République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique .

Filière : Mathématiques .

Spécialité : Probabilité Approfondie et Statistiques .

Présenté Par :

Mr Aissaoui Mohammed

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES .

Soutenu le *22-6-2024* devant le jury composé de :

Pr. Boukhari Fakher Eddine	Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen	Président
Dr. Dali Korso Malika	Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen	Examinatrice
Dr. Bensmain Nawel	Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen	Examinatrice
Dr. Benramdane Amina	École Supérieure de Mangement Tlemcen	Encadrante

Année Universitaire : *2023 - 2024* .

Remerciement

En premier lieu, je remercie **Allah** le tout-puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donnée durant ma vie et pour m'avoir guidée pour atteindre ce stade.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à mon encadrante de ce mémoire, Madame **Benramdane Amina** pour son soutien et son encouragement constant, son grand professionnalisme, sa confiance en moi, la gentillesse et la patience qu'elle a manifestées à mon égard durant ce travail .

Un grand merci aux membres du jury :
Monsieur **Boukhari Fakher Eddine** pour l'honneur qu'ils m'a donné d'avoir voulu de présider le jury et Madame **Dali Korso Malika** et Madame **Bensmain Nawel** pour avoir bien donner de leur temps pour examiner ce mémoire .

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères au corps professoral et administratif du département de mathématiques de la faculté des Sciences l'université de Tlemcen pour la qualité de leur enseignement .

Dédicaces

Je décide ce travail :

À ma mère, À mon père,

La femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureux.

À l'homme, mon précieux offre du dieu, à qui je dois tout mon respect mon père .

Que Allah leur procure bonne santé et longue vie .

À mon frère et ma soeur ,

Que Allah les protège et leurs offre la chance et le bonheur .

À mes ami(e)s,

Pour leurs encouragements .

Merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loi pour que ce travail soit possible .

Mohammed .

Abréviations Et Notations

- $L^2(M) = L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}rog, d\mathbb{P} \otimes d\langle M, M\rangle))$. c'est l'espace des processus progressifs
- le produit scalaire $(H, K)_{L^2(M)}$.
- MB : mouvement brownien
- $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ filtration naturelle du mouvement brownien
- L^2 l'ensemble des fonction de carée intégrables
- C^2 l'ensemble des fonction deux fois derrivables et de derrivé deuxiemme continue

Table des matières

Introduction générale

Les équations différentielles partielles stochastiques (EDPS) ont été introduites pour la première fois par Kiyosi Itō à la fin des années 1940 et au début des années 1950 comme extension naturelle de ses travaux sur les équations différentielles stochastiques. Les EDPS sont des équations qui impliquent à la fois des dérivées partielles et du bruit aléatoire, ce qui les rend utiles pour la modélisation de systèmes présentant un comportement à la fois déterministe et stochastique. L'interprétation d'une EDPS dépend de l'équation spécifique étudiée et du système physique qu'elle est censée de représenter. En général, une EDPS peut être considéré comme décrivant l'évolution d'un champ aléatoire dans le temps et dans l'espace, où le caractère aléatoire provient d'un processus de bruit sous-jacent. Ce bruit peut représenter un certain nombre de phénomènes physiques, tels que des fluctuations de température, de pression ou de concentrations chimiques. Les EDPSs se sont révélées utiles dans un large éventail d'applications, notamment la dynamique des fluides, la physique statistique et la finance mathématique. Ils sont également couramment utilisés dans l'apprentissage automatique et l'intelligence artificielle, où elles sont utilisées pour modéliser des systèmes complexes et effectuer des prédictions basées sur des données bruitées.

Les équations aux dérivées partielles stochastiques jouent un rôle intrinsèque dans la description de la réalité. EN effet, tout modèle du monde réel doit prendre en compte l'incertitude ou la fluctuations aléatoires. Cependant , il est surprenant que même si les équations différentielles ordinaires stochastiques (EDOS) ont été étudiées intensivement tout au long du XX-ème siècle, le EPDS ont retenu l'attention beaucoup plus tard. Les origines des EDPS remontent au XIXe siècle, lorsque les scientifiques et les mathématiciens ont commencé à utiliser des équations aux dérivées partielles (EDP) pour modéliser des phénomènes physiques tels que la chaleur et la propagation des ondes. Cependant, ce n'est qu'au XXe siècle que les chercheurs ont commencé à incorporer des éléments stochastiques (aléatoires) dans ces équations afin de mieux saisir l'incertitude et le caractère aléatoire qui existent souvent dans les systèmes du monde réel.

L'une des principales interprétations des EDPS est qu'ils fournissent un moyen de modéliser l'évolution de champs aléatoires au fil du temps. Par exemple, une EDPS peut être utilisé pour décrire la façon dont un champ de température change au fil du temps en réponse à des forces externes telles que le transfert de chaleur ou le flux d'air. Une autre interprétation est que les EDPS peuvent être utilisées pour modéliser des systèmes présentant un certain niveau de caractère aléatoire ou d'incertitude, tels que les marchés financiers ou les systèmes biologiques.

Dans l'ensemble, le développement des EDPS a permis aux scientifiques et aux ingénieurs de modéliser et de comprendre plus précisément un large éventail de phénomènes impliquant à la fois le caractère aléatoire et les dépendances spatiales ou temporelles.

Ce mémoire est oganisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré au rappel des résultats préliminaires de la théoris des probabilités ainsi que des processus aléatoire.

Le but du deuxième chapitre est d'établir les règle de calcul différentiel stochastique telle que la formule d'îto.

Dans le troisième chapitre, on donne une idée générale su les équations aux dérivées partielle déterministe et stochastique.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de l'explosion pour une Équation des Ondes Stochastique Viscoelastique.

Les annexes sont constituées de rappel de quelques résultats de la théorie de la mesure et d'analyse fonctionelle.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notions de base de la théorie de probabilité

La théorie des probabilités est une science essentiellement abstraite dans laquelle à chaque ensemble A dit événement dans l'espace Ω appelé espace échantillon lié à une certaine expérience aléatoire, on attribue une mesure $\mathbb{P}(A)$ dite probabilité de A vérifiant les axiomes suivants :

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(ii) Toute suite A_n d'évènements incompatibles (c-à-d. tels que pour $m \neq n, \quad A_n \cap A_m = \emptyset$) satisfait la propriété suivante dite σ-additivité

$$\mathbb{P}\left(\cup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right).$$

Dans toute la suite on suppose que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité i.e. $(\Omega, \mathcal{F})$ est mesurable et $\mathbb{P})$ est une probabilité.

1.1.1 Variables aléatoires

En théorie des probabilités, une variable aléatoire est une manière de modéliser mathématiquement une quantité dont la valeur dépend du hasard. Le terme "variable aléatoire" peut être déroutant car, d'un point de vue mathématique, il ne s'agit ni d'une variable au sens habituel ni d'un objet aléatoire. En réalité, une variable aléatoire est une application définie sur

l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire, associant à chaque résultat une valeur numérique et donc on peut faire une définition exacte d'une variable aléatoire :
Une variable aléatoire réelle (v.a.r.) X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$X^{-1}(A) = \{w \in \Omega : X(w) \in A\} \in \mathcal{F}, \quad \forall A \in B_{\mathbb{R}},$$

$B_{\mathbb{R}}$ étant la tribu borélienne. La variable aléatoire peut aussi associer à chaque éventualité un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et donc on parle de vecteur aléatoire

$$X : \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}^n.$$

1.1.2 Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La loi de probabilité de X est donnée par

$$P_X(A) = \mathbb{P}\{\omega; X(\omega) \in A\} = \mathbb{P}(X \in A), \quad \forall A \in B_{\mathbb{R}}.$$

1.1.3 Espérance

On dit qu'une variable aléatoire X est d'espérance finie ou que X admet une espérance si elle est intégrable relativement à la mesure P. Dons ce cas, on définie son espérence par

$$\mathbb{E}(|X|) = \int |X| d\mathbb{P} < \infty.$$

1.1.4 Espérance conditionnelle

Soit X une variable intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et G une sous tribu de $\mathcal{F}$. L'espérance conditionnelle de X par rapport à la sous tribu G est une variable aléatoire $Z \in G$ telle que

$$\forall U \in G \ , \quad \int_U X d\mathbb{P} = \int_U Z d\mathbb{P}$$

On écrit :

$$Z = \mathbb{E}(X|G).$$

Propriété 1.1.1. *[8] Soient X et Y deux v.a intégrables. Alors :*

- $\mathbb{E}(cX + Y|G) = c\mathbb{E}(X|G) + \mathbb{E}(Y|G) \qquad \text{p.s}$
- *Si $X \perp G$(X est indépendante de G), alors* $\mathbb{E}(X|G) = \mathbb{E}(X) \qquad \text{p.s}$
- *Si X est G-mesurable, alors* $\mathbb{E}(X|G) = X \qquad \text{p.s}$
- *Si Y est G-mesurable et bornée alors* $\mathbb{E}(YX|G) = Y\mathbb{E}(X|G) \qquad \text{p.s}$

1.1.5 Convergence d'une suite de variables aléatoires

Dans ce paragraphe, nous aborderons quelques modes de convergence, en mettant en lumière certaines propriétés essentielles que nous exploiterons dans ce mémoire.

Définition 1.1.1 (Convergence presque sûre). *Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers une variable aléatoire X s'il existe Ω_0 tel que $P(\Omega_0) = 1$ on a*

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \qquad \forall\omega \in \Omega_0$$

Autrement dit

$$\mathbb{P}\left(\left\{w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n\left(w\right) = X\left(w\right)\right\}\right) = 1.$$

On écrit

$$X_n \xrightarrow{p.s} X$$

Définition 1.1.2 (Convergence en probabilité). *Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge en probabilité vers une variable aléatoire X si pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 0.$$

On écrit

$$X_n \xrightarrow{\text{P}} X$$

Définition 1.1.3. *[8][Convergence en moyenne quadratique] Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X si*

$$(\|X_n - X\|_2)^2 = \mathbb{E}(X_n - X)^2 \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

On écrit

$$X_n \xrightarrow{L^2} X.$$

Propriétés :

- Si une suite converge dans L^2 alors elle converge dans L^1
- (X_n) converge en probabilité et elle est uniformément intégrable si et seulement si elle converge dans L^1.
- La convergence dans L^1 entraîne celle en probabilité.
- La convergence presque sûre pour une suite de variables aléatoires (Xn) implique la convergence en probabilité. et cette dernière implique celle en loi.

1.1.6 Variables gaussiennes

Une variable aléatoire X est dite gaussienne si elle suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ qui a pour densité :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

où m est l'espérance de la variable etσ^2 est la variance.

On remarque qu'une variable aléatoire constante est une gaussienne de variance nulle.

Proposition 1.1.1. *[8]*

- *Un vecteur X est dit gaussien si pour toute combinaisons linéaire*

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

est gaussienne .

- *La loi de X admet une densité si sa matrice de covariance est inversible.*
- *Si deux variables forment un couple gaussien de covariance nulle, elles sont indépendantes et la réciproque est vrai.*
- *Si (X, Y) est un couple gaussien alors il existe réel $\alpha\ telque\ X - \alpha Y$ est indépendante de X.*
- *Si X et Y sont des gaussiennes indépendantes alors $aX + bY$ est gaussienne et (X, Y) est gaussien ; dans le cas où les variables ne sont pas indépendante ce résultat n'est pas toujours vraie.*

1.2 Processus Stochastiques

Plusieurs applications pratiques de la théorie des probabilités concernent le hasard des processus évoluant dans le temps, ou dans l'espace, ou les deux. Un processus stochastique est un concept fondamental en probabilités et en statistiques qui est utilisé pour modéliser des phénomènes aléatoires qui évoluent dans le temps.

Définition 1.2.1. *Un processus stochastique est une collection de variables aléatoires $(X_t, t \in T)$, où t est un paramètre qui s'étend sur un ensemble d'indices T. En général, nous appelons t le paramètre temps (ou simplement le temps) et $T \subset \mathbb{R}^+$. Chaque X_t prend des valeurs dans un ensemble E dit l'espace des états, alors X_t est l'état du processus à l'instant t.*

Définition 1.2.2. ***(Stationnarité)***

Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit (faiblement) stationnaire si :

1. Sa moyenne $\mathbb{E}(X_t)$ ne dépend pas de t (constante), pour tout h,

2. $Cov(X_t, X_{t+h})$ ne dépend que de h (et non pas de t).

Définition 1.2.3. ***(Filtration)***

Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.

Définition 1.2.4. ***(Processus stochastique adapté)***

Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.

Définition 1.2.5. ***(Processus Stochastique à Trajectoires Continues)*** *[8] On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications*

$$t \to X_t(\omega)$$

sont continues pour presque tout ω.

Définition 1.2.6. ***(Processus Stochastique Càdlàg)*** *[8]*

Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.

Définition 1.2.7. ***(Processus progressif)*** *On dit qu'un processus X est "progressivement mesurable" pour la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ si*

$$\forall t \geq 0, \, \forall A \in B_{\mathbb{R}} \qquad \{(s, \omega)/0 \leq s \leq t \, ; \; X_s(\omega) \in A\} \in B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t.$$

Autrement dit, si $([0, t] \times \Omega, B_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t) : (s, \omega) \mapsto X_s(\omega) \; est \; mesurable.$

Proposition 1.2.1.

1. *Si X est un processus mesurable adapté, il admet une modification progressivement mesurable*

2. *Si X est un processus mesurable adapté et admet des trajectoires càd ou càg, il est progressivement mesurable.*

Définition 1.2.8. ***(Processus élémentaire)*** *[2] Soient $n(t)$ un nombre fini qui dépend de t, X_i des variables aléatoires et A_i sont des événements de la filtration $\mathcal{F}_t$. Alors on définit le processus élémentaire comme suit :*

$$X_t = \sum_{i=1}^{n(t)} X_i 1_{A_i}(t).$$

1.2.1 Processus de Markov

Un processus $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit de Markov si la probabilité de transition vers un état futur ne dépend que de l'état actuel et c'est la propriété de Markov.

1.2.2 Martingales

Définition 1.2.9. *(Cas discret) [8] Une suite de v.a.r.* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *est une* $\mathcal{F}_n$*-martingale si :*

1. X_n *est intégrable ,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *,*
2. X_n *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable ,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *,*
3. $\mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n$ *,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *.*

Définition 1.2.10. *(Cas continu) [8] Une famille de variables aléatoires* $\Big(X_t\ , t > 0\Big)$ *est une martingale par rapport à* $(\mathcal{F}_t)$ *(filtration) si :*

1. X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable et intégrable pour tout t ,*
2. $\mathbb{E}\left(X_t \mid \mathcal{F}_s\right) = X_s$ *,* $\forall s \leq t$*.*

1.2.3 Surmartingale et sous-martingale

Une famille de variables aléatoires $\Big(X_t\ , t \geq 0\Big)$ est une surmartingale (resp une sous-martingale) par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ (filtration) si :

$X_t\ est\ \mathcal{F}_t$ mesurable et integrable pour tout t>0

$\mathbb{E}(X_t\,|\mathcal{F}_s\,) \leq X_s\ ,\ \forall s \leq t\ (resp.\ \mathbb{E}(X_t\,|\mathcal{F}_s\,) \geq X_s)$.

1.2.4 Temps d'arrêt

Définition 1.2.11. *Un temps d'arrêt est une variable aléatoire* τ *à valeur dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *telle que* $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\ , \forall t \in \mathbb{R}$ *. on definit aussi* $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$*. et on associe au temps d'arret la tribu definit comme suite*

$$\mathcal{F}_\tau = \left\{A \in \mathcal{F}_\infty | A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\,, \forall t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Théorème 1.1. ***(Théorème d'arrêt de Doob)*** *[8]*

Si M *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale continue et si* S *et* T *sont deux temps d'arrêt tels que* $S \leq T \leq K, K$ *étant une constante finie,* M_T *est intégrable et*

$$\mathbb{E}\left(M_T \mid \mathcal{F}_S\right) = M_S.$$

Remarques :[8]

- Ce résultat s'étend à tous les temps d'arrêt si la martingale est uniformément intégrable.

- Si M est uniformément intégrable, on peut montrer que M_t converge p.s. et dans L^1 vers M_∞ quand $t \to \infty$ et que $M_S = \mathbb{E}\left(M_\infty \mid \mathcal{F}_S\right)$.

- Si pour tout temps d'arrêt borné on a : $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$ alors le processus X est une martingale .

1.3 Le mouvement Brownien

Dans cette section, on va décrire un processus dont les trajectoires sont continues nulles part dérivables appelé mouvement Brownien .
Pour cela, on se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un processus $(B_t \,, t \geq 0)$ sur cet espace.
Le processus $(B_t \,, t \geq 0)$ est dit mouvement Brownien si :

a) $\mathbb{P}\left(B_0 = 0\right) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine)

b) $\forall s \leq t \,, B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t-s)$,

c) $\forall n \,, \forall t_i \,, 0 \leq t_0 \leq t_1 \cdots \leq t_n$, les variables $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \,, \ \ldots \ , B_{t_1} - B_{t_0} \,, B_{t_0}\right)$ sont indépendantes.

Remarques :

- La propriété b) se traduit par le fait que les accroissements du mouvement Brownien soient gaussiens et la propriété c) se traduit par le fait que le mouvement Brownien soit à accroissements indépendants.

Proposition 1.3.1. *[8] Le processus B est un processus gaussien, sa loi est caractérisée par son espérance nulle et sa covariance* $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = s \wedge t$.

Preuve :

Pour montrer le résultat de la covariance, on utilise le fait que la covariance est égale à $E(B_tB_s)$ puisque le processus est centré. Ainsi si $s \leq t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_tB_s) &= \mathbb{E}((B_t - B_s)B_s + B_s^2)\\ &=^{ind.MB} \mathbb{E}(B_t - B_s)\mathbb{E}(B_s) + \mathbb{E}(B_s^2)\\ &= s.\end{aligned}$$

Et par suite

$$\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = s \wedge t.$$

Proposition 1.3.2. *[8] Si B est un mouvement brownien, il en est de même pour les processus suivants :*

$$X_t = -B_t \ \ t \geq 0 \ \langle symetrie \rangle.$$

$$X_t = t\ B_{1/t}\ ,\ t \geq 0\ ,\ X_0 = 0\ \ (inversion\ du\ temps)\,.$$

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{a}}\, B_{at}\ ,\ t \geq 0,\ a \geq 0.$$

$$X_t = B_{t+s} - B_s \ \ t \geq 0\ , s \geq 0.$$

Remarque 1.3.1. *Les proprieté précedente (le processus est issue de 0 , les accroissement sont gaussiennes , les accroissement sont independante) ne sont pas suffisantes pour définir des quantité comme*

$$inf\{t > 0, B_t > 0\}.$$

Pour remédier à ce problème, on va montrer que le processus B admet une modification a trajectoire $\mathbb{P}$-p.s. continue. pour cela on va faire appel à un résultat de Kolmogorov ,qui assure l'existence d'une modification du processus à trajectoire $\mathbb{P}$ps continue.

1.4 Régularisation des trajectoires du mouvement brownien

1.4.1 Modification de processus

Soit $(X_t)_{t\in T}$ *et* $\left(\tilde{X}_t\right)_{t\in T}$ *deux processus on dit que* $\tilde{X}_t$ *et une modification de* X_t *si :*

$$\forall t \in T, \mathbb{P}\left(X_t = \tilde{X}_t\right) = 1.$$

1.4.2 Critère de Kolmogorov

Soit $X_t, t \in [0,1]$ *un processus reel* ***à*** valeurs dans dans R^d *tel que :*

$$\exists c > 0,\ tel\ que\ \mathbb{E}(|X_t - X_s|^p) \leq c|t-s|^{1+\varepsilon}; \forall p > 1.\varepsilon > 0,$$

alors il existe une modification a trajectoire continue $\mathbb{P}$*.p.s* α *holderienne continues d'exposant* α *tel que :* $\alpha < \varepsilon/p$.

Proposition 1.4.1. ***(Définition du mouvement Brownien standard)*** *[8] Un mouvement Brownien standard est un processus stochastique qui vérifie :*

a) $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$ *(le mouvement Brownien est issu de l'origine)*

b) $\forall s \leq t$, $B_t - B_s$ *est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance* $(t-s)$ *,*

c) $\forall n$, $\forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \cdots \leq t_n$ *, les variables* $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\ ,\ \ldots\ , B_{t_1} - B_{t_0}\ , B_{t_0}\right)$ *sont indépendantes.*

d) Le processus B est Pps continue

Proposition 1.4.2. *[13] L'existence du MB se démontre par une construction d'un processus gaussien ayant la bonne covariance sur* $L^2([0,1]) B_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, e_n \rangle \mathcal{X}_n$ *où* $\mathcal{X}_n$ *une suite de variables aléatoires qui suit une loi normale* $N(0,1)$ *a partir d'une base orthonormé (par la formule de Bessel-Parceval)*

Proposition 1.4.3. *[8] **(Propriété de Markov forte)***

Soit T un temps d'arrêt fini et f une fonction mesurable B un mouvement brownien . On a alors

$$\mathbb{E}\Big(f(B_{T+s}) \mid \mathcal{F}_T\Big) = \mathbb{E}\Big(f(B_{T+s}) \mid \sigma(B_T)\Big).$$

En particulier pour tout temps d'arrêt finis T, le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par $W_t = B_{t+T} - B_T$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$.

1.4.3 Trajectoires du mouvement brownien

- *Les trajectoires du mouvement Brownien sont continues.*

- *Les trajectoires du mouvement Brownien sont p.s. "nulle part differentiables".*

  P($v_t < \infty$) $= 0$.

  $Soit la subdivision \sigma$ *de l'intervalle [0, t] caracterise par* $0 = t_0 \leq t_1 \cdots \leq t_n = t$. *Soit* V_t *la variation de la trajectoire du Brownien sur [0, t] défini par :*

  $$V_t \omega) = \sup_\sigma \sum_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|$$

  alors

  $$V_t(\omega) = \infty \; p.s.$$

- *La convergence ayant lieu en moyenne quadratique p.s.*

1.4.4 Propriétés de martingale

1. *Le processus B est une martingale*

2. *Le processus*

$$B_t^2 - t, t \geq 0$$

est une martingale.

3. *Le produit de deux mouvement brownien indépendants est une martingale*

4. $(\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t), t \geq 0)$ *est une martingale*

5. *La seule martingale continue et a variation bornée est la martingale* $M = M_0$

Chapitre 2

Calcul Stochastique

Le calcul stochastique revient à calculer des intégrales d'une manière non usuelle. L'intégral ne se calcul pas par rapport une mesure à variation finie mais plutôt par rapport à un mouvement Brownien. Ce type de calcul est connu sous le nom d'Itô l'un des pionniers dans ce domaine. L'intégrale en est donc probabiliste. Globalement, l'intégrale stochastique est un concept fondamental en théorie des probabilités et en calcul stochastique. Elle généralise le concept d'intégrale déterministe aux processus aléatoires, permettant ainsi de définir l'intégrale d'une fonction par rapport à un processus stochastique. Cette intégrale permet en particulier de définir la notion d'équation différentielle stochastique qui n'est d'autre qu'une équation différentielle obtenue par la perturbation aléatoire d'une équation différentielle ordinaire. Leurs solutions donne la naissance des processus de diffusion et qui sont sont généralement markoviens et qui rentrent la modélisation de nombreux phénomènes aléatoires. Dans le chapitre qui va suivre, On montrera que leurs loi ont un lien important avec quelques équations aux dérivées partielles qui relient des résultats d'analyse et des résultats probabilistes.

2.1 Intégrale Stochastique

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé filtré et* $(X_t, t \geq 0)$ *un processus adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. *L'objectif de cette section est de donner un sens à l'intégrale par rapport à un* $\mathcal{F}_t$-

mouvement brownien $(W_t, t \geq 0)$ *suivante*

$$\int_0^t X_u \mathrm{d}W_u.$$

Comme étant la limite en moyenne quadratique des sommes correspondantes suivantes :

$$\sum_{i=0}^{j-1} X_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right).$$

Définition 2.1.1. *Soit* $\mathcal{H}^{\in}$ *l'espace hilbertien des martingales* M *à trajectoires continues issus de 0 et bornées dans* $L^2(\Omega)$ *muni de son produit scalaire* $\langle .,. \rangle_{H^2}$. *On désigne par Prog la tribu des sous ensmbles de* $\Omega \times \mathbb{R}_+$ *progressivement mesurables.*

On prend en suite $M \in H^2$, *on définit*

$$L^2(M) = L^2 \left(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}rog, d\mathbb{P} \bigotimes d\langle M, M \rangle \right))$$

l'espace des processus progressifs vérifiant :

$$\mathbb{E}[\int_a^{+\infty} H_s^2 d\langle M, M \rangle_s] < \infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(H, K)_{L^2(M)} = \mathbb{E}[\int_0^{+\infty} H_s K_s d\langle M, M \rangle_s].$$

On note ξ *le sous espace vectoriel de* $L^2(M)$ *formé par les processus élémentaires :* $H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(\omega) \mathbf{1}_{|t,t_{i+1}|}(s)$, *et pour tout H dans ce sous espace vectoriel on définit :*

$$(H \cdot M)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)} \left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i} \right) = \int_0^t H_s dM_s.$$

2.1.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

Proposition 2.1.1. *Isometrie de l'intégrale stochastique*

soit H_t *pour t>0 un processus stochastique et* W_t *un processus de winer alors :*

$$\mathbb{E}\Big(\big(\int_0^t H_s dW_s\big)^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^t H_s^2 ds\Big).$$

Preuve : Si $H_t = \sum_i H_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(t)$ *avec* $H_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ *et* $\sup_{\omega\in\Omega}|H_i(\omega)| < \infty$*, on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_u \mathrm{d}B_u\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_i H_i\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)\right)^2\right] \\ &= \sum_{i,j}\mathbb{E}\left[H_i H_j\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right)\right].\end{aligned}$$

Or, pour $i < j$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\underbrace{H_i H_j\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)}_{\in\mathcal{F}_{t_j}}\underbrace{\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right)}_{\mathcal{F}_{t_j}}\Big] &= \mathbb{E}\left[H_i H_j\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)\right]\mathbb{E}\left[W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_u \mathrm{d}B_u\right)^2\right] &= \sum_i \mathbb{E}\Big[\underbrace{H_i^2}_{\in\mathcal{F}_{t_i}}\underbrace{\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2}_{\mathcal{F}_{t_i}}\Big] \\ &= \sum_i \mathbb{E}\left[H_i^2\right]\mathbb{E}\left[\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2\right] \\ &= \sum_i \mathbb{E}\left[H_i^2\right](t_{i+1} - t_i) \\ &= \int_0^T \mathbb{E}\left[H_u^2\right]\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Proposition 2.1.2. *soit* $H_i(t)$ *pour t>0 un processus stochastique et* $W(t)$ *un processus de winer alors :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_1(s)dW(s))(\int_0^T H_2(s)dW(s))\right) = \mathbb{E}(\int_0^T H_1H_2(s)ds).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^T H(s)dW(s))(\int_0^T X(s)dW(s))\right) &= \sum_i \mathbb{E}\Big[\underbrace{H_iX_i}_{\in\mathcal{F}_{t_i}}\underbrace{\left(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}\right)^2}_{\mathcal{F}_{t_i}}\Big] \\
&= \sum_i \mathbb{E}\left[H_iX_i\right]\mathbb{E}\left[\left(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \sum_i \mathbb{E}\left[H_iX_i\right](t_{i+1}-t_i) \\
&= \int_0^T \mathbb{E}\left[HX\right]\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.1.3. *soit $H(t)$ pour t>0 un processus stochastique et $W(t)$ un processus de winer alors :*

$$\mathbb{E}(\int_0^t H(s)dW(s)/\mathcal{F}_u) = \int_0^u H(s)dW(s).$$

$$\mathbb{E}(\int_0^T H(s)dW(s)) = 0.$$

2.1.2 Integrale de Wiener

Dans cette section le but est de définir :

$$\int_0^t f(s)\,dB_s.$$

On commence d'abord par définir les notion suivantes :

- *Soit f une fonction $L^2(\mathbb{R}^+)$ l'espace des fonctions réelles continues definie sur $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telles que $\int_0^{+\infty} |f(s)|^2 ds < +\infty$.*
-
$$I(f) \overset{def}{=} \int_\alpha^{+\infty} f(s)\,dB_s$$

- *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ *et* $I(f) \in L^2(\Omega)$.

  l'application $I(f)$ *est linéaire et isométrique et c'est une variable gaussienne*

- $$\mathbb{E}[I(f)] = 0 \ et \ Var[I(f)] = \int_0^{+\infty} f^2(s)\,ds.$$

- $$\mathbb{E}[\,I(f)I(g)] = \int_0^{+\infty} f(s)\,g(s)ds$$

- $$\mathbb{E}(B_t I(f)) = \int_0^t f(s)\,ds.$$

2.1.3 Processus lié à lintégrale stochastique

On défini L^2_{loc} *la classe de fonctions* f *pour la quelle :*

$$\int_0^T |f(s)|^2\,d_s < \infty$$

pour tout T >0

soit $f \in L^2_{loc}$ *et* $M_t = \int_0^t f(s)\,dB_s$.

Le processus M est une martingale continue et c'est un processus gaussien tel que :

$\mathbb{E}[M_t] = 0$

$Var[M_t] = \int_0^{+\infty} f^2(s)\,ds.$ *et de covariance* $\int_0^{min(t;s)} f^2(u)\,du$.

Proposition 2.1.4.

1. *La linéarité pour* H_s^2*et* H_s^1 *deux processus et pour a et b des constantes*

$$\int_\alpha^t \left(aH_s^1 + bH_s^2\right) dB_s = a\int_\alpha^t H_s^1 dB_s + b\int_\alpha^t H_s^2 dB_s.$$

2. *Le processus* $M_t = \int_0^t H_s dB_s$ *est une martingale à trajectoires continues.*

3. *Le processus* $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2 - \int_0^t H_s^2 d_s$ *est une martingale*

4.

$$\mathbb{E}\left(M_t\right)=0 \; et \; Var\left(M_t\right)=\int_a^t \mathbb{E}\left(H_s\right)^2 d_s.$$

5.

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s dB_s \int_0^t K_s dB_s\right)=\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s K_s d_s\right).$$

2.2 Formule d'Itô et Application

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, (\mathcal{F}_t)_{t>0}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(B_t)_{t0}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t0}$ *mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que :*

$$\mathbb{P}-p.s.\; \forall t\leq T,\; X_t=X_0+\int_0^t K_s ds+\int_0^t H_s dB_s,$$

- $X_0 \; est \; \mathcal{F}_0 - mesurable.$
- $(K_t)_{0<t<T}$ et $(H_t)_{0<t<T}$ $des \; processus \; adapte \; \hat{a}$ $(\mathcal{F}_t)_{t0}$,
- $\int_0^T |K_s|\, ds<+\infty \; \mathbb{P}-p.s.,$
- $\int_0^t \; |H_s|^2\, ds<+\infty \; \mathbb{P}-p.s..$

Proposition 2.2.1. *Soit* $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ *une martingale continue avec :*
$M_t=\int_0^t K_s d_s, \;\; avec\, \mathbb{P}-p.s., \; \int_0^T |K_s|\, ds<+\infty \; alors:$ $\mathbb{P}-p.s.\; \forall t\leq T, \;\; M_t=0.$
et ceci assure que la decomposition d'un processus d'Itô est unique.
Ce qui signifie que si pour tout t :

$$X_t=X_0+\int_0^t K_s ds+\int_0^t H_s dB_s=X_0'+\int_0^t K_s' ds+\int_0^t H_s dB_s,$$

Théorème 2.1. *Soit* X_t *un processus d'Itô donné par :*

$$X_t=X_0+\int_0^t K_s ds+\int_0^t H_s dB_s$$

et par sa forme différentielle :

$$dX_t=k_t dt+HdB_t.$$

Soit $g(t, X) \in C^2([0, \infty[, \mathbb{R})$

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)(dX_t)^2,$$

où :

1. $Y_t = g(t, X_t)$.
2. $(dX_t)^2$ *se calcule comme suite :*
   $dB_t.dB_t = dt.$
   $dt.dt = dt.dB_t = dB_t.dt = 0.$

Théorème 2.2. *(Intégration par parties) [2] Posons* $g(s, w) = g(s)$ *tel que la fonction soit de classe* $\boldsymbol{C}^2$ *sur* $[0, t]$ *alors :*

$$\int_0^t g(s)\, dB_s = g(t)\, B_t - \int_0^t B_s dg(s).$$

dans le cas generale :

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t dX_s dY_s.$$

Proposition 2.2.2. *(Exemple d'application) On rappel la formule d'Ito pour un processus X :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

ainsi sa forme differentielle :

$$dX_t = kdt + HdB_t.$$

on utilisans la formule la formule d'Ito pour les fonctions de classe $\boldsymbol{C}^2$ *:*

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)(dX_t)^2.$$

On obtien :

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\,(dX_t)^2 .$$

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\,(Kdt + HdB_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\,(Kdt + HdB_t)^2$$

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\, dt + K\frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\, dt + H\frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\, dB_t$$

$$+K^2\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\,(dt)^2 + H^2\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\,(dB_t)^2 + KH\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\, dtdB_t.$$

or : $dB_t.dB_t = dt.$ *et* $dt.dt = dt.dB_t = dB_t.dt = 0.$

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\, dt + K\frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\, dt + H\frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\, dB_t + \frac{1}{2}H^2\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\, dt$$

alors on obtien :

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + K_s\frac{\partial g}{\partial X}(s, X_s) + \frac{1}{2}H_s^2\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(s, X_s)\right) ds + \int_0^t H_s\frac{\partial g}{\partial X}(s, X_s)\, dB_s.$$

2.3 Equations différentielles stochastiques

Les équations différentielles ordinaires (EDO) sont omniprésentes dans pratiquement tous les domaines de la physique, que ce soit en électromagnétique, en mécanique classique, en thermodynamique ou dans d'autres domaines. Elles représentent des relations mathématiques entre une fonction inconnue et ses dérivées par rapport à une seule variable indépendante. Concrètement, ces équations décrivent comment une fonction inconnue évolue en fonction de sa pente, de son taux de variation par rapport à une variable donnée.

Par exemple, dans le domaine de la mécanique, une EDO peut décrire le mouvement d'une particule en termes de sa position, de sa vitesse et de son accélération par rapport au temps. En électricité, elles sont utilisées pour modéliser le comportement des circuits électriques en fonction du temps, tandis qu'en thermodynamique, elles décrivent la variation de température ou de pression dans un système en fonction du temps.

L'avantage des EDO est qu'elles permettent de capturer des phénomènes de changement continu, *ce qui en fait un outil précieux pour la modélisation et la résolution de nombreux problèmes physiques. Elles sont utilisées pour prédire le comportement des systèmes physiques dans des conditions variables et pour résoudre des problèmes d'ingénierie complexes. En outre, les EDO sont souvent à la base de nombreux modèles mathématiques utilisés en sciences appliquées. L'exemple ci-dessous est l'évolution du courant électrique est représentée par une équation différentielle du 1er ordre :*

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t) \;\text{ avec }\; i(t=0) = 0$$

et la solution est

$$i(t) = \frac{u}{R}\left(1 - e^{\frac{-t}{-\tau}}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Les équations différentielles (ordinaires) gouvernent de nombreux phénomènes déterministes. Toutefois, pour incorporer des phénomènes aléatoires, il est nécessaire de prendre en compte formellement des "différentielles stochastiques", ce qui conduit à la transformation des équations en équations différentielles stochastiques (EDS).

2.3.1 Definitions

On se donne :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s.$$

On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation associer au processus X est de la forme

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t$$

avec l'intensité de bruit $\sigma(t, x)$ (appelé coefficient de diffusion de l'EDS)
$a(s, X_s)$ *est appelé le drift.*

Remarque 2.3.1. *En pratique (dans les cas simples), pour trouver la solution d'une EDS, on intuite la forme de la solution et on vérifie que l'EDS de départ est bien satisfaite en appliquant la formule d'Itô.*

2.3.2 Existence et unicité des solution d'une EDS

Le théorème de Girsanov permet de montrer l'existence de solution faible d'EDS quand elle n'admet pas n ´nécessairement de solution forte. on se donne l'équation ci dessous :

$$dX_t = a(t, X_t)\,dt + dB_t.$$

Le théorème de Girsanov assure l'existence faible lorsque (a) est une fonction bornée l'unicité faible lorsque a est presque sûrement de carré intégrale. Avant d'énoncer le théorème de Girsanov nous rappellons la notion de changement de probabilité.

Théorème 2.3. *[7] Radon-Nikodym*
Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\nu}$ deux mesures positives $\sigma finies$ Il y a équivalence entre :

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0 \quad (on\ note\ \nu \ll \mu).$
2. $\exists f : (X, A) \to (\mathbb{R}_+, B(\mathbb{R}_+))\ \mu - intgrable\ tq\ \forall A \in A \quad \nu(A) = \int_A f d\mu.$

On dit que $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ est la densité de $\boldsymbol{\nu}$ par rapport à $\boldsymbol{u}$

Proposition 2.3.1. *[2]*

On suppose que deux mesures de probabilité définies sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ $\mathbb{P}\ et\, \mathbb{Q}$ sont equivalente alors il existe $(Z_t,\ t \leq T)$ $\mathcal{F}_t^p$ martingale strictement positive tell que $d\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_T d\mathbb{P}\ sur \mathcal{F}_T\ et d\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t} = \mathbb{Z}_t \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}$ ou encore $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t X)$ de plus $Z_0 = 1,\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t) = 1,\ \forall t \leq T.$

Ce resultat est démontre par le théorème de Radon-Nikodym.

Démonstration. On se donne $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures d'après le théorème de radon nycodym ; Si la restriction de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ à $\mathcal{F}_T$ sont Équivalentes entes, il existe une V.A.R Z_T $\mathcal{F}_T$ $-\text{mesurable}$ telle que $d\mathbb{Q} = Z_T d\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ et on dit que cette V.A.R est la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ en effet si on pose X une V.A.R $\mathcal{F}_t-\text{mesurable}$ et $\mathbb{Q}$ intégrale et on obtiens le résultat suivant

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(XZ_t)\,.$$

□

Théorème 2.4. *[2] Theoreme de Girsanove (1)*

Soit $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ *n un processus d'Ito de la forme différentielle suivante :*

$$\begin{cases} dY(t) = a(t,\omega)\,dt + dW(t)\,;\ 0 < t \leq T \\ Y_0 = 0, \end{cases}$$

où $W(t)$ *est un mouvement brownien de dimension n on pose :*

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t a(s,\omega)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s,\omega)ds\right),\ t \leq T.$$

On suppose que la condition de Novikov est satisfaite

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T a^2(s,\omega)\,ds\right)\right] + \infty,$$

On definie la mesure $\mathbb{Q}$ $dans \left(\Omega, \mathcal{F}_T^{(n)}\right)$

$$d\mathbb{Q}(\omega) = Z_T(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)\,.$$

Alors Y (t) est un mouvement brownien par rapport à la loi de probabilité $\mathbb{Q}$*.*

Proposition 2.3.2. *[2] Soit*

$$dY_t = b(Y_t)\,dt + \sigma(Y_t)\,dW_t\,,\quad Y_0 = a\,,\quad t \in [0,T]\,,$$

Si les conditions suivantes sont satisfaites alors la solution de l'EDS existe et unique

1.
$$|b(x)| + |\sigma(x)| \leq c_{b,\sigma}$$

   avec $c_{b.\sigma} > 0$

2.
$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq c_{b,\sigma}\,|x - y|$$

Démonstration. On pose $(Y^{(n)})_{n\geq 1}$ une suite de de processus telle que

$$Y_t^{(n+1)} := a + \int_0^t b(Y_s^{(n)})\, ds + \int_0^t \sigma(Y_s^{(n)})\, dW_s$$

$$Y_t^{(0)} := a$$

cette suite est bien définie. En effet si l'on procède par récurrence :

Pour n = 0, le résultat est trivial

Supposons cette propriété vraie pour un certain n positif. On sait alors que $\sigma(Y^{(n)})$ est adapté et et continu car $Y^{(n)}\ l'est$, Par ailleurs, comme σ est bornée, il est clair que

$$\int_0^T \mathbb{E}\left[\sigma\left(Y_s^{(n)}\right)^2\right] ds \ < \ \infty.$$

Ce qui garantit la bonne définition de $Y^{(n+1)}$ en suite montrons que :

$$\mathbb{E}\Big[|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}|^2\Big] \leq c_{b,\sigma,T} \int_0^t \mathbb{E}\Big[|Y_s^{(n)} - Y_s^{(n-1)}|^2\Big]\, ds$$

pour une certaine constante $c_{b.\sigma.T} > 0$.

$$Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)} := \int_0^t \left[b(Y_s^{(n)}) - b(Y_s^{(n-1)})\right] ds + \int_0^t \left[\sigma(Y_s^{(n)}) - \sigma(Y_s^{(n-1)})\right] dW_s$$

or

$$E\,[]\, \textstyle\int_0^t \left[b(Y_s^{(n)}) - b(Y_s^{(n-1)})\right] ds)^2 \leq T \int_0^t \mathbb{E}\Big[|b(Y_s^{(n)}) - b(Y_s^{(n-1)})|^2\Big]\, ds$$

$$\leq (c_{b,\sigma})^2\, T \textstyle\int_0^t \mathbb{E}\Big[|Y_s^{(n)} - Y_s^{(n-1)}|^2\Big]\, ds\, .$$

la dernière inégalité est obtenue on appliquons la condition

$$|b(x)| \leq c_{b,\sigma}$$

En remplaçants dans la première égalité, on déduit immédiatement la majoration désirée :

$$\mathbb{E}\left[|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}|^2\right] \leq 2(c_{b,\sigma})^2(1+T)\mathbb{E}[|Y_s^{(n)} - Y_s^{(n-1)}|^2]\, ds\ ,$$

nous en deduisons que la suite converge dans $L^\infty([0,T];L^2(\Omega))$ et sa limite correspond à la solution et nous disposons de l'expression

$$Y_{s_1}^{(1)} - Y_{s_1}^{(0)} = b(a)s_1 + \sigma(a)W_{s_1}$$

et on itérant l'inégalité

$$\sup_{\epsilon\in[0,T]} \mathbb{E}[|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}|^2] \leq 2(c_{b,\sigma,T})^n(c_{b,\sigma})^2(T^2+T)\int_{0s_1\ldots s_nT} ds_1\cdots ds_n$$

qui est a son tour inférieure à

$$2\frac{(c_{b,\sigma,T}\,T)^n}{n!}(c_{b,\sigma})^2(T^2+T)$$

ce ci prouve que la suite$Y_t^{(n)}$ est de cauchy dans $L^\infty([0,T];L^2(\Omega))$ un espace complet et donc la suite converge alors la suite converge vers la solution Y_t de l'EDS et donc la solution existe sous les condition précédentes et on pose une autre solution $\bar{Y}$ et on va aboutir à Y=$\bar{Y}$. d'où l'unicité $\square$

Chapitre 3

Equation aux dérives partielles stochastiques

3.1 Equation différentiel stochastique

On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation en le processus X (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) de la forme

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t$$

ce qui, en terme intégrale, s'écrit

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t a_i(s, X_s)\, ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)\, dB_s^{(j)}, \quad 1 \leq i \leq d$$

où, pour m, d des entiers positifs, $a(t,x) = (a_i(t,x))_{1\leq i\leq d}$ est un vecteur mesurable de $\mathbb{R}^d$ défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé dérive ou drift de l'EDS, $\sigma(t,x) = (\sigma_{i,j}(t,x))_{\substack{1\leq i\leq d \\ 1\leq j\leq m}}$ est une matrice $d \times m$ mesurable définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé coefficient de diffusion de l'EDS,et $B = \left(B^{(1)}, \ldots, B^{(m)}\right)$ est un mouvement brownien standard en dimension m.

3.1.1 Existence et unicité des solutions

Pour l'équation $E(a, \sigma)$

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t,$$

on dit qu'il y a existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution de $E_x(a, \sigma)$ c'est à dire un tripler $\left\{X, B, \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)\right\}$ où B est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien et pour lequel X est solution satisfaisant

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t.$$

-Existence et unicité faibles si de plus toutes les solutions de $E_x(a, \sigma)$ ont même loi.

-Unicité trajectorielle si, l'espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ et le mouvement brownien B étant fixés, deux solutions X et X' de $E(a, \sigma)$ telles que $X_0 = X_0'$ ps sont indistin-

guables.
- Existence forte si une solution X de $E_x(a,\sigma)$ est adaptée par rapport à la filtration canonique de B; X est alors appelée solution forte.
- Unicité forte pour $E(a,\sigma)$ si pour tout mouvement brownien B, deux solutions fortes associées à B sont indistinguables.
Il peut y avoir existence et unicité faibles sans qu'il y ait unicité trajectorielle.

3.2 Concepts fondamentaux

Les EDPs (équations aux dérivées partielles) sont employées pour représenter une grande diversité de phénomènes physiques, tels que la propagation des ondes, la diffusion de la chaleur, le déplacement des fluides, et bien d'autres. La résolution de ces problèmes peut être complexe, et diverses méthodes, comme les méthodes analytiques, numériques ou de simulation, sont employées pour trouver des solutions. Contrairement aux équations différentielles ordinaires (EDO), qui impliquent des dérivées par rapport à une seule variable, les EDP impliquent des dérivées par rapport à plusieurs variables. L'ordre d'une EDP est défini exactement de la même façon que pour une EDO : C'est l'ordre le plus élevé parmi toutes les dérivées partielles de l'EDP.
Formellement, une EDP peut être représentée par une équation de la forme :

$$F(t,u,u_t,u_{tt},\cdot)=0$$

où u désigne la fonction inconnue que l'on cherche à déterminer et $u_t,\ u_{tt},\cdots$ sont les dérivées partielles de u par rapport à t d'ordre un, deux,etc...
On en distingue trois types :

EDP linéaire : C'est une EDP qui ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées partiales de la variable dépendante.

EDP quasi-linéaire : C'est une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordres supérieurs.

EDP non-linéaire : C'est une EDP où l'une des dérivées partielles intervient comme argument d'une fonction non-linéaire.

3.2.1 Conditions initiales et conditions aux limites

Contrairement aux EDOs, les conditions initiales ne suffisent pas à assurer l'unicité de solution. Il faut également fournir des conditions aux limites. Les conditions initiales et les conditions aux limites se distinguent de la manière suivante : * Une condition initiale s'applique pour une valeur donnée (et unique) d'une variable indépendante. A partir de cette condition initiale, il est possible de déduire la solution pour toutes les autres valeurs de la variable indépendante. * Une condition aux limites est appliquée en tout point de la frontière du domaine sur lequel on souhaite résoudre l'équation (et non en un point unique). Il n'est pas possible de déterminer la solution en partant simplement d'un seul point de la limite de domaine et en progressant à l'intérieur de celui-ci, car la solution est également conditionnée par sa valeur en tous les autres points de la frontière.

Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires

1. Équation des ondes :
$$u_{tt} = Cu_{xx}.$$
2. Équation des ondes en 3D :
$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{c^2} u_{tt}.$$

3.3 Lien EDP et mouvement brownien

Il existe des liens significatifs entre les probabilités et les équations aux dérivées partielles (EDP) à travers les processus stochastiques. Ces processus sont souvent associés à des opérateurs différentiels linéaires Les EDS sont des généralisations des équations différentiel ou la dynamique déterministe d'évolution a est perturbée par un terme aléatoire (stochastique). On parle alors d'équation différentielle stochastique. En général la perturbation aléatoire est considérées comme un bruit ce qui permet d'exprimer les solutions de certaines EDP en termes de processus stochastiques. Un exemple d'opérateur couramment utilisé est le laplacien , directement lié au mouvement brownien. notation :

$$\begin{aligned}
\partial_t f(t,x) &= \tfrac{\partial f}{\partial t}(t,x), \\
\partial_{x_i} f(t,x) &= \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_1,\ldots,x_d), \\
\Delta f(t,x) &= \sum_{i=1}^{d} \partial^2_{x_i,x_i} f(t,x) \quad (\text{le laplacien de } f).
\end{aligned}$$

Proposition 3.3.1. *Une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est harmonique si elle est de classe C^2 vérifiant :*

$$\Delta f(t,x) = 0$$

alors on peux appliquer la formule d'Itô sur f pour obtenir :

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t \nabla f(B_s)\cdot dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)ds,$$

$$f(B_t^1, B_t^2) = f(B_0^{(1)}, B_0^{(1)}) + \textstyle\sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_s^{(1)}, B_s^{(2)})dB_s^{(i)}$$

$$+\tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t \Delta f(B_s^{(1)}, B_s^{(2)})ds$$

où

$$\nabla f(B_s)\cdot dB_s = \sum_{i=1}^{2} \partial_{x_i} f(B_s) dB_s^{(i)}.$$

3.3.1 Problème de Dirichlet

Le problème de Dirichlet consiste à résoudre l'équation de Laplace avec des conditions aux bords imposées

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \cdot \text{sur } D \\ u_{\|\partial D} &= f. \end{cases}$$

où D un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Soit f est bornée et

$$\mathbb{P}_a(\tau_D < +\infty) = 1, \quad \forall a \in D,$$

$$\forall x \in D\ \mathbb{E}_x[]f(B_{\tau D})|] < +\infty,$$

alors toutes solution du problème de Dirichlet s'écrit sous la forme

$$u(x) = \mathbb{E}_x[f(B_{\tau_D})], \quad x \in \overline{D}.$$

3.4 Équation de la chaleur stochastique

L'équation de la chaleur stochastique étend le modèle classique de l'équation de la chaleur en tenant compte des fluctuations aléatoires. Elle incorpore des termes stochastiques pour représenter les fluctuations thermiques ou les incertitudes dans les propriétés du matériau. Cette équation modélise la propagation de la chaleur dans un environnement où les conditions sont influencées par des facteurs aléatoires, comme des variations aléatoires de température ou des variations dans les propriétés du matériau. L'étude de cette équation est cruciale pour comprendre le comportement thermique de systèmes soumis à des perturbations aléatoires, tels que la diffusion de la chaleur dans des matériaux poreux ou des environnements instables. Son analyse permet de mieux appréhender la variabilité thermique et les risques associés à la conception et au fonctionnement de systèmes thermiques complexes. formulation mild de l'équation de la chaleur est l'équation de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(.,u)\ , \quad u_0(x) = \Phi(x)$$

avec $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Comme dans le cas des EDO, on souhaiterait mettre l'équation sous une forme "intégrale" que l'on puisse ensuite étendre (par le biais d'arguments stochastiques) au cas où f est remplacée par la "distribution"

$$f(.,u) = \sigma(u)\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}.$$

En s'appuyant sur la solution fondamentale de l'équation linéaire sous-jacente, soit l'équation de la chaleur standard

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R},$$

cette solution fondamentale est en fait donnée ici par le noyau gaussien

$$G_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \mathbf{1}_{\{t>0\}}.$$

Observons plus simplement que cette fonction G satisfait $G_t(x) = 0$ pour tout $t \leq 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t,x) \quad \text{pour tous } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \text{et} \quad &\int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\psi(y)dy \to \psi(x). \end{aligned}$$

Proposition 3.4.1. *Si u est solution de l'équation au sens classique (c'est-à-dire u est $\mathcal{C}^1$, et satisfait l'équation pour tout (t,x)), et si*

$$\sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}} |u(t,x)| < \infty \quad , \quad \sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right| < \infty,$$

alors u est aussi solution de l'équation suivante (appelée forme mild : pour tous $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}$

$$u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\Phi(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y) f\left(s,y,u_s(y)\right) dsdy.$$

La formulation de u fait cette fois bien apparaître une intégrale en temps et en espace : C'est cette formulation de l'équation que nous allons pouvoir étendre au cadre stochastique.

Dans cette section on s'intéresse au modèle le plus standard, à savoir le modèle dirigé par le brownien espace-temps sur $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma(u)\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}, \quad t \in [0,T], x \in \mathbb{R} \\ u(0,.) = \Phi \end{cases}$$

où $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, $\sigma(u)_t(x) := \sigma\left(u_t(x)\right)$ et $W : ([0,T] \times \mathbb{R}) \times \Omega \to \mathbb{R}$ est un champ brownien espace-temps sur $[0,T] \times \mathbb{R}$.

En combinant les considérations heuristiques cité dans la proposition et les constructions de la solution nous sommes désormais en mesure de fournir une interprétation naturelle de cette équation dont la solution

$$u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\Phi(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\sigma\left(u_s(y)\right)\dot{W}(dsdy)$$

où la dernière intégrale est comprise au sens d'Itô, et où l'on rappelle que G désigne le noyau gaussien

$$G_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \mathbf{1}_{\{t>0\}}.$$

Théorème 3.1. *Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle qu'il existe une constante $c_\sigma > 0$ vérifiant*

$$|\sigma(x)| \leq c_\sigma \quad \textit{et} \quad |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq c_\sigma |x-y|$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, bornée et de carré intégrable. Alors l'équation admet une unique solution u (au sens mild).

Chapitre 4

L'explosion pour une équation des ondes Stochastique viscoelastique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le problème suivant d'une équation des ondes stochastiques

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)\, ds & \\ = u|u|^{p-2} + \epsilon\sigma(x,t)dW_t(x,t) & \text{dans } \mathcal{D}\times]0,+\infty[, \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D}\times[0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{dans } \overline{\mathcal{D}}, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\mathcal{D}$ est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\partial\mathcal{D}$ bord de $\mathcal{D}$, h est une fonction positive, $p > 2$ et $L^2(\mathcal{D})$ est l'ensemble des fonctions de carrées intégrables sur $\mathcal{D}$ équipé du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et de sa norme $\|.\|_2$.

On se donne $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ une base orthonormale et $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ des réelles positifs non nulle et $\{B_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ un mouvement brownien

$$W(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} B_k(x,t) e_k(t),$$

est un processus Wiener de dimension infini, $\sigma(x,t)$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans $L^2(\mathcal{D})$ et ϵ est une constante positive qui mesure la force du bruit.
Il s'agit couramment d'observer un mouvement ondulatoire comme un phénomène physique qui est modélisé mathématiquement par une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique. Beaucoup a été écrit sur ces équations en ce qui concerne leurs applications largement. Cependant, pour des modèles plus réalistes, la fluctuation aléatoire a été prise en compte, ce qui a conduit à introduire l'équation des ondes stochastiques dans les années 1960. Plusieurs exemples de propagation d'ondes stochastiques linéaires et d'applications peuvent être trouvés. Mueller [10] fut le premier à étudier l'existence de solutions explosives pour certaines équations d'ondes stochastiques.

4.2 L'équation de l'énergie

Nous définissons la fonctionnelle d'énergie associée au système (4.1) par :

$$e(t) = \frac{1}{2}\|v\|_2^2 + \frac{1}{2}\Big(1 - \int_0^t h(s)ds\Big)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(h\, o\, \nabla u)(t) - \frac{1}{p}\|u\|_p^p$$

où

$$(h\, o\, v)(t) = \int_0^t h(t-s)\|v(.,t) - v(.,s)\|^2\, ds.$$

Nous réécrivons (4.1) comme suit

$$\begin{cases} du = vdt, & \\ dv = \Big[\Delta u - \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)\, ds & \\ +u|u|^{p-2}\Big]dt + \epsilon\sigma(x,t)dW_t(x,t) & \text{dans } \mathcal{D}\times]0,+\infty[, \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D}\times[0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = u_1(x) & \text{dans } \overline{\mathcal{D}}, \end{cases} \tag{4.2}$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme suivante

$$\begin{cases} u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds, \\ v(t) = v(0) + \int_0^t \Big[\Delta u - \int_0^t h(s-r)\Delta u(r)\,dr \\ +u|u|^{p-2}\Big]ds + \int_0^t \epsilon\sigma(x,s)dW_s(x,t) & \text{in } \mathcal{D}\times]0,+\infty[, \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D}\times[0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = u_1(x) & \text{dans } \overline{\mathcal{D}}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Lemme 4.1. *[1][Inégalité de Sobolev-Poincaré] Soit m un nombre avec*

$$2 \leq m \leq +\infty (n = 1, 2) \;\; ou \;\; 2 \leq m \leq 2n/(n-2)(n \geq 3)$$

alors il existe une constante $C_s = C_s(\mathcal{D}, m)$ telle que

$$\|u\|_m \leq C_s \|\nabla u\|_2 \;\; \textit{pour} \;\; u \in H_0^1(\mathcal{D}).$$

Lemme 4.2. [*11*]. *Pour $h, \varphi \in C^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$ on a*

$$\int_{\mathcal{D}} h\varphi\varphi_t\,dx = -\frac{1}{2}h(t)\|\varphi(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(h' o\,\varphi)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[(h\,o\,\varphi)(t) - (\int_0^t h(s)\,ds)\|\varphi\|^2\Big].$$

Lemme 4.3. *Soit (u,v) une solution du problème (4.2) avec les données initiales $(u_0, v_0) \in H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D}), \mathbb{E}\int_0^t \|\sigma(s)\|_2^2 ds < \infty$. Alors, la fonctionnelle énergétique définie par (4.2) satisfait*

$$\begin{aligned} e(t) =& e(0) - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)\|\nabla u(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t (h' o \nabla u)(s)ds \\ &+ \int_0^t \langle v(s), \epsilon\sigma(x,s)dW_s\rangle + \frac{\epsilon^2}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t\int_{\mathcal{D}} \lambda_j e_j^2(x)\sigma^2(x,s)dxds. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Démonstration. En premier lieu, on applique la formule d'Itô à (4.2) pour tout $x \in \mathcal{D}$ après avoir intégrer sur $\mathcal{D}$ et par suite obtenir

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_2^2 =&\|v(0)\|_2^2 + 2\int_{\mathcal{D}}\int_0^t v(s)\Big[\Delta u - \int_0^s h(s-\tau)\Delta u(\tau)\,d\tau \\ &+ u|u|^{p-2}\Big]dsdx + 2\int_0^t \langle v(s), \epsilon\sigma(x,s)dW_s\rangle \\ &+ \epsilon^2\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\lambda_j e_j^2(x)\sigma^2(x,s)dxds.\end{aligned} \tag{4.5}$$

A l'aide d'une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}}\int_0^t \Delta u v(s)dxds &= -\int_{\mathcal{D}}\int_0^t \nabla u\nabla v dsdx \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\|\nabla u(t)\|_2^2 - \|\nabla u(0)\|_2^2\Big),\end{aligned} \tag{4.6}$$

D'après le lemme 4.2, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\int_0^s h(s-\tau)\Delta u(\tau)v(s)d\tau dxds \\ &= -\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\int_0^s h(s-\tau)\nabla u(\tau)\nabla v(s)d\tau dxds \\ &= \int_0^t\Big(\frac{1}{2}h(s)\|\nabla u(s)\|_2^2 - \frac{1}{2}(h'\,o\,\nabla u)(s) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big[(h\,o\,\nabla u)(s) - \int_0^s h(\tau)d\tau)\|\nabla u(s)\|_2^2\Big]\Big)ds.\end{aligned} \tag{4.7}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}}\int_0^t u|u|^{p-2}v(s)dsdx &= \int_0^t\int_{\mathcal{D}}\frac{1}{p}\frac{d}{ds}\Big(|u(s)|^p\Big)dxds \\ &= \frac{1}{p}\|u(t)\|_p^p - \frac{1}{p}\|u(0)\|_p^p.\end{aligned} \tag{4.8}$$

En remplaçant (4.6)-(4.8) dans (4.5) et multipliant l'équation (4.5) par $\frac{1}{2}$, on arrive à (4.4). □

Pour énoncer et démontrer notre résultat, nous posons les hypothèses suivantes.

(A1) Supposons que $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ soit une fonction C^1 décroissante satisfaisant

- $h(0) > 0,\ 1 - \int_0^\infty h(s)ds = l > 0$

- Il existe deux constantes positivesς_1 et ς_2 telles que

$$-\varsigma_1 h(t) \leq h'(t) \leq -\varsigma_2 h(t), \quad t \geq 0.$$

(A2)

$$\int_0^\infty h(s)ds < \frac{(p-2)p}{(p-1)^2}.$$

(A3)

$$\begin{cases} 2 < p \leq \frac{2(n-1)}{n-2} & \text{si } n \geq 3 \\ 2 < p \leq +\infty & \text{si } n = 1, 2. \end{cases} \tag{4.9}$$

4.3 L'explosion de la solution

On parle d'explosion en temps fini dans une équation d'évolution, lorsque la solution initialement régulière cesse d'exister au bout d'un temps fini, et qu'en même temps la norme de la solution tend vers l'infini. Le sens précis de cette définition dépend grandement de l'équation aux dérivées partielles considérée, vu que la notion même de solution et l'espace où elle est définie en dépendent aussi.

Étant donné que l'existence et l'unicité du (4.1) sont assurées dans [5], nous allons établir l'explosion de cette solution du problème (4.1). Pour cela on suppose que

$$\mathbb{E}\int_0^\infty \int_{\mathcal{D}} \sigma^2(x,t)dxdt < \infty,$$

$$G(t) = \frac{\epsilon^2}{2}\sum_{j=1}^{\infty} E\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \lambda_j e_j^2(x)\sigma^2(x,s)dxds,$$

$$\begin{aligned} G(\infty) &= \frac{\epsilon^2}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}\int_0^\infty \int_{\mathcal{D}} \lambda_j e_j^2(x)\sigma^2(x,s)dxds \\ &\leq \frac{\epsilon^2}{2} Tr(Q)c_0^2 \mathbb{E}\int_0^\infty \int_{\mathcal{D}} \sigma^2(x,s)dxds := E_1 < \infty, \end{aligned} \tag{4.10}$$

où

$$Tr(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty \text{ and } c_0 = \sup_{j\geq 1} \|e_j\|_\infty < \infty.$$

Lemme 4.4. *Soit* (u, v) *la solution du système (4.2) avec les conditions initiales* $(u_0, v_0) \in H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D})$*, alors on a :*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbb{E}e(t) =& -\frac{1}{2}h(t)\mathbb{E}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}(h'o\nabla u)(t) \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}}\lambda_j e_j^2(x)\sigma^2(x,t)dx,\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\langle u(t), v(t)\rangle =& \mathbb{E}\langle u_0, u_1\rangle - \int_0^t \mathbb{E}\|\nabla u(s)\|_2^2 ds \\ &+ \mathbb{E}\int_0^t\int_0^s h(s-r)\langle\nabla u(r), \nabla u(s)\rangle dr ds \\ &+ \mathbb{E}\int_0^t \|u\|_p^p ds + \mathbb{E}\int_0^t \|v\|_2^2 ds.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Démonstration. de (4.4), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}e(s)ds =& -\frac{1}{2}\int_0^t h(s)\|\nabla u(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t (h'o\nabla u)(s)ds \\ &+ \int_0^t \langle v(s), \epsilon\sigma(x,s)dW_s\rangle + \frac{\epsilon^2}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\lambda_j e_j^2(x)\sigma^2(x,s)dx ds.\end{aligned} \tag{4.13}$$

et en prenant l'espérance, on obtient (4.11).

Si on multiplie la deuxième équation de (4.3) par u, on intègre le résultat sur $\mathcal{D}$ et on prend l'espérance, on obtient (4.12). □

On pose $H(t) = G(t) - \mathbb{E}e(t)$.

Comme h est une fonction décroissante positive, il en résulte

$$\begin{aligned}H'(t) =& G'(t) - \frac{d}{dt}\mathbb{E}e(t) = \frac{1}{2}h(t)\mathbb{E}\|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &- \frac{1}{2}\mathbb{E}(h'o\nabla u)(t) \geq 0.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Par conséquent,

$$H'(t) \geq 0. \tag{4.15}$$

Lemme 4.5. *Soit* (u, v) *une solution du système (4.2). Supposons que* **(A1)** *soit vraie. Alors, il* *existe une constante positive C telle que*

$$\mathbb{E}\|u(t)\|_p^s \leq C\Big(G(t) - H(t) + \mathbb{E}\|u(t)\|_p^p\Big), \qquad 2 \leq s \leq p \tag{4.16}$$

Démonstration. Le deuxième terme dans 4.16 peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} G(t) - H(t) + \mathbb{E}\|u\|_p^p &= \mathbb{E}e(t) + \mathbb{E}\|u\|_p^p \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\|v\|_2^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big(1 - \int_0^t h(s)ds\Big)\|\nabla u\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{2}\mathbb{E}(h\,o\,\nabla u)(t) - \frac{1}{p}\mathbb{E}\|u\|_p^p + \mathbb{E}\|u\|_p^p. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Et par suite

$$G(t) - H(t) + \mathbb{E}\|u\|_p^p \geq \frac{1}{2}\Big(1 - \int_0^t h(s)ds\Big)\mathbb{E}\|\nabla u\|_2^2 + (1 - \frac{1}{p})\mathbb{E}\|u\|_p^p.$$

D'après **(A1)**, on obtient

$$G(t) - H(t) + \mathbb{E}\|u\|_p^p \geq \frac{1}{2}l\mathbb{E}\|\nabla u\|_2^2 + \mathbb{E}\|u\|_p^p.$$

On en distingue deux cas :

• Cas 1. Si $\|u\|_p \leq 1$, alors $\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^2$.

En appliquant le lemme 4.1, on obtient $\|u\|_p^s \leq c\|\nabla u\|_2^2$, alors

$$\frac{1}{2}l\mathbb{E}\|\nabla u\|_2^2 + \mathbb{E}\|u\|_p^p \geq \frac{1}{2}l\mathbb{E}\|u\|_p^s + \mathbb{E}\|u\|_p^p \geq \mathbb{E}\|u\|_p^s.$$

• Cas 2. If $\|u\|_p \geq 1$ alors $\|u\|_p^p \geq \|u\|_p^s$.

ainsi,

$$\frac{1}{2}l\mathbb{E}\|\nabla u\|_2^2 + \mathbb{E}\|u\|_p^p \geq \frac{1}{2}l\mathbb{E}\|\nabla u\|_2^2 + \mathbb{E}\|u\|_p^s \geq \mathbb{E}\|u\|_p^s.$$

Par conséquent on obtient (4.16). □

Nous sommes prêts à énoncer et à prouver notre résultat principal. A cet effet, nous définissons

$$L(t) := H^{1-\alpha}(t) + \delta\mathbb{E}\langle u, v\rangle,$$

où

$$0 < \alpha < min\{\frac{1}{2}, \frac{p-2}{2p}\} \tag{4.18}$$

et δ est une très petite constante déterminée plus tard.

Théorème 4.1. *Sous les conditions* **(A1)** *à* **(A3)** *et si on suppose que* (u, v) *est une solution du système (4.2) avec des données initiales* $(u_0, v_0) \in H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D})$ *et que*

$$\mathbb{E}e(0) \leq -(1+\beta)E_1, \tag{4.19}$$

où β *est une constante positive et* E_1 *est donné par (4.10). Alors il existe un temps fini* $T_0 \in [0, T]$ *tel que*

$$\lim_{t \to T_0^-} \mathbb{E}(e(t)) = +\infty,$$

où

$$T_0 = \frac{1-\alpha}{\alpha K L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)},$$

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \delta\mathbb{E}\langle u_0, u_1\rangle > 0,$$

avec K *une constante donnée.*

Démonstration. Soit

$$L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \delta\mathbb{E}\langle u, v\rangle.$$

D'une part, en dérivant $L(t)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
L'(t) &= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \delta\frac{d}{dt}(\mathbb{E}\langle u, v\rangle) \\
&= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) - \delta\mathbb{E}\|\nabla u(s)\|_2^2 \\
&+ \delta\mathbb{E}\int_0^t h(s-r)\langle\nabla u(r), \nabla u(s)\rangle dr \\
&+ \delta\mathbb{E}\|u\|_p^p + \delta\mathbb{E}\|v\|_2^2 \\
&= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) - \delta\mathbb{E}\|\nabla u(s)\|_2^2 \\
&+ \delta pH(t) - \delta pH(t) + \delta\mathbb{E}\int_0^t h(s-r)\langle\nabla u(r), \nabla u(s)\rangle dr \\
&+ \delta\mathbb{E}\|u\|_p^p + \delta\mathbb{E}\|v\|_2^2 \qquad (4.20) \\
&= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) - \delta\mathbb{E}\|\nabla u(s)\|_2^2 \\
&+ \delta\mathbb{E}\int_0^t h(s-r)\langle\nabla u(r), \nabla u(s)\rangle dr \\
&+ \delta\mathbb{E}\|u\|_p^p + \delta\mathbb{E}\|v\|_2^2 + \delta p\Big[H(t) - G(t) + \mathbb{E}e(t)\Big] \\
&\geq (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \delta(\frac{p}{2} - 1)\mathbb{E}\|\nabla u(s)\|_2^2 \\
&+ \delta\mathbb{E}\int_0^t h(s-r)\langle\nabla u(r), \nabla u(s)\rangle dr + \delta(1 - \frac{1}{p})\mathbb{E}\|u\|_p^p \\
&+ \delta(1 + \frac{p}{2})\mathbb{E}\|v\|_2^2 - \delta\frac{p}{2}\int_0^t h(s)ds\mathbb{E}\|\nabla u(s)\|_2^2 + \delta p\Big[H(t) - G(t)\Big].
\end{aligned}
$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^t h(t-r)\langle\nabla u(r), \nabla u(t)\rangle dr &= \mathbb{E}\int_0^t h(t-r)\langle\nabla u(r) - \nabla u(t) + \nabla u(t), \nabla u(t)\rangle dr \\
&= \mathbb{E}\int_0^t h(t-r)\langle\nabla u(r) - \nabla u(t), \nabla u(t)\rangle dr \\
&+ \mathbb{E}\int_0^t h(t-r)\langle\nabla u(t), \nabla u(t)\rangle dr \qquad (4.21) \\
&= \mathbb{E}\int_0^t h(t-r)\langle\nabla u(r) - \nabla u(t), \nabla u(t)\rangle dr \\
&+ \mathbb{E}\int_0^t h(s)ds\|\nabla u(t)\|_2^2
\end{aligned}
$$

En utilisant les inégalités de Young et de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^t h(t-r)\langle\nabla u(r)-\nabla u(t),\nabla u(t)\rangle dr &\geq -\frac{p}{2}\mathbb{E}\int_0^t h(t-r)\|\nabla u(r)-\nabla u(t)\|_2^2 dr\\ &-\frac{1}{2p}\mathbb{E}\int_0^t h(s)ds\|\nabla u(t)\|_2^2\\ &\geq -\frac{p}{2}\mathbb{E}(h\,o\,\nabla u)(t)-\frac{1}{2p}\mathbb{E}\int_0^t h(s)ds\|\nabla u(t)\|_2^2.\end{aligned} \tag{4.22}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^t h(t-r)\langle\nabla u(r),\nabla u(t)\rangle dr &\geq -\frac{p}{2}\mathbb{E}(h\,o\,\nabla u)(t)-\frac{1}{2p}\mathbb{E}\int_0^t h(s)ds\|\nabla u(t)\|_2^2\\ &+\mathbb{E}\int_0^t h(s)ds\|\nabla u(t)\|_2^2\\ &\geq -\frac{p}{2}\mathbb{E}(h\,o\,\nabla u)(t)+(1-\frac{1}{2p})\mathbb{E}\int_0^t h(s)ds\|\nabla u(t)\|_2^2.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Remplaçons (4.23) dans (4.20)

$$\begin{aligned}L'(t) &\geq (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\delta p\Big[H(t)-G(t)\Big]+\delta(\frac{p}{2}-1)\mathbb{E}\|\nabla u(s)\|_2^2\\ &-\delta\frac{p}{2}\mathbb{E}(h\,o\,\nabla u)(t)+\delta\frac{p}{2}\mathbb{E}(h\,o\,\nabla u)(t)+\delta(1-\frac{1}{p})\mathbb{E}\|u\|_p^p\\ &+\delta(1+\frac{p}{2})\mathbb{E}\|v\|_2^2+\delta(1-\frac{1}{2p}-\frac{p}{2})\mathbb{E}\int_0^t h(s)ds\|\nabla u(s)\|_2^2.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Pour $1-\alpha>0$, on a

$$\begin{aligned}L'(t) &\geq \delta pH(t)-\delta pG(t)+\delta(\frac{p}{2}-1)\mathbb{E}\|\nabla u(s)\|_2^2+\delta(1-\frac{1}{p})\mathbb{E}\|u\|_p^p\\ &+\delta(1+\frac{p}{2})\mathbb{E}\|v\|_2^2+\delta(1-\frac{1}{2p}-\frac{p}{2})\mathbb{E}\int_0^t h(s)ds\|\nabla u(s)\|_2^2.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Comme H est une fonction croissante positive

$H(t)\geq H(0)=G(0)-\mathbb{E}(e(0))=-e(0)\geq(1+\beta)E_1.$

$$G(t)\leq E_1\leq\frac{1}{1-\beta}H(t).$$

Alors

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq (p - \frac{p}{1-\beta})\delta H(t) + \delta(\frac{p}{2} - 1)\mathbb{E}\|\nabla u(s)\|_2^2 + \delta(1 - \frac{1}{p})\mathbb{E}\|u\|_p^p \\
&+ \delta(1 + \frac{p}{2})\mathbb{E}\|v\|_2^2 + \delta(1 - \frac{p^2-1}{2p})\mathbb{E}\int_0^t h(s)ds\|\nabla u(s)\|_2^2 \\
&\geq \delta\gamma\left(H(t) + \mathbb{E}\|\nabla u(s)\|_2^2 + \mathbb{E}\|v\|_2^2 + \mathbb{E}\|u\|_p^p\right) \\
&\geq \delta\gamma\left(H(t) + \mathbb{E}\|v\|_2^2 + \mathbb{E}\|u\|_p^p\right).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

où $\gamma > 0$ est le minimum des coefficients de $H(t), \mathbb{E}\|v\|_2^2, \mathbb{E}\|\nabla u(t)\|_2^2$ et $\mathbb{E}\|u\|_p^p$ dans (4.26). Par conséquent

$$L(t) \geq L(0) > 0, \forall t > 0.$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned}
(L(t))^{\frac{1}{1-\alpha}} &= (H^{1-\alpha}(t) + \delta\mathbb{E}\langle u, v\rangle)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}}(H(t) + \delta^{\frac{1}{1-\alpha}}|\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} uvdx|^{\frac{1}{1-\alpha}}).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Hölder et celle de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} uvdx|^{\frac{1}{1-\alpha}} &\leq c\Big((\mathbb{E}\|u\|_p^2)^{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}\|v\|_2^2)^{\frac{1}{2}}\Big)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&\leq c\left[\frac{(\mathbb{E}\|u\|_p^2)^{\frac{\eta}{2(1-\alpha)}}}{\eta} + \frac{(\mathbb{E}\|v\|_2^2)^{\frac{\zeta}{2(1-\alpha)}}}{\zeta}\right]
\end{aligned} \tag{4.28}$$

avec $\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta} = 1$.

On choisit $\zeta = 2(1-\alpha), \eta = \frac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha}$ et on utilise (4.18) alors (4.28) deviens

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} uvdx|^{\frac{1}{1-\alpha}} &\leq c\left[\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}(\mathbb{E}\|u\|_p^2)^{\frac{1}{1-2\alpha}} + \frac{1}{2(1-\alpha)}E\|v\|_2^2)\right] \\
&\leq \frac{c}{2(1-\alpha)}\left[(1-2\alpha)\mathbb{E}\|u\|_p^{\frac{2}{(1-2\alpha)}} + \mathbb{E}\|v\|_2^2\right] \\
&\leq \tilde{c}\left[\mathbb{E}\|u\|_p^{\frac{2}{(1-2\alpha)}} + E\|v\|_2^2\right].
\end{aligned} \tag{4.29}$$

En appliquant le lemme 4.5 avec $s = \frac{2}{1-2\alpha}$ et en rappelant (4.2), on obtient

$$|\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} uvdx|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \tilde{c}\Big[H(t) + \mathbb{E}\|v\|_2^2 + \mathbb{E}\|u\|_p^p\Big]. \tag{4.30}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(L(t))^{\frac{1}{1-\alpha}} &\leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\Big(H(t) + \delta^{\frac{1}{1-\alpha}}c\Big[H(t) + \mathbb{E}\|v\|_2^2 + \mathbb{E}\|u\|_p^p\Big) \\ &\leq \widetilde{C}\Big[H(t) + E\|v\|_2^2 + E\|u\|_p^p\Big].\end{aligned} \tag{4.31}$$

Selon (4.26) et (4.31), on a :

$$(L(t))^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \frac{\widetilde{C}}{\gamma}L'(t) \leq \widetilde{K}L'(t). \tag{4.32}$$

Par une intégration directe de (4.32), on obtient

$$(L(t))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \geq \frac{1}{(L(0))^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} - \frac{\widetilde{K}\alpha t}{1-\alpha}}.$$

Donc, $L(t)$ explose à un instant $T \leq T_0 = \frac{1-\alpha}{\alpha K L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)}$, et la preuve est complété. □

Conclusion

Ce mémoire a exploré l'explosion d'une équations aux dérivées partielles stochastique (EDPS) de type des ondes viscoélastique. Nous avons commencé par introduire les concepts fondamentaux classiques de la théorie des probabilités et des processus stochastiques, avant de plonger dans la formulation et l'analyse des EDPS, un domaine représentant une des intersections des mathématiques appliquées et de la théorie des probabilités. Nous avons fait appel au calcul stochastique où nous avons souligné l'importance de la formule d'Itô et de l'intégrale stochastique dans la formulation des EDPS.

Les applications des EDPS sont vastes et variées, allant de la modélisation des phénomènes physiques et biologiques à la finance mathématique. Les exemples concrets étudiés, tels que les équations de la chaleur stochastique et des ondes stochastiques viscoélastiques, ont illustré la puissance et la flexibilité de ces outils mathématiques pour décrire des systèmes complexes soumis à des influences aléatoires.

A tout prendre, les équations aux dérivées partielles stochastiques représentent un domaine de recherche dynamique et en pleine expansion. Elles offrent de nombreuses opportunités pour développer de nouvelles théories et applications. Les défis théoriques et numériques associés à la résolution des EDPS nécessitent une compréhension profonde à la fois des EDP classiques et des processus stochastiques, ce qui en fait un champ d'étude riche et stimulant pour les mathématiciens appliqués.

Annexes

4.4 Mesurabilité

Une tribu (σ-algèbre) sur l'ensemble Ω est une famille de parties de Ω, contenant l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire, union dénombrable et intersection dénombrable :

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Une tribu contient donc l'espace Ω. On peut aussi rappeler qu'un espace mesurable est un espace muni d'une tribu. Remarque :l'intersection de tribu est une tribu pour l'union ce n'est pas le cas car on prenons $\mathcal{F}$ une tribu. Une sous-tribu de $\mathcal{F}$ est une tribu $\mathcal{G}$ telle que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$,

4.5 Les inégalités

Soient $p, q \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq p \leq +\infty$, on note par q l'exposant conjugué de p c'est-à-dire : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

4.5.1 L'inégalité de Young

Pour tous réels positifs a et b et tous réels strictement positifs p et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $1 \leq p$, on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

4.5.2 L'inégalité de Hölder

Soit p un nombre réel avec $1 \leq p \leq \infty$ et soient $f \in L^p(\mathcal{D})$, $g \in L^q(\mathcal{D})$, alors $fg \in L^1(\mathcal{D})$ et on a

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

où

$$\|fg\|_1 = \int_{\mathcal{D}} |fg| dx.$$

Bibliographie

[1] Adams, R. A. (1978) *Sobolev espaces.* Academic press, Pure and Applied Mathematics, **65**.

[2] Berriche, I. (2018) *Théorème de Girsanov et application.*

[3] Breton, J. C. (2014) *Calcul stochastique.* Notes de cours, M2 Mathéma.

[4] Brézis,H. (2011) *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* New York Springer, **2**, No. 3 .

[5] Cheng, S. Guo, Y. and Tang, Y. (2014). *Stochastic viscoelastic wave equations with nonlinear damping and source terms.* Appl. Math, **2014**.

[6] Da Prato, G. and J. Zabczyk, (1992) *Stochastic Equations in Infinite Dimensions.* Cambridge University Press.

[7] Gut, A. (2006) *Probability : a graduate course.* New York : Springer. Vol. 200, No. 5.

[8] Jeanblanc, M. *Cours de Calcul stochastique.* Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[9] Lubin, T. (2017) *Equations aux dérivées partielles (EDP), Méthode de résolution des EDP par séparation de variables ; Applications.*

[10] Mueller, C. (1997) *Long time existence for the wave equation with a noise term,* The Annals of Probability, **25**, No. 1, 133-151.

[11] Park, J. Y. and Kang, J. R. (2010) *Global Existence and Uniform Decay for a Nonlinear Viscoelastic Equation with Damping*. Acta Appl Math, **110**, 1393-1406.

[12] Scott, J. F. M. (1985). *The statistics of waves propagating in a one-dimensional random medium.* Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 398(1815), 341-363.

[13] Zemiri, N. *Mouvement Brownien standard et fractionnaire.*

.

الملخص

انصب اهتمامنا في هذه الأطروحة على انفجار الحل في المعادلة التفاضلية الجزئية العشوائية من نوع موجة لزجة مرنة لقد بدأنا بتقديم المفاهيم الأساسية الكلاسيكية لنظرية الاحتمالات والعمليات العشوائية، قبل التعمق في صياغة . وتحليل هذه المعادلة التفاضلية الجزئية العشوائية التي تمثل مجالا يعتبر أحد نقاط التقاطع بين الرياضيات التطبيقية ونظرية الاحتمالات حيث استخدمنا حساب التفاضل والتكامل العشوائي اين أكدنا على أهمية صيغة ايطو والتكامل العشوائي في صياغة معادلتنا التفاضلية الجزئية العشوائية.

في العموم، تمثل المعادلات التفاضلية الجزئية العشوائية مجالًا ديناميكيًا ومتناميًا للبحث إذ أنها توفر العديد من الفرص لتطوير نظريات وتطبيقات جديدة. فالتحديات النظرية والعددية المرتبطة بحل المعادلات التفاضلية الجزئية العشوائية تتطلب فهمًا عميقًا لكل من المعادلات التفاضلية الجزئية الكلاسيكية والعمليات العشوائية، مما يجعلها مجالًا غنيًا ومحفزًا للدراسة للباحثين في الرياضيات التطبيقية.

Abstract

In this dissertation, we focused on the explosion of a viscoelastic wave type stochastic partial differential equation (SPDE). We began by introducing the classic fundamental concepts of probability theory and stochastic processes, before diving into the formulation and analysis of EDPS, a field representing one of the intersections between applied mathematics and probability theory. We used stochastic calculus where we underlined the importance of the Itô formula and the stochastic integral in the formulation of EDPS.

Stochastic partial differential equations represent a dynamic and growing area of research. They offer many opportunities to develop new theories and applications. The theoretical and numerical challenges associated with solving EDPS require a deep understanding of both classical PDEs and stochastic processes, making it a rich and stimulating field of study for applied mathematicians.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes concentrés sur l'explosion d'une équations aux dérivées partielles stochastique (EDPS) de type des ondes viscoélastique.

Nous avons commencé par introduire les concepts fondamentaux classiques de la théorie des probabilités et des processus stochastiques, avant de plonger dans la formulation et l'analyse des EDPS, un domaine représentant une des intersections des mathématiques appliquées et de la théorie des probabilités. Nous avons fait appel au calcul stochastique où nous avons souligné l'importance de la formule d'Itô et de l'intégrale stochastique dans la formulation des EDPS.

Les équations aux dérivées partielles stochastiques représentent un domaine de recherche dynamique et en pleine expansion. Elles offrent de nombreuses opportunités pour développer de nouvelles théories et applications. Les défis théoriques et numériques associés à la résolution des EDPS nécessitent une compréhension profonde à la fois des EDP classiques et des processus stochastiques, ce qui en fait un champ d'étude riche et stimulant pour les mathématiciens appliqués.