[S_t\left(\theta+u,x_t\right)-S_t\left(\theta,x_t\right)\right]^2-2\left|S_t\left(\theta+u,x_t\right)-S_t\left(\theta,x_t\right)\right|\times \\
&\quad \times\left(\left|S_t\left(\theta+u,X_t\right)-S_t\left(\theta+u,x_t\right)\right|+\left|S_t\left(\theta,X_t\right)-S_t\left(\theta,x_t\right)\right|\right). \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Par la condition $II)$ quand $|u|\to 0$ on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T\left[S_t\left(\theta+u,x_t\right)-S_t\left(\theta,x_t\right)\right]^2 dt &= \int_0^T\left|\int_0^1\left\langle \dot{S}_t\left(\theta+lu,x_t\right),u\right\rangle dl\right|^2 dt \\
&= \int_0^T\left|\int_0^1\left\langle \dot{S}_t\left(\theta+lu,x_t\right)-\dot{S}_t\left(\theta,x_t\right),u\right\rangle dl+\left\langle \dot{S}_t\left(\theta,x_t\right),u\right\rangle\right|^2 dt \\
&= \int_0^T\left\langle \dot{S}_t\left(\theta,x_t\right),u\right\rangle^2 dt+\circ\left(|u|^2\right)
\end{aligned}$$

en effet

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^T\left|\int_0^1\left\langle \dot{S}_t\left(\theta+lu,x_t\right)-\dot{S}_t\left(\theta,x_t\right),u\right\rangle dl\right|^2 dt \leq |u|^2\int_0^T\int_0^1\left|\dot{S}_t\left(\theta+lu,x_t\right)-\dot{S}_t\left(\theta,x_t\right)\right|^2 dl dt \\
&\leq |u|^2\sup_{l_0\in[0,1]}\left\|\left|\dot{S}_t\left(\theta+l_0u,x_t\right)-\dot{S}_t\left(\theta,x_t\right)\right|\right\|^2
\end{aligned}$$

donc par $III)$ on a

$$\frac{A_1}{|u|^2}\leq\sup_{l_0\in[0,1]}\left\|\left|\dot{S}\left(\theta+l_0u,x\right)-\dot{S}\left(\theta,x\right)\right|\right\|^2\to 0,\ \text{quand }\ |u|\to 0,$$

aussi

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_0^T \left\langle \dot{S}_t(\theta, x_t), u \right\rangle \int_0^1 \left\langle \dot{S}_t(\theta + lu, x_t) - \dot{S}_t(\theta, x_t), u \right\rangle dl dt \\
&\leq \int_0^T |u|^2 \left| \dot{S}_t(\theta, x_t) \right| \left| \int_0^1 \dot{S}_t(\theta + lu, x_t) - \dot{S}_t(\theta, x_t) dl \right| dt \\
&\leq |u|^2 \left(\int_0^T \left| \dot{S}_t(\theta, x_t) \right|^2 dt \right)^{1/2} \sup_{l_0 \in [0,1]} \left(\int_0^T \left| \dot{S}_t(\theta + l_0 u, x_t) - \dot{S}_t(\theta, x_t) \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
&= |u|^2 \left\| \left| \dot{S}(\theta, x) \right| \right\| \sup_{l_0 \in [0,1]} \left\| \left| \dot{S}(\theta + l_0 u, x) - \dot{S}(\theta, x) \right| \right\|
\end{aligned}$$

alors

$$\frac{A_2}{|u|^2} \leq \left\| \left| \dot{S}(\theta, x) \right| \right\| \sup_{l_0 \in [0,1]} \left\| \left| \dot{S}(\theta + l_0 u, x) - \dot{S}(\theta, x) \right| \right\| \underset{|u| \to 0}{\rightarrow} 0$$

d'où $A_1 + A_2 = \circ \left(|u|^2 \right)$, et donc

$$\int_0^T [S_t(\theta + u, x) - S_t(\theta, x)]^2 dt \leq |u|^2 \left\| \left| \dot{S}(\theta, x) \right| \right\|^2 + \circ \left(|u|^2 \right) = |u|^2 \left(\left\| \left| \dot{S}(\theta, x) \right| \right\|^2 + \circ(1) \right).$$

De plus on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\langle \dot{S}_t(\theta, x_t), u \right\rangle^2 dt &= \int_0^T \left\langle u, \dot{S}_t(\theta, x_t) \right\rangle \left\langle \dot{S}_t(\theta, x_t), u \right\rangle dt = \int_0^T u^T \dot{S}_t(\theta, x_t) \dot{S}_t^T(\theta, x_t) u dt \\
&= \left[\int_0^T \dot{S}_t(\theta, x_t) \dot{S}_t^T(\theta, x_t) u dt \right]^T u = \langle I(\theta) u, u \rangle,
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{\langle I(\theta) u, u \rangle}{|u|^2} \geq \inf_\lambda \frac{\langle I(\theta) \lambda, \lambda \rangle}{|\lambda|^2} = \inf_{|\lambda| = 1} \langle I(\theta) \lambda, \lambda \rangle,$$

on trouve alors

$$\int_0^T [S_t(\theta+u,x_t)-S_t(\theta,x_t)]^2\,dt = \langle I(\theta)\,u,u\rangle + \circ\left(|u|^2\right) \geq |u|^2\left(\inf_{|\lambda|=1}\langle I(\theta)\,\lambda,\lambda\rangle + \circ(1)\right),$$

ce qui nous donne pour, tout $\theta \in \Bbbk$, l'encadrement suivant:

$$\kappa\,|u|^2 \leq \int_0^T [S_t(\theta+u,x_t)-S_t(\theta,x_t)]^2\,dt \leq A^2\,|u|^2\,, \tag{2.13}$$

avec $\kappa = \kappa(\Bbbk) > 0$ et $A > 0$.

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder on aura

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^T [S_t(\theta+u,x_t)-S_t(\theta,x_t)]\,[S_t(\theta,X_t)-S_t(\theta,x_t)]\,dt\right)^2\\
\leq\;& \int_0^T [S_t(\theta+u,x_t)-S_t(\theta,x_t)]^2\,dt\int_0^T [S_t(\theta,X_t)-S_t(\theta,x_t)]^2\,dt\\
\leq\;& A^2\,|u|^2\int_0^T [S_t(\theta,X_t)-S_t(\theta,x_t)]^2\,dt.
\end{aligned}$$

Par les conditions I, V et par le lemme (2.1) on obtient

$$\int_0^T [S_t(\theta,X_t)-S_t(\theta,x_t)]^2\,dt \leq C_1\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-x_t|^2 \leq C^2\varepsilon^2\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|^2\,, \qquad C; C_1 > 0,$$

d'où

$$\int_0^T [S_t(\theta+u,x_t)-S_t(\theta,x_t)]\,[S_t(\theta,X_t)-S_t(\theta,x_t)]\,dt \leq AC\,|u|\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\,. \tag{2.14}$$

Notons comme précédament $\Delta S_t = \varepsilon^{-1}\left[S_t\left(\theta+\varphi_\varepsilon\left(\theta\right)u, X_t\right) - S_t\left(\theta, X_t\right)\right]$ et utilisons à nouveau l'inégalité de Hölder $\forall p > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Z_\varepsilon^p\left(u\right)\right) &= \mathbb{E}\exp p\left\{\int_0^T \Delta S_t dB_t - \frac{1}{2}\left\|\Delta S\right\|^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\exp\left\{-\frac{p-q}{2}\left\|\Delta S\right\|^2\right\}\exp\left\{-\frac{q}{2}\left\|\Delta S\right\|^2 + p\int_0^T \Delta S_t dW_t\right\}, \qquad q\in(0,p) \\
&\leq \left[\mathbb{E}\exp\left\{-p_1\frac{p-q}{2}\left\|\Delta S\right\|^2\right\}\right]^{\frac{1}{p_1}}\left[\mathbb{E}\exp\left\{pp_2\int_0^T \Delta S_t dW_t - \frac{qp_2}{2}\left\|\Delta S\right\|^2\right\}\right]^{\frac{1}{p_2}},
\end{aligned}$$

où $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1$, $p_1>0$.

Choisissons q et p_2 tels que $p_2 = \frac{q}{p^2} > 1$, alors par (1.4)

$$\mathbb{E}\exp\left\{\frac{q}{p}\int_0^T \Delta S_t dW_t - \frac{1}{2}\left\|\frac{q}{p}\Delta S\right\|^2\right\} \leq 1,$$

et donc

$$\mathbb{E}\left(Z_\varepsilon^p\left(u\right)\right) \leq \left[\mathbb{E}\exp\left\{-\frac{q\left(p-q\right)}{2\left(q-p^2\right)}\left\|\Delta S\right\|^2\right\}\right]^{\frac{q-p^2}{q}}.$$

Notons par $\gamma = \frac{q(p-q)}{2(q-p^2)} > 0$, alors en vertu de (2.12) et (2.13)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\exp\left\{-\gamma\left\|\Delta S\right\|^2\right\} \overset{(2.12)}{\leq} \exp\left\{-\gamma\varepsilon^2\int_0^T\left[S_t\left(\theta+\varphi_\varepsilon\left(\theta\right)u, x_t\right) - S_t\left(\theta, x_t\right)\right]^2 dt\right\}\times \\
&\times\mathbb{E}\exp\left\{2\gamma\varepsilon^2\int_0^T\left(\left|S_t\left(\theta+\varphi_\varepsilon\left(\theta\right)u, X_t\right) - S_t\left(\theta+\varphi_\varepsilon\left(\theta\right)u, x_t\right)\right| + \right.\right. \\
&\left.+\left|S_t\left(\theta, X\right) - S_t\left(\theta, x_t\right)\right|\right)\left|S_t\left(\theta+\varphi_\varepsilon\left(\theta\right)u, x_t\right) - S_t\left(\theta, x_t\right)\right| dt\} \\
&\overset{(2.13)}{\leq} \exp\left\{-\gamma\kappa\left|I\left(\theta\right)^{-\frac{1}{2}}u\right|^2\right\}\mathbb{E}\exp\left\{4\gamma CA\left|u\right|\sup_{0\leq t\leq T}\left|W_t\right|\right\} \\
&\overset{(lemme\ 1.1)}{\leq} \exp\left\{-\gamma\kappa_1\left|u\right|^2\right\}\left\{1+4\gamma CA\left|u\right|\sqrt{8\pi T}\exp\left(8\gamma^2C^2A^2\left|u\right|^2T^2\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Prenons à présent q suffisament proche de p tel que

$$\gamma = \frac{\kappa_1}{16C^2A^2T^2}.$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(Z_\varepsilon^p\left(u\right)\right) \leq \exp\left(-\frac{\kappa_1}{2}\left|u\right|^2\right)\left(1+4\gamma CA\left|u\right|\sqrt{8\pi T}\right)^{\frac{q-p^2}{q}}$$

par l'inégalité $1+x \leq e^x$

$$\leq \exp\left(-\frac{\kappa_1}{2}\left|u\right|^2 + \left(\frac{q-p^2}{q}\right)4\gamma CA\left|u\right|\sqrt{8\pi T}\left|u\right|\right) = e^{-g(|u|)}$$

avec $g\left(y\right) = g\left(\Bbbk, p, y\right) = c_1y^2 - c_2y,\ c_1, c_2 > 0$, donc pour tout $N > 0$ on a $\lim\limits_{y\to\infty} y^N e^{-g(y)} = 0$. Alors on a bien $g\left(.\right) \in \mathbf{G}$, d'où le résultat. ■

La démonstration du théorème (2.2) est une vérification des hypothèses du théorème cité ci-dessous en se basant sur les trois lemmes précédents. Dans le cas régulier quand la famille $\left\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\right\}$ est LAN on a le résultat suivant:

Théorème 2.3 *Soit Θ un sous espace ouvert convexe de $\mathbb{R}^d$, et soient les fonctions $Z_\varepsilon\left(u\right)$ continues et possédant les propriétés suivantes:*

1) *Pour tout compact $\Bbbk \subset \Theta$*

(a) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sup\limits_{\theta\in\Theta} tr\varphi_\varepsilon\left(\theta\right)\varphi_\varepsilon\left(\theta\right)^T = 0;$

(b) *pour tout $N > 0$*

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\sup_{\theta\in\Theta}\sup_{u\in U_\varepsilon}\left|u\right|^N \mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(u\right) < \infty; \quad U_\varepsilon = \varphi_\varepsilon\left(\theta\right)^{-1}\left(\Theta - \theta\right),$$

(c) *pour tout $\alpha > d$,il existe $n > 0,\ B = B\left(\Bbbk\right)$ et $a = a\left(\Bbbk\right)$*

$$\sup_{\theta\in\Theta}\sup_{|u_i|<R, u_i\in U_\varepsilon, i=1,2}\left|u_2 - u_1\right|^{-\alpha}\mathbb{E}_\theta\left|Z_\varepsilon^{\frac{1}{n}}\left(u_2\right) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{n}}\left(u_1\right)\right|^n \leq B\left(1 + R^a\right),$$

2) *La famille* $\left\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\right\}$ *est uniformément asymptotiquement normale.*

Alors uniformément pour $\theta \in \Bbbk$, *l'estimateur de maximum de vraisemblance est:*

a) *consistant*

$$P_\theta - \lim_{\varepsilon \to 0} \hat{\theta}_\varepsilon = \theta,$$

b) *asymptotiquement normal*

$$\mathcal{L}_\theta \left\{\varphi_\varepsilon (\theta)^{-1} \left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\right)\right\} \Rightarrow \mathcal{N}(0, I),$$

c) *touts les moments de la v.a.*$\varphi_\varepsilon (\theta)^{-1} \left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\right)$ *convergent quand* $\varepsilon \to 0$ *vers les moments correspondants de* Δ *où* $\Delta = I(\theta)^{-1/2} \int_0^T \dot{S}_t (\theta, X_t)\, dWt.$

Preuve: La preuve est une vérification des conditions du Théorème (1.4) dans [9]. ■

Montrons maintenant le *théorème* 2.2

Preuve: Vérifions que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\theta \in \Theta} tr \varphi_\varepsilon (\theta) \varphi_\varepsilon (\theta)^T = 0,$$

on a

$$tr \varphi_\varepsilon (\theta) \varphi_\varepsilon (\theta)^T = tr \left[\varepsilon^2 I(\theta)^{-1/2} \left(I(\theta)^{-1/2}\right)^T\right] = \varepsilon^2 tr I(\theta)^{-1} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

D'autre part on a d'après le lemme (2.4)

$$|u|^N \mathbb{E}_\theta \left(Z_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(u)\right) \leq |u|^N e^{-g(|u|)} < \infty,$$

en effet $y \mapsto y^N e^{-g(y)}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ de plus on a

$$\begin{cases} y^N e^{-g(y)} \mid_{y=0} = 0 \\ \lim_{y \to \infty} y^N e^{-g(y)} = 0 \end{cases}$$

donc cette fonction est bornée indépendamment de p et de $\Bbbk$. Alors

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\ \sup_{\theta\in\Theta}\ \sup_{u\in U_\varepsilon} |u|^N\, \mathbb{E}_\theta\left(Z_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(u)\right) < \infty; \qquad U_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(\theta)^{-1}(\Theta-\theta).$$

Pour montrer la propriété (c) il suffit de prendre $n=\alpha=2m>d$, $a=0$ et $B=C(\Bbbk)=C$ dans le lemme (2.3), alors on trouve

$$\sup_{\theta\in\Theta}\ \sup_{|u_i|<R,u_i\in U_\varepsilon,i=1,2} |u_2-u_1|^{-\alpha}\, \mathbb{E}_\theta\left|Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_2)-Z_\varepsilon^{\frac{1}{m}}(u_1)\right|^m \leq B(1+R^a).$$

Il reste à montrer que la famille $\left\{P_\theta^{(\varepsilon)},\theta\in\Theta\right\}$ est uniformément asymptotiquement normale, or le lemme (2.2) nous donne ce résultat directement.

Alors les conditions du théorème (2.3) sont toutes vérifiées.

On conclut donc que l'emv est consistant, asymptotiquement normal et touts les moments de la v.a. $\varphi_\varepsilon(\theta)^{-1}\left(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta\right)$ convergent quand $\varepsilon\to 0$ vers les moments correspondants de Δ. ■

2.4 Estimateur de Bayes

2.4.1 Construction de l'estimateur de Bayes

La deuxième approche habituellement utilisée est l'approche bayesienne, et pour définir l'estimateur de Bayes on a besoin d'introduire la classe W, (cf. [1]) , des fonctions pertes $l(y)$, $y\in\mathbb{R}^d$ à valeurs réelles et vérifiant:

- $l(.)$ est définie positive sur $\mathbb{R}^d$, continue en 0, $l(0)=0$ et non identiquement nulle.
- $l(.)$ est symetrique i.e. $l(y)=l(-y)$.
- Les ensembles $\{y \mid l(y)<c\}$ sont convexes pour tout $c>0$.
- Admet un majorant exponentiel: $l(y)\leq\exp\left(\lambda|y|^2\right)$, pou tout $\lambda>0$, quand $|y|\to\infty$.

Dans cette approche on suppose que le paramètre inconnu θ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de densité à priori $\pi(y)$, $y\in\Theta$. L'estimateur de Bayes $\tilde{\theta}_\varepsilon$ associé à la fonction de risque $l(y) = |y|^p, p > 0$, est défini comme solution de l'équation:

$$\mathbb{E}\left(l\left(\tilde{\theta}_\varepsilon - \theta\right)\right) = \inf_{y \in \Theta} \mathbb{E}\left(l(\theta - y)\right),$$

autrement dit

$$\int_\Theta l\left(\tilde{\theta}_\varepsilon - \theta\right) p\left(\theta \mid X^\varepsilon\right) d\theta = \inf_{y \in \Theta} \int_\Theta l(y - \theta)\, p\left(\theta \mid X^\varepsilon\right) d\theta,$$

où $p(\theta \mid X^\varepsilon)$ est la densité à postériori de θ, étant donnée l'observation X^ε. On le note EB.

Dans le cas d'un risque quadratique $p = 2$, l'EB $\tilde{\theta}_\varepsilon$ est donné par:

$$\tilde{\theta}_\varepsilon = \mathbb{E}\left(\theta \mid X^\varepsilon\right) = \int_\Theta y p\left(y \mid X^\varepsilon\right) dy.$$

2.4.2 Comportement asymptotique de l'EB

Les propriétés asymptotiques de l'estimateur de Bayes $\tilde{\theta}_\varepsilon$ se démontrent de la même manière que celles de l'emv $\hat{\theta}_\varepsilon$ en utilisant les propriétés du processus $Z_{\varepsilon,\theta}$.

Théorème 2.4 *Supposons que les conditionds de I à V sont vérifiées mais uniquement avec $m \geq 1$ dans la condition IV, alors uniformément en $\theta \in \Bbbk \subset \Theta$ l'estimateur Bayesien $\tilde{\theta}_\varepsilon$ est*

1) *consistent*

$$P_\theta - \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{\theta}_\varepsilon = \theta,$$

2) *asymptotiquement normal*

$$\mathcal{L}_\theta\left\{\varepsilon^{-1} I(\theta)^{1/2}\left(\tilde{\theta}_\varepsilon - \theta\right)\right\} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \mathcal{N}(0, I),$$

3) *les moments d'ordre p convergents pour tout $p > 0$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\theta \in \Bbbk} \left|\mathbb{E}_\theta \left|I(\theta)^{1/2}\left(\tilde{\theta}_\varepsilon - \theta\right)\right|^p \varepsilon^{-p} - \mathbb{E}\left|\Delta\right|^p\right| = 0,$$

où I est la matrice identité $d \times d$ avec $\mathcal{L}\{\Delta\} \simeq \mathcal{N}(0, I)$.

Preuve: On démontre ce théorème par une simple vérification du théorème (1.7) dans [9]. ■

Chapitre 3

Exemple et Simulation

3.1 Introduction

Les processus stochastiques continus sont des outils largement employés dans divers domaines. En finance, par exemple, de nombreuses problématiques dans la modélisation de l'évolution des taux d'intérêt et cours d'actions amènent à la simulation des trajectoires de tels processus. Aujourd'hui, le développement de l'outil informatique motive les scientifiques pour mettre au point des schémas numériques pour la résolution approchée des équations différentielles stochastiques.

Dans ce chapitre nous simulons des trajectoires de processus de diffusion par la méthode d'Euler-Maruyama qui consiste à calculer une approximation de X_t par une chaîne de Mrkove sur une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$, (cf. [11], [6]), de plus nous allons illustrer le comportement asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance étudié dans le chapitre II dans le cadre des petites diffusions.

Pour l'analyse statistique des estimateurs nous utilisons le logiciel **R** à l'aide du package **Sim.DiffProc** (Simulation of Diffusion Processes) qui possède des possibilités pour explorer les données et illustrer le comportement de l'estimateurs quand le coefficient de diffusion ε tend vers zéro.

3.2 Exemple d'application

3.2.1 Processus de Ornstein-Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est la diffusion solution de l'équation différentielle stochastique (équation de **Langevin**) suivante

$$dX_t = -\theta X_t dt + \varepsilon dW_t, \tag{3.1}$$

où θ et ε sont des constantes strictement positives et W_t un processus de Wiener standard. On suppose de plus qu'à l'instant initiale on a $X_{t_0} = x_0$.

Notons que le processus est stationnaire seulement pour $\theta > 0$.

En posant

$$Y_t = X_t e^{\theta t}$$

et en appliquant la formule d'Itô à la fonction $f(t, x) = xe^{\theta t}$, on trouve

$$dY_t = \left(\theta X_t e^{\theta t} + \left(-\theta X_t e^{\theta t}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2.0\right) dt + \varepsilon e^{\theta t} dW_t$$

donc

$$dY_t = \varepsilon e^{\theta t} dW_t$$

sous forme intégrale

$$Y_t = Y_{t_0} + \varepsilon \int_{t_0}^{t} e^{\theta s} dW_s$$

en remplaçant Y_t par $X_t e^{\theta t}$ on obtient

$$X_t e^{\theta t} = X_{t_0} e^{\theta t_0} + \varepsilon \int_{t_0}^{t} e^{\theta s} dW_s$$

on en déduit la solution pour tout $t \geq t_0$,

$$X_t = X_{t_0} e^{-\theta(t-t_0)} + \varepsilon \int_{t_0}^{t} e^{-\theta(t-s)} dW_s.$$

En notant $x_0 = \mathbb{E}(X_{t_0})$, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck a pour moyenne

$$\mathbb{E}(X_t) = x_0 e^{-\theta(t-t_0)}.$$

En appliquant la formule d'Itô au processus $Z_t = X_t^2$, on trouve

$$dZ_t = -2\theta Z_t dt + \varepsilon^2 dt + 2\varepsilon dW_t,$$

en prenant la moyenne et en résolvant une équation différentielle ordinaire, on obtient

$$\mathbb{E}(Z_t) = \mathbb{E}\left(X_t^2\right) = \frac{\varepsilon^2}{2\theta}\left(1 - e^{-2\theta(t-t_0)}\right) + \mathbb{E}\left(X_{t_0}^2\right),$$

d'où la variance du processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$Var(X_t) = \mathbb{E}\left(X_t^2\right) - \mathbb{E}^2(X_t) = \frac{\varepsilon^2}{2\theta}\left(1 - e^{-2\theta(t-t_0)}\right).$$

On donne aussi la fonction de corrélation qui vaut

$$R(t,s) = \frac{\varepsilon^2}{2\theta} e^{-\theta|t-s|}.$$

3.2.2 Simulation numérique des trajectoires

Nous pouvons simuler une trajectoire de processus d'Ornstein-Uhlenbeck comme suit. On considère la subdivision de l'intervalle de temps $[t_0, T]$ suivante $t_0 < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} = T$, avec $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ et $X_{t_0} = x_0$, on a l'algorithme suivant (cf [11] Chapitre 3):

1. Générer une variable aléatoire Z de distribution gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.

2. incrémentation: $i = i + 1$.

3. $W_{t_i} = W_{t_{i-1}} + Z\sqrt{\Delta t}$.

4. $I_i = e^{-\theta(t_{i+1}-t_i)}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)$

5. $X_{t_i} = X_{t_0} e^{-\theta(t_{i-1}-t_0)} + \varepsilon \sum_{j=1}^{i} I_j$

6. Si $i \leq N+1$, réitérez à l'étape 1.

La fonction OU permet de simuler une seule trajectoire de X_t dans l'intervalle $[t_0, T]$ avec un pas $\Delta t = (T - t_0)/N$.

R>OU(N=1000, t0=0, T=10 ,x0=10, teta=0.05,epsilon=1)

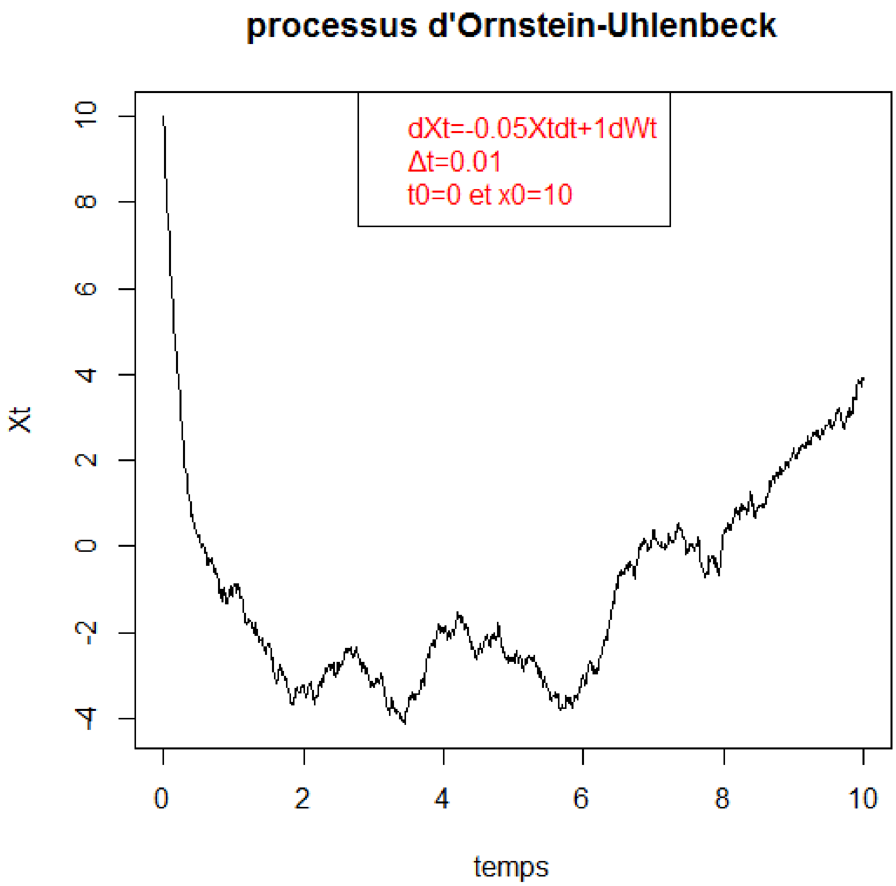

Figure 3.1 Trajectoire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0.05}$ et $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1}$.

On peut changer la valeur de ε pour voire l'effet du coefficient de diffusion sur la perturbation de la trajectoire. Prenons par exemple une valeur plus petite que 1:

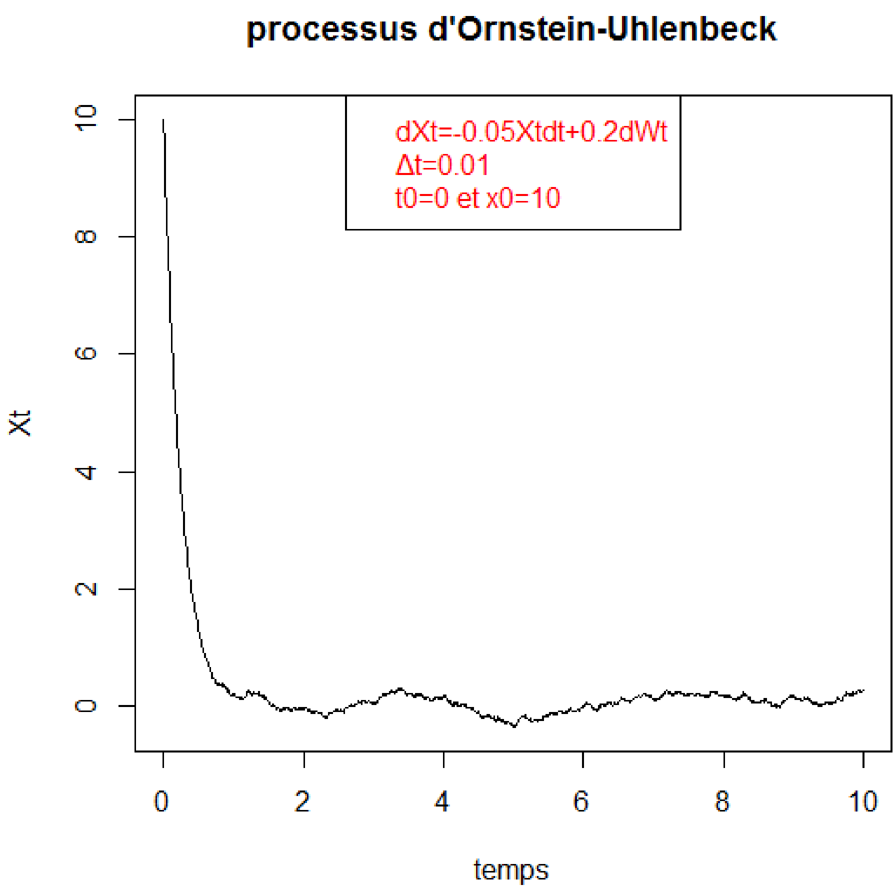

Figure 3.2 Trajectoire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec θ= **0.05** et $\boldsymbol{\varepsilon}$ = **0.2**.

On remarque que cette trajectoire est plus lisse que celle qui a été tracée avec $\varepsilon = 1$, et si on augmente de plus le coefficient de dérive θ on obtient un résultat beaucoup plus clair, par exemple $\theta = 2$:

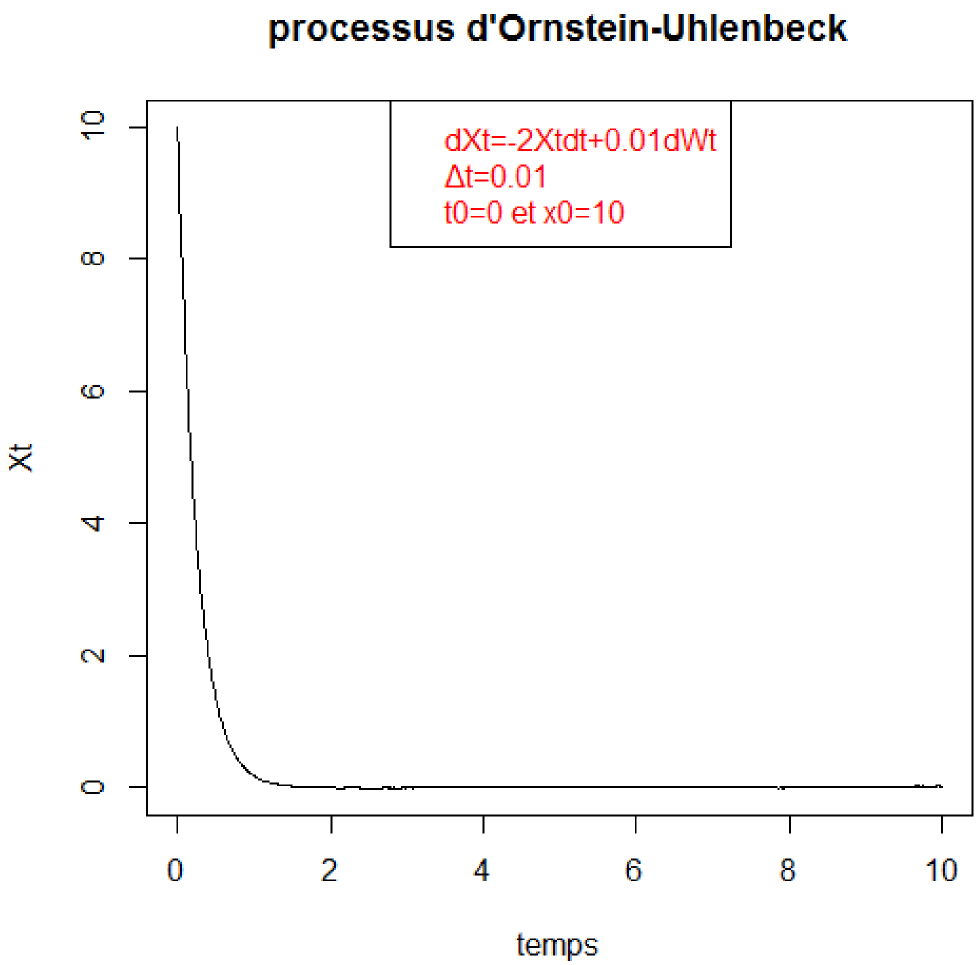

Figure 3.3 Trajectoire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{2}$ et $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0.01}$.

Interprétation:

Pour un ω fixé de manière aléatoire la simulation, moyennant le logiciel R, nous permet de mettre en évidence l'idée que la trajectoire de $X_t(\omega)$ est de plus en plus lisse "presque dérivable" quand $\varepsilon \to 0$ (réduction du perturbation) c'est à dire que la régularité de la trajectoire va de paire avec la réduction de la perturbation.

Ici le paramètre à estimer est le coefficient θ. On va utiliser la méthode du maximum du vraisemblance, ensuite illustrer le comportement de l'estimateur quand $\varepsilon \to 0$.

3.2.3 Information de Fisher

Rappelons que l'information de Fisher pour ce type de problème, où $\Theta \subset \mathbb{R}$, est donnée par

$$I(\theta) = \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial \theta} S_t(\theta, x_t)\right]^2 dt, \quad \theta \in \Theta$$

où x est la solution de l'équation différentielle déterministe associée à ce problème (lorsque $\varepsilon = 0$). Elle est définie par

$$\frac{dx_t}{dt} = -\theta x_t$$

qui est une équation différentielle ordinaire à variables séparables, on la résoud par intégration

$$\int_0^t \frac{dx_s}{x_s} = -\theta \int_0^t ds$$

donc

$$[\ln x_s]_0^t = -\theta [s]_0^t$$

on obtient alors

$$x_t = x_0 e^{-\theta t}, \; x_0 \neq 0.$$

Nous pouvons maintenant calculer l'information de Fisher à partir de cette solution. Ici $S_t(\theta, x_t) = -\theta x_t$, donc on a

$$I(\theta) = \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\theta x_0 e^{-\theta t}\right)\right]^2 dt = \int_0^T \left[x_0 e^{-\theta t}(t\theta - 1)\right]^2 dt,$$

et après une intégration par parties on trouve

$$I(\theta) = \frac{x_0^2}{4\theta}\left[1 - e^{-2\theta T}\left(1 + 2\theta^2 T^2 - 2\theta T\right)\right]$$

On peut aussi donner le rapport de vraisemblance associé à ce problème à l'aide de la formule

(2.9) pour deux valeurs distinctes du paramètre θ comme suit:

$$\frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X) = \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \left[-\theta_1 X_{t,\theta_1} + \theta_2 X_{t,\theta_2}\right] dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T \left[-\theta_1 X_{t,\theta_1} + \theta_2 X_{t,\theta_2}\right]^2 dt\right],\ \theta_1, \theta_2 \in \Theta$$

où X_{t,θ_1} (*resp.* X_{t,θ_2}) sont les processus solutions pour les valeurs du paramètre θ_1 (*resp.* θ_2).

3.2.4 Vérification des hypothèses de régularité

Pour que l'estimateur du maximum de vraisemblance ait les propriétés asymptotiques données dans le théorème (2.2) il faut que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck satisfasse les conditions I à V citées dans le Chapitre II:

I) La fonction $S_t(\theta, x_t)$ satisfait les conditions $\mathcal{L}$, en effet pour toute constante assez grande $C < \infty$ on a

$$\begin{cases} |-\theta x + \theta y| + 0 = \theta\,|x - y| \leq C\,|x - y| \\ |-\theta x| + \varepsilon = \theta\,|x| + \varepsilon \leq \max(\theta, \varepsilon)(|x| + 1) \leq C(|x| + 1) \\ X_0 = x_0 \text{ indépendante de la tribu } \sigma\{W_t, t \geq 0\}. \end{cases}$$

de plus la constante ne dépend pas du paramètre à estimer θ.

II) $S_t(\theta, x_t) = -\theta x_t$ est dérivable par rapport à θ et l'information de *Fisher* est strictement positive $\forall \theta \in \Theta$, car on a trouvé $I(r) = \frac{x_0^2}{4\theta}\left[1 - e^{-2rT}\left(1 + 2\theta^2 T^2 - 2\theta T\right)\right]$, et si on dérive par rapport à θ on obtient

$$I'(\theta) = \frac{x_0^2 T}{\theta} e^{-2\theta T}(1 - \theta T)^2,$$

qui est strictement positive sauf dans le point $\theta = \frac{1}{T}$ (un point d'inflexion), on en déduit que la fonction $I(.)$ est strictement croissante sur Θ. De plus $\lim\limits_{\theta \to 0} I(\theta) = 0$, donc pour tout $\theta > 0$ on a $I(\theta) > 0$. D'autre part on a $\lim\limits_{\theta \to \infty} I(\theta) = \dfrac{x_0^2}{4\theta} < \infty$, alors

$$\begin{cases} 0 < \inf\limits_{\theta \in \Theta} I(\theta) \\ \sup\limits_{\theta \in \Theta} I(\theta) < \infty \end{cases}$$

III) La fonction dérivée $\dfrac{\partial S_t}{\partial \theta}(\theta, x_t) = -x_t$ est uniformément continue.

IV) Soit $m > \dfrac{1}{2}$, on a alors

$$\mathbb{E}_\theta \left\| \left| \dot{S}(\theta, X) \right|^m \right\|^2 = \mathbb{E}_\theta \left\| |X|^m \right\|^2 = \mathbb{E}_\theta \int_0^T |X_t|^{2m} \, dt,$$

par *Fubini*

$$= \int_0^T \mathbb{E}_\theta \left(|X_t|^{2m} \right) dt$$

or $2m > 1$ donc par l'inégalité de *Jensen*

$$\leq \int_0^T |\mathbb{E}_\theta (X_t)|^{2m} \, dt = x_0 \int_0^T e^{-2m\theta(t-t_0)} dt = x_0 e^{2m\theta t_0} \int_0^T e^{-2m\theta t} dt < \infty,$$

il résulte que

$$\sup_{\theta, \theta_1 \in \Theta} \mathbb{E}_{\theta_1} \left\| \left| \dot{S}(\theta, X) \right|^m \right\|^2 < C, \quad où \;\; C > 0$$

V) Pour tout $\nu > 0$ et tout compact $\Bbbk \subset \Theta$ on a

$$\left\| -(\theta + u) x + \theta x \right\|^2 = \| u x \|^2 = u^2 \int_0^T x_t^2 dt > 0,$$

car si $\int_0^T x_t^2 dt = 0$ alors $x \equiv 0$. On en déduit que

$$\inf_{\theta \in \Bbbk} \; \inf_{u > \nu, \theta + u \in \Theta} \| S(\theta + u, x) - S(\theta, x) \| > 0.$$

Conclusion:

D'après ce qui précède le processus d'Ornstein-Uhlenbeck vérifie toutes les hypothèses de régularité, on conclut donc, en se basant sur le théorème (2.2) , que l'estimateur du maximum du vraisemblance est consistant, asymptotiquement normal et les moments d'ordre p de la variable alétoire $\sqrt{I(\theta)}\left(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\right)$ convergent pour tout $p > 0$ vers les moments correspondants de Δ quand $\varepsilon \to 0$, où $\Delta = \frac{1}{\sqrt{I(\theta)}} \int\limits_0^T (-X_t)\, dW_t$ avec $\mathcal{L}\{\Delta\} \simeq \mathcal{N}(0,1)$.

3.2.5 Simulation de la consistance de l'emv

Pour bien mettre en évidence le comportement asymptotique de l'emv pour cet exemple, nous abordons une simulation numérique. En fait le logiciel R suit des étapes pour calculer la valeur explixite de l'emv du paramètre inconnu θ :

- le logiciel génère des valeurs pour l'échantillon X_t en fonction du Δt (le pas) que nous précisons au préalable.

- il permet de calculer l'estimateur à partir d'un algorithme basé sur la formule suivante:

$$\hat{\theta} = -\frac{1}{\Delta t} \log\left[\sum (X_t X_{t-1}) / \sum X_{t-1}^2\right],$$

  qui est définie seulement si $\sum (X_t X_{t-1}) > 0$, (cf [2]) .

Pour pouvoir illustrer la consistance de l'estimateur du maximum du vraisemblance de θ on va choisir plusieurs valeurs du coefficient de diffusion ε et on enregistre les valeurs trouvées correspondantes de l'emv à l'aide de la commande suivante:

R> PEOU(X,0.01,starts=list(teta=1,epsilon=1),level=0.95).

On peut tracer un graphe des valeurs estimées de $\hat{\theta}$ en fonction de ε par une simple commande "plot" qui va nous donner la figure suivante:

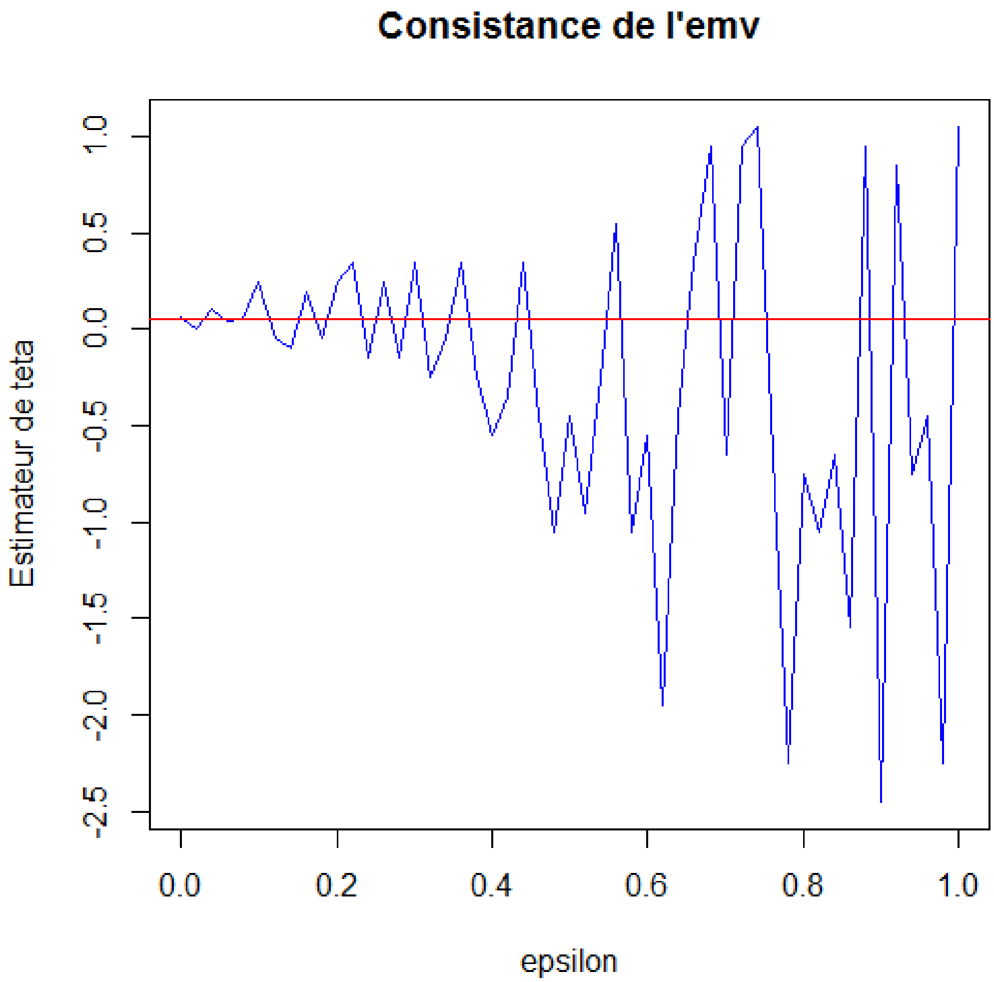

Figure 3.4 Le comportement de l'estimateur de θ quand $\varepsilon \rightarrow \mathbf{0}$.

Interprétation:

Nous remarquons des fluctuations récurrentes dues au mouvement brownien et qu'à partir d'un certain ordre de grandeur de ε ($\varepsilon < 0.02$) l'interaction du mouvement brownien diminue. Dans ce cas l'emv est d'autant plus proche de la vraie valeur de θ quand $\varepsilon \to 0$. Ceci confirme les résultats précédents obtenus théoriquement.

Conclusion

Dans ce travail nous avons abordé la théorie de l'estimation paramètrique dans les équations différentielles stochastiques dans le cadre des petites diffusions. Nous avons étudié l'estimateur du maximum du vraisemblance ainsi que l'estimateur de Bayes dans le cas régulier, alors nous constatons que sous certaines conditions ces deux estimateurs ont de bonnes propriétés asymptotiques.

Nous avons traité l'exemple du processus d'Ornstein-Uhlenbeck qui vérifie toutes les hypothèses de régularité, et pour bien mettre en évidence les résultats théoriques, le package Sim.DiffProc du logiciel R nous a permis de tracer d'abord quelques tréjectoires de ce processus pour différentes valeurs de θ et de ε avec un ω fixé, ensuite de calculer des valeurs de l'emv.

Nous concluons enfin qu'en tendant ε vers zéro (réduction de perturbation) nous obtenons une trajectoire plus lisse et un estimateur plus proche de la vraie valeur du paramètre θ.

Bibliographie

[1] **Benyahia Wahiba,** *Estimation paramétrique de la densité des retards dans un processus de diffusion,* Thèse de Doctorat en sciences Mthématiques, 2012.

[2] **Boukhetala Kamal-Guidoum Arsalane,** *Package 'Sim.DiffProc',* June 5, 2012.

[3] **Bishwal P.N Jaya**, *Parameter Estimation in Stochastic Differential equations,* Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina at Charlotte, January 2007.

[4] **Campillo Fabien**, *Processus de Diffusion,* DEA de Mathématiques Appliquées, Université de Provence, 1996.

[5] **Favetto Benjamin**, *Observations Bruitées d'une Diffusion, Estimation, Filtrage, Applications,* Thèse de Doctorat en Mthématiques, Ecole Doctorale Mthématiques Paris centre, 2010.

[6] **Guidoum Arselane,** *Conception d'un Pro Logiciel Interactif sous R pour la simulation de processus de Diffusion,* Mémoire de Magister en Probabilités & Statistiques, Université de Houari Boumedienne, 2012.

[7] **Ibragimov I.A-Hasminski R.Z** : *Statistical Estimation: Asymptotic theory.* Springer, New York, 1981.

[8] **Jeanblanc Monique**, *Cours de calcul stochastique.*

[9] **Kutoyants Yu** : *Identification of Dynamical Systems with small noise.* Kluwer, Dordrecht, 1994

[10] **Pierre Priouret**, *Introduction aux processus de diffusion,* Mémoire de Master en Probabilités & Application, Université de Pierre et Marie Curie, 2004/2005.

[11] **Zitouni Mehiaddine**, *Discrétisations et résolutions numériques des équations différentielles stochastiques rétrogrades,* Mémoire de Magister en Mathématiques, Modèles stochastiques, Université M'hamed Bouguera Boumerdes, 2009/2010.

Résumé:

Nous nous sommes penchés dans ce mémoire sur l'estimation paramétrique dans les EDS, et pour cela nous avons introduit dans le premier chapitre des notions et des résultats fondamentaux. Ensuite nous avons entamé dans le second chapitre la construction et les propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum du vraisemblance ainsi que l'estimateur Bayesien. Dans le troisième chapitre nous avons traité un exemple illustratif "processus d'*Ornstein-Uhlenbeck*" en montrant qu'il vérifie les conditions de régularité et en réalisant une simulation numérique des trajectoires pour ce processus ainsi que la consistance de l'emv quand le coefficient de diffusion tend vers zéro.

Abstract:

We examined in this memory the parametric estimation in the SDE, and for that we introduced in the first chapter concepts and basic results. Then we started in the second chapter the construction and the asymptotic properties of the maximum likelihood estimator thus the Bayesian estimator. In the third chapter we treated an illustrative example "*Ornstein-Uhlenbeck process*" by showing that it satisfies the conditions of regularity and performing a numerical simulation of trajectories for this process thus the consistency of the MLE when the diffusion coefficient tends to zero.

ملخص:

درسنا في هذه المذكرة التخمينات المتغيرة في المعادلات التفاضلية العشوائية و على هذا الصدد قدمنا في الفصل الأول المفاهيم و النتائج الأساسية. ثم باشرنا في الفصل الثاني في التركيب و الخصائص المقاربة للمخمن الأقصى للاحتمال كما بالنسبة لمخمن النظرية الافتراضية (البايسياني). أما في الفصل الثالث عالجنا مثال إيحائي مبينين انه يحقق شروط الانتظام مع رسم بعض مساراته و بيان يبرز اتساق المخمن عندما يؤول معامل الانتشار إلى الصفر.