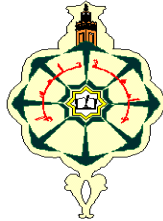


# Thèse

*Présentée à*

**L'UNIVERSITE ABOU-BAKR BELKAÏD – TLEMCCEN**



*Pour obtenir le grade de*

**Docteur en Sciences Physiques**

**Option : Physique Electronique et Modélisation**

**Par**

Melle Lassouani Fatiha

## **Modélisation des Systèmes Physiques Non-linéaires par la Dérivation Optimale**

**Devant le jury**

**Président**

Bouguima Sidi Mohamed

Professeur à l'Université Abou-Bakr Belkaid – Tlemcen

**Directeur de Thèse**

Benouaz Tayeb

Professeur à l'Université Abou-Bakr Belkaid – Tlemcen

**Examineurs**

Bouslous Hamadi

Professeur à l'université Caddy Ayad-Marrakech

Jean Pierre Leca

Professeur à l'Université Paris1 Panthéon-Sorbonne

Merad Abdelkrim

Professeur à l'Université Abou-Bakr Belkaid – Tlemcen

Bekkouche Sidi Mohamed Amine

Maître de Recherche « A », à l'URAER Ghardaïa

# *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A mes très chers parents,*

*Qui m'ont appris la tolérance, l'esprit d'ouverture, l'amour du travail et la soif des connaissances.*

*Au cours de mes études ils ont toujours été là pour m'encourager et me motiver*

*A mon cher mari, qui m'a soutenu et encouragé tout le long de ce travail*

*A mes frères et sœurs ainsi que leurs petites familles*

*A mes beaux parents*

*A ma belle famille*

*A tous ceux qui me sont chers*

*À tous les membres de l'Equipe App. Et Stab. des Syst. N. L. du laboratoire d'Automatique de l'Université de Tlemcen.*

*Fatiha*

# *Remerciements*

Les travaux qui font l'objet de cette thèse ont été réalisés au sein de l'équipe App. Et Stab. des Syst. N. L. du Laboratoire d'Automatique de l'Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen, sous la direction du Professeur Tayeb BENOUAZ.

Je tiens à lui exprimer particulièrement ma gratitude, c'est bien lui qui a dirigé cette thèse avec une disponibilité de tous les instants ; il a guidé mes travaux avec beaucoup de patience tout le long de la préparation de cette thèse.

Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde et respectueuse gratitude pour la clarté de son enseignement, les conseils judicieux et le soutien constant qu'il m'a prodigué au cours de l'élaboration de ce travail.

Je remercie vivement,

Monsieur le Professeur S.M. Bouguima, Professeur à l'Université de Tlemcen, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury.

Je remercie vivement,

Monsieur J. P. Leca, Professeur à l'Université Paris1 Panthéon-Sorbonne

Monsieur H. Bouslous, Professeur à l'université de Marrakech,

Monsieur A.Merad, Professeur à l'universitaire de Tlemcen,

Monsieur S.M.A. Bekkouche, Maitre de recherche « A » à l'UREAR de Ghardaïa

Pour l'honneur qu'ils me font d'examiner ces travaux.

A tous les membres du laboratoire.

A tous ceux qui m'ont aidé, par une grande collaboration ou par une tendre parole.

*Mille Merci,*

*Fatima*

# Table des Matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>4</b>
0.1 Note historique . . . . .	4
0.1.1 Position du problème. . . . .	5
0.2 Contribution . . . . .	8
<b>1 Généralités et rappels</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction . . . . .	11
1.2 Rappels sur la Dérivation Optimale . . . . .	11
1.2.1 Algorithme de la procédure . . . . .	14
1.2.2 La dérivée optimale dans le cas scalaire . . . . .	16
1.2.3 Quelques propriétés de la dérivée optimale . . . . .	17
1.3 Problématique . . . . .	18
<b>2 Relation entre la dérivée optimale et: (i) la linéarisation classique,(ii) la stabilité asymptotique</b>	<b>21</b>
2.1 Relation entre la dérivée optimale et la linéarisation classique . . . . .	21
2.1.1 Introduction . . . . .	21
2.1.2 Relation entre la dérivée optimale et la linéarisation classique en 0	22
2.2 Relation entre la dérivée optimale et la stabilité asymptotique . . . . .	27
2.2.1 Cas scalaire . . . . .	29
2.2.2 Cas Vectoriel . . . . .	30

2.2.3	Calcul de la trace de $\tilde{A}$ . . . . .	31
2.3	Conclusion . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Application de la dérivation optimale pour l'étude des modèles physiques non linéaires issus de l'électronique</b>	<b>37</b>
3.1	Introduction . . . . .	37
3.2	Modèle physique non linéaire issu de l'électronique . . . . .	38
3.2.1	Détermination des points d'équilibres . . . . .	40
3.2.2	Application du critère de Routh Hurwitz . . . . .	40
3.2.3	Application de la procédure de dérivation optimale . . . . .	44
3.2.4	Comparaison . . . . .	56
3.3	Comparaison entre la Dérivation Optimale et la Linéarisation Classique	56
<b>4</b>	<b>Application de la dérivation optimale pour l'étude des modèles non linéaires issus de l'écologie</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction . . . . .	63
4.2	Présentation du modèle . . . . .	64
4.2.1	Les points d'équilibre du modèle et les valeurs propres correspondantes . . . . .	65
4.2.2	Différents cas étudiés selon la variation des paramètres du modèle	67
4.3	Etude de la stabilité du modèle au point $(0, 0)$ par la méthode de la dérivée optimale . . . . .	69
4.3.1	Etude de quelques cas précédents par la dérivée optimale . . . . .	70
4.4	Application du modèle à la société canadienne . . . . .	78
4.5	Conclusion . . . . .	85
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>88</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>91</b>

# **INTRODUCTION GENERALE**

# Introduction

## 0.1 Note historique

L'étude des équations différentielles est un domaine mathématique qui historiquement a fait l'objet de nombreuses recherches [1], [2], [3], [4], [7], ..., et reste toujours un sujet d'actualité puisqu'il touche certains domaines comme la mécanique, les sciences physiques et plus récemment la biologie, l'électronique, la mécanique, spécialités où de nombreux "modèles" conduisent à des équations du même type. Il faut savoir que la plupart de ces équations sont globalement de nature non-linéaire. La dénomination "non-linéaire" rassemble des systèmes extrêmement divers ayant peu de points communs dans leur comportement. Il en résulte qu'il n'existe pas, jusqu'à présent, de théorie d'ensemble des équations non-linéaires. Parmi ces problèmes non-linéaires, une classe importante est modélisée par les équations différentielles ordinaires non-linéaires de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (0.1)$$

De nombreux travaux ont été consacrés à ce sujet, différents généralement par la motivation de l'auteur (Mécanique, Géométrie, Physique, Biomathématiques). Une liste exhaustive des travaux portant sur cette classe d'équations comprendrait des centaines d'articles et livres et déborderait largement sur le siècle passé. Nous nous bornerons à citer les ouvrages que nous avons utilisés dans notre travail: Coddington-Levinson (1955), Hale (1969, 1971), Rouche-Mawhin (1973), Pontriaguine (1975), Reinhart (1975), Sibony-Mardon (1988), Demailly (1991).

### 0.1.1 Position du problème.

Dans l'étude des équations différentielles ordinaires non-linéaires, les méthodes de linéarisation jouent un rôle important. Si beaucoup de systèmes peuvent admettre un domaine de comportement linéaire, la linéarité est toujours une approximation de la réalité. L'approximation la plus classique est celle déterminée par la dérivée au sens de Fréchet de l'équation non-linéaire.

S'agissant de l'étude du comportement des solutions d'une équation non-linéaire autour d'un point singulier, la linéarisation classique ne permet pas de répondre, par exemple, dans les cas où la fonction n'est pas assez régulière et celui où elle est nulle. Pour mieux situer le problème, nous allons considérer brièvement les exemples suivants [13], [14].

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - \sin(|y|) \\ \frac{dy}{dt} = -y - \sin(|x|) \end{cases}, (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \quad (0.2)$$

Ce système comporte une non-linéarité de type valeur absolue, donc non différentiable en zéro.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{x^4}{x^2 + y^2} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{y^4}{x^2 + y^2} \end{cases}, (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \quad (0.3)$$

La dérivée étant nulle au point  $(0,0)$ , on ne peut déduire le comportement de la solution de l'équation non-linéaire de celle de la linéarisation en ce point.

S'agissant de l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre, la principale méthode est de considérer l'équation linéaire obtenue par dérivation au sens de Fréchet en ce point de la fonction non-linéaire définissant l'équation différentielle, c'est à dire

$$\frac{dx}{dt} = DF(\text{Point d'équilibre}), x(0) = x_0.$$



L'équation ainsi obtenue a le même comportement que l'équation non-linéaire dans le cas hyperbolique, quand les valeurs propres ne rencontrent pas l'axe des imaginaires . Il y a au moins quatre écueils importants à la bonne utilisation de cette méthode:

1) Impossibilité de situer les valeurs propres par rapport à l'axe des imaginaires, en particulier si une ou plusieurs valeurs propres sont proches de cet axe.

2) Si l'équilibre est un centre pour l'équation linéaire, c'est à dire, s'il y a des valeurs propres imaginaires ou si 0 est valeur propre. Le comportement de la solution de l'équation différentielle ordinaire non-linéaire au voisinage d'un tel point peut être très varié. C'est le cas de l'exemple (0.2) , car le système admet une valeur propre double nulle.

3) Si la fonction n'est pas assez régulière au voisinage du point stationnaire. Dans ce cas, on ne peut pas en général calculer la dérivée au sens de Fréchet. Cela peut arriver par exemple si la fonction est seulement localement lipschitzienne, voir exemple (0.3) .

4) Parfois, dans le cas où le système linéarisé présente un noeud et quand la non-linéarité n'est pas assez petite. Le problème est posé par le fait que dans ce cas en général, les courbes intégrales d'un champ de vecteurs quelconque, au voisinage d'un point singulier ne ressemblent pas toujours à celles du système qui lui est associé [16]. Pour voir plus clair, considérons l'exemple suivant [13].

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - \frac{2y}{\ln(x^2 + y^2)} \\ \frac{dy}{dt} = -y - \frac{2x}{\ln(x^2 + y^2)} \end{cases}, (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \quad (0.4)$$

sur le disque unité ouvert  $x^2 + y^2 < 1$ . On vérifie que l'origine est un point singulier et le système linéaire associé s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases}, (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \quad (0.5)$$

Celui-ci présente un noeud stable ( $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ), et l'espace propre est de dimension 2, alors que l'analyse des courbes intégrales du système non linéaire montre qu'il présente

un foyer stable.

Tous les problèmes que nous venons d'évoquer justifient amplement à nos yeux l'introduction et l'utilisation d'autres techniques, où méthodes de calculs pour l'étude du comportement des solutions ainsi que la synthèse de la stabilité des équations différentielles ordinaires non-linéaires.

Une méthode de linéarisation dite "optimale" basée sur le principe de moindres contraintes de Gauss a été introduite par Vujanovic, initialement pour l'étude des vibrations non-linéaires [17]. Elle a été appliquée à l'étude de la non-linéarité dans le cas de transfert de chaleur [18]. Récemment, elle a été utilisée par Jordan et al. [19] à l'analyse de systèmes non-linéaires régissant les régimes transitoires de circuits électroniques ainsi que la linéarisation d'équations d'état [20].

Le but recherché était d'améliorer la linéarisation, par rapport à celle donnée par la dérivée de Fréchet au point d'équilibre, en proposant l'application de la linéarisation optimale autour de la solution de l'équation non-linéaire, le principe étant de minimiser l'écart au sens des moindres carrés entre l'équation non-linéaire et l'équation linéaire, c'est à dire la quantité

$$\varepsilon(t) = F(x(t)) - Ax(t)$$

le long de la solution de l'équation  $A = DF(0)$ .

Il s'agit de l'étude de comportement des solutions d'une équation non linéaire autour d'un point singulier, la linéarisation classique ne permet pas de répondre dans les cas où la fonction définissant l'équation n'est pas assez régulière. Il s'agit en fait d'une approximation globale, par opposition à la perturbation non linéaire d'une équation linéaire, qui se distingue de l'approximation linéaire classique au voisinage d'un point d'équilibre.

## 0.2 Contribution

Les travaux concernant la dérivation optimale ont été mis oeuvre par Benouaz-Arino (1994, 1995, 2000). Les applications ont touché plusieurs domaines, la Mécanique, l'Electricité, l'Electronique., etc.

Pour la suite, les travaux concernant cet outil scientifique (dérivation optimale) ont pu être confortés par d'autres nouvelles publications (principalement sur la relation entre celle-ci et la linéarisation classique (voir Benouaz-Bohner 2007) et la stabilité asymptotique (Benouaz-Bohner-Chikhaoui 2009).

Tout naturellement, ces travaux ont été étendus aux problèmes physiques non linéaires issus d'autres domaines tels que l'électronique, l'écologie ou l'épidémiologie,).

Notre but est de progresser dans l'étude de la relation entre la dérivation optimale et la linéarisation classique.

Dans le cas scalaire, le problème à été réglé; pour le cas vectoriel, le but visé est de substituer à la dérivée de Frechet une autre notion de dérivée susceptible de fournir les mêmes services que celle-ci quand elle est inutilisable, mais pouvant aller loin, en particulier pour les problèmes non réguliers.

Sur le plan théorique, cela nécessite un profond investissement de plusieurs mathématiciens, la mise en oeuvre numérique vise notamment à utiliser au mieux les progrès faits sur le plan informatique.

Elle est poursuivie actuellement en collaboration avec des informaticiens pour le développement d'un logiciel, permettant de donner des informations sur la nature de la stabilité des modèles physiques issus de l'électronique, la mécanique, l'écologie ou l'épidémiologie.

La thèse est structurée selon le plan suivant:

*Dans le premier chapitre*, on présente les concepts généraux de la dérivation optimale, ainsi que ses différentes propriétés. Aussi la problématique est ainsi posée: comment peut-on modéliser les systèmes non linéaires issus de l'électronique, l'écologie ou l'épidémiologie, en utilisant l'outil offert par la dérivée optimale.

*Le deuxième chapitre*, présente deux aspects très importants de la dérivation optimale,

à savoir, la relation avec la linéarisation de Fréchet (linéarisation classique) d'un part, d'autre part avec la stabilité asymptotique où on est arrivé à des résultats plus importants.

*Dans le chapitre trois*, on présente une application comportant la résolution du problème posé en commençant par la modélisation de deux systèmes physiques non linéaires issus de l'électronique.

*Enfin, le chapitre quatre* est dévolu à un autre domaine non linéaire issu de l'écologie à savoir les systèmes ratio dépendants.

Les travaux présentés ont fait l'objet de plusieurs articles et communications dans des revues internationales . Il y a lieu de citer "*Study of the Nonlinear Physical Systems by Optimal Derivative. Applications*" dans IJCSI, un deuxième "*Application of the optimal derivative to the study of a ratio-dependent model describing the evolution of HIV in Canada*" a été publié dans "Advances in Dynamical Systems and Applications"; des résultats préliminaires ont fait l'objet d'une communication dans une conférence internationale: "Conference on Computational and Mathematical Population Dynamics" CMPD3, 2010, Bordeaux, France. l'intitulé de la communication "*Study of the stability of a ratio-dependent eco-epidemiology model of the salton sea using the optimal derivative*".

# Chapitre I

## Généralités et rappels

# Chapitre 1

## Généralités et rappels

### 1.1 Introduction

Ce premier chapitre est réservé à la présentation de la technique de linéarisation introduite par Benouaz et Arino appelée "dérivée optimale", ainsi que ses propriétés principales. Celle-ci est vue comme une alternative à la dérivée au sens de Fréchet, indispensable dans le cas d'équations comportant des fonctions non régulières et en général non dérivables.

### 1.2 Rappels sur la Dérivation Optimale

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle ordinaire est une tâche presque triviale, si la fonction  $F$ ; qui définit l'équation est suffisamment régulière au voisinage de l'équilibre et, si la linéarisation en ce point est hyperbolique. Dans ce cas, on sait que l'équation est équivalente à l'équation linéarisée, en ce sens, qu'il existe un difféomorphisme local qui transforme les trajectoires voisines du point d'équilibre en celles voisines de zéro de l'équation linéaire. Par contre, la tâche est toute autre en l'absence de régularité ou si le point d'équilibre est un centre. Concentrons nous sur le cas non régulier. Imaginons même le cas où seul l'équilibre est non régulier. Dans ce cas, on ne peut pas dériver l'équation et on ne peut pas donc étudier l'équation linéarisée.

Une question naturelle se pose alors: y a-t-il d'autres moyens d'associer à l'équation non linéaire, une équation linéaire dont le comportement asymptotique soit le même?

Les problèmes que nous allons évoquer montre que la linéarisation classique ne permet pas de répondre au problème de la stabilité.

**Exemple:**

*Cas où la fonction n'est pas différentiable*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + \sin(|x|) \\ \frac{dy}{dt} = -y + \sin(|x|) \end{cases}, (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \quad (1.1)$$

Ce système comporte une non-linéarité de type valeur absolue, donc non différentiable en zéro.

Dans le but d'améliorer la linéarisation par rapport aux techniques existantes, une nouvelle méthode de linéarisation, appelée dérivation optimale introduite par Benouaz et Arino,[12],[13],[15],[22]. Il s'agit en fait d'une approximation globale, par opposition à la perturbation non linéaire d'une équation linéaire, qui se distingue de l'approximation linéaire classique au voisinage d'un point d'équilibre. L'approche suivie est de type optimisation au sens des moindres carrés.

S'agissant de l'étude de comportement des solutions d'une équation non linéaire autour d'un point singulier, la linéarisation classique ne permet pas de répondre dans les cas suivants:

- 1- Si  $DF(0)$  n'existe pas (cas où la fonction non linéaire définissant une équation non régulière et donc non différentiable).
- 2- Si  $DF(0)$  est stable, mais non pas asymptotiquement stable.

On considère l'équation différentielle ordinaire non linéaire de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

$x \in R^n$ ,  $F$  est définie dans un certain ouvert  $\Omega$  à valeurs dans  $R^n$ , avec les hypothèses suivantes:

H1)  $F(0) = 0$ .

H2) Le spectre  $\sigma(DF(x))$  est contenu dans l'ensemble  $\{z : \text{Re}z < 0\}$  pour tout  $x \neq 0$  dans un voisinage de 0, où  $DF(x)$  existe.

H3)  $F$  est continue, Lipschitzienne, de constante de Lipschitz  $\gamma$ .

Le problème qu'on pose est de trouver une équation différentielle ordinaire linéaire de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{A}x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

La méthode consiste à déterminer une application linéaire de la forme qui approche l'équation non linéaire dans les mêmes conditions initiales. Elle est basée sur la minimisation au sens des moindres carrées de l'écart  $\varepsilon(t)$  entre l'équation non linéaire  $F(x(t))$  et l'équation linéaire  $Ax(t)$ , soit:

$$\varepsilon(t) = F(x(t)) - \tilde{A}x(t). \quad (1.4)$$

Pour ce faire, on considère la fonctionnelle suivante:

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt. \quad (1.5)$$

La minimisation de celle-ci le long d'une solution donnée, permet de construire une procédure itérative, permettant de déterminer une application linéaire définie comme étant la dérivée optimale de l'équation différentielle ordinaire non linéaire, qui démarre avec la linéarisation par dérivation au sens de Fréchet  $DF(x)$  calculée en  $x_0$  si celle-ci existe en  $x_0$ .



En introduisant la fonction  $\Gamma$  définie par:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \quad (1.6)$$

la matrice optimale  $\tilde{A}$  s'écrit alors:

$$\tilde{A} = \left[ \int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1} \quad (1.7)$$

où  $\tilde{A}$  est définie et unique à condition que  $\Gamma(x)$  soit inversible.

### 1.2.1 Algorithme de la procédure

Considérons le système non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

#### Première étape

Calcul de  $A_0 = DF(x_0)$ .

#### Deuxième étape

Calcul de  $A_1$  à partir de la solution de l'équation:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_0 y \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y(t)) - Ay(t)\|^2 dt \quad (1.10)$$

$A_1$  est déterminée de manière unique par la formule:

$$A_1 = \left[ \int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1} \quad (1.11)$$

Où  $x$  est la solution de l'équation. On voit ainsi que, mis-à part la matrice initiale, les matrices déterminées par la procédure ne sont pas les matrices Jacobiennes de  $F$  en un point donné.

### Troisième étape

Pour calculer  $A_j$ , à partir de  $A_{j-1}$ , on doit d'abord résoudre:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = [A_{j-1}]y \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Soit  $y_j(t)$  la solution de l'équation.

La minimisation de la fonctionnelle

$$G_j(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y_j(t)) - Ay_j(t)\|^2 dt \quad (1.13)$$

conduit à  $A_j$ .

On suppose que  $\Gamma(y_j)$  est inversible.

$$A_j \Gamma(y_j) = \int_0^{+\infty} [F(y_j)] [y_j]^T dt. \quad (1.14)$$

$A_j$  s'écrit:

$$A_j = \left[ \int_0^{+\infty} [F(y_j)] [y_j]^T dt \right] [\Gamma(y_j)]^{-1}. \quad (1.15)$$

Si la suite  $A_j$  converge, alors la limite  $\tilde{A}$  est appelée la dérivée optimale de  $F$  en  $x_0$ .  
de [12], [13], [14], et [15].

### 1.2.2 La dérivée optimale dans le cas scalaire

Considérons une équation différentielle scalaire non linéaire:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

avec  $x \in R, f: R \rightarrow R$

Le problème est d'approcher par une équation différentielle linéaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{a}x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.17)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$G(a) = \int_0^{+\infty} |f(x(t)) - ax(t)|^2 dt. \quad (1.18)$$

Dans ce cas, les hypothèses sur  $f$  sont les suivantes:

- i)  $f(0) = 0$ .
- ii)  $f'(x) < 0$ , en tout point où  $f'$  existe dans l'intervalle  $]-\alpha, \alpha[$  avec  $\alpha > 0$ .
- iii)  $f$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le calcul se fait d'une manière analogue à celle du cas vectoriel. On commence par le calcul de  $a_0 = f'(x_0)$  puis on calcule  $a_1$  en résolvant le système:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_0 x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$a_1$  est donnée par (1.19) en substituant  $F$  par  $f$ :

$$a_1 = \frac{\int_0^{x_0} f(x(t)) x(t) dt}{\int_0^{x_0} x^2(t) dt} \frac{1}{x_0} \quad (1.19)$$

en changeant la variable  $t$  par  $x(t) = \exp(a_0 t) x_0$ , il vient:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\int_0^{x_0} f(x) dx}{\int_0^{x_0} x dx} \\ &= \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \end{aligned} \quad (1.20)$$

Où  $a_1$  ne dépend pas de  $a_0$ ; par conséquent, la procédure de la dérivation optimale converge au premier pas, c'est-à-dire:

$$\tilde{a} = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \quad (1.21)$$

### 1.2.3 Quelques propriétés de la dérivée optimale

**Cas où l'application est linéaire** Si  $F$  est linéaire et le spectre  $\sigma(F)$  est contenu dans le plan complexe à partie réelle strictement négative, la procédure donne alors  $F$  à la première itération:

$$\tilde{A} = F \quad (1.22)$$

On peut donc affirmer que la dérivée optimale d'un système linéaire est le système lui-même.

**Cas où  $F$  est une somme de termes linéaires et non linéaires** Considérons un système général d'équations non linéaires avec une non linéarité de la forme:

$$F(x) = Mx + \hat{F}(x), \quad x(0) = x_0 \quad (1.23)$$

où  $M$  désigne la partie linéaire; le calcul de la matrice  $A_1$  donne:

$$A_1 = \left[ \int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x(t))]^{-1}. \quad (1.24)$$

qui peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} A_1 &= M + \left[ \int_0^{+\infty} \left[ \widehat{F}(x(t)) \right] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x(t))]^{-1} \\ &= M + \widehat{A}_1 \end{aligned} \quad (1.25)$$

d'une manière générale, pour l'itération  $j$ :

$$A_j = M + \widehat{A}_j \quad (1.26)$$

avec

$$\widehat{A}_j = \left[ \int_0^{+\infty} \left[ \widehat{F}(x_j(t)) \right] [x_j(t)]^T dt \right] [\Gamma(x_j(t))]^{-1} \quad (1.27)$$

Si la composante  $f_k$  de  $F$  est linéaire,  $\widehat{f}_k$  est alors nulle, la  $k^{i\grave{e}me}$  ligne de la matrice optimale  $A_j$  est égale à  $\widehat{f}_k$  [22], [23], [24], [25].

### 1.3 Problématique

Les équations différentielles ordinaires sont un outil mathématique principal pour la description du comportement qualitatif et quantitatif des circuits électroniques.

La plupart de ces circuits sont constitués de composants électroniques à caractéristiques non linéaires (diode, transistors, etc). L'ensemble de toutes les équations de Kirchoff du circuit, combinées avec les relations constitutives correspondant aux caractéristiques des éléments peut être représenté par un système d'équations différentielles ordinaires.

Le problème qui se pose dans ce cas, est de trouver la meilleure technique permettant d'analyser ces circuits, sans pour autant, occulter certaines de leurs propriétés qualitatives.

Notre but aussi est de montrer que, si on utilise la procédure de dérivation optimale en tenant compte de ses propriétés pour des systèmes non linéaires issus de l'électronique et de l'écologie, on peut améliorer les résultats de l'approximation proposée.

Concernant les systèmes Ratio- dépendants, leur particularité mathématique importante est que pour une grande partie de ces systèmes, l'origine est un point d'équilibre compliqué non-analytique. Il n'est pas possible d'analyser par la méthode traditionnelle de linéarisation son comportement au voisinage de l'origine. Cet obstacle peut nuire sérieusement à la bonne compréhension du système. Il y a des méthodes qui permettent de contourner en partie cet obstacle, notamment celle de la valeur propre non linéaire. Leur mise en oeuvre est toutefois fort délicate et suppose une bonne connaissance de l'analyse fonctionnelle, sans commune mesure avec les techniques de développement de Taylor que l'on utilise dans le cas de points critiques réguliers.

Un des objectifs, de cette thèse est l'étude des problèmes liés à la réponse ratio-dépendante et de voir dans quelle mesure la technique de dérivation optimale pourrait contribuer à traiter de la stabilité à l'origine.

Cette étude montre qu'il existe de réelles perspectives pour l'utilisation de cette notion de dérivée en tant qu'alternative dans le cas de problèmes non réguliers pour l'étude du comportement des solutions ainsi que celui de la stabilité des modèles ratio dépendants.

## **DEUXIEME CHAPITRE**

**Relation entre la dérivée optimale et**

- La linéarisation classique**
- La stabilité asymptotique**

# Chapitre 2

## Relation entre la dérivée optimale et: (i) la linéarisation classique, (ii) la stabilité asymptotique

### 2.1 Relation entre la dérivée optimale et la linéarisation classique

#### 2.1.1 Introduction

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle ordinaire non linéaire est un problème presque trivial si la fonction  $F$  qui définit l'équation non linéaire est suffisamment régulière au voisinage de ce point et si sa linéarisation en ce point est hyperbolique. Dans ce cas, nous savons que l'équation non linéaire est équivalente à l'équation linéarisée, dans le sens où il existe un difféomorphisme local qui transforme les trajectoires voisines du point d'équilibre à ceux voisins de zéro de l'équation linéaire. D'autre part, le problème est tout autre lorsque la fonction non linéaire est non régulière où le point d'équilibre est un centre.

Prenons le cas non régulier. Imaginons le cas où le point d'équilibre est non régulier.



Dans ce cas, nous ne pouvons pas dériver la fonction non linéaire et par conséquent on ne peut pas étudier l'équation linéarisée. Une question naturelle se pose alors: Est-il possible d'associer une autre équation linéaire à l'équation non linéaire qui a le même comportement asymptotique.

## 2.1.2 Relation entre la dérivée optimale et la linéarisation classique en 0

### Le cas scalaire

Considérons une équation différentielle scalaire non linéaire:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $x \in R, f: R \longrightarrow R$

Le problème est d'approcher par une équation différentielle linéaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{a}x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$G(a) = \int_0^{+\infty} |f(x(t)) - ax(t)|^2 dt. \quad (2.3)$$

Dans ce cas, les hypothèses sur  $f$  sont les suivantes:

- i)  $f(0) = 0$ .
- ii)  $f'(x) < 0$ , en tout point où  $f'$  existe dans l'intervalle  $]-\alpha, \alpha[$  avec  $\alpha > 0$ .
- iii)  $f$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le calcul se fait d'une manière analogue à celle du cas vectoriel. On commence par le

calcul de  $a_0 = f'(x_0)$  puis on calcule  $a_1$  en résolvant le système:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_0 x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$a_1$  est donnée par (2.4) en substituant  $F$  par  $f$ :

$$a_1 = \frac{\int_0^{x_0} f(x(t)) x(t) dt}{\int_0^{x_0} x^2(t) dt} \frac{1}{x_0} \quad (2.4)$$

en changeant la variable  $t$  par  $x(t) = \exp(a_0 t) x_0$ , il vient:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\int_0^{x_0} f(x) dx}{\int_0^{x_0} x dx} \\ &= \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

Où  $a_1$  ne dépend pas de  $a_0$ ; par conséquent, la procédure de la dérivation optimale converge au premier pas, c'est-à-dire:

$$\tilde{a} = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \quad (2.6)$$

Nous rappelons que  $\tilde{a}(x_0)$  est une fonction de Lyapunov [21] pour le problème non linéaire (2.1). Le cas scalaire est très intéressant dans le sens que nous pouvons écrire la dérivée optimale en fonction de la linéarisation classique de  $f$  en 0 (si  $f'$  existe en 0), de sorte qu'il est possible de trouver une limite quand  $x_0 \rightarrow 0$ , à savoir  $\tilde{a}(x_0)$ , même si la dérivée de  $f$  en 0 n'existe pas. L'importance du résultat réside dans la possibilité de l'utilisation de  $\tilde{a}(x_0)$  pour la description du comportement de la solution et pour l'étude de la stabilité au voisinage de 0 lorsque la dérivée de ce point n'existe pas.

### Cas où la dérivée de f en 0 existe

Si f est continue et si la dérivée de f en 0 existe, alors il est connu que  $\tilde{a}(x_0)$  peut-être écrite sous la forme suivante[22]:

$$\tilde{a}(x_0) = f'(O) + \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} z\varepsilon(z)dz \quad (2.7)$$

où

$$\varepsilon(z) = \frac{f(z)}{z} - f'(O) \quad (2.8)$$

et  $x_0 \rightarrow \text{Olim} = f'(O)$ .

Cette relation montre que les deux quantités  $\tilde{a}(x_0)$  et  $f'(O)$  sont presque égales à la limite quand  $x_0$  tend vers 0.

### Cas où f est analytique en 0

Supposons maintenant que f est analytique en 0, c'est à dire

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (2.9)$$

Ensuite, il est possible de donner une extension de  $\tilde{a}(x_0)$  semblable à l'expansion de Taylor de f au voisinage de 0. Pour cela, nous utilisons la relation (2.6) et remplacer f(z) par l'expression donnée par la relation (2.9) de telle sorte que

$$\begin{aligned} \tilde{a}_r(x_0) &= \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!} x_0^{n-1} \quad (2.10) \\ &= f'(0) + \frac{1}{3} x_0 f'(0) + \dots + \frac{2}{(n+1)!} x_0^{n-1} f^{(n)}(0) + \dots \end{aligned}$$

où cette formule tient dans l'intervalle de convergence de la série de Taylor en 0. Généralement, si f est de classe  $C^k$  avec  $k \in \mathbb{N}$  au voisinage de 0 et  $f(0) = 0$ , alors  $\tilde{a}$  est de classe

$C^{k-1}$ , et nous obtenons:

$$\tilde{a}^{(j)}(0) = \frac{2}{(j+1)} x_0^{j-1} f^{(j)}(0), \quad 0 \leq j \leq k-1 \quad (2.11)$$

### Cas où $f$ n'est pas régulière en 0

Nous considérons maintenant le cas non régulier, et plus particulièrement le cas où  $f$  est seulement non différentiable en 0. Ecrire  $f(z)$  sous la forme

$$f(z) = -zg(z) \quad (2.12)$$

La relation (2.6) devient:

$$\tilde{a}(x_0) = -\frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} zg(z) dz \quad (2.13)$$

La fonction choisie

$$g_r(z) = p(|\ln z|^r) \quad (2.14)$$

Où  $p$  est une fonction positive bornée périodique de période 1 avec  $\bar{p} = \int_0^1 p(z) dz > 0$ , est non différentiable en 0. La relation (2.13) est écrite pour  $r = 1$  et  $0 < x_0 < 1$  comme

$$\tilde{a}(x_0) = -\frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} zp(|\ln z|) dz$$

Pour tous  $\alpha \in (0, 1)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\alpha x_0) &= -\frac{2}{\alpha^2 x_0^2} \int_0^{\alpha x_0} zp(-\ln z) dz \\ &= -\frac{2}{\alpha^2 x_0^2} \int_0^{\alpha x_0} \alpha^2 zp(-\ln \alpha - \ln z) dz \\ &= -\frac{2}{x_0^2} \int_0^{\alpha x_0} zp(-\ln \alpha - \ln z) dz \end{aligned}$$

Donc, en particulier, si  $\ln \alpha = -1$ , c'est à dire,  $\alpha = e^{-1}$ , alors  $\tilde{a}(\frac{x_0}{e}) = \tilde{a}(x_0)$ . Dans ce cas,  $\tilde{a}(x_0)$  n'a pas de limite quand  $x_0 \rightarrow 0^+$ . Dans le cas où  $r > 1$ , nous obtenons:

$$\tilde{a}_r(x_0) = -2 \int_0^1 zp((-\ln x_0 - \ln z)^r dz \quad (2.15)$$

Considérons maintenant la relation

$$\tilde{a}_r(x_0) = -\frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} u g_r(u) du \quad (2.16)$$

où  $g_r(u) = p(|\ln u|^r)$ . Notez que  $g_r(u)$  est non différentiable en 0. Dans ce cas, nous allons montrer que la dérivée optimale (2.16) peut exister même si la dérivée de la fonction  $g_r(u)$  à 0 n'existe pas.

$\tilde{a}_r(x_0) \rightarrow -\bar{p}$  quand  $x_0 \rightarrow 0$  pour chaque  $r > 1$ .

### cas vectoriel

Supposons que  $A_j$  est donnée par:

$$A_j = \left( \int_0^\infty [F(e^{tA_{j-1}}x_0)] [e^{tA_{j-1}}x_0]^T dt \right) \left( \int_0^\infty [e^{tA_{j-1}}x_0] [e^{tA_{j-1}}x_0]^T dt \right)^{-1}$$

Cette matrice converge vers la matrice optimale et la dérivée  $DF(0)$  de  $F$  en 0 existe.

Dans ce cas, nous pouvons écrire:

$$F(x) = DF(0)x + o(|x|) \quad (2.17)$$

Remplaçons la relation (2.17) dans (1.7) et en utilisant les propriétés de la dérivée optimale nous trouvons:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left[ \int_0^\infty [DF(0)x(t) + o(|x(t)|)] [x(t)]^T dt \right] \left[ \int_0^\infty [x(t)] [x(t)]^T dt \right]^{-1} \\ &= DF(0) \left[ \int_0^\infty [x(t)] [x(t)]^T dt \right] \left[ \int_0^\infty [x(t)] [x(t)]^T dt \right]^{-1} + \left[ \int_0^\infty [o(|x(t)|)] [x(t)]^T dt \right] \\ &\quad \left[ \int_0^\infty [x(t)] [x(t)]^T dt \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$= DF(0) + \left[ \int_0^\infty [o(|x(t)|)] [x(t)]^T \right] \left[ \int_0^\infty [x(t)] [x(t)]^T dt \right]^{-1}$$

$$\text{Où } \left[ \int_0^\infty [o(|x(t)|)] [x(t)]^T \right] \left[ \int_0^\infty [x(t)] [x(t)]^T dt \right]^{-1} = o(1)$$

C'est à dire, une quantité qui tend vers 0 lorsque  $x_0 \rightarrow 0$ , en supposant que  $x$  est de l'ordre de  $x_0$ [23],[27],[26].

## 2.2 Relation entre la dérivée optimale et la stabilité asymptotique

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle ordinaire non linéaire de la forme

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x(0) = x_0 \tag{2.18}$$

où  $x \in IR^n$ . est une tâche presque triviale si la fonction  $F$  qui définit l'équation est suffisamment régulière, et si sa linéarisation au point d'équilibre est hyperbolique (si aucune valeur propre ne rencontre l'axe imaginaire). Dans ce cas, on sait que l'équation est équivalente à l'équation linéarisée, en ce sens qu'il existe un difféomorphisme local qui transforme les trajectoires voisines du point d'équilibre en celles voisines du point d'équilibre de l'équation linéaire. Par contre si la situation n'est pas hyperbolique, cas d'un centre où une valeur propre est nulle, la détermination de la stabilité devient plus délicate, et le comportement réel du système est déterminé par le terme non linéaire de haut degré négligé. La question qui se pose est de savoir si les orbites nées dans un voisinage suffisamment petit d'un point d'équilibre, resteront à proximité de ce point et si les courbes intégrales du champ de vecteurs d'un système non linéaire, ressemblent toujours à celles du système linéaire qui lui est associée.

Nous avons consacré notre travail à l'étude de la relation entre la méthode de dérivation optimale et la stabilité asymptotique, en particulier, à l'étude de la stabilité d'une

équation différentielle ordinaire non linéaire, dont la linéarisation classique obtenue par dérivation au sens de Fréchet, présente un centre, c'est-à-dire, des valeurs propres purement imaginaires.

### **Idée du problème**

L'idée proposée est basée sur la méthode d'approximation de la dérivée optimale qui est une sorte d'une linéarisation globale contrairement à la perturbation non-linéaire d'une équation linéaire, qui se distingue de l'équation linéaire classique au voisinage d'un point stationnaire. L'approche suivie est basée sur la minimisation au sens des moindres carrés.

Nous examinons, dans ce qui suit, le lien entre la notion de fonction de Lyapunov ou plus généralement la stabilité d'un point d'équilibre et les propriétés de la dérivée optimale en ce point. Dans cet ordre, nous considérons l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = Mx + G(x), \quad x(0) = x_0 \quad (2.19)$$

où  $M$  est une matrice dont les valeurs propres sont égales à  $\pm i$ .

$F = (f_1, f_2)$  est une fonction définie sur un certain ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $(0, 0)$ , avec les hypothèses suivantes:

*H1)*  $F(0) = 0$ .

*H2)* Le spectre  $\sigma(DF(x))$  est contenu dans l'ensemble  $\{z : \text{Re}z < 0\}$  pour tout  $x \neq 0$ , dans un voisinage de 0, où  $DF(x)$  existe.

*H3)*  $F$  est localement Lipschitzienne.

*H4)*  $M$  est une matrice dont les valeurs propres sont égales à  $\pm i$ .

*H5)*  $G$  est de classe  $C^1$ .

On se palce dans le cas où  $G$  est une fonction qui vérifie

$$G(x) = -\Phi(\|x\|)x + G_3(x) \quad (2.20)$$

$$\Phi(\|x\|) = o(\|x\|)$$

$G_3$  est une fonction de l'ordre de  $O(\|x\|^3)$ .

En particulier, on a  $G(0) = 0$ , et  $DG(0) = 0$ .

Pour illustrer d'avantage la relation entre la dérivée optimale et l'équation non linéaire, nous examinons un exemple qui est de la forme (2.26) dans lequel la linéarisation en utilisant la jacobienne associée à une équation non linéaire n'a que des valeurs propres de partie réelle strictement négative au voisinage de 0 (sauf en  $x = 0$ ), et la solution ne tend pas vers 0. Il n'y a pas de résultat théorique qui pourrait déterminer la nature de la stabilité de l'origine dans un tel cas. L'exemple étudié montre que le comportement dépend de l'équation non linéaire. La procédure de dérivée optimale peut détecter les équations pour lesquelles il y a stabilité.

### **La dérivée optimale et la stabilité asymptotique**

Bien que les critères de stabilité par linéarisation soient clairement définis et rigoureusement justifiés, la linéarisation classique est parfois tombée en défaut car elle suppose que la matrice jacobienne au point d'équilibre existe. Toutefois, cette hypothèse n'est pas toujours vraie. Envisageons par exemple un système non linéaire avec une fonction de type valeur absolue tel que la non-linéarité n'est pas dérivable au voisinage du point d'équilibre. La linéarisation classique donne une condition nécessaire mais non suffisante, car elle ne permet pas l'étude de stabilité en présence de valeurs propres purement imaginaires. La recherche d'une fonction de Lyapunov elle-même constitue un sujet sensible car elle est basée en général sur l'expérience et la chance.

#### **2.2.1 Cas scalaire**

##### **Remarque 1**

La dérivée optimale obtenue dans le cas scalaire



$$\tilde{a}(x_0) = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \quad (2.21)$$

permet de construire une fonction de Lyapunov pour l'équation non linéaire de la forme

$$v(x) = x^2 \tilde{a}(x). \quad (2.22)$$

Le cas scalaire est très intéressant dans le sens où on peut écrire la dérivée optimale en fonction de la linéarisation classique de  $f$  en 0 (si  $f'$  existe en 0).

## 2.2.2 Cas Vectoriel

Pour mieux illustrer le lien qui peut exister entre la dérivée optimale et l'équation non linéaire, on va présenter un exemple dans lequel la jacobienne du champ linéaire associée à l'équation non linéaire a un spectre à partie réelle strictement négative au voisinage de 0, sauf en  $x = 0$ , et les solutions ne tendent pas vers 0.

Il n'existe pas de résultat théorique permettant de conclure à partir de cette hypothèse sur la nature de la stabilité de l'origine.

### Exemple

considérons l'exemple suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -xg(x) \\ \frac{dy}{dt} = -|x|^n y + |x|^{n-1} \end{cases} \quad (2.23)$$

$n \geq 2$  et  $g(x) > 0$ . Si  $y \rightarrow 0$ , alors  $\dot{y} > 0$ , et si  $y(0) > 0$ , alors  $y(t) > 0$ .

La jacobienne du champ linéaire associé à l'équation (2.30) s'écrit, pour  $n = 2$  et  $g(x) =$

$$\frac{x^2}{2}$$

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{3x^2}{2} & 0 \\ a(x, y) & -|x|^n \end{bmatrix}$$

matrice dont le déterminant est positif  $\det(DF(x)) > 0$ , et la trace est négative  $tr(DF(x)) < 0$ . On en conclut que le spectre de la jacobienne associée à l'équation non-linéaire est à partie réelle strictement négative, donc asymptotiquement stable sauf en  $x = 0$ .

Le calcul de la dérivée optimale donne au premier pas avec  $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.340938 & 0.227282 \\ 0.909119 & -0.1704017 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

dont les valeurs sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.65595 \\ \lambda_2 = 0.314995. \end{cases}$$

La dérivée optimale appliquée à cet exemple, donne au premier pas une matrice avec une valeur propre  $> 0$  et une valeur propre  $< 0$ . La conclusion obtenue par utilisation de la dérivée optimale est donc conforme au résultat observé.

Cet exemple tend à illustrer le fait que le résultat dépend de l'équation. La procédure de dérivée optimale permet de détecter celles des équations pour lesquelles il y a stabilité.

### 2.2.3 Calcul de la trace de $\tilde{A}$

Nous allons considérer l'équation suivante

$F(x) = Mx + G(x)$ ,  $x(0) = x_0$  où

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Les valeurs propres de  $M$  sont égales à  $\pm i$ .

$x \in \mathbb{R}^2$ ,  $G(x) = a\Phi(\|x\|)x$  avec  $\Phi(z) > 0$   $z > 0$  telle que  $\Phi(\|x\|) = o(\|x\|)$ .

On fixe  $x_0 \neq 0$  et on définit dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , l'application  $\varphi : A \longrightarrow \varphi(A)$  telle que

$$\varphi(A) = \left[ \int_0^{+\infty} F(e^{tA}x_0) [e^{tA}x_0]^T dt \right] [\Gamma(A)]^{-1} \quad (2.25)$$

$$= M + \left[ \int_0^{+\infty} G(e^{tA}x_0) [e^{tA}x_0]^T dt \right] [\Gamma(A)]^{-1}. \quad (2.26)$$

On pose

$$r(A) = \left[ \int_0^{+\infty} G(e^{tA}x_0) [e^{tA}x_0]^T dt \right] [\Gamma(A)]^{-1} \quad (2.27)$$

avec

$$\Gamma(A) = \int_0^{+\infty} [e^{tA}x_0] [e^{tA}x_0]^T dt. \quad (2.28)$$

Maintenant, on construit l'approximation  $A_{j+1} = \varphi(A_j)$ , avec

$$A_{j+1} = \varphi(A_j) = M + r(A_j) \quad (2.29)$$

La matrice initiale  $A_0$  étant  $A_0 = DF(x_0)$ , on suppose que  $G$  à été choisi tel que  $\sigma(A_0)$  soit très proche de celui de  $M$ . On choisit  $x_0$  voisin de 0 pour que  $r(A_0)$  soit très petit dans un voisinage de  $x_0$ .  $e_0^{tA_0}x_0$  tend exponentiellement vers 0 quand  $t \longrightarrow +\infty$ , et  $\Gamma(A_0)$  est définie positive.

En posant  $r(A)$  sous la forme (2.55), on peut construire la suite d'approximation  $A_{j+1} =$

$\varphi(A_j)$ , il vient que

$$A_{j+1} = M + r(A_j) \quad (2.30)$$

### Théorème

Sous les hypothèses de la présente section, si  $G$  est aussi petit que nécessaire et  $DG$  est uniformément borné, alors

$$\operatorname{sgn} \left( \operatorname{trace} \left( \tilde{A} \right) \right) = \operatorname{sgn} (a) \quad (2.31)$$

### Preuve

Le calcul de la trace de  $\tilde{A}$  donne

$$\operatorname{tr} (A_{j+1}) = \operatorname{tr} \left( M + \left[ \int_0^{+\infty} G (e^{tA_j} x_0) (e^{tA_j} x_0)^T dt \right] [\Gamma (A_j)]^{-1} \right) \quad (2.32)$$

$$= \operatorname{tr} (M) + \operatorname{tr} \left( \left[ \int_0^{+\infty} G (e^{tA_j} x_0) (e^{tA_j} x_0)^T dt \right] [\Gamma (A_j)]^{-1} \right), \quad (2.33)$$

or  $\operatorname{tr} (M) = 0$ , il s'ensuit que

$$\operatorname{tr} (A_{j+1}) = \operatorname{tr} \left( \left[ \int_0^{+\infty} G (e^{tA_j} x_0) (e^{tA_j} x_0)^T dt \right] [\Gamma (A_j)]^{-1} \right). \quad (2.34)$$

En vertu de la propriété  $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ , il vient

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} (A_{j+1}) &= \int_0^{+\infty} \operatorname{tr} \left( [\Gamma (A_j)]^{-1} \left[ G (e^{tA_j} x_0) (e^{tA_j} x_0)^T \right] \right) dt. \\ &= \int_0^{+\infty} \operatorname{tr} \left( ([\Gamma (A_j)]^{-1} G (e^{tA_0} x_0)) (e^{tA_j} x_0)^T \right) dt. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Sachant que  $([\Gamma (A_j)]^{-1} G (e^{tA_j} X_0)) = C$  est un vecteur colonne et  $((e^{tA_j} X_0)^T) = L$  est un vecteur ligne, et en tenant compte de  $\operatorname{tr}(CL) = \operatorname{tr}(LC) = LC$ , nous pouvons écrire

$$\operatorname{tr} (A_{j+1}) = \int_0^{+\infty} (e^{tA_j} x_0)^T [\Gamma (A_j)]^{-1} G (e^{tA_j} x_0) dt \quad (2.36)$$

Dans le cas ou  $G(x) = a\Phi(\|X\|)$  alors

$$tr(A_{j+1}) = \int_0^{+\infty} (e^{tA_j} x_0)^T [\Gamma(A_j)]^{-1} (a\Phi(\|e^{tA_j} x_0\|) (e^{tA_j} x_0)) dt \quad (2.37)$$

$$= a \int_0^{+\infty} \Phi(\|e^{tA_j} x_0\|) (e^{tA_j} x_0)^T [\Gamma(A_j)]^{-1} (e^{tA_j} x_0) dt. \quad (2.38)$$

Les termes à l'intérieur de l'intégrale étant positifs,  $tr(\tilde{A})$  dépend alors du signe de  $a$ , et par conséquent on a

$$\text{sgn}\left(tr(\tilde{A})\right) = \text{sgn}(a), \quad (2.39)$$

le signe de la trace est donc lié à celui de la perturbation  $G(X)$ .

### Remarque 2

De plus, par un calcul déjà fait par Benouaz et Arino[15], on a

$$\begin{aligned} \text{trace}\left(r(\tilde{A})\right) &\leq aC [O(\|x_0\|)] \\ &\leq a [O(\|x_0\|)]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ceci montre l'influence des conditions initiales sur l'étude de la stabilité de l'équilibre envisagé.

Ce résultat est important dans le sens où il suggère qu'il est possible de retrouver un résultat de stabilité (cas d'un centre) en étudiant la trace de la matrice optimale. De plus dans les exemples présentés les courbes intégrales du système non linéaire et du système optimal étudiés ont la même allure [24],[28].

## 2.3 Conclusion

Les écueils posés par la méthode de la linéarisation classique sont résolubles par la méthode de la dérivée optimale, c'est ce que nous avons déduit dans ce chapitre.

l'introduction de la dérivée optimale, permet d'améliorer la linéarisation classique, et de présenter une alternative lorsque celle-ci (linéarisation classique) n'est pas calculable ou n'existe pas.

La réponse à la question relative à la relation entre les propriétés de la stabilité de l'équation linéaire obtenue par la dérivée optimale et celle de l'équation non linéaire dans le cas vectorielle est très délicate. Généralement, lorsque la procédure converge, la matrice obtenue est stable.

La méthode de dérivation optimale nous permet aussi de résoudre les problèmes où la linéarisation classique ne peut pas résoudre le cas où la stabilité n'existe pas.

## **TROISIEME CHAPITRE**

**Application de la dérivation optimale pour  
l'étude des modèles physiques non linéaires  
issus de l'électronique**

# Chapitre 3

## Application de la dérivation optimale pour l'étude des modèles physiques non linéaires issus de l'électronique

### 3.1 Introduction

L'utilisation des lois de la physique qui régissent ou décrivent le comportement d'un système ont l'inconvénient d'être non linéaire.

C'est la raison pour laquelle ce que nous allons développer ici se fera dans le cadre des systèmes physiques non linéaires issus de l'électronique et bien sûr la première étape va donc être l'obtention d'un modèle à partir des équations de fonctionnement du système. Les équations différentielles ordinaires sont l'outil mathématique principal pour la description du comportement qualitatif et quantitatif des circuits électroniques.

La plupart de ces circuits sont constitués de composants électroniques à caractéristiques non linéaires (diode, transistor, ect). L'ensemble de toutes les équations de Kirchoff du circuit, combinées avec les relations constitutives correspondant aux caractéristiques des



éléments peut être représenté par un système d'équations différentielles ordinaires.

Le problème qui se pose dans ce cas, est de trouver la meilleure technique permettant d'analyser ces circuits, sans pour autant, occulter certaines de leurs propriétés qualitatives. Dans ce chapitre, nous proposons une étude comparative entre deux méthodes d'analyses, appliquées à un exemple de circuit électronique pour mieux interpréter les phénomènes non linéaires apparaissant dans ces systèmes. Ces deux techniques sont la linéarisation classique, et la dérivée optimale.

Nous allons tester cette nouvelle technique approximative du second ordre, connue sous le nom de la dérivée optimale.

Il existe une autre notion très importante dans l'étude des systèmes physiques, que nous appellerons bifurcation. Elle intervient lorsqu'un petit changement d'un paramètre physique produit un changement majeur dans l'organisation du système.

Nous présentons aussi dans ce chapitre l'étude d'un modèle mécanique non-linéaire du point de vue de la bifurcation.

Notre objectif est de suivre numériquement l'apparition d'un comportement complexe qui repose sur des phénomènes très généraux: l'échange de stabilité entre solutions et le changement de comportement (c'est-à-dire, l'apparition des solutions périodiques), et la bifurcation des solutions en des solutions multiples, expliquée par l'apparition de nouvelles solutions d'équilibres.

## **3.2 Modèle physique non linéaire issu de l'électronique**

Cet exemple est une mise en point de l'utilisation de la méthode de dérivation optimale pour l'analyse de la stabilité de systèmes physiques présentant le phénomène de bifurcation (changement de comportement pour des valeurs critiques accompagné d'un échange de stabilité).

L'amplificateur chaotique est un circuit autonome régi par le système d'équations (3.1).

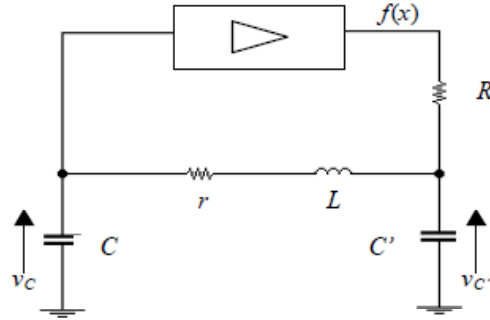


Figure 3.1: Circuit de l'amplificateur chaotique

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - \delta y + z \\ \frac{dz}{dt} = \gamma [\alpha f(x) - z] - \sigma y \end{cases} \quad (3.1)$$

avec:

$$\begin{cases} x = v_C \\ y = \sqrt{\frac{L}{C}} i \\ z = v_{C'} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \gamma = \frac{\sqrt{LC}}{RC'} \\ \delta = r \sqrt{\frac{C}{L}} \\ \sigma = \frac{C}{C'} \end{cases} \quad (3.2)$$

La non linéarité exprimée par  $f(x)$  s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} -0.528 \text{ si } x \leq -1.2 \\ x(1 - x^2) \text{ si } |x| < 1.2 \\ +0.528 \text{ si } x > 1.2 . \end{cases} \quad (3.3)$$

### 3.2.1 Détermination des points d'équilibres

Les points d'équilibres peuvent être obtenus par la résolution du système  $\dot{X} = 0$  qui conduit à

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x + z = 0 \Rightarrow x = z \\ \gamma [\alpha f(x) - x] = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\alpha} x \end{cases} \quad (3.4)$$

Les points d'équilibres sont donc donnés par l'intersection de la caractéristique non linéaire  $f(x)$  et la droite de charge de pente  $\frac{1}{\alpha}$  (où  $\alpha$  représente le gain.)

$$\begin{aligned} x(1-x^2) &= \frac{1}{\alpha}x \\ \Rightarrow x \left(1-x^2 - \frac{1}{\alpha}\right) &= 0 \\ \Rightarrow x = 0 \text{ où } x^2 = 1 - \frac{1}{\alpha} &\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Pour  $\alpha \leq 1$ , on obtient un seul point d'équilibre qui est l'origine  $(0, 0, 0)$ . En revanche, si  $\alpha$  augmente, deux autres points apparaissent  $(P_+, P_-)$ , ayant les coordonnées

$$\left( \pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, 0, \pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right).$$

### 3.2.2 Application du critère de Routh Hurwitz

#### Critère de Routh Hurwitz

Ce critère consiste à examiner les coefficients du polynôme caractéristique de la linéarisé classique et de construire une matrice appelée matrice de Hurwitz.

Pour appliquer ce critère, il faut d'abord construire une matrice carrée de dimension  $n$ . Elle contient les coefficients du polynôme dès le deuxième, en ordre décroissant disposés dans la diagonale principale. Dans une colonne, les termes supérieurs au terme de la

diagonale contiennent les coefficients suivants du polynôme en ordre décroissant. Les termes inférieurs à la diagonale contiennent les coefficients suivants du polynôme en ordre croissant. La matrice suivante est appelée Matrice de Hurwitz donnée par:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

On considère les principaux déterminants mineurs diagonaux de la matrice  $H$

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \quad (3.6)$$

**Téorème** (*critère de Routh-Hurwitz*)

Soit  $P$  un polynôme tel que  $a_0 > 0$ . Pour que  $P$  soit uniformément asymptotiquement stable (u. a. s), il faut que les déterminants principaux de la matrice de Hurwitz soient strictement positifs.

$$\Delta_1 = a_0 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \quad (3.7)$$

Si  $n = 3$ , on trouve

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

et le critère s'énonce comme suit:

**Proposition**

Soit  $P(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ , pour que  $P$  soit uniformément asymptotiquement stable (u. a. s), il faut et il suffit que  $\Delta_1 = a_1 > 0$ ,  $\Delta_2 = a_1a_2 - a_3a_0 > 0$  et  $\Delta_3 = a_3\Delta_2 > 0$ , quand  $a_0 > 0$ , une condition nécessaire pour que toutes les racines du polynôme caractéristique admettent une partie réelle négative il faut que tous les coefficients doivent être positifs c'est-à-dire :  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $\dots$ ,  $a_n > 0$ .

L'application du critère de Routh Hurwitz est une approche qui consiste à exprimer le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle en fonction des coefficients  $(a_i)$  qui sont des fonctions des coordonnées du point fixe et du paramètre de bifurcation.

Donc l'application de ce critère au système de l'amplificateur chaotique permet de localiser la limite de stabilité caractérisé par une valeur critique du paramètre de bifurcation  $\alpha$  définit comme étant le gain de lamplificateur alors:

La linéarisation classique du système (3.1) autour du point d'équilibre  $P_+$ , permet de donner la matrice suivante:

$$DF(P_+) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\delta & 1 \\ \gamma\alpha \left(1 - 2\left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)\right) & -\sigma & -\gamma \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Le polynôme caractéristique est donné par:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 \quad (3.10)$$

Alors les éléments de la matrice de Hurwitz sont donnés comme suit:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \gamma + \delta \\ a_2 &= \delta\gamma + \sigma + 1 \\ a_3 &= \gamma - \gamma\alpha + 2\gamma\alpha\sqrt{\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)} \end{aligned}$$

D'après le critère de Routh le système est uniformément asymptotiquement stable (u. a. s), il faut que les déterminants principaux de matrice de Hurwitz soient strictement positifs. Pour notre modèle il faut que:

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0$$

A partir de cette condition on peut déterminer la valeur critique du paramètre de bifurcation  $\alpha$  pour laquelle le point d'équilibre change de stabilité.

Pour des valeurs inférieures à la valeur critique  $\alpha = 1$ , le système possède un seul point d'équilibre à l'origine asymptotiquement stable, tandis que l'apparition de deux autres points est causée par une bifurcation fourche, suivie d'une bifurcation Hopf. Le critère de Routh-Hurwitz montre que ces deux nouveaux points demeurent globalement stables et changent de stabilité dans la région:

$$1 < \alpha < \alpha_H = 1 + \frac{(\delta + \gamma)(1 + \sigma + \delta\gamma)}{2\gamma}$$

**Remarque :** L'avantage d'utiliser ce critère est qu'on peut analyser la stabilité d'un système en localisant les limites ( $\alpha_H$ ) de la stabilité sans avoir des informations sur les vecteurs propres du système linéaire équivalent. Alors l'utilisation du critère de Routh-Hurwitz donne rapidement les conditions de la stabilité des points fixes.

### 3.2.3 Application de la procédure de dérivation optimale

Le système d'équations (3.1), présente un comportement assez particulier (phénomène de bifurcation). L'objectif étant l'étude de l'influence du choix des conditions initiales (propriété importante liée à l'illustration des avantages de la technique proposée, pour la description du comportement qualitative des modèles non linéaires modélisés par des équations dépendants d'un jeu de paramètres dont leurs variations provoquent un comportement complexe assez important (échange de stabilité, bifurcation des solutions). L'étude de la stabilité de ces points s'effectuera suivant la valeur critique (paramètre de bifurcation), en linéarisant le système par la méthode de dérivation optimale autour de chaque point, comme suit:

\* linéarisation autour de l'origine pour  $\alpha \leq 1$ .

linéarisation autour de  $(P_+, P_-)$  pour  $\alpha > 1$ .

Puis, nous déterminons les valeurs propres du système linéarisé,

Pour l'application numérique, on utilise les valeurs suivantes :  $R = 3380 \Omega$ ,  $C = 343 nF$ ,  $r = 347 \Omega$ ,  $C' = 225 nF$ ,  $L = 145 mH$  ( $\gamma = 0.2932$ ,  $\delta = 0.5337$ ,  $\sigma = 1.5244$ )

L'application de la dérivée optimale autour de deux cas critiques. Cette application va nous permettre de mieux apprécier la fiabilité et l'efficacité de la méthode pour la détection et le suivi du phénomène de bifurcation.

#### • 1<sup>er</sup> Cas

$\alpha < 1$  le système possède un point d'équilibre à l'origine asymptotiquement stable; on choisit  $\alpha = 0.75$  et on applique la méthode de dérivation optimale, avec  $(x_0, y_0, z_0) = (1.10^{-1}, 2.10^{-1}, 4.10^{-1})$

La procédure de la dérivation optimale donne

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ 0.1992 & -1.5264 & -0.2806 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.0307 \\ \lambda_2 = -0.3918 + 1.5807i \\ \lambda_3 = -0.3918 - 1.5807i. \end{cases} \quad (3.12)$$

• **2<sup>er</sup> Cas**

$\alpha = 1$  est un point où on passe du point d'équilibre à l'origine qui devient instable lorsque  $\alpha$  augmente vers deux nouveaux points d'équilibres ( $P_+, P_-$ ) (*Bifurcation Pitch-fork*); on choisit  $\alpha = 1.1$  et on applique la méthode de dérivation optimale, avec  $(x_0, y_0, z_0) = (1.10^{-2}, 3.10^{-2}, 4.10^{-2})$

La matrice initiale pour le système non-linéaire (3.1) s'écrit

$$A_0 = DF(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.53369 & 1 \\ 0.2459 & -1.5244 & -0.2932 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

La procédure de la dérivation optimale donne

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ 0.243679678 & -1.523974 & -0.2976634 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.020245 \\ \lambda_2 = -0.40555 + 1.5819i \\ \lambda_3 = -0.40555 - 1.5819i. \end{cases} \quad (3.15)$$



L'utilisation de la condition initiale  $(x_0, y_0, z_0) = (1.10^{-1}, 3.10^{-1}, 4.10^{-1})$  a donné le résultat suivant

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ 0.2949578 & -1.522138 & -0.3154912 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Les courbes des figures (3.2) et (3.3) représentent les variations de la composante  $x(t)$  en fonction du temps de la solution du système linéaire optimal (3.16) et (3.13) obtenu comparée à celle du système non linéaire (3.1).

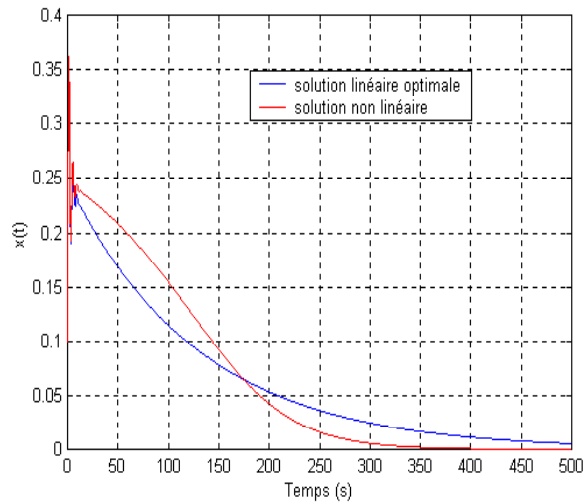


Figure 3.2: Variation de la solution  $x(t)$  en fonction du temps pour les conditions initiales  $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.3, 0.4)$ .

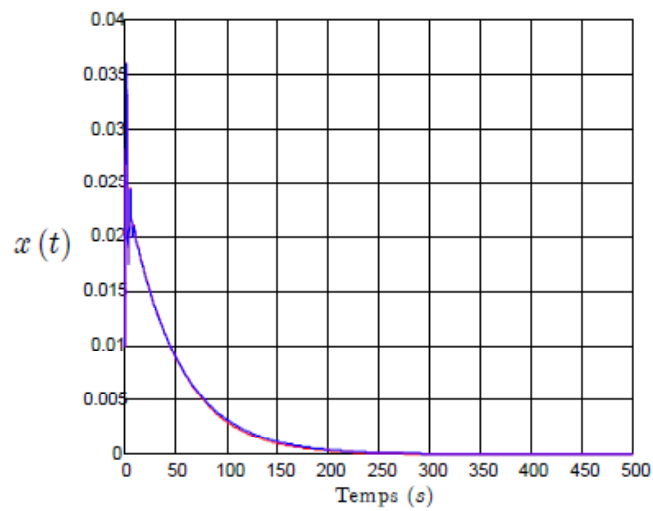


Figure 3.3

Figure 3.3: Variation de la solution  $x(t)$  en fonction du temps pour les conditions initiales  $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.03, 0.04)$

La figure (3.3) montre que les deux courbes sont confondues, et confirme la proposition liée à l'ordre, c'est à dire que la qualité de l'approximation dépend du choix de la condition initiale. Ce qui n'est pas le cas de la figure (3.2) où on observe un écart entre les deux courbes. Afin de consolider les résultats obtenus dans le cas des conditions initiales très près de l'origine par rapport à celles prises près de l'origine, nous avons comparé l'erreur relative obtenue dans les deux cas. Le tableau (I.1) rapporte l'erreur relative entre la solution non linéaire et celle linéaire optimale,  $Er1$  erreur relative pour des conditions près de l'origine, et  $Er2$  erreur relative obtenue dans le cas des conditions initiales très près de l'origine.

La figure (3.4) représente respectivement, la variation de l'erreur relative  $Er1$  en fonction du temps dans deux cas des conditions initiales près de l'origine, et celle de l'erreur relative  $Er2$ , dans le cas des conditions initiales très près de l'origine.

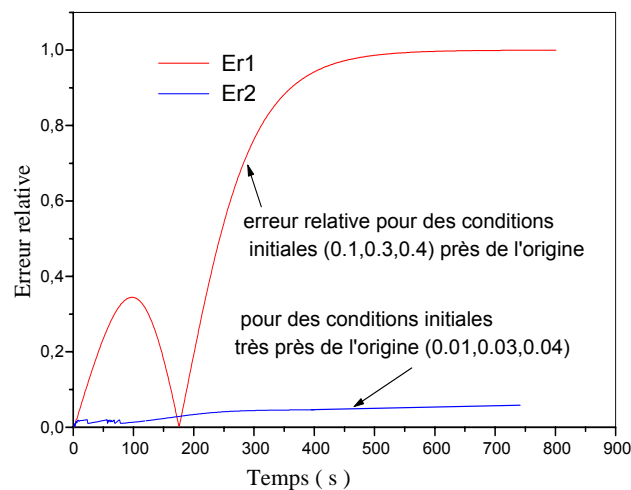


Figure 3.4: Evolution des erreurs relatives  $Er1$ ,  $Er2$  en fonction du temps

t	Er1	Er2
10	4.31E-002	1.57E-002
40	1.91E-001	1.44E-002
50	2.34E-001	1.76E-002
60	2.72E-001	1.81E-002
70	3.04E-001	1.10E-002
80	3.27E-001	1.03E-002
90	3.41E-001	1.17E-002
100	3.44E-001	1.32E-002
110	3.35E-001	1.49E-002
120	3.14E-001	1.67E-002
130	2.81E-001	1.87E-002
140	2.35E-001	2.08E-002
150	1.80E-001	2.30E-002
160	1.15E-001	2.52E-002
170	4.30E-002	2.74E-002
180	3.38E-002	2.96E-002
190	1.13E-001	3.17E-002
200	2.48E-001	3.29E-002
250	5.41E-001	4.09E-002
300	7.63E-001	4.42E-002
350	8.82E-001	4.55E-002
400	9.42E-001	4.06E-002

**Tableau 3.1:** Erreurs relatives Er1, Er2 comises sur les solutions linéaires optimales pour des conditions initiales prés et très prés de l'origine.

• 3<sup>ème</sup> Cas

$\alpha_H = 4.7804$  : c'est un point critique, à partir duquel le système donne des solutions périodiques avec un changement de la stabilité des points d'équilibres. Le système subit une autre bifurcation appelée ( *bifurcation Poincaré-Androw-Hopf* ), où il commence à osciller autour de l'un des deux nouveaux points d'équilibre ( $P_+$  ou  $P_-$ ). On va confirmer que pour la même valeur, par l'application de la dérivation optimale, on obtient la même chose, mais en prenant un  $x(0)$  très proche de l'origine.

Avec  $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.3)$ , la matrice initiale pour le système non linéaire (3.1)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.533694 & 1 \\ -1.1630 & -1.7685 & -0.1665 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.0021 + i 1.636078 \\ \lambda_2 = 0.0021 - i 1.636078 \\ \lambda_3 = -0.3716. \end{cases} \quad (3.18)$$

s'écrit en utilisant la condition initiale  $(x_0, y_0, z_0) = (1.10^{-3}, 2.10^{-3}, 3.10^{-3})$ , la matrice optimale est donnée par

$$A_0 = DF(x(0)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ -1.9162 & -1.5244 & -0.2932 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

La procédure de la dérivation optimale donne

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.533694 & 1 \\ -1.9148 & -1.5272 & -0.2880 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -5.18 \cdot 10^{-6} + i 1.637350 \\ \lambda_2 = -5.18 \cdot 10^{-6} - i 1.637350 \\ \lambda_3 = -8.21667 \cdot 10^{-1} \end{cases} \quad (3.21)$$

En se plaçant très près de l'origine, on remarque que la dérivée optimale permet de donner un système linéaire optimale avec deux valeurs propres complexes. Dans ce cas, plus la partie réelle des valeurs propres est d'autant plus proche de zéro et plus la décroissance de la partie exponentielle de la solution vers zéro est lente. Ainsi, la présence de ces valeurs propres complexes conjuguées (3.21) provoque un comportement oscillatoire périodique (*bifurcation Hopf*) comme le montrent les figures (3.5) et (3.6) (courbe en rouge solution non linéaire, courbe en bleu solution linéaire optimale). Ces figures illustrent des solutions périodiques. Ces changements correspondent à l'apparition d'un cycle limite au niveau de l'espace de phase qui peut être expliqué par le fait que l'origine reste instable et tend à repousser loin de l'origine toutes les trajectoires oscillantes autour de  $P_{\pm}$ .

Les courbes des figures (3.5) et (3.6) représentent les variations de la composante  $x(t)$  en fonction du temps de la solution du système linéaire optimal obtenu comparée à celle du système non linéaire (3.1)

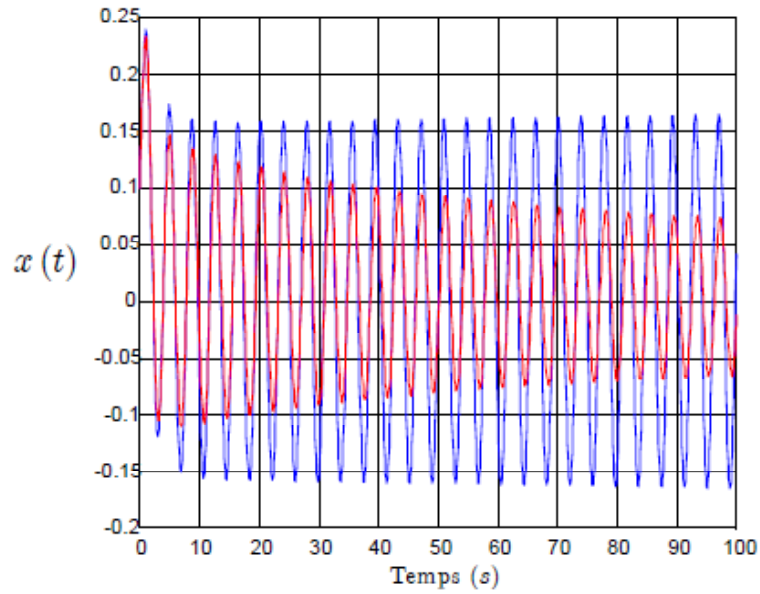


Figure 3.5: Variation de la solution  $x(t)$  en fonction du temps pour les conditions initiales  $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.3)$ .

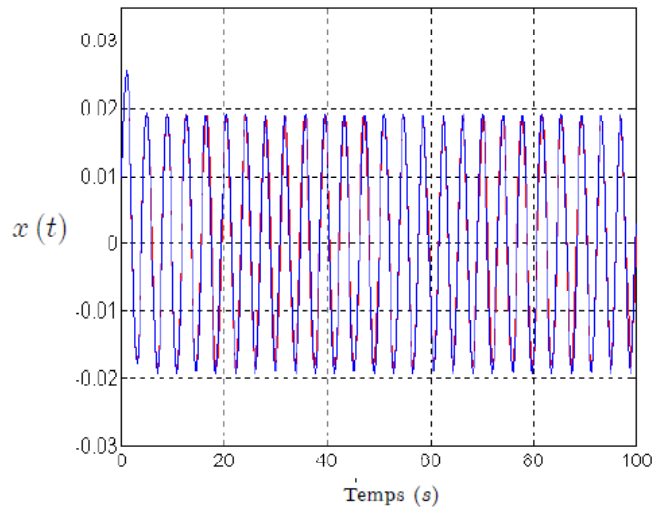


Figure 3.6: Variation de la solution  $x(t)$  en fonction du temps pour les conditions initiales  $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$ .

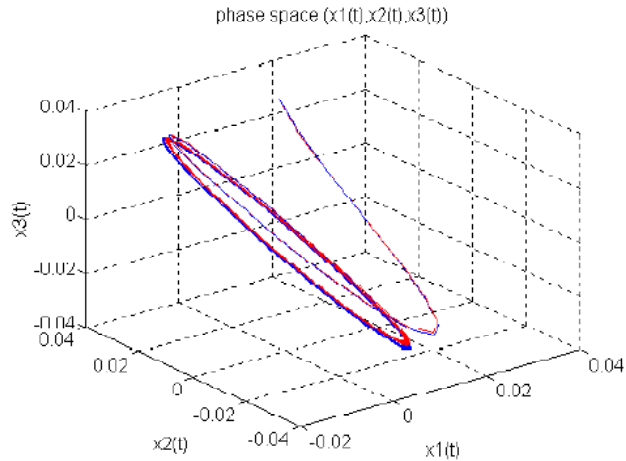


Figure 3.7: Solution  $(x(t), y(t), z(t))$  dans l'espace de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$ .

• 4<sup>ème</sup> Cas

Que se passe-t-il lorsque  $\alpha$  dépasse  $\alpha_H$  ?

Exemple pour  $\alpha = 5 > \alpha_H$  où  $\alpha_H = 4.7804$  : il s'agit d'un point critique à partir duquel le système donne des solutions périodiques, avec un changement de la stabilité des points d'équilibre ainsi que la stabilité des solutions périodiques. Les deux nouveaux points d'équilibre ( $P_+$  et  $P_-$ ) deviennent instables tandis que l'origine devient stable. On va confirmer ces résultats par l'application de la méthode de dérivation optimale pour  $x(0) = (0.01, 0.02, 0.03)$ . la matrice initiale pour le système non linéaire (3.1) s'écrit

$$A_0 = DF(0.01, 0.02, 0.03) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.533694 & 1 \\ -1.803814 & -1.5244 & -0.29345 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$



La procédure de la dérivée optimale donne au premier pas

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.533694 & 1 \\ -1.96129 & -1.551841 & -0.239282 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.01937 + i 1.64639 \\ \lambda_2 = 0.01937 - i 1.64639 \\ \lambda_3 = -0.8117234 \end{cases} \quad (3.24)$$

La dérivée optimale détecte l'échange de stabilité qui se traduit par des valeurs propres, complexes à parties réelles positives pour les points  $(P_+, P_-)$ . Pour le système linéaire optimal, elle s'écrivent sous la forme (3.24). Ceci montre que les deux points critiques  $P_+$  et  $P_-$  deviennent instables alors que l'origine est stable ( $\lambda_3 < 0$ ). L'analyse des deux figures (3.8), (3.9) (courbe en rouge solution non linéaire, courbe en bleu solution linéaire optimale), confirment les résultats obtenus en se plaçant très près de l'origine.

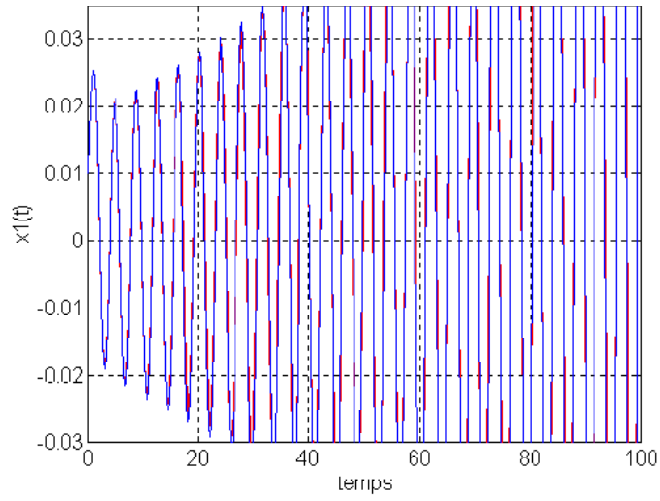


Figure 3.8: Variation de la solution  $x(t)$  en fonction du temps pour les conditions initiales  $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$

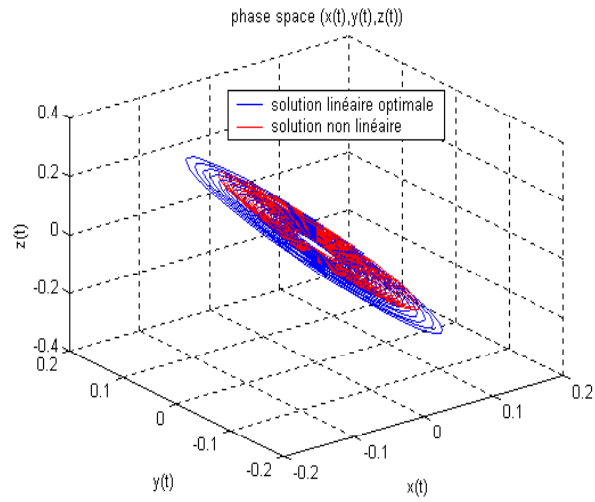


Figure 3.9: Solution  $(x(t), y(t), z(t))$  dans l'espace de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$

### 3.2.4 Comparaison

La comparaison entre les résultats obtenus pour des conditions initiales près de l'origine montre une nette amélioration concernant la description du comportement réel, en obéissant à la même dynamique du système non linéaire initial. Ceci est illustré par les figures (3.2) et (3.3) qui représentent la solution optimale comparée à celle non linéaire (numérique) du système (3.1).

En plus, en se basant sur les résultats obtenus par l'application de la méthode aux points critiques, par exemple, (pour  $\alpha_H = 4.7804$  et  $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$ ), on constate que la dérivée optimale est capable de détecter le changement de stabilité à partir du changement de signe des parties réelles des valeurs propres données par les expressions (3.12) et (3.24). Le changement de comportement de la solution pour  $\alpha = 1.1$  en une solution périodique pour  $\alpha = 4.7804$  (apparition de la bifurcation Hopf) figure (3.7) est mis en évidence par les figures (3.3) à (3.8).

Enfin, les résultats élaborés en choisissant des conditions initiales très près de l'origine, montrent clairement que la méthode de dérivation optimale suit le comportement du système non linéaire. Elle détecte les grands effets engendrés par les variations du paramètre de bifurcation, qui réside essentiellement dans l'échange de stabilité entre deux points singuliers stable et instable où le passage d'un point singulier stable à une orbite périodique.

## 3.3 Comparaison entre la Dérivation Optimale et la Linéarisation Classique

Cet exemple est destiné à montrer les limites de deux méthodes importantes, la Dérivée Optimale et la Linéarisation Classique[29]. Le fonctionnement du circuit électronique suivant est représenté par deux variables d'états (la chute de tension  $V_{c1}$  aux bornes de la première capacité et la chute de tension  $V_{c2}$  aux bornes de la seconde capacité). La

non linéarité est due à l'utilisation d'une diode non linéaire.

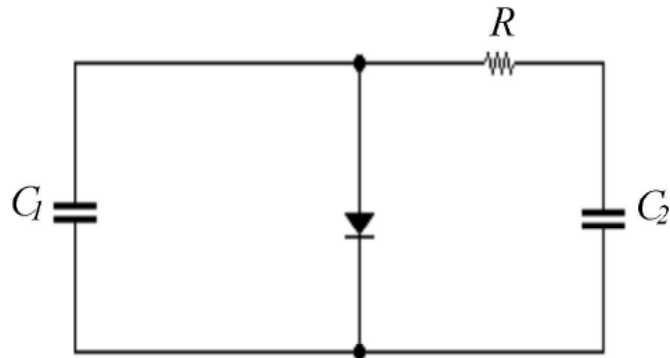


Figure 3.10: Circuit utilisé dans l'exemple

Lorsqu'une tension  $V_c$  est appliquée à la diode dans le sens direct, le modèle de la diode est donné par:

$$f(V_{c1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } V_{c1} < 0 \\ a.V_{c1} + bV_{c1}^2 + dV_{c1}^4 & \text{si } V_{c1} \geq 0. \end{cases}$$

Les paramètres de ce circuit sont

$$\begin{aligned} R &= 33.10^2\Omega & a &= 10^{-4} \\ C_1 &= 220 \cdot 10^{-4}F & b &= 10^{-5} \\ C_2 &= 350 \cdot 10^{-4}F & d &= 10^{-6}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A partir des lois de Kirchhoff relatives aux noeuds et aux mailles du circuit, on obtient les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \frac{dV_{c1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} \left( a.V_{c1} + bV_{c1}^2 + dV_{c1}^4 + \frac{V_{c1} - V_{c2}}{R} \right) \\ \frac{dV_{c2}}{dt} = \frac{1}{RC_2} [V_{c1} - V_{c2}]. \end{cases} \quad (3.26)$$

On pose

$$\begin{cases} x = V_{c1} \\ y = V_{c2}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Alors le système (3.26) s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{a}{C_1}x - \frac{b}{C_1}x^2 - \frac{d}{C_1}x^4 - \frac{1}{RC_1}x + \frac{1}{RC_1}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{RC_2}x - \frac{1}{RC_2}y. \end{cases} \quad (3.28)$$

En remplaçant les paramètres par leurs valeurs, le système s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(1.8 \cdot 10^{-2}x + 4.45 \cdot 10^{-5}(10x^2 + x^4) - 1.38 \cdot 10^{-2}y) \\ \frac{dy}{dt} = 8.66 \cdot 10^{-3}(x - y). \end{cases} \quad (3.29)$$

### Linéarisation Classique

La linéarisation classique est obtenue en calculant la dérivation au sens de Fréchet au point d'équilibre  $(0, 0)$ . Le calcul donne

$$DF(0, 0) = \begin{bmatrix} -1.8 \cdot 10^{-2} & 1.38 \cdot 10^{-2} \\ 8.66 \cdot 10^{-3} & -8.66 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

### Dérivation optimale

La dérivée optimale est obtenue en appliquant l'algorithme cité en section 1.2.1.

Rappelons que le calcul de l'erreur quadratique se fait en utilisant la relation suivante

$$E_Q = \sum_{i=1}^n \|x_i(t) - \tilde{y}_i(t)\|^2, \quad (3.31)$$

où

$x(t)$  représente la solution du système non linéaire.

$\tilde{y}(t)$  représente la solution du système linéaire.

**Résultats de la Méthode** Pour l'étude de ce système on a choisi d'utiliser plusieurs conditions initiales. Les résultats obtenus (les matrices optimales données par la dérivée optimale) sont exposés dans les tableaux (3.2) avec l'erreur quadratique maximale  $E_{Qmax}$ .

Conditions Initiales	Matrice de la D.O	$E_{Qmax}$ due à la D.O	$E_{Qmax}$ due à la L.C
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-1})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0187 & 0.0142 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$2.1302E - 04$	$3.5140E - 04$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-1})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0181 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$7.5438E - 06$	$1.0367E - 05$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0181 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$7.4729E - 09$	$2.2644E - 08$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-2})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0180 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$8.5925E - 10$	$1.0691E - 09$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0180 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$7.0425E - 13$	$2.2132E - 12$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-3})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0179 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$9.0836E - 14$	$1.0969E - 13$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0179 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$2.2657E - 17$	$1.3572E - 16$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0178 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$3.249E - 21$	$3.481E - 21$

**Tableau 3.2:** Valeurs des conditions initiales, matrices des dérivées optimales ainsi que l'erreur quadratique maximale  $E_{Qmax}$  due à la dérivée optimale et à la linéarisation classique.

Les valeurs des caractéristiques utilisées dans ce calcul sont  $t_0 = 0$ ,  $t_f = 15s$ .

Dans la figure 3.12 la courbe

$$E_{Q_{\max}} = h(\|x_0\|)$$

est obtenue à partir d'un lissage polynomiale à l'aide du logiciel Origine. La détermination de la valeur  $x_0$  pour laquelle la courbe d'erreur change de comportement sera calculée à l'aide d'un programme en Matlab.

### Analyse des résultats

La représentation de l'erreur quadratique maximale en fonction de  $\|x_0\|$  relative à la linéarisation classique ainsi qu'à la dérivée optimale nous permet de scinder notre courbe en deux parties distinctes:

1. La première partie ou l'erreur quadratique maximale due à la linéarisation classique est inférieure à celle due à la dérivée optimale sur un intervalle de  $\|x_0\| < 0,43$  près. Dans ce cas la linéarisation classique donne une meilleure approximation que la dérivée optimale.
2. La deuxième partie ou l'erreur quadratique maximale due à la linéarisation classique devient nettement supérieure à celle due à la dérivée optimale sur un intervalle  $\|x_0\| > 0,43$ , c'est la dérivée optimale qui est meilleure.

Pour une condition initiale  $x_0$  donnée, l'approximation par la dérivation optimale est meilleure dans un voisinage de la donnée initiale, tandis que la linéarisation classique est meilleure au voisinage de l'origine.

Ces deux aspects reflètent le fait que la linéarisation par la dérivation au sens de Fréchet (lorsqu'elle existe et lorsqu'elle est hyperbolique) constitue la meilleure approximation à l'origine.

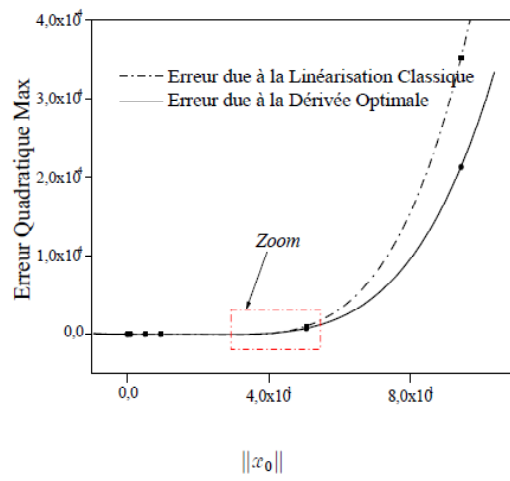


Figure 3.11: Erreur quadratique maximale en fonction de  $\|x_0\|$ .

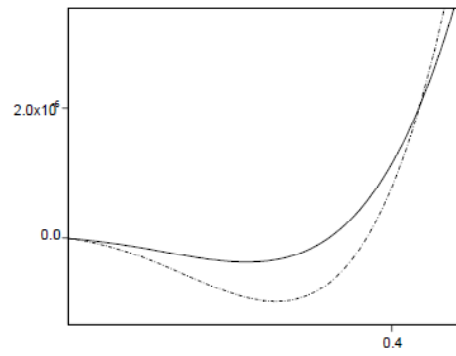


Figure 3.12: Zoom de la partie où se produit l'inversion de la qualité de l'approximation.



## **QUATRIEME CHAPITRE**

**Application de la dérivation optimale  
pour l'étude des modèles non linéaires  
issus de l'écologie**

# Chapitre 4

## Application de la dérivation optimale pour l'étude des modèles non linéaires issus de l'écologie

### 4.1 Introduction

Notre intention est d'appliquer et progresser avec la procédure de la dérivée optimale dans le domaine des modèles proie-prédateur de type ratio-dépendant utilisés en écologie de population, en utilisant les travaux de T. Benouaz et al [27],[28].

Le modèle étudié est un modèle proie prédateur de type ratio dépendant qui décrit la propagation du virus du sida dans une société. Sa caractéristique principale est que la réponse du prédateur à la présence de proie dépend du rapport du nombre de proies au nombre de prédateurs[33],[34],[35],[36]. Ce modèle n'est pas défini à l'origine et donc il ne peut pas être linéarisé autour de ce point. C'est la cause principale de l'étude de la linéarisation de ce modèle par la dérivée optimale. Ainsi nous comparons les résultats obtenus avec ceux trouvés par {B.D.Aggarwala.}[37].

Nous appliquons la dérivée optimale pour estimer le nombre d'individus infectés par le virus HIV dans la société canadienne. Nous calculons également l'erreur relative pour la

comparaison.

## 4.2 Présentation du modèle

Le développement du HIV/SIDA dans une société peut être modélisé par un modèle proie prédateur de type ratio dépendant. Le modèle divise une société en deux classes, les individus infectés et les individus non infectés par ce virus.

De tels systèmes ratio dépendants peuvent être représentés par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(1-x) - \frac{x \cdot y}{(x+y)} \\ \dot{y}(t) = -ay + \frac{kxy}{(x+y)} \end{cases} \quad (4.1)$$

$\alpha$ ,  $a$ , et  $k$  sont des paramètres positifs.

$x(t)$ : Nombre de proies à tout instant  $t$  (où le nombre d'individus négatifs d'HIV)

$y(t)$ : Nombre de prédateurs à tout instant  $t$  (où le nombre d'individus positifs d'HIV).

$k$ : Facteur de conversion.

$a$ : Taux de mortalité des prédateurs.

$\alpha$ : Facteur de croissance de proies.

$\beta$ : Capacité de charge de l'environnement, a été dimensionnée à 1 dans les équations 4.1

Nous étudions le système d'équations 4.1 dans le plan  $(x, y)$ . Puisque la limite n'est pas définie à  $(x, y) = (0, 0)$ , le système ne peut pas être linearisé autour de ce point et nous ne connaissons pas les valeurs propres de ces équations à cet instant.

La question qui se pose est de savoir, dans quelles conditions, sur les paramètres les solutions du système 4.1 approchent le point  $(0, 0)$ . Le point  $(0, 0)$  qui représente l'anéantissement de la société dans le modèle. Ce qui est très important pour notre étude.

## 4.2.1 Les points d'équilibre du modèle et les valeurs propres correspondantes

L'annulation des équations dynamiques dans le système (4.1) nous permet de trouver les points d'équilibres de ce système.

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(1-x) - \frac{x \cdot y}{(x+y)} = 0 \\ y'(t) = -ay + \frac{kxy}{(x+y)} = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système mène aux équations suivantes

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 1 + \frac{\alpha}{ak} - \frac{1}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \\ y = \frac{k-a}{a}x \end{cases}$$

Les points d'équilibres sont alors,  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(x_1, y_1)$  où

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(k\alpha - k + a)}{k\alpha} \\ y_1 &= \frac{(k-a)}{a}x_1 \end{aligned}$$

Ces points correspondent à:

$(0, 0)$  → La société étant éliminée.

$(1, 0)$  → La maladie étant éliminée.

$(x_1, y_1)$  → La maladie devient endémique.

La Jacobienne du système 1.1 est donnée par:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha(1-2x) - \frac{y^2}{(x+y)^2} & -\left(\frac{x}{x+y}\right)^2 \\ k\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 & -a + \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que:

- Au point  $(0, 0)$  la Jacobienne n'est pas définie.
- Au point  $(1, 0)$  la Jacobienne devient:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & -1 \\ 0 & -a + k \end{bmatrix}$$

- Au point  $(0, 0)$  la Jacobienne est:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \alpha - \frac{a^2}{k^2} & -\frac{a^2}{k^2} \\ \frac{(k-a)^2}{k} & -a + \frac{a^2}{k^2} \end{bmatrix}$$

Pour obtenir les valeurs propres à ces points d'équilibre, il faut résoudre l'équation

$$|Jacob - \lambda I| = 0$$

- Au point  $(1,0)$  on trouve que les valeurs propres sont:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha \\ \lambda_2 = k - a \end{cases}$$

- Au point  $(x_1, y_1)$ :

la résolution de l'équation  $|Jacob - \lambda I| = 0$  conduit à

$$\lambda^2 + \left( \alpha + a - 1 + \frac{a^2}{k^2} (1 - k) \right) \lambda + \frac{a(k-a)}{k^2} (k\alpha + a - k) = 0$$

Posons:

$$B = \left( \alpha + a - 1 + \frac{a^2}{k^2} (1 - k) \right)$$

$$C = \frac{a(k-a)}{k^2} (ka + a - k)$$

tel que les solutions de l'équation  $\lambda^2 + B\lambda + C = 0$  soient les valeurs propres au point  $(x_1, y_1)$ .

Les valeurs propres du système au point  $(0, 0)$  dans le plan  $(x, y)$  ne sont pas connues, il n'est pas possible d'affirmer dans quelle condition sur les paramètres  $a, k, \alpha$  le point mobile  $(x(t), y(t))$  approchera le point  $(0, 0)$  ou s'éloignera de lui. Dans cette étude nous tentons de répondre à cette question numériquement en illustrant un certain nombre de cas.

### 4.2.2 Différents cas étudiés selon la variation des paramètres du modèle

Avant d'étudier les différents cas possibles nous devons mentionner que le chemin de solution du système (4.1) est périodique, à un cycle limite (périodique), ou approche un des trois points critiques.

Notez également, que les solutions des équations (4.1) restent dans le premier quadrant dans le plan  $x - y$  si  $x(0) > 0$  et  $y(0) > 0$ .

Pour  $B \geq 0$ , le chemin de solution de ces équations ne peut pas avoir un cycle de limite positif. Pour cela nous considérons  $B < 0$  dans notre étude. Nous supposons encore qu'il n'y a aucune solution de cycle de limite, de sorte que toutes les solutions doivent atteindre un des points d'équilibre.

Nous avons essayé d'étudier numériquement dans quelles conditions sur les constantes  $a, k$  et  $\alpha$  les solutions vont approcher les trois points d'équilibre de ce modèle. Nous avons discuté un grand nombre de cas qui peuvent se présenter pour différentes valeurs de  $a$ , de  $k$ , et de  $\alpha$ . Toutes les combinaisons possibles de ces constantes sont étudiées. Dans chaque cas, nous avons montré les solutions qui vont à un des deux points d'équilibre (le troisième point s'avère instable). On a estimé le bassin d'attraction de ces points numériquement pour quelques cas spéciaux.

Voici un tableau présentant les diverses possibilités.

cas	Valeurs de $a$ , $k$ , et $\alpha$	comportement de la solution
1	$\alpha \geq 1$	$(0, 0)$ n'est pas accessible. Toutes les solutions tendent à $\left\{ \begin{array}{l} P_2 \\ \text{ou} \\ P_3 \end{array} \right.$ .
2	$0 < \alpha < 1, a < k < \frac{a}{(1-k)}$	$P_2$ est instable. Toutes les solutions tendent vers $P_1$ ou à $P_3$ .
2a	$B = 0, C > 0$ .	$P_3$ est localement stable (neutre).
2b	$B > 0, C > B, B^2 > 4C$	$P_3$ est un foyer stable. Les solutions tendent vers $P_3$ ou à $P_1$
2c	$B > 0, C > 0, B^2 > 4C$	$P_3$ est un noeud stable Les solutions tendent vers $P_3$ ou à $P_1$
2d	$B < 0$	$P_3$ est instable. Les solutions tendent à
3	$0 < \alpha < 1, k < a$	Les solutions tendent vers $P_1$ ou $P_2$ .
4	$0 < \alpha < 1, k \geq \frac{a}{(1-\alpha)}$	Toutes les solutions tendent à $P_1$ .
5	$0 < \alpha < 1, k = a$	$P_2$ et $P_3$ coïncident Les solutions tendent à $P_1$ ou à $P_2$ .
6	$a + \alpha < \min(1, k)$	Toutes les solutions tendent vers $P_1$ .
7	$a + \alpha > \max(1, k)$	Toutes les solutions tendent vers $P_2$ ou $P_3$
8	$k < a + \alpha < 1$	Quelques solutions tendent vers $P_1$ d'autres vers: $\left\{ \begin{array}{l} P_2 \quad \text{ou} \\ P_3 \quad \text{ou} \\ \text{un cycle de limite} \end{array} \right.$
9	$1 < a + \alpha < k$	Quelques solutions vont à $P_1$ d'autres vont à $P_3$

### 4.3 Etude de la stabilité du modèle au point $(0, 0)$ par la méthode de la dérivée optimale

Le modèle étudié est un modèle proie- prédateur de type ratio-dépendant. Si nous nous limitons simplement à étudier le comportement d'un tel modèle à l'origine, on s'aperçoit que ceci est impossible car la fonction non linéaire représentant l'équation différentielle n'est pas dérivable en ce point; en effet dans le cas d'HIV / SIDA, ce point représente l'annulation de la société. L'étude du comportement au voisinage de ce point est très importante.

A partir du travail d'Aggarwala nous avons étudié numériquement les conditions sur les constantes  $a$ ,  $k$  et  $\alpha$  pour que les solutions s'approchent vers les trois points d'équilibre en particulier le point  $(0, 0)$ . Nous avons discuté un grand nombre de cas pour différentes valeurs de  $a$ ,  $k$  et de  $\alpha$ . Ainsi, on a trouvé que dans la majorité des cas les solutions tendent vers l'origine le long de  $y = mx$ . avec  $m = \frac{(a + \alpha - k)}{(1 - a - \alpha)}$

Si  $m = \frac{(a + \alpha - k)}{(1 - a - \alpha)} = \tan(\theta_1)$ , l'origine est un point selle dans l'intervalle  $0 < \theta < \theta_1$  et un noeud stable si  $\theta$  appartient à l'intervalle  $\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

En appliquant la dérivée optimale en ce point (à l'origine), cette méthode facilite une étude comparative entre les comportements des solutions du système ratio dépendant et de celles obtenues par la dérivée optimale. Elle permet de confirmer la nature de l'origine à partir des valeurs propres obtenues,[30],[31],[32].



### 4.3.1 Etude de quelques cas précédents par la dérivée optimale

#### Exemple 1 (cas 2b)

Les valeurs des paramètres sont  $(a, k, \alpha) = (0.2, 0.4, 0.66)$ , de telle sorte que:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.66x(1-x) - \frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.4\frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (4.2)$$

#### Cas où l'équilibre $(0, 0)$ est un point selle

Le calcul de la matrice optimale, après 2 itérations pour une condition initiale  $(x_0, y_0) = (0.6e - 10, 1.6e - 10)$  donne la matrice:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.1178 & -0.0695 \\ 0.2169 & -0.1722 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

qui admet comme valeurs propres:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.0499 \\ \lambda_2 &= -0.1044 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ceci permet de conclure que la dérivée optimale prédit un point selle.

Les figures 4.1 et 4.2 représentent respectivement les portraits de phase des systèmes (4.2) et (4.3) ainsi que l'évolution de l'erreur quadratique en fonction du temps.

Les champs de vecteurs non linéaires et linéarisés par la dérivée optimale sont tracés dans les figures 4.3 et 4.4.

#### Cas où l'équilibre $(0, 0)$ est un noeud stable

La matrice optimale, obtenue après 18 itérations pour une condition initiale  $(x_0, y_0) =$

(2.0, 0.346), est la suivante:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.8613 & 0.3302 \\ 0.0962 & -0.1138 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

dont les valeurs propres réelles  $\lambda_1$   $\lambda_2$  sont négatives, soit:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.9016 \\ \lambda_2 &= -0.0735 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ce cas révèle également que l'origine est un noeud stable.

La similitude des champs de vecteurs est montrée par les figures 4.7 et 4.8, tandis que l'évolution des systèmes (4.5) et (4.6) et l'erreur quadratique sont rapportées dans les figures 4.5 et 4.6.

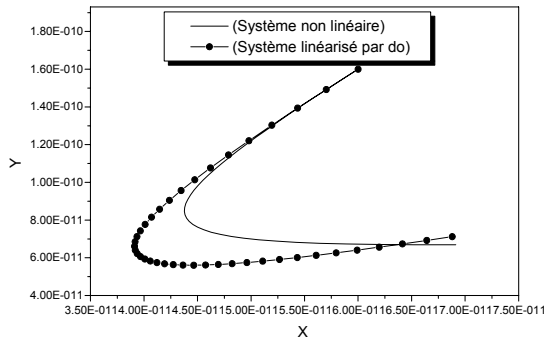


Figure 4.1: Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0) = (0.6e-10, 1.6e-10)$

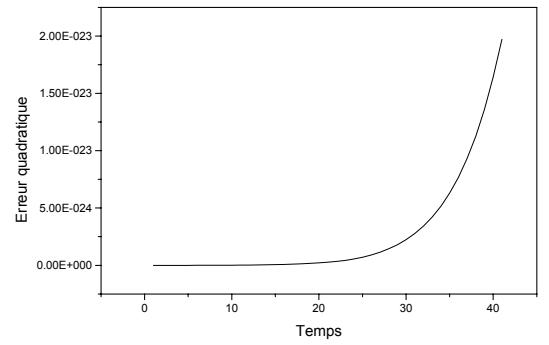


Figure 4.2: Erreur quadratique due au système linéaire (4.3) au sens de la dérivée optimale.

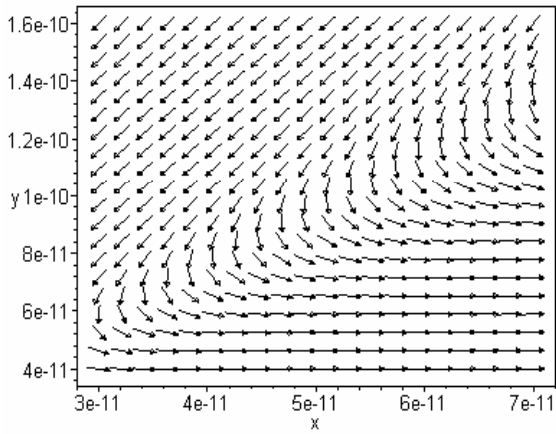


Figure 4.3: Champ de vecteurs du système non linéaire (4.2).

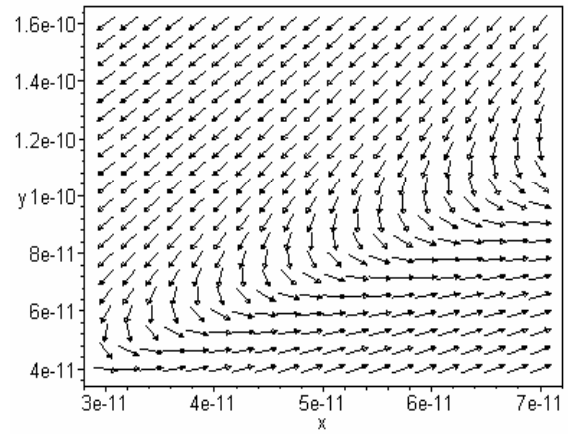


Figure 4.4: Champ de vecteurs du système linéarisé par la dérivée optimale (4.3)

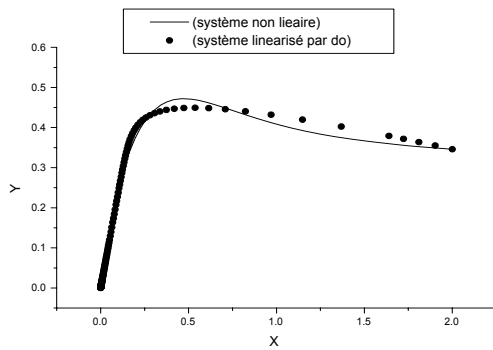


Figure 4.5: Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0)=(2.0, 0.78)$

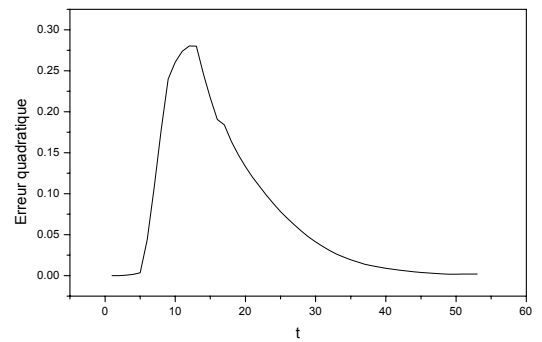


Figure 4.6: Erreur quadratique due au système linéaire (4.5) au sens de la dérivée optimale.

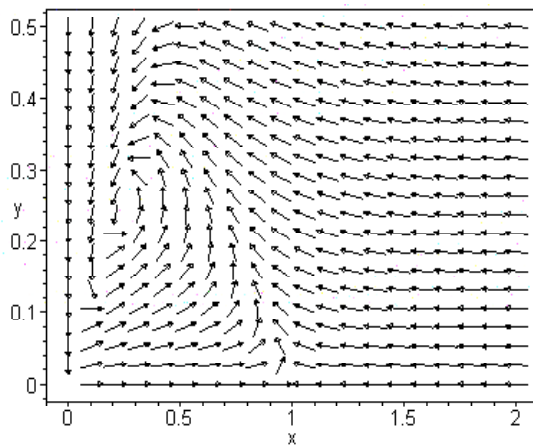


Figure 4.7: Champ de vecteurs du système non linéaire (4.2).

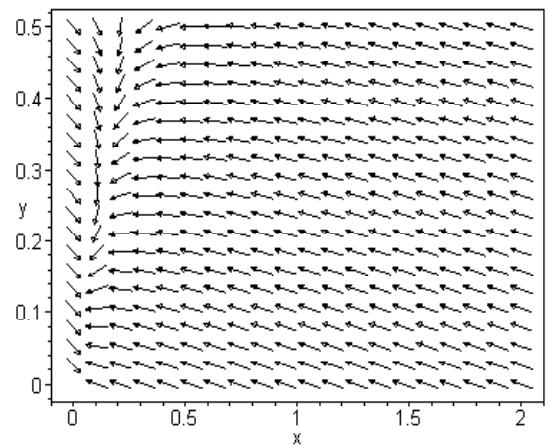


Figure 4.8: Champ de vecteurs du système linéarisé par la dérivée optimale (4.5).

### Exemple1 (cas 2d)

Les valeurs des paramètres sont  $(a, k, \alpha) = (0.2, 0.25, 0.3)$ .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.3x(1-x) - \frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.25\frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (4.7)$$

### Cas où l'équilibre $(0, 0)$ est un point selle

Le calcul de la matrice optimale, après 2 itérations pour une condition initiale  $(x_0, y_0) = (0.003, 0.00098)$  conduit à la matrice:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.2323 & -0.4966 \\ 0.0171 & -0.0762 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

dont les valeurs propres sont:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.2019 \\ \lambda_2 &= -0.0457 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ceci permet de conclure que la dérivée optimale prédit un point selle.

Les figures 4.9 et 4.10 représentent respectivement les portraits de phase des systèmes (4.7) et (4.8) ainsi que l'évolution de l'erreur quadratique en fonction du temps.

Les champs de vecteurs non linéaire et linéarisé par la dérivée optimale sont tracés sur les figures 4.11 et 4.12.

### Cas où l'équilibre $(0, 0)$ est un noeud

La matrice optimale, obtenue après 14 itérations pour une condition initiale  $(x_0, y_0) =$

(0.82, 0.095) s'écrit comme suit:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0495 & 0.0628 \\ 0.0061 & -0.0238 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

elle présente des valeurs propres réelles négatives.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.0601 \\ \lambda_2 &= -0.0133 \end{aligned} \quad (4.11)$$

L'origine est un noeud stable.

La similitude des champs de vecteurs est mise en évidence sur les figures 4.15 et 4.16, tandis que l'évolution des systèmes (4.7) et (4.10) ainsi que l'erreur quadratique sont illustrées dans les figures 4.13 et 4.14.

### Commentaires

En se plaçant très près de l'origine on remarque que la dérivée optimale permet de donner un système linéaire optimale avec deux valeurs propres.

Pour les deux exemples précédents, ces deux valeurs propres peuvent être soit:

- Réelles négatives où la linéarisation optimale fait apparaître l'origine comme un noeud stable.
- Réelles de signes opposés où la linéarisation optimale montre que l'origine est un point selle.

Les résultats obtenus en choisissant des conditions initiales près de l'origine, prouve clairement que la méthode de la D.O obéit à un comportement de système non linéaire.

La similitude des champs de vecteurs du système non linéaire et son linearisé au sens de la D.O, implique le bon accord de la D.O avec le système non linéaire.

Le calcul de l'erreur quadratique montre que, tant qu'on est proche de l'origine, la méthode de la dérivée optimale est meilleure; alors que la linéarisation classique ne peut pas être appliquée dans ce cas.

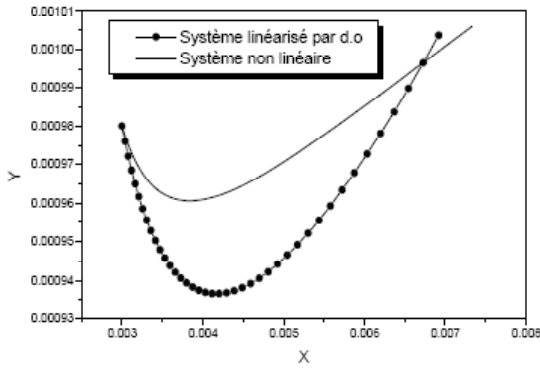


Figure 4.9: Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0)=(0.003, 0.00098)$

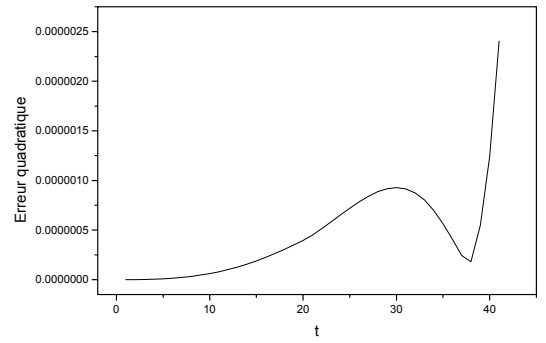


Figure 4.10: Erreur quadratique due au système linéaire (4.8) au sens de la dérivée optimale.

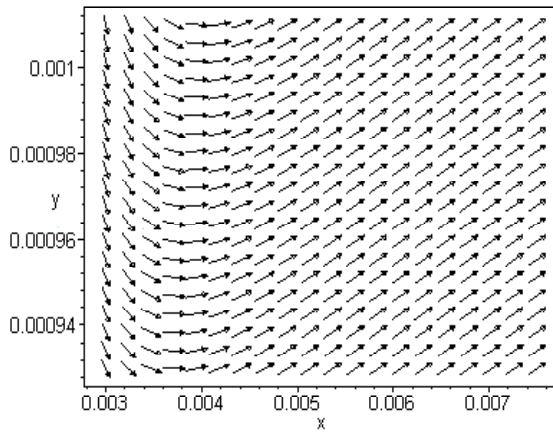


Figure 4.11: Champ de vecteurs du système non linéaire (4.7).

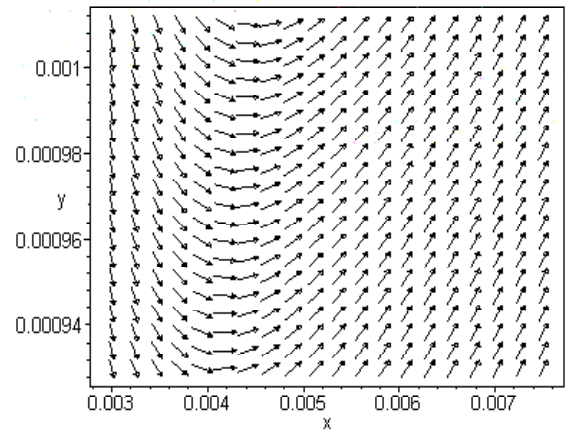


Figure 4.12: Champ de vecteurs du système linéarisé par la dérivée optimale (4.8).

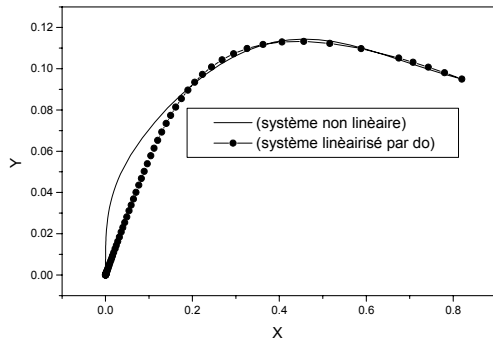


Figure 4.13: Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0)=(0.82, 0.095)$

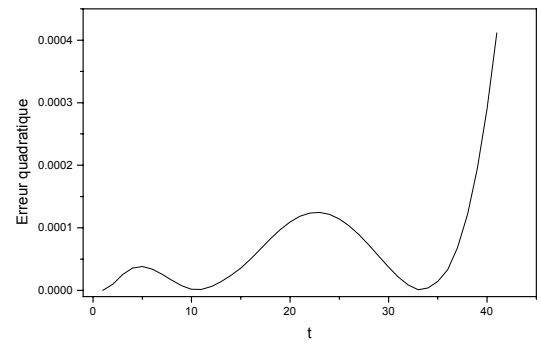


Figure 4.14: Erreur quadratique due au système linéaire (4.10) au sens de la dérivée optimale.

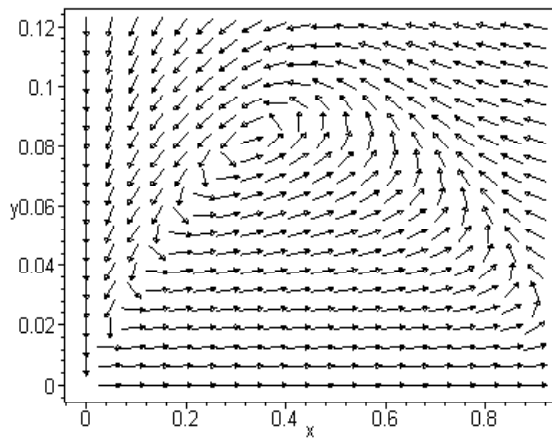


Figure 4.15: Champ de vecteurs du système non linéaire.

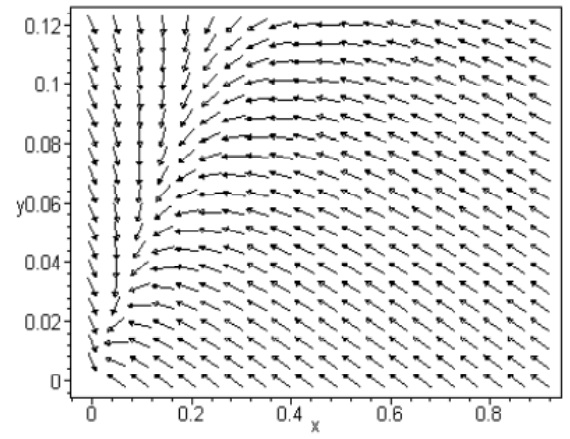


Figure 4.16: Champ de vecteurs du système linéarisé par la dérivée optimale (4.10).



## 4.4 Application du modèle à la société canadienne

Le modèle (4.1) est utilisé par B. D. Aggarwala pour une étude épidémiologique et le développement d'HIV/SIDA au Canada. Si nous voulons simplement, étudier le comportement d'un tel modèle à l'origine, on s'aperçoit, que ce n'est pas possible car la fonction non linéaire représentant l'équation différentielle n'est pas dérivable en ce point, or dans le cas de l'HIV/SIDA, ce point représente l'annulation de la société.

Partant des données statistiques sur le HIV/SIDA qui ont été publiées par les autorités de la santé Canadienne, B. D. Aggarwala a pu estimer le nombre de personnes infectées par ce virus au Canada pendant les années 1996, 1997, 1998 et 1999, en d'autres termes, il a estimé le nombre de personnes infectées cinq ans à l'avance.

Les évaluations avec le nombre réel et l'erreur commise, pendant ces années, sont rassemblées dans le tableau 4.1.

y	1996	1997	1998	1999	2000
Evaluation	26130	28005	30278	32306	34411
Réel	26190	28110	30181	32253	n/a
Erreur (%)	0.23	0.37	0.32	0.16	n/a

Table 4.1: Le nombre estimé et actuel des individus durant les années 1996-1999

L'objectif de cette application est d'estimer le nombre de personnes infectées par le HIV en utilisant la dérivée optimale. Dans cette application, nous allons étudier un exemple qui traite le cas de l'extinction par la dérivée optimale, où on va confirmer les résultats trouvés précédemment (tableau 4.1).

Nous faisons la même étude, mais nous utilisons un modèle linéarisé par la méthode de la dérivée optimale. Pour cela nous avons choisi un exemple dans le cas de l'extinction. Les paramètres sont donnés par le modèle utilisé dans [37], c'est à dire, les paramètres

sont donnés par les valeurs suivantes:

$$\alpha = 0.595 \quad a = 0.31 \quad k = 0.62$$

Le système s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.595x(1-x) - \frac{x \cdot y}{(x+y)} \\ \dot{y}(t) = -0.31y + \frac{0.62xy}{(x+y)} = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

En utilisant la dérivée optimale on obtient la matrice optimale  $\tilde{A}$  pour une condition initiale au voisinage de l'origine  $(x_0, y_0) = (0.9, 0.399)$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0495 & 0.0628 \\ 0.0061 & -0.0238 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Qui correspond au système linéaire optimal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.0495x + 0.0628y \\ \dot{y}(t) = 0.0061x - 0.0238y \end{cases} \quad (4.14)$$

La comparaison entre les deux systèmes (4.12) et (4.14) nous permet de tracer les figures 4.17, 4.18 et 4.19.

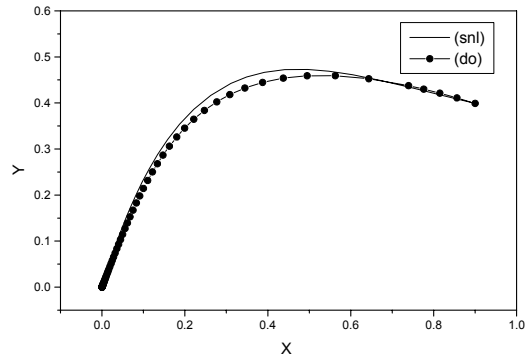


Figure 4.17: Plan de phase du système (4.1) et (4.2) pour les conditions initiales  $(x_0, y_0) = (0.9, 0.399)$ .

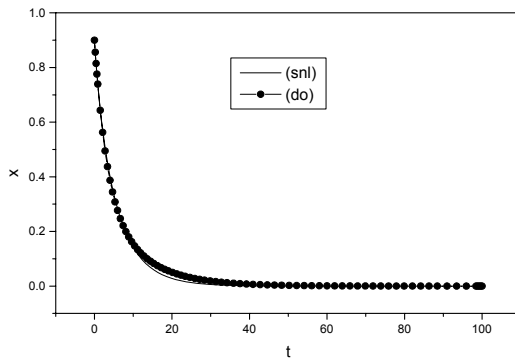


Figure 4.18: Variation de la solution  $x(t)$  en fonction du temps.

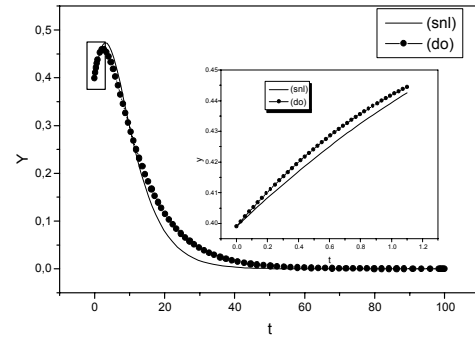


Figure 4.19: Variation de la solution  $y(t)$  en fonction du temps.

D'après les figures 4.17, 4.18 et 4.19, il est clair que cet exemple traite le cas de l'extinction où l'évolution de  $y(t)$  augmente au début puis elle commence à diminuer au cours du temps. Par conséquent, l'évolution de  $x(t)$  diminue au cours du temps jusqu'à l'annulation. Ce qui nous intéresse c'est l'évolution de  $y(t)$  puisque elle représente le nombre de personnes infectées et en particulier l'étude de sa variation par la dérivée optimale dans l'intervalle de diminution.

Pour utiliser le système linéaire optimale pour l'estimation du nombre de personnes infectées au Canada il faut d'abord calculer l'échelle moyenne du temps qui correspondent a une année à partir du tableau 4.1.

Pour ce faire, on considère que les années 1996, 1997, 1998 et même l'année 1999 correspondent aux conditions initiales de l'année suivante. Cependant, pour effectuer cette étude, nous considérons que le changement de la population démographique de la société canadienne pendant ces années est constant.

Dans ce sens, en utilisant le modèle d'Aggarwala, nous pouvons estimer la valeur de  $t$  qui corespond aux valeurs de  $x$  et  $y$  de l'année suivante. Ces valeurs seront fournies par le modèle mathématique d'Aggarwala. Ce sont ceux mentionnées dans le tableau 4.1. Après un certain calcul, on a trouvé que l'échelle moyenne du temps qui correspond à une année est égale à 0.23.

Il est clair que si 1 représente la densité totale de la population démographique de la société canadienne, nous devons définir  $y_{am}$  et  $y_r$  par les expressions suivantes:

$$y_{am} = \frac{\text{Nombre des individus infectés évalué par le modèle d'Aggarwala}}{30750100} \quad (4.15)$$

$$y_r = \frac{\text{Nombre réel (où actuel) des individus infectés}}{30750100} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \text{Nombre d'individus non infectés} = & \text{Nombre total de la population démographique} - \\ & \text{Nombre d'individus infectés par le virus} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pour évaluer le nombre de personnes infectées par le virus du sida par la méthode de la dérivée optimale, nous choisissons et calculons chaque fois la matrice optimale  $A$  en considérant qu'une année quelconque représente et fourni les conditions initiales de l'année suivante. Donc il suffit de prendre chaque fois un temps final égal à 0.23.

Cette technique donne des résultats remarquables par rapport à l'autre technique, c'est à dire le cas où on considère et on utilise uniquement une seule matrice optimale pour aussi une seule condition initiale qui correspond à l'année 1996. Dans ce cas on est obligé d'évaluer le nombre de personnes infectées par le virus chaque année pour les temps 0.23, 0.46, 0.69, 0.92...

Pour estimer le nombre de personnes infectées en 1997 par le virus du sida, on trouve la matrice optimale suivante:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -534089 & -0.998297 \\ 4.497484 \cdot 10^{-7} & 0.308944 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

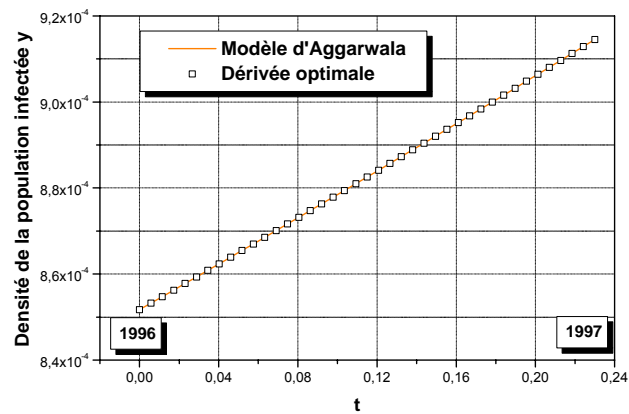


Figure 4.20: Variation du nombre de personnes infectées durant l'année 1996,  $y = f(t)$

Pour l'année 1998 la matrice optimale est donnée par:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -534022 & -0.998127 \\ 4.181080 \cdot 10^{-7} & 0.308867 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

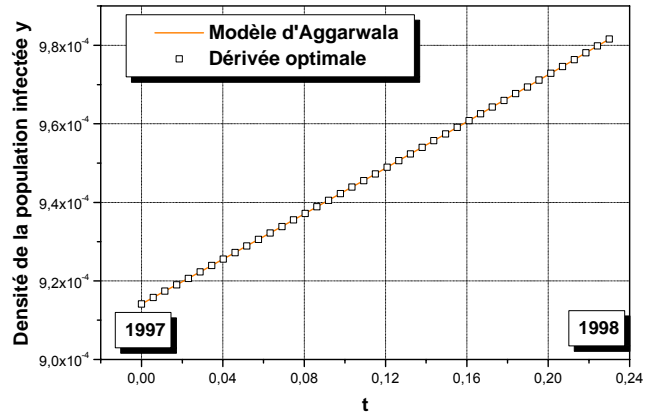


Figure 4.21: Variation de la population infectée durant l'année 1997,  $y = f(t)$

Ainsi que pour l'année 1999, on trouve la matrice optimale suivante:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -533951 & -0.998038 \\ 5.972634 \cdot 10^{-7} & 0.308783 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

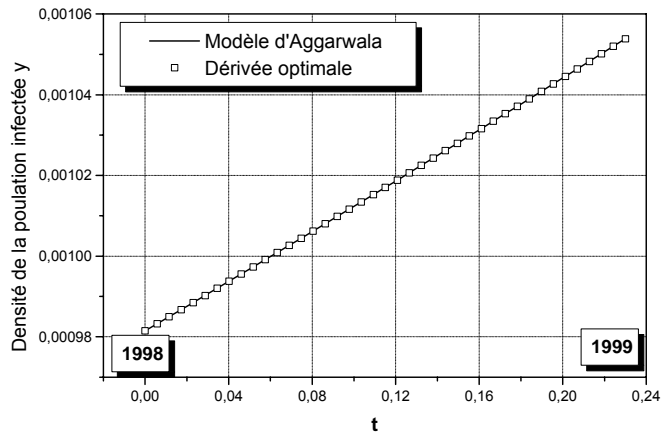


Figure 4.22: Variation du nombre de personnes infectées durant l'année 1998,  $y = f(t)$

Année	1996	1997	1998	1999
t	0	0.23	0.46	0.69
$I_R$	26190	28110	30181	32253
$U_R$	30723910	30721990	30719919	30717847
$y_R \cdot 10^4$	8.5170	9.1414	9.8149	10.4887
$x_R$	0.999148	0.999086	0.999019	0.998951
$I_{AM}$	26130	28005	30278	32306
$U_{AM}$	30723970	30722095	30719822	30717794
$y_{AM} \cdot 10^4$	8.4975	9.1073	9.8465	10.5060
$x_{AM}$	0.999150	0.999089	0.999015	0.998949
E de $y_{AM}$	0.23	0.37	0.32	0.16
$I_{OD}$	26190	28122	30183	32407
$U_{OD}$	30723910	30721990	30719919	30717847
$y_{OD} \cdot 10^4$	8.5170	9.1453	9.8156	10.5388
$x_{od}$	0.999148	0.999085	0.999018	0.998946
E de $y_{OD}$	0	0.0423	0.00685	0.479
E de $x_{od}$	0	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$7.01 \cdot 10^{-6}$	$.510^{-4}$

Tableau 4.2: Différentes estimations de nombres de personnes infectées et non infectées

Pour les résultats de ces calculs, nous nous référons au tableau 4.2. Dans ce tableau, le nombres d'individus infectés et non infectés sont donnés en utilisant diverses évaluations. Ces valeurs sont comparées aux valeurs observées à la population canadienne. Les erreurs relatives sont calculées afin de juger la fiabilité et l'efficacité de la méthode de la dérivée

optimale. L'erreur relative est définie par:

$$\text{Erreur relative} = \frac{|\text{valeur estimée} - \text{valeur réelle}|}{\text{valeur réelle}} \quad (4.21)$$

Afin de prévoir le nombre d'individus infectés et non infectés pendant les années 2000-2005 en utilisant la dérivée optimale, nous employons la même technique comme décrit précédemment. Les résultats sont récapitulés dans le tableau 4.2. Dans les tableaux 4.2 et 4.3 nous employons les abréviations suivantes:

I, u: le nombres d'individus infectés et d'individus non infectés, respectivement.

Nous écrivons AM pour le modèle d'Aggarwala et l'OD pour la dérivée optimale.

Les données réelles sont dénotées avec R, alors que E représente l'erreur relative commise comparée à des données réelles, donnée en pourcentage.

Anée	2000	2001	2002	2003	2004	2005
t	0	0.23	0.46	0.69	0.92	1.15
$I_{OD}$	34631	37184	39925	42867	46026	49417
$U_{OD}$	30715469	30712916	30710175	30707233	30704074	30700683
$y_{OD} \cdot 10^4$	11.2621	12.0924	12.9838	13.9406	14.9678	16.0704
$x_{od}$	0.998874	0.998791	0.998702	0.998606	0.998503	0.998393

Tableau 4.3: Nombre de personnes infectées et non infectées évalué par la dérivée optimale

## 4.5 Conclusion

Les conclusions principales qui peuvent être déduites sont:

- Les résultats obtenus à partir d'une analyse numérique du modèle de .D.Aggarwala, montrent que l'évolution des solutions au court du temps dépend des valeurs des paramètres et peuvent changer d'une manière essentielle avec un changement de ces paramètres.
- Il apparaît clairement qu'une bonne utilisation de la méthode de linéarisation opti-



male (choix des conditions initiales et des paramètres adéquats) permet de confirmer numériquement la nature de l'origine qui peut être un point selle ou un noeud stable.

- La méthode de la dérivée optimale peut être utilisée comme un outil essentiel et puissant pour la modélisation numérique du système de BD Aggarwala et permet la description quantitative du comportement des populations dans une société.

- On devrait jouer correctement sur le temps, c'est un facteur qui semble poser un problème important pour relier les résultats théoriques à la réalité biologique.

## Conclusion Générale

# Conclusion

Dans cette thèse, nous avons abordé les équations différentielles ordinaires non linéaires par l'utilisation de la dérivation optimale.

Nous avons étudié différents types de modèles qui ont la particularité de toucher plusieurs domaines, modèles physiques issus de l'électronique et des modèles biologiques (dynamique de population).

La première étude issue de l'électronique se présente comme une contribution à l'analyse des aspects qualitatifs de quelques classes des circuits électroniques non linéaires. Cela consiste à faire une étude comparative entre deux méthodes appliquées à un circuit non linéaire afin d'identifier celle qui a le comportement réel le plus proche de cet circuit. Ces techniques sont la méthode de linéarisation classique et la dérivée optimale.

Dans le cas de l'analyse des équations dépendant d'un paramètre (phénomène de bifurcation) accompagnée d'un échange de stabilité et présentant plusieurs cas critiques aux points de bifurcation, on a étudié un autre circuit électronique ou on a effectué une comparaison et validation des résultats obtenus en utilisant la méthode de dérivation optimale. De ces études on a abouti aux résultats suivants:

- Le choix des conditions initiales s'impose dans l'utilisation des deux méthodes: Dérivée optimale et la linéarisation classique, ainsi que l'ordre d'approximation.
- On a montré par un calcul d'erreur quadratique, que tant qu'on est loin de l'origine, la méthode de la dérivée optimale reste meilleure. Mais à l'approche de l'origine il y a une inversion de la qualité de l'approximation au profit de la linéarisation classique qui devient la meilleure quand elle existe et est hyperbolique.
- Les écueils posés par la méthode de la linéarisation classique sont résolubles par la méthode de la dérivée optimale.
- En se basant sur une propriété importante de la méthode, déterminée à partir de l'estimation de l'erreur commise, la méthode de la dérivée optimale permet de détecter les différents échanges de stabilité qui accompagnent le phénomène complexe de bifurcation.

- Un résultat important qu'on peut définir à partir de l'application de cette méthode au point critique la possibilité de définir le sens de bifurcation des solutions, ainsi les échanges de stabilité qui ont lieu brusquement à la valeur de bifurcation, sont suivis rigoureusement par la dérivée optimale (les valeurs propres de la matrice optimale passent du demi plan droit au demi plan gauche, en gardant les parties réelles des valeurs propres non nulles à la valeur de bifurcation).

- Une bonne description du changement du comportement des solutions, en obéissant d'une façon satisfaisante à la dynamique du système non-linéaire initial.

Pour le modèle de biologie mathématique, c'est un modèle proie prédateur de type ratio dépendant. Ce modèle pose un défi concernant la dynamique proche de l'origine. Ceci est dû au fait que ce modèle n'est pas défini à l'origine et ne peut pas être linéarisé autour de ce point. En revanche une modélisation par la dérivée optimale peut faire apparaître les comportements émergents. Les principaux résultats se résument comme suit:

- Dans le cas de l'application du modèle ratio dépendant à l'évolution du sida dans une société, le point (0,0) représente l'annulation de la société, l'étude du comportement au voisinage de ce point est très importante.

- D'après l'étude de B. D. Aggarwala, les solutions tendent à l'origine avec une pente  $m = \tan(\theta)$  et cette équilibre peut être un point selle dans l'intervalle  $0 < \theta < \theta_1$  et un noeud stable dans l'autre intervalle  $\theta_1 < \theta < \pi$ .

- La linéarisation de ce modèle autour de ce point d'équilibre par la méthode de la dérivée optimale nous permet d'étudier le comportement analytique autour de l'origine et de confirmer leur stabilité, il peut être un point selle ou un noeud stable. L'aspect qualitatif (comportement des solutions, type de l'origine) peut être retrouvé par cette méthode.

- Nous avons aussi appliqué la dérivée optimale pour estimer le nombre d'individus infectés par le virus d'HIV qui cause la maladie du sida dans la société canadienne. On a calculé également l'erreur relative pour la comparaison. La méthode de la dérivée optimale peut être utilisée comme un outil essentiel et puissant pour la modélisation numérique du système de BD Aggarwala et permet la description quantitative du comportement

des populations dans une société. Elle devrait jouer correctement sur le temps, c'est un facteur qui semble poser un problème important pour relier les résultats théoriques à la réalité biologique. dimensions.

Enfin, le travail entrepris dans le cadre de cette thèse fait partie d'un axe de recherche qui mérite d'être approfondi. En particulier:

- L'utilisation de cette méthode pour étudier la stabilité d'autres modèles biologiques.
- Nous souhaitons enfin, que ce travail puisse évoluer vers une étude plus détaillée des phénomènes de bifurcations et ceci grâce à l'utilisation du logiciel AUTO 2000.

# Bibliographie

- [1] **J. Hale**, (1969), *Ordinary differential equations*, Springer Verlag.
- [2] **E. A. Coddington and N. Levinson**, (1955), *Theory of ordinary differential equations*, Mc Graw-Hill.
- [3] **N. Rouche, J. Mawhin**, (1973), *Equations différentielles ordinaires, Tome I, Théorie générale*, Masson et C<sup>ie</sup>.
- [4] **N. Rouche, J. Mawhin**, (1973), *Equations différentielles ordinaires, Tome II, Stabilité et solutions périodiques*, Masson et C<sup>ie</sup>.
- [5] **W. Ralston & Wilf**, (1960), *Mathematical methods for digital computers*, Wiley, New York, pp.110-120 .
- [6] **R. E. Kalman, E. J. E. Bertran**, (1960), *Control system analysis and design via second method of Liapunov*, journal of basic engineering, 371-393.
- [7] **L. Pontriaguine**: (1975) *Equations différentielles ordinaires*, collection Mir.
- [8] **M. La Porte et J. Vignes**, (1974) *Algorithmes numériques, Analyse et mise en oeuvre*, Ed. Technip.
- [9] **H. Reinhart**, (1975), *Equations différentielles, fondements et applications*. Gauthier-Villars.
- [10] **W. Rudin**, (1975), *Analyse complexe et réelle*, Masson et C<sup>ie</sup>.

- [11] **M. Sibony et J.CI. Mardon**, (1988), *Analyse numérique II, Approximations et équations différentielles*, Hermann, Editeurs des sciences et arts.
- [12] **T. Benouaz et O. Arino**, (1994), *Existence, unicité et convergence de l'approximation au sens des moindres carrés d'une équation différentielle ordinaire non-linéaire*, 94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204.
- [13] **T. Benouaz and O. Arino**, (1995), *Determination of the stability of a nonlinear ordinary differential equation by least square approximation. Computational procedure*, Appl. Math. and Comp sci., N°1, Vol. 5, pp 33-48.
- [14] **T. Benouaz and O. Arino**, (1996), *Least square approximation of a nonlinear ordinary differential equation*, Computers Math. Applic. , Vol. 31, N°8, pp. 69-84.
- [15] **T. Benouaz et O. Arino**, (1995) *Relation entre l'approximation optimale et la stabilité asymptotique*, Publications de l' U.A, CNRS 1204, N<sub>0</sub>.95/10.
- [16] **J. P. Demailly**, (1991), *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble.
- [17] **B. Vujanovic, B. Baclic**, (1975) *Application of Gauss principle of least constraint to the non-linear heat transfer problem*, Int. Heat. Mass Transfer, vol.13, pp. 721-730. Pergamon Press, Oxford.
- [18] **B.Vujanovic**, (1973), *Application of the optimal linearization method to the heat transfer problem. International*, Int. Heat mass transfer, 16, pp. 1111-1117.
- [19] **A. Jordan et al**, (1987), *Optimal linearization method applied to the resolution of state equation*, RAIRO-APII, 21, 175-185.
- [20] **A. Jordan et al**, (1987), *Optimal linearization of non-linear state equation*, RAIRO-APII, 21, 263-271.

- [21] **T. Benouaz and O. Arino**, (1998), *Optimal Approximation of the Initial Value Problem*, Computers Math. Applic., Vol. 36, N°1, pp 21-32.
- [22] **T. Benouaz**, (13 – 17 August 1995), *Least Square Approximation of a Nonlinear Ordinary Differential Equation : The Scalar Case*, Proceeding of the Fourth International Colloquium on Numerical Analysis pp. 19-22 , Plovdiv, Bulgaria.
- [23] **T. Benouaz**, (1996), *Contribution à l'Approximation et la Synthèse de la Stabilité d'une Equation Différentielle Ordinaire Non Linéaire*, Thèse de Doctorat en Sciences Physiques, Tlemcen.
- [24] **A. Chikhaoui**, (2009), *Relation entre la Dérivée Optimale et la Stabilité Asymptotique*, Thèse de Magistère, Tlemcen.
- [25] **F. Belkhouche**, (2001), *Contribution à l'Etude de la Stabilité Asymptotique par la Dérivée Optimale*, Thèse de Magistère, Tlemcen.
- [26] **N. Brahmi**, (2002), *Relation entre la dérivée Optimale et la Linéarisation Classique*, Thèse de Magister, Tlemcen.
- [27] **Benouaz Tayeb, Bohner Martin**, (2007), On the relationship between the classical linearization and optimal derivative, *Advances in Dynamical Systems and Applications*, (ADSA), Vol. 2, N°1, pp. 41-57.
- [28] **T. Benouaz, Martin Bohner, A.Chikhaoui**, (2009), On The Relationship between the optimal Derivative and asymptotique Stability, *African Diaspora Journal of Mathematics*, Volume 8, Number 2, pp.148-162.
- [29] **F. Lassouani, T. Benouaz, A.Chikhaoui, S.M.A. Bekkouche**,(2012), Study of the Nonlinear Physicals Systems by Optimal Derivative. Applications, *International Journal of Computer Science Issues*, IJCSI, Vol. 9, N° 3, Issue 6.
- [30] **T. Benouaz, F. Lassouani, S.M.A. Bekkouche, M. Bohner**, (2011), *Application of the optimal derivative to the study of a ratio-dependent model describing the*



*evolution of HIV in Canada. Advances in Dynamical Systems and Applications,(*  
*A.D.S.A.) Volume 6, Number 1, pp. 312.*

- [31] **L. Lassouani**, (2004), *Dérivée Optimale et Application en Dynamique de Ppopulation*, Thèse de Magistère, Tlemcen.
- [32] **F. Belkhouche**, (2004), *Contribution à l'Etude de la Stabilité Des Système Ratio-Dépendant par la Dérivée Optimale*, Thèse de Magistère, Tlemcen.
- [33] **A. Abdllaoui**, (2004), *Modelisation et Etude Mathématique de Quelques Problèmes de Dynamique des populations*, Thèse de Doctorat, Maroc.
- [34] **F. Beresovskaya, G. karev, R. Arditi**, (2001) , *Parametric analysis of the ratio-dependant predator-prey model*.
- [35] **C-P.Ho et K-S. Lin**, (July 2001), *Global Sstability For a Class of Predator- Prey Systems With Ratio Dependence*, Tunghai Science, Vol.3 pp 113-133.
- [36] **Dongmei Xiao, Sigui Ruan**, (2001), *Global dynamics of a ratio-dependent predator-prey system*, J.Math.Biol. 43, 268 - 290.
- [37] **B.D. Aggarwala**, (2001) , *The Fascinating Predator-Prey Eqaution and Development of HIV / AIDS in Canada*, Vol. 5, Issue 2, Pacific Institute for the Mathematical Sciences.
- [38] **T. Benouaz**, *Approximation of a nonlinear ordinary differential equation by an optimal procedure*, à paraitre dans the "Proceeding of the 2nd International Conférence on Differential Equations in Marrakech", (16-20 june1995).

## **Application of the Optimal Derivative to the Study of a Ratio-dependent Model describing the Evolution of HIV in Canada**

**Tayeb Benouaz, Fatiha Lassouani,  
Sidi Mohamed Amine Bekkouche**

Université Abou Bakr Belkaïd  
Laboratoire de Modélisation  
B. P. 119, Tlemcen R. P., 13000, Algeria  
[t\\_benouaz@mail.univ-tlemcen.dz](mailto:t_benouaz@mail.univ-tlemcen.dz)

**Martin Bohner**

Missouri S&T, Department of Mathematics and Statistics  
Rolla, Missouri 65409-0020, USA  
[bohner@mst.edu](mailto:bohner@mst.edu)

### **Abstract**

In this paper, we propose a study concerning a ratio-dependent model suggested by B. D. Aggarwala which describes the evolution of AIDS in the Canadian society in the case of extinction. On the basis of statistical data on HIV/AIDS published by the authorities of the Canadian health department, B. D. Aggarwala could estimate the number of people infected by this virus in Canada during four years in advance (1996–1999). An application of the optimal derivative as introduced by O. Arino and T. Benouaz enables us to compare the results obtained with those found by B. D. Aggarwala.

**AMS Subject Classifications:** 34A30, 34A34.

**Keywords:** Predator prey, ratio-dependent model, optimal derivative.

## **1 Introduction**

The main characteristics of ratio-dependent models used in population models is that the functional responses should depend on the ratio of prey/predator. This type of response corresponds in particular to the sharing of resources among the predators. A

major problem encountered in this model is the absence of regularity in the neighborhood of the origin. It is not possible to analyze this model using the classical method of linearization. In the study of nonlinear ordinary differential equations, the linearization method plays an important rôle. In [4–7], Arino and Benouaz have introduced an alternative method termed as the optimal derivative method (see also [8–10]). This is an approximation procedure based on the minimization of a certain functional with respect to a curve starting from an initial value  $x_0$  and going to zero as  $t$  goes to infinity.

Our intention is to apply and make some progress with this procedure in the area of ratio-dependent predator-prey models used in the ecology of population. In the second section, we present the model. The third section is devoted to the review of the optimal derivative. In the last section, we apply the optimal derivative to estimate the number of individuals in the Canadian society infected by the human deficiency virus (HIV) that causes the acquired immune deficiency syndrome (AIDS). For comparison, we also compute the relative errors in our model and in Aggarwala's model (see [1–3]).

## 2 Presentation of the Model

The development of HIV/AIDS in a society can be modelled by a ratio-dependent predatory–prey model. In this model, the population is divided into two classes, namely the HIV negative individuals and the HIV positive ones. Such ratio-dependent systems can be written in the form

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x(1 - x) - \frac{xy}{x + y} \\ \dot{y} = -ay + \frac{kxy}{x + y}, \end{cases} \quad (2.1)$$

where  $x(t)$  is the number of prey (or the HIV negative individuals) at any time  $t$ ,  $y(t)$  is the number of predators (or the HIV positive individuals) at any time  $t$ ,  $k > 0$  is the conversion factor,  $a > 0$  is the death rate of the predator, and  $\alpha > 0$  is the growth factor of the prey.

Model (2.1) is used by B. D. Aggarwala for an epidemiologic study concerning the development of HIV/AIDS in Canada [1] (see also [2, 3]). If we simply want to study the behavior of model (2.1) in the origin, we realize that this is not possible because the nonlinear function representing the differential equation is not differentiable in this point; however, in the case of HIV/AIDS, this point represents the annihilation of the society.

On the basis of statistical data on HIV/AIDS which were published by the Canadian health department, B. D. Aggarwala could estimate the number of people infected by this virus in Canada during the years 1996, 1997, 1998, and 1999. A comparison with the actual numbers including the errors made during these years is contained in Table 2.1.

Table 2.1: Estimated and actual numbers of infected individuals during 1996–1999.

Year	1996	1997	1998	1999
Estimate	26130	28005	30278	32306
Actual	26190	28110	30181	32253
Error (%)	0.23	0.37	0.32	0.16

In this paper we linearize the model of B. D. Aggarwala by the method of the optimal derivative and thus estimate the number of infected individuals while using the linear model.

### 3 Optimal Derivative Review

Consider a nonlinear ordinary differential problem of the form (see [11–14])

$$\dot{x} = F(x), \quad x(0) = x_0,$$

where

- $x = (x_1, \dots, x_n)$  is the unknown function,
- $F = (f_1, \dots, f_n)$  is a given function on an open subset  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,

with the assumptions

(H<sub>1</sub>)  $F(0) = 0$ ,

(H<sub>2</sub>) the spectrum  $\sigma(DF(x))$  is contained in the set  $\{z : \operatorname{Re}z < 0\}$  for every  $x \neq 0$ , in a neighborhood of 0 for which  $DF(x)$  exists,

(H<sub>3</sub>)  $F$  is  $\gamma$ -Lipschitz continuous.

Given  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , we choose a first linear map  $A_0$ . For example, if  $F$  is differentiable in  $x_0$ , then we can take  $A_0 = DF(x_0)$  or the derivative value in a point in the vicinity of  $x_0$ . This is always possible if  $F$  is locally Lipschitz. Now, let  $y_0$  be the solution of the initial value problem

$$\dot{y} = A_0 y, \quad y(0) = x_0. \quad (3.1)$$

Next, we minimize the functional

$$G(A) = \int_0^\infty \|F(y_0(t)) - A y_0(t)\|^2 dt. \quad (3.2)$$

This minimization problem is always uniquely solvable, and as the optimal linear map minimizing (3.2) we obtain

$$A_1 = \left( \int_0^\infty [F(y_0(t))][y_0(t)]^T dt \right) \left( \int_0^\infty [y_0(t)][y_0(t)]^T dt \right)^{-1}.$$

Now we define  $y_1$  to be the solution of (3.1) with  $A_0$  replaced by  $A_1$  and we minimize (3.2) with  $y_0$  replaced by  $y_1$ . Then we continue in this way. The optimal derivative  $\tilde{A}$  is the limit of the sequence build as such (for details, see [4–10]).

## 4 Application

The aim of this application is to estimate the number of people infected by HIV using the optimal derivative. In this application, we use the optimal derivative to study an example which treats the case of extinction. Thus we will confirm the results found previously. We make the same study but we use a model in which we linearize by the method of the optimal derivative. For this we choose an example in the case of extinction. The parameters are given by the model used in [1], i.e., we put the parameters  $\alpha = 0.595$ ,  $a = 0.31$ , and  $k = 0.62$  into the model (2.1) to obtain

$$\begin{cases} \dot{x} = 0.595x(1-x) - \frac{xy}{x+y} \\ \dot{y} = -0.31y + \frac{0.62xy}{x+y}. \end{cases} \quad (4.1)$$

We choose an initial condition near the origin  $(x_0, y_0) = (0.9, 0.399)$  and use the optimal derivative to obtain the matrix

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0495 & 0.0628 \\ 0.0061 & -0.0238 \end{bmatrix},$$

which corresponds to the linear system

$$\begin{cases} \dot{x} = -0.0495x + 0.0628y \\ \dot{y} = 0.0061x - 0.0238y. \end{cases} \quad (4.2)$$

In Figures 4.1, 4.2, and 4.3 we compare the two systems (4.1) and (4.2). According to Figures 4.1, 4.2, and 4.3, it is clear that this example treats the case of extinction where  $y(t)$  increases at the beginning and then starts to decrease in the course of time. Consequently,  $x(t)$  decreases in the course of time until it is extinct. What interests us is the evolution of  $y(t)$  since it represents the number of infected people. In particular, we would like to use the optimal derivative to study the variation of  $y(t)$  in the interval of reduction.

To use the optimal linear system in order to estimate the number of infected people in Canada, it is initially necessary to calculate the average scale of time which corresponds

Figure 4.1: The phase plan of (4.1) and (4.2) when  $(x_0, y_0) = (0.9, 0.399)$ .

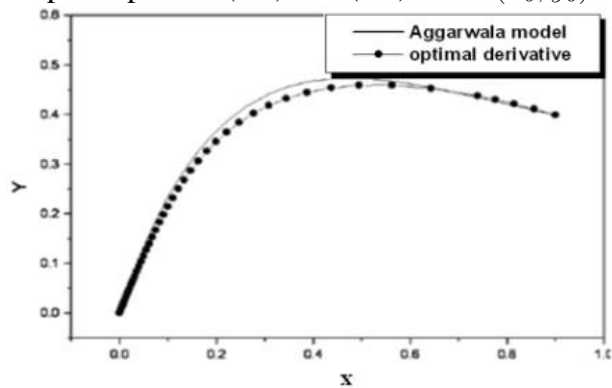


Figure 4.2: The variation of  $x$  as a function of time when  $(x_0, y_0) = (0.9, 0.399)$ .

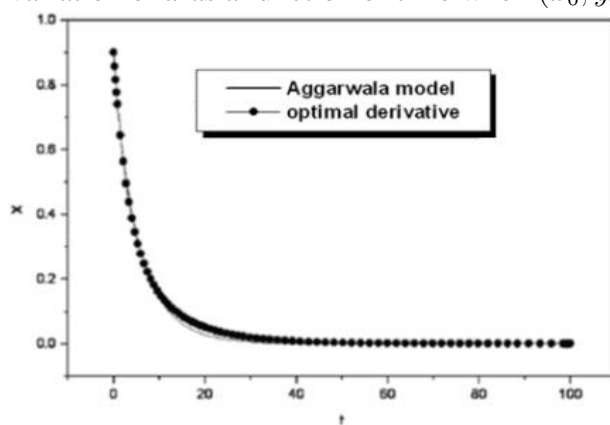
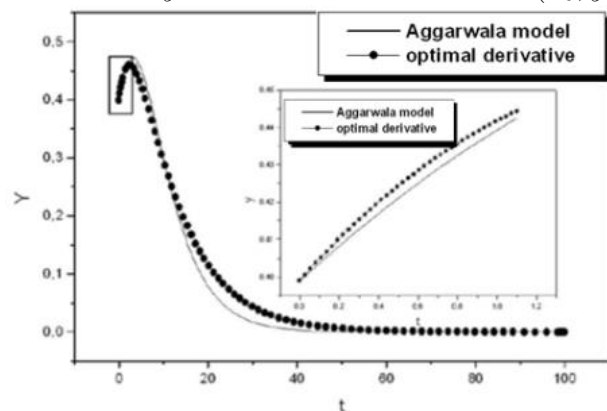


Figure 4.3: The variation of  $y$  as a function of time when  $(x_0, y_0) = (0.9, 0.399)$ .



to one year in Table 2.1. To do this, we observe that the years 1996, 1997, 1998 and even 1999 correspond to the initial conditions of the following year. However, to carry out this study, we consider that the change in population demographics of the Canadian society during these years is constant. In this sense, using the Aggarwala model, we can estimate the value of  $t$  that corresponds to the values of  $x$  and  $y$  of the following year. The values of  $x$  and  $y$  are provided by the Aggarwala mathematical model. They are those given in Table 4.1. After some calculation, we found that the average time scale which corresponds to one year is equal to 0.23.

Since 1 represents the total density of the demographic population of the Canadian society, we define  $y_{AM}$  and  $y_R$  by

$$y_{AM} = \frac{\text{Number of infected individuals using the Aggarwala model}}{30750100}$$

and

$$y_R = \frac{\text{Real (actual) number of infected individuals}}{30750100}.$$

Also,

$$\begin{aligned} \text{Uninfected number} &= \text{Number of total demographic population} \\ &\quad - \text{Infected number by the virus.} \end{aligned}$$

In order to assess how many people are infected with HIV, we use the optimal derivative method. For each year we choose and compute the optimal matrix  $\tilde{A}$  and provide the initial conditions for the following year. Hence each time we take a final time equal to 0.23. This technique gives remarkable results compared to the other technique, i.e., the case where one considers and uses only one optimal matrix for a single initial condition corresponding to the year 1996. In this case, we must assess the number of infected people each year for the times 0.23, 0.46, 0.69, 0.92, ...

Figure 4.4: Variation of the infected population during the year 1996,  $y = f(t)$ .

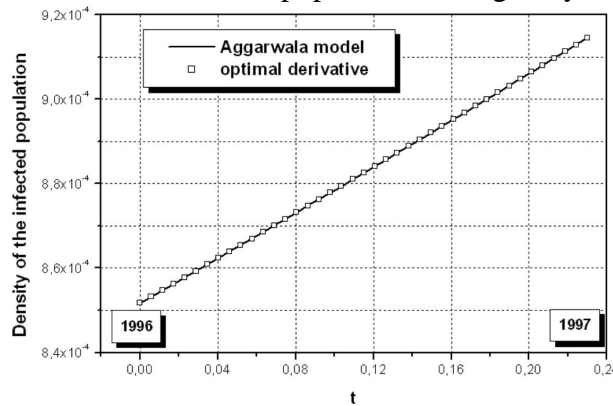


Figure 4.5: Variation of the infected population during the year 1997,  $y = f(t)$ .

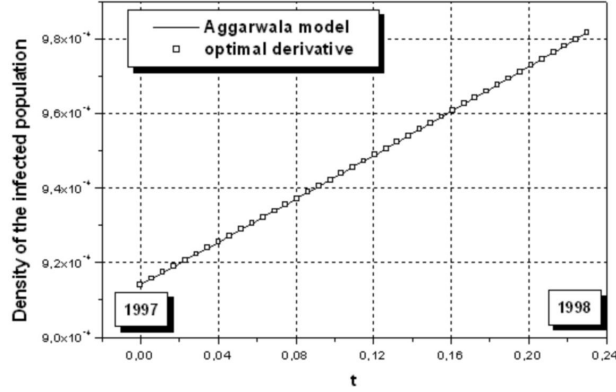
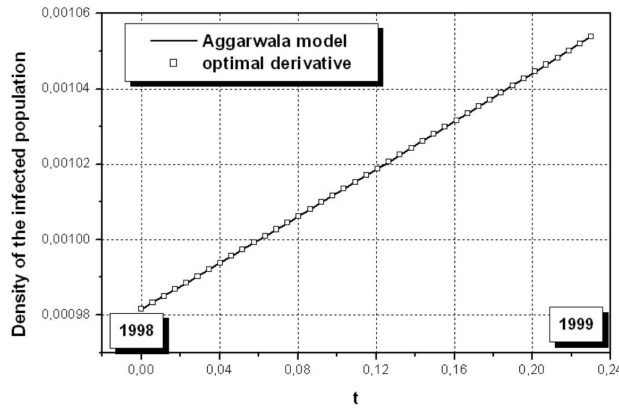


Figure 4.6: Variation of the infected population during the year 1998,  $y = f(t)$ .



In order to estimate the number of infected individuals by HIV in 1997, we find the optimal matrix as

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.534089 & -0.998297 \\ 4.497484 \cdot 10^{-7} & 0.308944 \end{bmatrix}.$$

Next, for 1998, the corresponding optimal matrix is

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.534022 & -0.998172 \\ 5.181080 \cdot 10^{-7} & 0.308867 \end{bmatrix},$$

while for 1999, we find the optimal matrix as

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.533951 & -0.998038 \\ 5.972634 \cdot 10^{-7} & 0.308783 \end{bmatrix}.$$

For the results of these calculations, we refer to Table 4.1. In Table 4.1, the numbers of infected and uninfected individuals are given using various estimates. These values



Table 4.1: The numbers of infected and uninfected individuals by various estimates.

Year	1996	1997	1998	1999
$t$	0	0.23	0.46	0.69
$I_R$	26190	28110	30181	32253
$U_R$	30723910	30721990	30719919	30717847
$y_R \cdot 10^4$	8.5170	9.1414	9.8149	10.4887
$x_R$	0.999148	0.999086	0.999019	0.998951
$I_{AM}$	26130	28005	30278	32306
$U_{AM}$	30723970	30722095	30719822	30717794
$y_{AM} \cdot 10^4$	8.4975	9.1073	9.8465	10.5060
$x_{AM}$	0.999150	0.999089	0.999015	0.998949
$E$ on $y_{AM}$	0.23	0.37	0.32	0.16
$I_{OD}$	26190	28122	30183	32407
$U_{OD}$	30723910	30721990	30719919	30717847
$y_{OD} \cdot 10^4$	8.5170	9.1453	9.8156	10.5388
$x_{OD}$	0.999148	0.999085	0.999018	0.998946
$E$ on $y_{OD}$	0	0.0423	0.00685	0.479
$E$ on $x_{OD}$	0	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$7.01 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-4}$

Table 4.2: The numbers of infected and uninfected individuals by the optimal derivative.

Year	2000	2001	2002	2003	2004	2005
$t$	0	0.23	0.46	0.69	0.92	1.15
$I_{OD}$	34631	37184	39925	42867	46026	49417
$U_{OD}$	30715469	30712916	30710175	30707233	30704074	30700683
$y_{OD} \cdot 10^4$	11.2621	12.0924	12.9838	13.9406	14.9678	16.0704
$x_{OD}$	0.998874	0.998791	0.998702	0.998606	0.998503	0.998393

are compared with the observed values for the Canadian population. The relative errors are calculated in order to judge the reliability and effectiveness of the optimal derivative method. The relative error is defined by

$$\text{Relative error} = \frac{|\text{Estimated value} - \text{Real value}|}{\text{Real value}}.$$

In order to predict the numbers of infected and uninfected individuals during the years 2000–2005 using the optimal derivative, we use the same technique as described previously. The results are summarized in Table 4.2. In Tables 4.1 and 4.2 we use the following abbreviations:  $I$  and  $U$  stand for the number of infected individuals and uninfected individuals, respectively. We write AM for the Aggarwala model and OD for the optimal derivative. The observed real data are denoted with R, while  $E$  stands for the relative error committed compared to the real data, given in percent.

## 5 Conclusion

Simplification is very important in modelling. The optimal derivative procedure can be used as a powerful tool for modelling predator-prey systems numerically. In this paper we have employed the optimal derivative technique to analyze a ratio-dependent predator-prey model given by B. D. Aggarwala. The optimal derivative method helps to give a quantitative and qualitative description of the behavior of the two populations. We must use the factor time correctly in order to relate theoretical results to the biological reality.

## Acknowledgements

This work is supported by A. P., C. N. E. P. R. U. Research Program D1301/51/06.

## References

- [1] B. D. Aggarwala. The fascinating predator-prey equation and development of HIV/AIDS in Canada. *Pacific Institute Math. Sci. Newsletter*, 5(2):16–19, 2001.
- [2] B. D. Aggarwala. On two ODE models for HIV/AIDS development in Canada and a logistic SEIR model. *Far East J. Appl. Math.*, 6(1):25–70, 2002.
- [3] B. D. Aggarwala. On estimating HIV prevalence in Canada and in the United States. *Far East J. Appl. Math.*, 20(3):335–354, 2005.
- [4] Tayeb Benouaz. Optimal derivative of a nonlinear ordinary differential equation. In *Equadiff 99, international conference on differential equations*, volume 2, pages 1404–1407. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000.

- [5] Tayeb Benouaz and Ovide Arino. Determination of the stability of a non-linear ordinary differential equation by least square approximation. Computational procedure. *Appl. Math. Comput. Sci.*, 5(1):33–48, 1995.
- [6] Tayeb Benouaz and Ovide Arino. Least square approximation of a nonlinear ordinary differential equation. *Comput. Math. Appl.*, 31(8):69–84, 1996.
- [7] Tayeb Benouaz and Ovide Arino. Optimal approximation of the initial value problem. *Comput. Math. Appl.*, 36(1):21–32, 1998.
- [8] Tayeb Benouaz and F. Bendahmane. Least-square approximation of a nonlinear O.D.E. with excitation. *Comput. Math. Appl.*, 47(2-3):473–489, 2004.
- [9] Tayeb Benouaz and Martin Bohner. On the relationship between the classical linearization and optimal derivative. *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, 2(1):41–57, 2007.
- [10] Tayeb Benouaz, Martin Bohner, and Abdelhak Chikhaoui. On the relationship between the optimal derivative and asymptotic stability. *Afr. Diaspora J. Math. (N.S.)*, 8(2):148–162, 2009.
- [11] Earl A. Coddington and Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.
- [12] Jack K. Hale. *Ordinary differential equations*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1969. Pure and Applied Mathematics, Vol. XXI.
- [13] R. E. Kalman and J. E. Bertram. Control system analysis and design via the “second method” of Lyapunov. I. Continuous-time systems. *Trans. ASME Ser. D. J. Basic Engrg.*, 82:371–393, 1960.
- [14] Anthony Ralston and Herbert S. Wilf. Mathematical methods for digital computers. pages 110–120. John Wiley & Sons Inc., New York, 1960.

# Study of the Nonlinear Physical Systems by Optimal Derivative. Applications

F. Lassouani<sup>1</sup>, T. Benouaz<sup>1</sup>, A.Chikhaoui<sup>1</sup>, S.M.A. Bekkouche<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Automatic Laboratory, B. p.119, Tlemcen University  
R. p., 13000, Tlemcen, Algeria.

<sup>2</sup>URAER, B.P. 88, ZI, Gart Taam Ghardaïa, Algeria.

## Abstract :

The aim of this work is to present the survey of the computational mathematics method called Optimal Derivative introduced by Arino-Benouaz (1995, 1996, 2000) and developed by Bohner\_Benouaz (2007, 2009, 2011) using in the modelling of the nonlinear physical systems.

**Keywords:** *Optimal derivative, Computational procedure, Stability, Nonlinear physical system, Classical linearization.*

## 1. Introduction

The study of differential equations is a mathematical field that has historically been the subject of much research, however, continues to remain relevant, by the fact that it is of particular interest in such disciplines as engineering, physical sciences and more recently biology and electronics, in which many models lead to equations of the same type. Most of these equations are generally nonlinear in nature. The term “nonlinear” gathers extremely diverse systems with little in common in their behavior. It follows that there is not, so far, a theory of nonlinear equations. A large class of these nonlinear problems is modelled by nonlinear ordinary differential equations. Linearization methods play an important role in the analysis of ordinary differential equations. A classical linear approximation is obtained by the Frechet derivative of a nonlinear equation.

Most analytical methods for obtaining approximate solutions to nonlinear ordinary differential equations require that the nonlinearities be sufficiently differentiable in order to determine higher-order approximations. Such methods include perturbation techniques [1,4], standard and modified Linsted Poincare procedures [5,7], Adomian's decomposition method [8,10], the homotopy analysis technique [11,12], the homotopy perturbation method [7] which is a special case of the homotopy analysis technique and is obtained from the latter by setting the parameter that is used to increase the convergence radius to one (the homotopy perturbation method also corresponds to the differential form of Adomian's decomposition method), artificial parameter

techniques [7,17,22], iterative linearized and quasi linearized harmonic balance methods [23,26], etc.

In fact, a careful study of the above techniques indicates that they require that the nonlinearities be analytic functions of the dependent variables and their derivatives with respect to the independent variable. When this is not the case, e.g., when there are fractional-power nonlinearities, one may provide some higher-order approximations by introducing generalized functions [27,32] or the theory of distributions [33] and employing weak convergence [34]. However, even when generalized functions are used, one frequently has to deal with the presence of monopoles, dipoles, quadrupoles, etc., which correspond to the Dirac delta function and its first and second-order derivatives, etc., respectively, whose Fourier series do not converge point-wise.

The study of stability of the equilibrium point of a nonlinear ordinary differential equation is an almost trivial problem if the function  $F$  which defines the nonlinear equation is sufficiently regular in the neighborhood of this point and if its linearization in this point is hyperbolic. In this case, we know that the nonlinear equation is equivalent to the linearized equation, in the sense that there exists a local diffeomorphism which transforms the neighboring trajectories of the equilibrium point to those neighbors of zero of the linear equation. On the other hand, the problem is all other when the nonlinear function is nonregular or the equilibrium point is the center.

Consider the nonregular case. Imagine the case when the only equilibrium point is nonregular. In this case, we cannot derive the nonlinear function and consequently we cannot study the linearized equation. A natural question arises then: Is it possible to associate another linear equation to the nonlinear equation which has the same asymptotic behavior ?

The idea proposed by Benouaz and Arino is based on the method of approximation. In [39, 40], the authors introduced the optimal derivative, which is in fact a global approximation as opposed to the nonlinear perturbation of a linear equation, having a distinguished behavior with

respect to the classical linear approximation in the neighborhood of the stationary point. This technique presented in the paper do not require the derivatives of the nonlinearities (neither do they require the presence of small parameters in the ordinary differential equations) and are, therefore, applicable to nonlinear oscillators with non-smooth nonlinearities.

The aim of this paper is to present several examples using the optimal derivative. After a brief review of the optimal derivative procedure in the second section, the third section is devoted to the study of the relationship between the optimal derivative and Frechet derivative in the equilibrium point in the scalar and vectorial case. In the fourth section, we prove for a class of functions that the optimal derivative can be computed even though the classical linearization in 0 does not exist. In the last section, we present two applications in relation with the problem in Electronic and mechanical systems, the study shows, in particular, the influence of the choice of initial conditions. A comparizon with the classical linearization

## 2. The Optimal Derivative

### 2.1. The Method

Consider a nonlinear ordinary differential problem of the form:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

Where

- $x = (x_1, \dots, x_n)$  is the unknown function,
- $F = (f_1, \dots, f_n)$  is a given function on an open subset  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,

with the assumptions

(H1)  $F(0) = 0$ ,

(H2) the spectrum  $\sigma(DF(x))$  is contained in the set  $\{z: \text{Re}z < 0\}$  for every  $x \neq 0$  in a neighborhood of 0, for which  $DF(x)$  exists.

(H3)  $F$  is  $\gamma$  Lipschitz continuous.

Consider  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  and the solution  $x$  of the nonlinear equation starting at  $x_0$ . With all linear  $x_0 \in A(L(\mathbb{R}^n))$ , we associate the solution  $y$  of the problem

$$\frac{dy}{dt} = A y(t), \quad y(0) = y_0,$$

and we try to minimize the functional

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \| F(y(t)) - A y(t) \|^2 dt \quad (2)$$

along a solution  $y$ . We obtain

$$\tilde{A} = \left[ \int_0^{+\infty} [F(x(t))][x(t)]^T dt \right] \times \left[ \int_0^{+\infty} [x(t)][x(t)]^T dt \right]^{-1} \quad (3)$$

Precisely, the procedure is defined by the following scheme: Given  $x_0$ , we choose a first linear map. For example, if  $F$  is differentiable in  $x_0$ , then we can take  $A_0 = DF(x_0)$  or the derivative value in a point in the vicinity of  $x_0$ . This is always possible if  $F$  is locally Lipschitz. If  $A_0$  is an asymptotically stable map, then the solution starting from  $x_0$  of the problem.

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y(t), \quad y(0) = y_0,$$

tends to 0 exponentially. We can evaluate  $G(A)$  using criteria and we minimize  $G$  for all matrices  $A$ . If  $F$  is linear, then the minimum is reached for the value  $A = F$  (and we have  $A_0 = F$ ). Generally, we can always minimize  $G$ , and the matrix which gives the minimum is unique. We call this matrix  $A_1$  and replace  $A_0$  by  $A_1$ , we replace  $y$  by the solution of the linearized equation associated to  $A_1$ , and we continue. The optimal derivative  $A$  is the limit of the sequence build as such (for details see [39]).

### 2.2 Properties of the Method

We will now consider situations where the procedure converges.

- Influence of the choice of the initial condition

Note that if we change  $x(t)$  to  $z$ , then the relation atilda can be written as

$$\tilde{A} \int_0^{x_0} z dz^T = \int_0^{x_0} F(z) dz^T,$$

where  $\oint_0^{x_0}$  is the curvilinear integral along the orbit  $\gamma(x_0) = \{e^{Bt} : t \geq 0\}$  of  $x_0$ . We obtain

$$\tilde{A} = \left( \oint_0^{x_0} F(z) dz^T \right) \left( \oint_0^{x_0} z dz^T \right)^{-1}$$

It is clear that the optimal derivative depends on the initial condition  $x_0$ .

### 2.2.1 Case when $F$ is linear

If  $F$  is linear with  $\sigma(F)$  in the negative part of the complex plane, then the procedure gives  $F$  at the first iteration. Indeed, in this case, (3) reads

$$A \Gamma(x) = F \Gamma(x)$$

and it is clear that  $A = F$  is a solution. It is unique if  $\tilde{A}(x)$  is invertible. Therefore, the optimal approximation of a linear system is the system itself.

### 2.2.2 Case when $F$ is the sum of a linear and nonlinear term

Consider the more general system of nonlinear equations with a nonlinearity of the form

$$F(x) = Mx + \tilde{F}(x), \quad x(0) = x_0,$$

where  $M$  is linear. The computation of the matrix  $A_1$  gives

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[ \int_0^{+\infty} [F(x(t))][x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1} \\ &= \left( M \Gamma(x) + \int_0^{+\infty} [\tilde{F}(x(t))][x(t)]^T dt \right) [\Gamma(x)]^{-1} \\ &= M + \left( \int_0^{+\infty} [\tilde{F}(x(t))][x(t)]^T dt \right) [\Gamma(x)]^{-1} \end{aligned}$$

Hence,  $A = M + \tilde{A}_1$  with

$$\tilde{A}_1 = \left[ \int_0^{+\infty} [\tilde{F}(x(t))][x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1}$$

Then, for all  $j$  we have  $A_j = M + \tilde{A}_j$  with

$$\tilde{A}_j = \left[ \int_0^{+\infty} [\tilde{F}(x_j(t))][x_j(t)]^T dt \right] [\Gamma(x_j)]^{-1}$$

If, in particular, some components of  $F$  are linear, then the corresponding components of  $\tilde{F}$  are zero, and the corresponding components of  $A_j$  are those of  $F$ . If  $f_k$  is linear, then the  $k$ -th row of the matrix  $A_j$  is equal to  $f_k$ .

## 3. Relationships Between the Optimal Derivative and the Classical Linearization in Zero

### 3.1. Scalar case

#### 3.1.1 Expression

Consider the scalar differential problem

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0 \tag{4}$$

with  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and under the assumptions

- (h<sub>1</sub>)  $f(0) = 0$ ,
- (h<sub>2</sub>)  $f'(x) < 0$  in every point where  $f'$  exists in an interval  $(-\alpha, \alpha)$  with  $\alpha > 0$ ,
- (h<sub>3</sub>)  $f$  is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure.

The calculation is done in a way similar to that of the vectorial case. We start with the calculation of  $a_0 = f'(x_0)$ , then we calculate  $a_1$  by solving the problem

$$\frac{dx}{dt} = a_0 x, \quad x(0) = x_0$$

By changing  $F$  to  $f$  in (3), we have

$$a_1 = \frac{\int_0^{+\infty} f(x(t)) x(t) dt}{x_0 \int_0^{+\infty} x^2(t) dt},$$

and by substituting  $x = \exp(a_0 t) x_0$ , we obtain

$$a_1 = \frac{\int_0^{x_0} f(x) dx}{\int_0^{x_0} x dx} = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx$$

Note that  $a_1$  does not depend on  $a_0$ , and consequently, the procedure for the optimal derivative converges in the first step, namely

$$\tilde{a} = \tilde{a}(x_0) = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \quad (5)$$

We remind the reader that it has been shown that  $\tilde{a}(x_0)$  is a Lyapunov function [40] for the nonlinear problem (4). The scalar case is very interesting in the sense that we can write the optimal derivative as a function of the classical linearization of  $f$  in 0 (if  $f'$  exists in 0); so it is possible to find a limit when  $x_0 \rightarrow 0$ , namely  $\tilde{a}(x_0)$ , even though the derivative of  $f$  in 0 does not exist. The importance of the result lies in the possibility of using  $\tilde{a}(x_0)$  for the description of the behavior of the solution and for the study of stability in the vicinity of 0 when the derivative in this point does not exist.

### 3.1.2 Case when the derivative of $f$ in 0 exists

If  $f$  is continuous and if the derivative of  $f$  in 0 exists, then it is known [?] that  $\tilde{a}(x_0)$  can be written as

$$\tilde{a}(x_0) = f'(0) + \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} z \varepsilon(z) dz,$$

where

$$\varepsilon(z) = \frac{f(z)}{z} - f'(0)$$

and that  $\lim_{x_0 \rightarrow 0} \tilde{a}(x_0) = f'(0)$ . This relation shows that the two quantities  $\tilde{a}(x_0)$  and  $f'(0)$  are almost equal and are equal in the limit as  $x_0$  tends to 0.

### 3.1.3 Case when $f$ is analytic in 0

Now assume that  $f$  is analytic in 0, i.e.,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Then it is possible to give an expansion of  $\tilde{a}(x_0)$  similar to the Taylor expansion of  $f$  in the neighborhood of 0. For this, we use the relation scaopt and replace  $f(z)$  by the expression given by relation (6) so that

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x_0) &= \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!} x_0^{n-1} \\ &= f'(0) + \frac{1}{3} x_0 f''(0) + \dots + \frac{2}{(n+1)!} x_0^{n-1} f^{(n)}(0) + \dots, \end{aligned}$$

Where this formula holds in the interval of convergence of the Taylor series in 0. Generally, if  $f$  is of class  $C^k$  with  $k \in \mathbb{N}$  in the vicinity of 0 and  $f(0) = 0$ , then  $\tilde{a}$  is of class  $C^{k-1}$  in this vicinity, and we obtain

$$\tilde{a}^{(j)}(0) = \frac{2}{(j+1)!} x_0^{j-1} f^{(j)}(0), \quad 0 \leq j \leq k-1$$

### 3.1.4 Case when $f$ is not regular in 0

We now consider the nonregular case, and more particularly the case that  $f$  is only nondifferentiable in 0. Writing  $f(z)$  in the form

$$f(z) = -z g(z),$$

the relation (5) becomes

$$\tilde{a}(x_0) = -\frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} z g(z) dz \quad (7)$$

The chosen function

$$g_r(z) = p(|\ln z|^r),$$

where  $p$  is a bounded nonnegative periodic function of period 1 satisfying  $\overline{p} = \int_0^1 p(z) dz > 0$ , is nondifferentiable in 0. The relation (7) is written for  $r=1$  and  $0 < x_0 < 1$  as

$$\tilde{a}(x_0) = -\frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} z p(|\ln z|) dz$$

For all  $\alpha \in (0, 1)$ , we have

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\alpha x_0) &= -\frac{2}{\alpha^2 x_0^2} \int_0^{\alpha_0} z p(-\ln z) dz \\ &= -\frac{2}{\alpha^2 x_0^2} \int_0^{x_0} \alpha^2 z p(-\ln \alpha - \ln z) dz \\ &= -\frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} z p(-\ln \alpha - \ln z) dz \end{aligned}$$

So in particular, if  $\ln \alpha = -1$ , i.e.,  $\alpha = e^{-1}$ , then  $\tilde{a}(x_0/e) = \tilde{a}(x_0)$ . In this case,  $\tilde{\mathbf{a}}(x_0)$  does not have limit when  $x_0 \rightarrow 0^+$ . In the case  $r > 1$ , we obtain

$$\tilde{a}_r(x_0) = -2 \int_0^1 z p \{ (-\ln x_0 - \ln z)^r \} dz$$

Let us now consider the relation

$$\tilde{a}_r(x_0) = -\frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} u g_r(u) du \tag{8}$$

where  $g_r(u) = p(|\ln u|^r)$ . Note that  $g_r(u)$  is non differentiable in 0. In this case, we will show that the optimal derivative (8) can exist even if the derivative of the function  $g_r(u)$  in 0 does not exist. Then

$$\tilde{a}_r(x_0) \rightarrow -\bar{p} \text{ when } x_0 \rightarrow 0 \text{ for every } r > 1.$$

For more details, see the proof given in [48], Although the stability criteria by linearization are clearly stated and rigorously justified, classical linearization is sometimes inconvenient because it assumes that the Jacobian matrix at the equilibrium point exists. However, this assumption is not always true. Consider for instance a nonlinear system with a function involving an absolute value such that the nonlinearity is not differentiable in the vicinity of the equilibrium point. The classical linearization gives a necessary condition but not a sufficient one, since it does not allow to study stability in the presence of purely imaginary eigenvalues. The search for a Lyapunov function itself constitutes a sensitive issue because it is based in general on experience and luck.

#### 4. Computational Procedure

First of all let us point out briefly the iterative procedure allowing the calculation of the optimal derivative. Starting the calculus, the point  $x_0$  is selected arbitrarily near the

origin. The differential equations have been solved using the fourth order Runge-Kutta method [16, 19].

- Input  $x_0$  and  $A_0$ .
- Level (I): Computation of  $A_1$  in terms of  $A_0$ :

$$A_1 = \left[ \int_0^{+\infty} F(e^{tA_0} x_0) (e^{tA_0} x_0)^T dt \right] \times \left[ \int_0^{+\infty} (e^{tA_0} x_0) (e^{tA_0} x_0)^T dt \right]^{-1}$$

- Level (II): Computation of  $A_j$  in terms of  $A_{j-1}$ :

$$A_j = \left[ \int_0^{+\infty} F(e^{tA_{j-1}} x_0) (e^{tA_{j-1}} x_0)^T dt \right] \times \left[ \int_0^{+\infty} (e^{tA_{j-1}} x_0) (e^{tA_{j-1}} x_0)^T dt \right]^{-1}$$

- Level (III): Computation of

$$\|A_j - A_{j-1}\|$$

- Level (IV): If

$$\|A_j - A_{j-1}\| < \varepsilon$$

where  $\varepsilon$  is the desired level of approximation, then set  $\tilde{A} = A_j$ .  $\tilde{A}$  is the optimal derivative of F at  $x_0$ . Otherwise set  $A_j = A_{j-1}$  and go to Level (II).

**Remark 4** The precision of the optimal derivative is expressed in terms of the norm of the initial condition  $x_0$ [8] and is given by

$$\|x(t) - \tilde{y}(t)\| < O(\|x_0\|)^2$$

In the previous work, we have show for which initial conditions the precision is maintained. As long as  $\|x_0\|$  is large in a certain sense, the approximation must be good. It becomes more difficult when approaching 0. Indeed, it is shown that the approach of 0 yields inversion of the quadratic error to the profit of the classical linearization. This shows that the classical linearization is better near the origin when it exists. Let us present examples emphasizing the theoretical aspect in relation to the influence of the choice of the initial conditions on the quality of the approximation.



## 5 Application

### 5.1. Introduction

We present two examples, the first from the nonlinear electronic system is presented in detail and comparison with classical linearization is aborded. Second example is cited with analyse as a reference for possibilities offer by the optimal derivative.

### 5.2. Fist Example

The function of the electronic circuit (see ...) in the Figure 1 is represented by two variables of states the voltage drop  $V_{C1}$  on the terminal of the first capacity and the voltage drop  $V_{C2}$  on the terminal of the second capacity). The

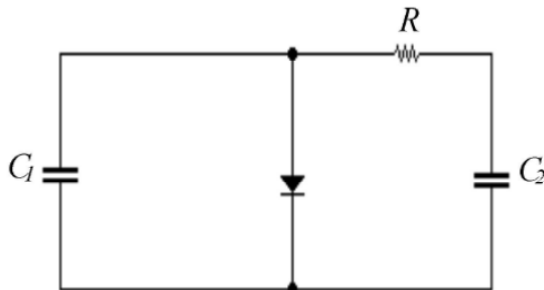


Fig 1: Circuit used in the example,

When a tension  $V_C$  is applied to the diode in the direct direction, the model of the diode is given by

$$f(V_{C1}) = \begin{cases} 0 & \text{if } V_{C1} < 0 \\ aV_{C1} + bV_{C1}^2 + dV_{C1}^4 & \text{if } V_{C1} \geq 0 \end{cases}$$

With the parameters

$$R = 33.10^2\Omega, \quad C_1 = 220.10^{-4}F, \quad C_2 = 350.10^{-4}F,$$

$$a = 10^{-4}, b = 10^{-5}, \quad d = 10^{-6}$$

and starting from the laws of Kirchoff relating to the nodes and the meshes of the circuit, we obtain the equations

$$\begin{cases} \frac{dV_{C1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} (aV_{C1} + bV_{C1}^2 + dV_{C1}^4 + \frac{V_{C1} - V_{C2}}{R}) \\ \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{1}{RC_2} [V_{C1} - V_{C2}]. \end{cases}$$

Changing

$$x = V_{C1} \text{ and } y = V_{C2},$$

The system (eqref) can be rewritten as

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{a}{C_1}x - \frac{b}{C_1}x^2 - \frac{d}{C_1}x^4 - \frac{1}{RC_1}x + \frac{1}{RC_1}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{RC_2}x - \frac{1}{RC_2}y. \end{cases}$$

By replacing the parameters with their values, the system becomes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(1.8.10^{-2}x + 4.55.10^{-5}(10x^2 - x^4) - 1.38.10^{-2}y) \\ \frac{dy}{dt} = 8.66.10^{-3}(x - y). \end{cases}$$

- Classical linearization

The classical linearization at the equilibrium point (0, 0) is obtained by calculation the Frechet derivative of the nonlinear function of the system (eqref),

$$DF(0,0) = \begin{bmatrix} -1.8.10^{-2} & 1.38.10^{-2} \\ 8.66.10^{-3} & -8.66.10^{-3} \end{bmatrix}.$$

- Optimal derivative

The optimal derivative is obtained by applying the algorithm proposed above, see section (ref). For the quadratic error, we use the relation

$$E_Q = \sum_{i=1}^n \|x_i(t) - \hat{y}_i(t)\|^2,$$

Where

$x(t)$  represents a solution of the nonlinear system,

$y(t)$  represents a solution of the optimal derivative.

#### 5.2.1 Results of the method

We study the system using several initial conditions. The results obtained are exhibited in the Table 1, where  $E_{Qmax}$  (O.D.) and  $E_{Qm}$ (C.L.) represent the maximum quadratic errors for the optimal derivative and the classical linearization, respectively. In the left column the initial conditions  $(x_0, y_0)$  are given. The second column represents the optimal derivative  $\bar{A}$ .

Table 1

$(x_0, y_0)$	$\tilde{A}$	$E_{Qm}(O.D.)$	$E_{Qm}(C.L.)$
(0.8,0.5)	-0.0187 0.0142 0.0087 -0.0087	2.1302e-04	3.5140e-04
(8e-02,5e-01)	-0.0181 0.0138 0.0087 -0.0087	7.5438e-06	1.0367e-05
(8e-02,5e-02)	-0.0181 0.0138 0.0087 -0.0087	7.4729e-09	2.2644e-08
(8e-03,5e-02)	-0.0180 0.0138 0.0087 -0.0087	8.5925e-10	1.0691e-09
(8e-03,5e-03)	-0.0180 0.0138 0.0087 -0.0087	7.0425e-13	2.2132e-12
(8e-04,5e-03)	-0.0179 0.0138 0.0087 -0.0087	9.0836e-14	1.0969e-13
(8e-04,5e-04)	-0.0179 0.0138 0.0087 -0.0087	2.2657e-17	1.3572e-16
(8e-05,5e-05)	-0.0178 0.0138 0.0087 -0.0087	3.249e-21	3.481e-21

The curve

$$E_{Qmax} = h(\|x_0\|)$$

In Figure 2 is obtained starting from a smoothing polynomial using the Origin Software. The determination of the value  $x_0$  for which the curve of error changes behavior will be calculated is performed using the Matlab Softwar.

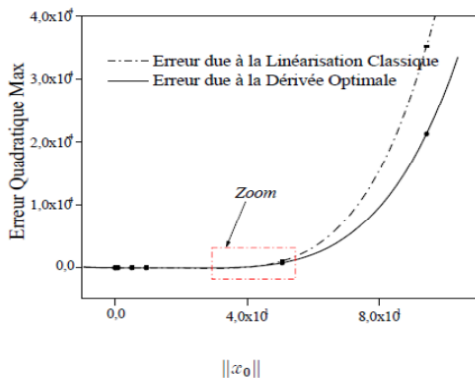


Fig 2: Max quadratic error with respect

In figure 3, a zoom of the part where there is inversion of the quality of the approximation to the profil of the classical linearization is represented.

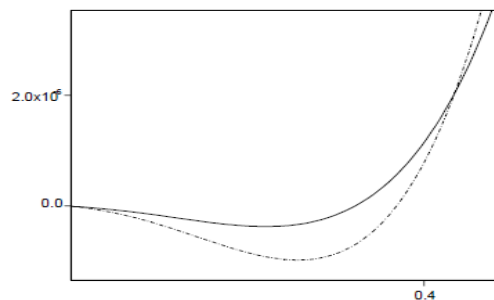


Fig 3: Zoom of the part where there is inversion of the quality of the approximation

### 5.2.2. Analysis of results of the first example

The representation of the maximum quadratic error with respect to  $\|x_0\|$  relating to the classical linearization and the optimal derivative enables us to divide our curve into two distinct parts:

The first part, where the maximum quadratic error due to the classical linearization is lower than that due to the optimal derivative on an interval of  $\|x_0\| < 0.43$  in this case the classical linearization gives a better approximation than the optimal derivative.

The second part where the maximum quadratic error due to the classical linearization becomes definitely higher than that due to the optimal derivative on an interval of  $\|x_0\| > 0.43$  here it is the optimal derivative which is better. Namely, for a given initial condition  $x_0$ , approximation by the optimal derivative is better in the vicinity of the origin. These two aspects reflect the fact that the linearization by Frechet derivative (when it exists and when it is hyperbolic) is the best approximation in the vicinity of the origin.

### 5.3 Second example

This example is derived from a Nonlinear mechanical system representing a forced nonlinear oscillator [50],[51] [52], in fact is a mechanical positioning device with feedback control. given by the system:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \delta\dot{x} + K(x)x &= -z + F(t) \\ \dot{z} + \alpha z &= \alpha\gamma(x - r) \end{aligned}$$

$x$  is defined as the displacement,  $\delta\dot{x}$  the linear damping with a damping constant  $\delta > 0$ , object of negative feedback control ( $z$ ) with time constant  $\frac{1}{\alpha}$  and the gain  $\gamma$ ,

$$K(x) = (x^2 - 1)$$

We take  $F(t) = 0$ ,  $r = 0$  representing autonomous system, in which the governing equation have no explicit time dependence. Our goal that this type of dynamical systems can still exhibit complicated dynamics (complex bifurcations and transient to chaos) with a regime in which two or more stable limit cycles exist :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \delta\dot{x} + x^3 - x = -z \\ \dot{z} + \alpha z = \alpha\gamma x \end{cases} \quad (4)$$

the system (4) with the dimensionless equation is given by

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \delta y - z \\ \dot{z} = \gamma\alpha x - \alpha z \end{cases} \quad (5)$$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  with the parameters  $\delta, \alpha, \gamma > 0$

### 5.3.1. Discussion

we can deduce from the determination of the bifurcation surfaces that the higher codimension bifurcations can easily be spotted, once the full parameter dependence of the bifurcation surfaces is known.

We can note that the proposed method may be more efficient in term of approximation the nonlinear function is no regular or the equilibrium point is no regular. In this case, one cannot derive the nonlinear function and consequently one cannot study the linearized equation see [37]. In contrast to common analytical techniques based on eigenvalue computation (which can only be applied to systems of size dimension  $N \leq 4$ ), the method is applicable for systems of intermediate size because it is possible to compute numerically the optimal linear matrix and the roots of their characteristic equation (eigenvalues). the proposed linearization representing also a numerical confirmations of the prediction behaviour. Therefore it represent a good approximation to the initial nonlinear system.

## 6. Conclusion

Simplification is very important in modelling. The optimal derivative procedure can be used as a powerful tool for modelling nonlinear physical systems numerically. The optimal derivative method helps to give a quantitative and qualitative description of Systems which appear in the behavior of the electronic and mechanical problems.

In conclusion, the answer to the question relative to the relation between the property of stability of the linear equation obtained by the optimal derivative and that of the nonlinear equation in the vectorial case is very subtle. Generally, when the procedure converges, the matrix obtained is stable. All these considerations bring us to the following conjecture.

**Conjecture:** If the procedure of the optimal derivative converges and the limit of the sequence  $A_j$  is exponentially stable (or if  $A_j$  has a stable fixed point), then the nonlinear system is stable.

This study shows that the conditions under which the conjecture was formulated can be satisfied, i.e., the existence, uniqueness and convergence towards a stable fixed point [7]. The procedure of calculation also enables us to solve problems where the classical linearization may not be useful.

### Acknowledgements

This work is supported by A. P., C. N. E. P. R. U. Research Program\_code: D02020090027.

### References

- [1] J.Keivorkian, J.D. Cole, PerturbationMethods in AppliedMathematics, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [2] J. Keivorkian, J.D. Cole, Multiple Scale and Singular PerturbationMethods, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [3] A.H. Nayfeh, Perturbation Methods, John Wiley & Sons, New York 1979.
- [4] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [5] J.-H. He, Modified Linstedt-Poincare methods for some non-linear oscillations. Part I: expansion of constant, J. Non-linear Mech. 37 (2002) 309-314.
- [6] T. Oziset al., Determination of periodic solution of a u1=3 force by He's modified Linstedt-Poincare method, J. Sound Vib. 301 (2007) 415-419.
- [7] Ji.-H. He, Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, Int. J. Mod. Phys. 20 (2006) 1141-1199.
- [8] G. Adomian, Stochastic Systems, Academic Press, Inc., New York, 1983
- [9] G. Adomian, Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, Inc., New York, 1986.
- [10] G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer, Boston, 1994.
- [11] S.-J. Liao, An analytic approximate technique for free oscillations of positively damped systems with algebraically decaying amplitude, Int. J. Nonlinear Mech. 38 (2003) 1173-1183.

- [12] S.J. Liao, Beyond Perturbation, CRC Press, Boca Raton, FL, 2003.
- [13] Ji.-H. He, Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique, Appl. Math. Comput. 135 (2003) 73-79.
- [14] Ji.-H. He, Addendum: new interpretation of homotopy perturbation method, Int. J. Mod. Phys. 20 (2006) 2561-2568.
- [15] Ji.-H. He, Homotopy perturbation technique, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 178 (1999) 257-262.
- [16] Ji.-H. He, A new approach to nonlinear partial differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2 (1997) 230-235.
- [17] C.M. Bender, K.A. Milton, S.S. Pinsky, L.M. Simmons, A new perturbative approach to nonlinear problems, J. Math. Phys. 30 (1989) 1447-1455.
- [18] C.M. Bender, S. Boettcher, K.A. Milton, A new perturbative approach to nonlinear partial differential equations, J. Math. Phys. 32 (1991) 3031-3038.
- [19] C.M. Bender, H.F. Jones, New nonperturbative calculation: renormalization and the triviality of  $\delta_{\text{KW4B4}}$ , Phys. Rev. E 38 (1988) 2526-2529.
- [20] B.J. Laurenzi, An analytic solution to the Thomas-Fermi equation, J. Math. Phys. 31 (1990) 2535-2537.
- [21] A. Cedillo, A perturbative approach to the Thomas-Fermi equation in terms of the density, J. Math. Phys. 34 (1993) 2713-2717.
- [22] J.I. Ramos, On Linstedt-Poincare techniques for the quintic Duffing equation, Appl. Math. Comput. 193 (2007) 303-310.
- [23] B.S. Wu, W.P. Sun, C.W. Lim, An analytical approximate technique for a class of strongly non-linear oscillators, Int. J. Non-linear Mech. 41 (2006) 766-774.
- [24] B.S. Wu, C.W. Lim, Y.F. Ma, Analytical approximation to large amplitude oscillation of a non-linear conservative system, Int. J. Nonlinear Mech. 38(2003) 1037-1043.
- [25] B.S. Wu, C.W. Lim, Large amplitude non-linear oscillations of a general conservative system, Int. J. Non-linear Mech. 39 (2004) 859-870.
- [26] B. Wu, P. Li, A method for obtaining approximate analytic periods for a class of nonlinear oscillators, Meccanica 36 (2001) 167-176.
- [27] G. Temple, The theory of generalized functions, Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A 228 (1955) 175-190.
- [28] G. Temple, Theories and applications of generalized functions, J. Lond. Math. Soc. 28 (1953) 134-148.
- [29] I.M. Gel'fand, G.E. Shilov, Generalized Functions: Properties and Operations, vol. 1, Academic Press, Inc., New York, 1964.
- [30] M.J. Lighthill, Fourier Analysis and Generalised Functions, Cambridge University Press, Inc., New York, 1958.
- [31] P.M. Morse, H. Feshbach, Methods of Mathematical Physics, vol.1, McGraw-Hill, Inc., New York, 1953.
- [32] J.I. Ramos, Limit cycles of non-smooth oscillators, Appl. Math. Comput. 199 (2008) 738-747.
- [33] L. Schwartz, Theorie des Distributions, second ed., vols. 1 and 2, Hermann, Paris, 1966.
- [34] L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, Functional Analysis, second ed., Pergamon Press, New York, 1982.
- [35] J.I. Ramos, A non-iterative derivative-free method for nonlinear ordinary differential equations, Applied Mathematics and Computation 203 (2008) 672-678.
- [36] B.D. Aggarwala, (2001), The Fascinating Predator-Prey Equation and Development of HIV / AIDS in Canada, Vol. 5, Issue 2, Pacific Institute for the Mathematical Sciences.
- [37] Tayeb Benouaz. Contribution à l'approximation et la synthèse de la stabilité d'une equation différentielle non linéaire. PhD thesis, Université de Pau (France) and Université Tlemcen (Algérie), 1996.
- [38] Tayeb Benouaz. Optimal derivative of a nonlinear ordinary differential equation. In Equadiff 99, international conference on differential equations, volume 2, pages 1404-1407. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000.
- [39] Tayeb Benouaz and Ovide Arino. Determination of the stability of a non-linear ordinary differential equation by least square approximation. Computational procedure. Appl. Math. Comput. Sci., 5(1):33-48, 1995.
- [40] Tayeb Benouaz and Ovide Arino. Least square approximation of a nonlinear ordinary differential equation. Comput. Math. Appl., 31(8):69-84, 1996.
- [41] Tayeb Benouaz and Ovide Arino. Optimal approximation of the initial value problem. Comput. Math. Appl., 36(1):21-32, 1998.
- [42] Tayeb Benouaz and F. Bendahmane. Least-square approximation of a nonlinear O.D.E. with excitation. Comput. Math. Appl., 47(2-3):473-489, 2004.
- [43] Earl A. Coddington and Norman Levinson. Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto- London, 1955.
- [44] Jack K. Hale. Ordinary differential equations. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1969. Pure and Applied Mathematics, Vol. XXI.
- [45] R. E. Kalman and J. E. Bertram. Control system analysis and design via the "second method" of Lyapunov. I. Continuous-time systems. Trans. ASME Ser. D. J. Basic Engrg., 82:371-393, 1960.
- [46] Anthony Ralston and Herbert S. Wilf. Mathematical methods for digital computers. pages 110-120. John Wiley & Sons Inc., New York, 1960.
- [47] N. Rouche and Jean Mawhin. Équations différentielles ordinaires. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1973. Tome I: Théorie générale.
- [48] Tayeb Benouaz. Contribution à l'approximation et la synthèse de la stabilité d'une équation différentielle non linéaire. PhD thesis, Université de Pau (France) and Université Tlemcen (Algérie), 1996.
- [49] R. E. Kalman and J. E. Bertram. Control system analysis and design via the "second method" of Lyapunov. I. Continuous-time systems. Trans. ASME Ser. D. J. Basic Engrg., 82:371-393, 1960.
- [50] P.J. Holmes, F.C. Moon, Strange Attractors and Chaos in Nonlinear Mechanics. Trans. ASME J. Appl. Mech. Vol. 50, (1983), pp. 1021-1032.
- [51] Wiggins S. and Holmes P. J.. Periodic Orbits in Slowly Varying Oscillators. SIAM J. Math. Anal. Vol N 18, (1987), pp 542-611.

[52] Abdelhak Chikhaoui, Tayeb Benouaz, Fatiha Lassouani”  
2012), Numerical Approach for Local Bifurcation  
Analysis of Nonlinear Physical System” IJCSI  
International Journal of Computer Sciences Issues, Vol.  
9 Issue 2, N°. 3, March 2012.

**Fatiha Lassouani**, born in Tlemcen (Algeria), **M.sc.** in Tlemcen University (Algeria) (2004), works as a Teaching, Department of Physics, Preparatory School of Technical Science, PST Tlemcen (Algeria). She prepares his Doctorate thesis in the field of approximation and stability of nonlinear systems.

**Professor Tayeb Benouaz**, born in Ain Sefra (Algeria), **M.sc.** in Tlemcen University (Algeria) (1984), **PhD** in Tlemcen University (1996). His current research interest includes the computational physics, modeling in Physics and simulation of the nonlinear systems, Stability of systems. Director several research projects and has several publications in this field.

**Abdelhak Chikhaoui** Born in sidi senouci, Tlemcen, in western algeria on January 27, 1975. He received the Master Degree (jun 2000) from Tlemcen university. He received the **PhD** degree (jun 2009) from Tlemcen university in the field of approximation and stability of nonlinear systems.

**Dr Sidi Mohammed El Amine Bekkouche**, born in Nedroma (Tlemcen, Algeria), **M.sc.** in Tlemcen University (2006), holds a **PhD** degree in Physics at Tlemcen University (2009). He was a student of Professor Tayeb Benouaz, he works as researcher in Applied Research Unit on Renewable Energies "URAER Ghardaia", research team: solar and bioclimatic architecture. His research field is computational physics, modeling in Physics and simulation of the nonlinear systems, concentrating now on thermal building.



### Résumé :

Le travail présenté dans cette thèse, se veut une contribution à l'approximation des systèmes physiques non linéaires et plus précisément, les équations différentielles ordinaires non linéaires issues de l'électronique en appliquant la dérivation optimale. Une application est aussi proposée concernant l'étude d'un système ratio dépendant. Le problème rencontré concerne des fonctions non régulières, et par conséquent non différentiables par la méthode classique basée sur la linéarisation au sens de Fréchet à l'origine. Une étude sur la stabilité est aussi proposée.

### Mots clés :

Systèmes physiques non linéaires – Equation différentielle ordinaire – Dérivée au sens de Fréchet – Dérivée optimale – Stabilité – Bifurcation.

### Abstract

The work presented in this thesis is a contribution to the approximation of nonlinear physical systems and more specifically, non-linear ordinary differential equations derived from the electronic by applied Optimal Derivative. An application is also available for the study of a ratio dependent system. The problem for functions that are not regular and therefore not differentiable by the conventional method based on linearization in the sense of Fréchet at origin. A stability study is also proposed.

### Keywords:

Nonlinear physical systems - Ordinary differential equation - Derivative in the sense of Fréchet - Derivative optimal - Stability - Bifurcation.

### ملخص

العمل المقدم في هذه الأطروحة هو المساهمة في التقريب بين النظم الفيزيائية الغير الخطية و بشكل خاص المعادلات التفاضلية النظامية الغير الخطية المستوحاة من الإلكترونيك و ذلك باستخدام المشتقة المثلى. نقترح أيضا تطبيقا خاص بدراسة الأنظمة ذات النسبة المتعلقة. المشكل الذي صادفناه يتعلق بالدوال الغير المنتظمة و بالتالي غير قابلة للاشتقاق بالطرق الكلاسيكية التي تعتمد على الطريقة الخطية لفريشي في المبدأ. نقترح أيضا دراسة للاستقرار.

### كلمات المفتاحية

أنظمة فيزيائية غير خطية – معادلات تفاضلية نظامية – المشتقة المثلى – مشتقة فريشي – الاستقرار – التشعب.