République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté de Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Équations aux dérivées partielles
présenté par

Benaissa Esma

Soutenu le : 20/ 06/ 2024

Existence de solutions positives pour un système elliptique non linéaire

Soutenu devant le jury composé de :

M. S. E. MIRI	Professeur	U. Tlemcen	Président
M. A. Attar	Professeur	U. Tlemcen	Examinateur
M. R. Bentifour	Maître de Conférences A	U. Tlemcen	Encadrant
Mme. S. Rota-Nodari	Professeur	U. Nice	Co-Encadrant
M. Y. O. Boukarabila	Maître de Conférences A	U. Tlemcen	Invité

Année Universitaire :2023-2024

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

Mes chers parents.

Mes chers grands-parents.

Mes chers frères, ma chère sœur.

Mes professeurs.

Mes amis sans exception.

Mon cher grand-père ***Benaissa Abdeslam****,*
je prie le bon Dieu miséricordieux que ton destin soit le paradis.

Remerciements

Tout d'abord, ***El Hamdoulillah****, je remercie* ***ALLAH****, le tout puissant de m'avoir accordé la volonté et la patience pour accomplir ce travail.*

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadrant ***Mr Bentifour Rachid****, pour ses précieux conseils, sa confiance et son orientation.*

Je tiens à remercier ***Mme Simona Rota Nodari*** *d'avoir accepté de me co-encadrer, et pour nous soutenir dans le programme de Master International.*

Je tiens à exprimer ma gratitude et mes remerciements au professeur ***Mr Attar Ahmed*** *pour sa disponibilité, son aide précieuse et ses explications claires tout au long de ce travail, qui ont grandement contribué à son achèvement. Merci infiniment.*

J'adresse mes sincères remerciements à ***Mr Miri Sofiane El-Hadi*** *, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être président du jury de ce travail.*

Je tiens à remercier chaleureusement les professeurs ***Mr Boumediene Abdellaoui*** *et* ***Mr Boukarabila Youcef Oussama****, pour leurs efforts précieux. Leur aide durant le Master International. Leurs explications étaient excellentes. Je leur exprime ma plus sincère gratitude et mon profond respect.*

Mes remerciements chaleureux à ***Batahri Asma Amira****, qui m'a beaucoup aidé dans ce travail, je salue sa gentillesse, son humilité et sa patience à prodiguer des conseils pertinents. Je demande à Dieu de la guider vers le succès dans sa vie et dans ses études.*

Enfin, mes vifs remerciements s'adressent à tous mes professeurs durant toutes ces années. Qu'Allah vous garde.

Table des matières

Notations

Notation	**Définition**
$\mathbb{R}^N$	: Espace euclidien de dimension N, $N \in \mathbb{N}^*$.
Ω	: Un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	: La frontière de Ω.
$\|\Omega\|$	: La mesure de Ω.
$\Omega' \subseteq \Omega$	: Ω' est un sous-ensemble de Ω, ou $\Omega' = \Omega$.
$\Omega' \subset\subset \Omega$	: Ω' sous-ensemble ouvert de Ω avec $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.
$C^k(\Omega)$	: Espace des fonctions de classe k dans Ω.
$C_0^k(\Omega)$	: Espace des fonctions $C^k(\Omega)$ à support compact.
$C^\infty(\Omega)$	: Espace des fonctions indéfiniment dérivable dans Ω.
$C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	: Espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact.
$\mu(E)$	: Mesure de Lebesgue d'un ensemble E.
$B_r(x_0)$	: La boule de rayon r centrée en x_0 dans $\mathbb{R}^N$.
$\hookrightarrow$	: Injection continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	: Injection compacte.
u^+	: Partie positive de la fonction u, $u^+ = \max\{u, 0\}$.
$L^1_{loc}(\Omega)$	: L'ensemble des fonctions localement intégrables sur un domaine Ω.
$p.p.$	: Presque partout.
$p^* = \frac{pN}{N-p}$	: Exposent critique de Sobolev.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles ont été et restent un outil fondamental dans la modélisation et la compréhension de nombreux processus dans les domaines de la physique, de l'ingénierie, de la chimie, de la biologie, etc... De cette manière, l'utilisation de l'opérateur Laplacien classique permet de prédire des comportements quantitatifs et de comprendre les phénomènes observés.

La notion des systèmes elliptiques avec un terme de gradient apparaît dans l'étude de modèles électrochimiques en ingénierie et d'autres modèles en dynamique des fluides. Nous recommandons [13] et [14] pour obtenir davantage d'informations et d'applications de cette notion de systèmes.

Dans [8], Boccardo-Orsina-Porretta considèrent le système suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(b(x,z)\nabla u) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ -\mathrm{div}(a(x,z)\nabla z) = b(x,z)|\nabla u|^2 & \text{dans } \Omega, \\ u = z = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $a(x,s)$ et $b(x,s)$ sont des fonctions de Carathéodory positives et coercives. Sous l'hypothèse que $f \in L^m(\Omega)$ avec $m \geq \frac{2N}{N+2}$, ils ont prouvé l'existence et la régularité d'une solution positive.

Lorsque le gradient apparaît en tant que terme d'absorption, le système devient :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,z)\nabla u) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ -\mathrm{div}(b(x,z)\nabla z) + K(x,z)|\nabla u|^2 = g(x) & \text{dans } \Omega, \\ z = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce système a été étudié dans [9].

Dans ce mémoire, on s'intéresse essentiellement à l'étude d'existence des solutions positives pour un système elliptique non-linéaire avec interaction entre les termes de potentiel et de gradient.

$$\begin{cases} -\Delta u = z^p + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta z = |\nabla u|^q + \mu g(x) & \text{dans } \Omega, \\ u, z > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = z = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{S}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, f et g sont des fonctions mesurables et non négatives.

Nous considérerons deux cas dans ce travail :

- **Le premier cas :** $q \geq 1$, $p > 0$ avec $pq > 1$, λ et μ sont des constantes réelles non négatives.
- **Le deuxième cas :** lorsque $\lambda = \mu = 1$, et $p > 0$, $0 < q \leq 2$, avec $pq < 1$.

Notre objectif est de prouver l'existence des solutions positives du système (S) sous la condition $pq > 1$ et $pq < 1$, au sens des distributions.

Notre mémoire est organisé comme suit :

— **Le premier chapitre :**

contient des notions préliminaires et des outils de base, tels que les espaces de Lebesgue, les espaces de Sobolev, et quelques inégalités qui seront utilisées dans la suite du mémoire.

— **Le second chapitre :**

Est décomposé en deux parties. Dans la première partie, nous étudions l'existence de solutions positives pour le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^q + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné, f est une fonction mesurable et positive. Sous certaines conditions naturelles sur λ, on peut déterminer l'existence d'une solution positive du problème (P) selon les valeurs de q.

Dans la deuxième partie, nous étudions l'existence des solutions positives du système (S) dans un cas particulier, lorsque $0 < q \leq 2$, $p > 0$ avec $pq < 1$ et $\lambda = \mu = 1$.

— **Le troisième chapitre :**

Est consacré à généraliser des résultats du chapitre 2 dans le cas $pq > 1$. Le but de ce chapitre est d'obtenir des conditions naturelles sur les paramètres λ, μ et les données f, g, afin de prouver l'existence de solutions au sens des distributions positives du système (S), sous la condition $pq > 1$.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques outils d'analyse non-linéaire, qui seront utilisés au cours de ce mémoire. Donc ce chapitre sera divisé en deux parties : Premièrement, nous présentons quelques notions et outils d'analyse fonctionnelle qui sont en relation avec les problèmes étudiés, comme les notions d'espace de Lebesgue L^p, et d'espace de Sobolev. Par la suite, on cite quelques outils fondamentaux liés aux problèmes elliptiques, tels que la notion de solution au sens distributionnel, et quelques inégalités pratiques liées à nos problèmes.

1.1 Quelques résultats et outils d'analyse fonctionnelle

Soit X un espace de Banach.

Définition 1.1. ***(Convergence forte)***

Soit $\{x_n\}_n$ une suite de X. On dit que $\{x_n\}_n$ converge fortement vers x, et on note $x_n \to x$ dans X si

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \quad \textit{quand } n \to \infty.$$

Définition 1.2. ***(Convergence faible)***

Soit $\{x_n\}_n$ une suite de X. On dit que $\{x_n\}_n$ converge faiblement vers x, si pour tout $f \in X'$ (le dual topologique de X), $f(x_n) \to f(x)$. On note alors

$$x_n \rightharpoonup x \quad \textit{dans } \sigma(X, X').$$

Théorème 1.1. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans X, alors $\exists k > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\|_X \leq k$*

et

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X.$$

Définition 1.3. *Soit J l'injection canonique de X dans X''. On dit que X est réflexif si $J(X) = X''$.*

Théorème 1.2. *Soit X est un espace de Banach réflexif et $\{x_n\}_n$ une suite bornée dans X, alors il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}_k$ de $\{x_n\}_n$ et $x \in X$ tel que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ faiblement dans X.*

Pour plus de détails voir [10].

1.1.1 Définitions et propriétés élémentaires des espaces L^p

Définition 1.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$, nous définissons*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ est mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

avec

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p},$$

$\|\cdot\|_p$ est une norme.

Si $p = \infty$, nous définissons

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ est mesurable et } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

avec C est une constante positive, et la norme associée

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \inf\{C \mid |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Théorème 1.3. *[10] (**Inégalité de Hölder**). Soit Ω un ouvert borné, et $1 \leq p < \infty$, on note p' l'exposant conjugué, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $f\,g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |f\,g| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Nous rappelons l'inégalité de Young :

Lemme 1.1. *[10] (**Inégalité de Young**). Soit $1 < p < \infty$, et $\forall a, b > 0$, on a :*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

Il arrive parfois que l'on utilise la forme :

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon)b^{p'} \quad \text{avec } c(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{-1}{p-1}}.$$

Proposition 1.1. *Soit $h \in L^1(\Omega)$ et $\{h_n\}_n \subset L^r(\Omega)$ avec $1 < r < +\infty$. Supposons que $h_n \to h$ fortement dans $L^1(\Omega)$ et que $\{h_n\}_n$ est bornée dans $L^r(\Omega)$. Alors, $h \in L^r(\Omega)$ et pour tout $a \in [1, r)$, nous avons l'inégalité d'interpolation suivante :*

$$\|h_n - h\|_{L^a(\Omega)} \leq \|h_n - h\|^{\theta}_{L^1(\Omega)} \|h_n - h\|^{1-\theta}_{L^r(\Omega)} \tag{1.1}$$

où $\theta := \frac{r-a}{a(r-1)}$. En particulier, $h_n \to h$ fortement dans $L^a(\Omega)$.

1.1.2 Quelques résultats de convergence

Théorème 1.4. *[10] (**Théorème de convergence dominée de Lebesgue**). Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$ satisfaisant :*

1. *$f_n(x) \to f(x)$ presque partout sur Ω.*
2. *Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout sur Ω.*

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

Théorème 1.5. *[10] (**Lemme de Fatou**). Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$ satisfaisant :*

1. *Pour tout n, $f_n \geq 0$ presque partout,*
2. *$\sup_n \|f_n\|_{L^1(\Omega)} < \infty$.*

Pour presque tout $x \in \Omega$, nous définissons $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq +\infty$. Alors $f \in$

$L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega f(x)\ dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\ dx.$$

Rappelons par la suite, le Théorème de Vitali qui a une importance primordiale, pour montrer les résultats d'existence. Avant de l'énoncer nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 1.5. *(**Equi-Intégrabilité dans** L^p) Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$. On dit que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(E)$ est equi-intégrable si seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\Omega \subset E$ avec $|\Omega| < \delta$, on a*

$$\int_\Omega |f_n(x)|^p\, dx \leq \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 1.6. ***(Vitali).*** *Soit (E, μ) un espace mesuré tel que $\mu(E) < +\infty$, soit $1 \leq p < +\infty$ et soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions de $L^p(E)$ telle que*

1. *$f_n \to f$ presque partout dans E.*
2. *$\{f_n^p\}_n$ est equi-intégrable sur E.*

Alors $f \in L^p(E)$ et $f_n \to f$ fortement dans $L^p(E)$.

La notion de troncature est très importante dans l'étude des EDP avec donnée dans L^1 ou bien mesure. Cette notion est basée sur l'usage de la fonction $T_k(s)$.

Notation. La fonction de troncature $T_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$T_k(s) = \begin{cases} s \quad , \quad |s| \leq k, \\ k \quad , \quad |s| > k. \end{cases} \tag{1.2}$$

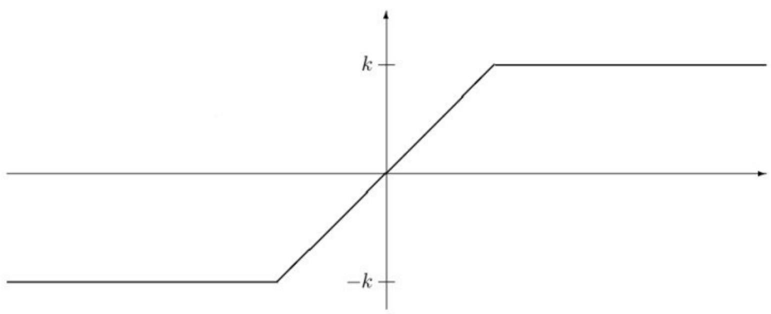

FIGURE 1.1 – La Troncature

1.1.3 Quelques outils dans les espaces de Sobolev

Définition 1.6. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, et $p \geq 1$.*

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^p(\Omega); \quad \text{tel que} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),\ i = \overline{1, N} \right\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)},$$

ou par fois la norme équivalente

$$\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|\varphi\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad si \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Si $p = +\infty$, alors l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ muni du la norme :

$$\|\varphi\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \sup_{\Omega} |\varphi| + \sup_{\Omega} |\nabla \varphi|.$$

Si $p = 2$, on note $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, muni du la produit scalaire :

$$(\varphi, \psi)_{H^1(\Omega)} = (\varphi, \psi)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

La norme associée

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.2. *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un domaine ouvert borné.*

- *$W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach si $1 \leq p \leq \infty$.*
- *$W^{1,p}(\Omega)$ est un espace séparable si $1 \leq p < \infty$.*
- *$W^{1,p}(\Omega)$ est un espace réflexif si $1 < p < \infty$.*
- *$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Définition 1.7. *Étant donné $1 \leq p < \infty$. Nous désignons par $W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture* *de* $C_c^\infty(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$*, c'est-à-dire :*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}.$$

Proposition 1.3. *Soit* $1 \leq p < \infty$*. L'espace de Sobolev* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est défini par :*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{\varphi \in W^{1,p}(\Omega); \quad \varphi = 0 \ sur\ \partial\Omega\right\}.$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ *muni de la norme :*

$$\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)}.$$

Remarque 1.1. *Pour* Ω *non borné* $(\Omega = \mathbb{R}^N)$*, on a :*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Théorème 1.7. ***(Rellich-Kondrachov)****. Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un domaine borné de classe* C^1

- *Si* $p < N$ *alors* $\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall 1 \leq q < p^*$ *avec* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{N}$.
- *Si* $p = N$ *alors* $\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall 1 \leq q < +\infty$.
- *Si* $p > N$ *alors* $\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

Avec les injections compactes.

Remarque 1.2. *Si* Ω *non borné* $(\Omega = \mathbb{R}^N)$*, alors les injections précédentes sont continues.*

Proposition 1.4. ***(Inégalité de Poincaré)****. Soit* $1 \leq p < \infty$*, et* Ω *un ouvert borné alors il existe une constante* $C(\Omega)$ *telle que :*

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)}.$$

Autrement dit sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ *la quantité* $\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)}$ *est une norme équivalent à la norme de* $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.8. ***(Sobolev, Gagliardo-Nirenberg)****. Soit* $1 \leq p < N$*, alors* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ *où* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{N}$.

Et il existe une constante $S \equiv S(p, N)$*, telle que :*

$$\|\varphi\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq S\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \qquad \forall\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Pour plus détails voir [10].

1.2 Problème elliptique (Existence, unicité et régularité)

Définition 1.8. *On dit que φ est une solution distributionnelle de :*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi &= f(\varphi) \quad \text{dans } \Omega, \\ \varphi &= 0 \quad \text{dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si $|\nabla\varphi| \in L^1(\Omega)$ et $f(\varphi) \in L^1(\Omega)$ et pour toute fonction test $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla\psi \, dx = \int_\Omega f(\varphi)\psi \, dx.$$

Proposition 1.5. *Supposons que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne convexe, tell que $\varphi(0) = 0$ alors :*

$$-\Delta\varphi(u) \leq \varphi'(u)(-\Delta u).$$

Autrement, si $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ concave, alors

$$-\Delta\psi(u) \geq \psi'(u)(-\Delta u).$$

Pour prouver résultat principal d'existence, nous utilisons le Théorème du point fixe de Schauder suivant.

Théorème 1.9. *(**point fixe de Schauder**). Soit X un espace de Banach, $K \subset X$ non vide, convexe et compact, on suppose $T : K \to K$ une application continue et compacte. Alors T admet un point fixe.*

Le résultat de régularité suivant, démontré dans [6], sera utilisé de manière systématique.

Théorème 1.10. *Supposons que $h \in L^1(\Omega)$, alors le problème*

$$\begin{cases} -\Delta z = h \quad \text{dans } \Omega, \\ z = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

possède une solution faible unique $z \in W_0^{1,s}(\Omega)$ pour tout $s \in [1, \frac{N}{N-1})$. De plus, pour $s \in [1, \frac{N}{N-1})$ fixé, il existe une constante positive $C = C(\Omega, N, s)$ telle que

$$\|\nabla z\|_{L^s(\Omega)} \leq C\|h\|_{L^1(\Omega)}. \tag{1.4}$$

Et l'opérateur $\mathcal{F} : h \mapsto z$ *est compact de* $L^1(\Omega)$ *dans* $W_0^{1,s}(\Omega)$.

Enfin, rappelons le résultat de régularité classique suivant que nous utiliserons dans plusieurs preuves ci-dessous.

Théorème 1.11. *Soit* $h \in L^m(\Omega)$ *avec* $m > 1$. *Alors le problème*

$$\begin{cases} -\Delta z = h \text{ dans } \Omega, \\ z = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

possède une solution faible unique z. *De plus, il existe une constante positive* $C = C(\Omega, N, m)$ *indépendante de* h *telle que :*

1. *Si* $1 < m < N$, *alors*

$$\|\nabla z\|_{L^{m^*}(\Omega)} \leq C\|h\|_{L^m(\Omega)}, \text{ où } m^* = \frac{mN}{N-m}.$$

2. *Si* $m = N$, *alors* $|\nabla z| \in L^s(\Omega)$ *pour tout* $s \in [1, +\infty)$.
3. *Si* $m > N$, *alors* $z \in C^{1,\gamma}(\Omega)$ *pour un certain* $\gamma \in (0, 1)$.

Pour la preuve voir [7].

1.2.1 Le principe du maximum et le principe de comparaison

Nous commençons par rappeler le résultat de comparaison suivant.

Théorème 1.12. *[11] Soit* f *une fonction continue positive, telle que* $\frac{f(x,s)}{s}$ *est décroissante pour* $s > 0$. *Supposons que* $w_1, w_2 \in H_0^1(\Omega)$ *sont telles que :*

$$\begin{cases} -\Delta w_1 & \leq & f(x, w_1), & w_1 > 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta w_2 & \geq & f(x, w_2), & w_2 > 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Alors $w_2 \geq w_1$ *dans* Ω.

Théorème 1.13. *[15]**(Principe du maximum fort)***

Soit u *l'unique solution du problème :*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors on a :

- *Si* $f \geq 0$ *alors* $u > 0$ *ou bien* $u = 0$ *dans* Ω.
- *Si* $f \leq 0$ *alors* $u < 0$ *ou bien* $u = 0$ *dans* Ω.

Lemme 1.1. *[12]* ***(Inégalité de Kato)***

Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *telle que* $\Delta u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Alors* $\Delta u^+ \in L^1_{loc}(\Omega)$, *et on a :*

$$\Delta u^+ \geq \chi_{[u \geq 0]} \Delta u \qquad \text{au sens des distributions.}$$

Chapitre 2

Étude d'un système elliptique avec terme de potentiel-gradient

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions positives pour un système elliptique non-linéaire avec interaction entre les termes de potentiel et de gradient. Nous analysons l'existence ainsi que la non-existence des solutions pour le système (2.1), à savoir

$$\begin{cases} -\Delta u = z^p + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta z = |\nabla u|^q + \mu g & \text{dans } \Omega, \\ u, z > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = z = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, $p, q > 0$, f et g sont des fonctions mesurables.

Ce chapitre est organisé selon le plan suivant, la section 2.1 est dédiée à l'étude d'un problème elliptique dont le terme gradient agit comme un terme de réaction. Dans la section 2.2, nous étudions l'existence des solutions positives pour un cas particulier du système (2.1), lorsque $0 < q \leq 2$, $p > 0$ avec $pq < 1$ et $\lambda = \mu = 1$.

2.1 Cas d'une seule équation

Les résultats de cette section sont basés sur [2] et [5].

Nous considérons le problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= |\nabla u|^q + \lambda f(x) \text{ dans } \Omega, \\ u &> 0 \qquad\qquad\quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, $q > 1$, et f est une fonction mesurable et positive appartenant à $L^m(\Omega)$, avec $m \geq 1$.

Commençons par prouver le résultat de non-existence suivant.

Théorème 2.1. *Il existe $\bar{\lambda} > 0$ tel que si $\lambda > \bar{\lambda}$, alors le problème (2.2) n'admet pas de solution positive.*

Démonstration. Nous procédons par l'absurde. Supposons que le problème (2.2) admet une solution positive u. Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, on multipliant l'équation (2.2) par $|\phi|^{q'}$, on obtient

$$q' \int_\Omega |\phi|^{q'-1} |\nabla \phi| |\nabla u| = \int_\Omega |\nabla u|^q |\phi|^{q'} + \lambda \int_\Omega f |\phi|^{q'}. \tag{2.3}$$

Donc par l'inégalité de Young, on déduit que

$$C_q \int_\Omega |\nabla \phi|^{q'} \geq \lambda \int_\Omega f |\phi|^{q'}. \tag{2.4}$$

On pose

$$\bar{\lambda} = \inf_{\phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{C_q \int_\Omega |\nabla \phi|^{q'}\, dx}{\int_\Omega f |\phi|^{q'}\, dx}, \tag{2.5}$$

alors si $\lambda > \bar{\lambda}$, le problème (2.2) n'a pas de solution positive, et le résultat est démontré. $\square$

Il est possible de démontrer le résultat d'existence principal, comme suit :

Théorème 2.2. *Supposons que $f \in L^m(\Omega)$ où $m \in (1, N)$. Alors il existe $\bar{\lambda} > 0$ tel que pour tout $\lambda < \bar{\lambda}$, le problème (2.2) admet une solution positive u, de plus $u \in W_0^{1,\sigma}(\Omega)$ avec $mq < \sigma < m^*$.*

Démonstration. Pour la preuve, nous appliquons le Théorème de Schauder :

Tout d'abord, nous commençons par fixer σ telle que $mq < \sigma < m^*$, et nous considérons $\bar{\lambda} > 0$, alors il existe $l > 0$, avec

$$C\left(l + \bar{\lambda} \|f\|_{L^m(\Omega)}\right) = l^{\frac{1}{q}},$$

où $C = C(\Omega, \sigma, m)$, pour $\lambda < \bar{\lambda}$ fixé, nous définissons l'ensemble

$$H := \{v \in W_0^{1,1}(\Omega) \text{ tel que } v \in W_0^{1,\sigma}(\Omega) \text{ et } \|\nabla v\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq l^{\frac{1}{q}}\}.$$

Il est clair que H est un sous-ensemble convexe fermé de $W_0^{1,1}(\Omega)$. Pour le voir, soit $\{u_n\}_n \subset H$ tel que $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,1}(\Omega)$.

Alors $\|\nabla u_n\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq l^{\frac{1}{q}}$ pour tout n et $\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^1(\Omega)} \to 0$. Ainsi, à une sous-suite près, $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω. En utilisant le Lemme de Fatou, nous obtenons que $|\nabla u| \in L^\sigma(\Omega)$, et

$$\|\nabla u\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq l^{\frac{1}{q}},$$

donc $u \in H$.

On définit l'opérateur T tel que :

$$\begin{array}{rccl} T : & H & \to & W_0^{1,1}(\Omega) \\ & v & \mapsto & u = T(v). \end{array}$$

Avec u la solution unique du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla v|^q + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

Puisque $|\nabla v|^q + \lambda f \in L^m(\Omega)$, alors d'après le Théorème 1.11, il existe une solution faible unique u. Par conséquence T est bien défini.

La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

— **Étape 01 : Montrons que $T(H) \subset H$.**

En utilisant le fait que $|\nabla v|^q \in L^m(\Omega)$ et le Théorème 1.11, nous obtenons que pour tout $\sigma \leq m^*$,

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^\sigma(\Omega)} &\leq C \Big\| |\nabla v|^q + \lambda f \Big\|_{L^m(\Omega)} \\ &\leq C \left(\Big\| |\nabla v|^q \Big\|_{L^m(\Omega)} + \lambda \|f\|_{L^m(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Puisque $qm < \sigma$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^\sigma(\Omega)} &\leq C \left(\|\nabla v\|^q_{L^\sigma(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{m} - \frac{q}{\sigma}} + \bar{\lambda} \|f\|_{L^m(\Omega)} \right) \\ &\leq C \left(l + \bar{\lambda} \|f\|_{L^m(\Omega)} \right) = l^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $u \in H$ et donc $T(H) \subset H$.

— **Étape 02 : La continuité de l'opérateur T.**

Soit $\{v_n\}_n \subset H$, $v \in H$ telle que $v_n \to v$ fortement dans $W_0^{1,1}(\Omega)$. On définit $u_n = T(v_n)$ et $u = T(v)$. Alors, u_n et u satisfont

$$\begin{cases} -\Delta u_n = |\nabla v_n|^q + f & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta u = |\nabla v|^q + f & \text{dans } \Omega, \\ u_n = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

D'après Théorème 1.10 pour tout $s < \frac{N}{N-1}$, on a :

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^s(\Omega)} \leq C \Big\| |\nabla v_n|^q - |\nabla v|^q \Big\|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Rappelons que $v_n \to v$ fortement dans $W_0^{1,1}(\Omega)$ et $\{v_n\}_n \subset H$, donc $\|\nabla v_n\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq l^{\frac{1}{q}}$ pour tout n.

Ainsi, pour a fixé dans $(1, \sigma)$, en posant $\theta = \frac{\sigma - a}{a(\sigma-1)}$ et en utilisant l'inégalité d'interpolation (1.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\nabla v_n - \nabla v\|_{L^a(\Omega)} &\leq \Big\| \nabla v_n - \nabla v \Big\|^{\theta}_{L^1(\Omega)} \Big\| \nabla v_n - \nabla v \Big\|^{1-\theta}_{L^\sigma(\Omega)} \\ &\leq C \Big\| \nabla v_n - \nabla v \Big\|^{\theta}_{L^1(\Omega)} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, $\nabla v_n \to \nabla v$ fortement dans $(L^a(\Omega))^N$ pour tout $a < \sigma$. Puisque $qm < \sigma$, nous pouvons choisir $a = q$, pour conclure que

$$\Big\| |\nabla v_n|^q - |\nabla v|^q \Big\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Par conséquent, pour tout $s < \frac{N}{N-1}$, nous obtenons

$$\Big\| \nabla u_n - \nabla u \Big\|_{L^s(\Omega)} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

En particulier, $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,1}(\Omega)$.

— **Étape 03 : La compacité de l'opérateur T.**

Soit $\{v_n\}_n \subset H$ telle que $\|v_n\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \leq C$, avec C est une constante indépendante de n, et définissons $u_n = T(v_n)$.

Puisque $\{v_n\}_n \subset H$, alors $\|\nabla v_n\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq l^{\frac{1}{q}}$, donc il existe une sous-suite $\{v_n\}_n$ telle que $v_n \rightharpoonup v$ faiblement dans $W_0^{1,\sigma}(\Omega)$, où $\sigma < m^*$.

Par conséquent, $|\nabla v_n|^q + f$ est borné dans $L^1(\Omega)$, alors selon le Théorème 1.10, nous déduisons que, à une sous-suite, $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,s}(\Omega)$ pour tout $s < \frac{N}{N-1}$.

En particulier, $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,1}(\Omega)$. Alors T est compact.

Alors, par le Théorème du point fixe de Schauder, nous obtenons l'existence de $u \in H$ tel que $T(u) = u$. Ainsi, u est une solution du problème (2.2). De plus, $u \in W_0^{1,\sigma}(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{mN}{N-m}$.

□

2.2 Cas d'un système

Cette section est basée essentiellement sur l'article [4].

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions positives du système elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = z^p + f & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta z = |\nabla u|^q + g & \text{dans } \Omega, \\ u = z = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u, z > 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

où $p > 0$, $0 < q \leq 2$, avec $pq < 1$. De plus, on suppose que f et g sont des fonctions mesurables et non négatives.

Notre objectif est de prouver l'existence des solutions positives du système (2.9), sous la condition $pq < 1$, au sens des distributions.

Commençons par préciser la signification de la notion de solution du système (2.9).

Définition 2.1. *Soient $f, g \in L^1(\Omega)$ des fonctions mesurables et positives, $(u, z) \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ est dite une solution faible de (2.9), si $|\nabla u|^q \in L^1(\Omega)$, $z^p \in L^1(\Omega)$ et pour tout $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$, nous avons :*

$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla u = \int_\Omega z^p\varphi + \int_\Omega f\varphi,$$

et

$$\int_\Omega \nabla\psi\nabla z = \int_\Omega |\nabla u|^q\psi + \int_\Omega g\psi.$$

2.2.1 Résultats d'existence

Rappelons que nous considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= z^p + f(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ -\Delta z &= |\nabla u|^q + g(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ z, u &> 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ z = u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.10}$$

avec $p > 0$, $0 < q \leq 2$, et $pq < 1$.

Pour la résolution du système (2.10), nous procédons par approximation. Plus précisément, on considère ce système approximée associé à (2.10)

$$\begin{cases} -\Delta u_n &= \dfrac{z_n^p}{1 + \frac{1}{n} z_n^p} + f_n(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ -\Delta z_n &= \dfrac{|\nabla u_n|^q}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} + g_n(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ z_n, u_n &> 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ z_n = u_n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

Avec $f_n = T_n(f)$ et $g_n = T_n(g)$, où T_n est la fonction de troncature définie par (1.2), et nous supposons que $H(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{1+\frac{1}{n}\xi^\alpha}$.

Pour n fixé, nous avons f_n, g_n, $H \in L^\infty(\Omega)$, et on a :

$$|H(\xi_1) - H(\xi_2)| \leq k|\xi_1 - \xi_2| \qquad , \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N.$$

Nous allons utilisé le Théorème de Schauder pour démontrer le résultat d'existence de la solution du système approximée (2.11).

Théorème 2.3. *Soient $f, g \in L^\infty(\Omega)$ des fonctions positives, et $p > 0$, $0 < q \leq 2$, et $\forall \varepsilon > 0$, le système suivant possède une solution positive $(u, z) \in (H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^2$.*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \dfrac{z^p}{1 + \varepsilon z^p} + f(x) \quad \textit{dans } \Omega, \\ -\Delta z &= \dfrac{|\nabla u|^q}{1 + \varepsilon|\nabla u|^q} + g(x) \quad \textit{dans } \Omega, \\ z, u &> 0 \quad \textit{dans } \Omega, \\ z = u &= 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.12}$$

Démonstration. Tout d'abord, on définit l'ensemble

$$E = \Big\{ u \in L^1(\Omega); \quad \|u\|_{L^1(\Omega)} \leq R \Big\}.$$

Où $R > 0$ sera fixé plus tard.

Soit l'opérateur T définit par :

$$\begin{array}{rcl} T : E & \to & L^1(\Omega) \\ u & \mapsto & z = T(u), \end{array}$$

est bien défini. Avec (φ, z) l'unique solution du système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi & = & h_\varepsilon(x,u) = \dfrac{u_+^p}{1+\varepsilon u_+^p} + f(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ -\Delta z & = & \dfrac{|\nabla\varphi|^q}{1+\varepsilon|\nabla\varphi|^q} + g(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ \varphi = z & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.13}$$

De plus, on a $h_\varepsilon(.,s) \in L^\infty(\Omega)$, ainsi $\varphi \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, alors $z \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Maintenant, on montre que T possède un point fixe dans E. Pour ce faire, nous suivons trois étapes.

— **Étape 01 : Déterminer le paramètre R tel que $T(E) \subset E$.**
Prenons φ comme fonction test dans la première équation de (2.13), nous avons :

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx = \int_\Omega h_\varepsilon(x,u)\varphi \, dx &\leq \|h_\varepsilon(.,u)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \varphi \, dx \\ &\leq \|h_\varepsilon(.,u)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|h_\varepsilon(.,u)\|_{L^\infty(\Omega)} C(\Omega) \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\Omega) \|h_\varepsilon(.,u)\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} := R_1(\Omega, \varepsilon). \tag{2.14}$$

Prenons z comme fonction test dans la deuxième équation de (2.13), et par utilisant les inégalités de Hölder et de Sobolev, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla z|^2 dx &\leq \int_\Omega |\nabla\varphi|^q z\ dx + \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega z\ dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega z^{\frac{2}{2-q}}\ dx\right)^{\frac{2-q}{2}} + \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \|z\|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\varphi\|^q_{H_0^1(\Omega)} |\Omega|^{\frac{2-q}{2}-\frac{1}{2^*}} \|z\|_{L^{2^*}(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\Omega)} C(\Omega) \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\varphi\|^q_{H_0^1(\Omega)} |\Omega|^{\frac{2-q}{2}-\frac{1}{2^*}} S \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\Omega)} C(\Omega) \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Alors d'après (2.14) on a :

$$\|z\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R_1^q(\Omega,\varepsilon) |\Omega|^{\frac{2-q}{2}-\frac{1}{2^*}} S + \|g\|_{L^\infty(\Omega)} C(\Omega) |\Omega|^{\frac{1}{2}} := R_2(\Omega,\varepsilon).$$

Puisque $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, nous avons donc :

$$\|z\|_{L^1(\Omega)} \leq R_3(\Omega,\varepsilon).$$

Maintenant, on va choisir R tell que $R > R_3(\Omega,\varepsilon)$, ce qui nous amène à conclure que si $\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq R$, alors $\|z\|_{L^1(\Omega)} \leq R$.

— **Étape 02 :La continuité de l'opérateur T.**

Soit $\{u_n\}_n \subset E$ tell que $u_n \to u$ fortement dans $L^1(\Omega)$, Nous devons démontrer que $T(u_n) \to T(u)$ fortement dans $L^1(\Omega)$.

Notons $z_n = T(u_n)$ et $z = T(u)$, alors (φ_n, z_n) et (φ, z) satisfait :

$$\begin{cases}
-\Delta\varphi_n = h_\varepsilon(x,u_n) & \text{dans } \Omega, \\
-\Delta z_n = \dfrac{|\nabla\varphi_n|^q}{1+\varepsilon|\nabla\varphi_n|^q} + g(x) & \text{dans } \Omega, \\
\varphi_n = z_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega.
\end{cases} \tag{2.15}$$

Et

$$\begin{cases}
-\Delta\varphi = h_\varepsilon(x,u) & \text{dans } \Omega, \\
-\Delta z = \dfrac{|\nabla\varphi|^q}{1+\varepsilon|\nabla\varphi|^q} + g(x) & \text{dans } \Omega, \\
\varphi = z = 0 & \text{sur } \partial\Omega.
\end{cases} \tag{2.16}$$

Nous soustrayons les premières équations de (2.15) et de (2.16), nous obtenons :

$$-\Delta(\varphi_n - \varphi) = h_\varepsilon(x, u_n) - h_\varepsilon(x, u).$$

Puisque $h_\varepsilon(., s) \in L^\infty(\Omega)$ alors $|h_\varepsilon(x, s)| \leq c(\varepsilon)$, et $u_n \to u$ fortement dans $L^1(\Omega)$, donc par convergence dominée on a : $h_\varepsilon(., u_n) \to h_\varepsilon(., u)$ fortement dans $L^\alpha(\Omega)$, pour toutes les $\alpha > 0$.

Par la suite en utilisant $(\varphi_n - \varphi)$ comme fonction test, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(\varphi_n - \varphi)|^2 dx &= \int_\Omega (h_\varepsilon(x, u_n) - h_\varepsilon(x, u))(\varphi_n - \varphi)\ dx \\
&\leq \Big(\int_\Omega (h_\varepsilon(x, u_n) - h_\varepsilon(x, u))^2\ dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega (\varphi_n - \varphi)^2\ dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|(h_\varepsilon(., u_n) - h_\varepsilon(., u)\|_{L^2(\Omega)} C(\Omega) \|\varphi_n - \varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\Omega) \|(h_\varepsilon(., u_n) - h_\varepsilon(., u)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi, le résultat est le suivant :

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Maintenant pour les deuxièmes équations de (2.15) et de (2.16) :

$$-\Delta(z_n - z) = H(\nabla\varphi_n) - H(\nabla\varphi).$$

Par utilisation de $(z_n - z)$ comme fonction test, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(z_n - z)|^2 dx &\leq k \int_\Omega (\nabla\varphi_n - \nabla\varphi)(z_n - z)\ dx \\
&\leq k \|\nabla(\varphi_n - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \|z_n - z\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq k \|\nabla(\varphi_n - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} C(\Omega) \|\nabla(z_n - z)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|z_n - z\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\Omega) k \|\nabla(\varphi_n - \varphi)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Le résultat est donc le suivant :

$$\|z_n - z\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Puisque $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, alors :

$$z_n \to z \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

Donc comme (φ, z) solution unique de système (2.13), on conclut que $z = T(u)$, et ainsi on a démontré que :

$$T(u_n) = z_n \;\to\; z = T(u).$$

— **Étape 03 :La compacité de l'opérateur** T

Considérons $\{u_n\}_n \subset E$. Et nous définissons $z_n = T(u_n)$, ainsi (φ_n, z_n) comme l'unique solution de système (2.15), d'après étape 01, on a (φ_n) borné dans $L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, alors il existe une sous suite $\{\varphi_n\}_n$ tell que $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, et par les injections compactes, nous obtenons $\varphi_n \to \varphi$ dans $L^\alpha(\Omega)$ avec $\alpha < 2^*$. Ainsi $\varphi \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, utilisant $(\varphi_n - \varphi)$ comme fonction test dans la première équation de (2.15). Nous avons :

$$\int_\Omega \nabla\varphi_n \nabla(\varphi_n - \varphi) \;\leq \|h_\varepsilon(.,u_n)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega (\varphi_n - \varphi)\ dx.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(\varphi_n - \varphi)|^2 dx &\leq \int_\Omega \nabla\varphi\nabla(\varphi - \varphi_n)\ dx + \|h_\varepsilon(.,u_n)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega (\varphi_n - \varphi)\ dx \\ &\leq (\|\Delta\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} + \|h_\varepsilon(.,u_n)\|_{L^\infty(\Omega)}) \int_\Omega (\varphi_n - \varphi)\ dx \\ &\leq C_1 \int_\Omega (\varphi_n - \varphi)\ dx.\end{aligned}$$

Avec C_1 ne dépende pas de n. Alors nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla(\varphi_n - \varphi)|^2 dx \leq C_1 \int_\Omega (\varphi_n - \varphi)\ dx \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Donc, on peut conclure :

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Ainsi, à une sous suite, nous obtenons

$$z_n \to z \text{ fortement dans } H_0^1(\Omega),$$

et en particulier

$$z_n \to z \text{ dans } L^1(\Omega).$$

Nous concluons que T est compact.

Finalement, par le théorème de point fixe de Schauder, on déduit l'existence d'une solution du système (2.12).

$\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 2.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné, supposons que $p > 0$, $0 < q < 2$, avec $pq < 1$, alors pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$, le système (2.10) admet une solution positive (u, z) tell que $(u, z^{\frac{\alpha+1}{2}}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ où $\alpha > 0$ satisfait $p < \frac{\alpha+1}{2} < \frac{1}{q}$.*

Démonstration. Soit (2.11) le système approximé, d'après le Théorème 2.3, nous avons que (2.11) possède une solution $(u_n, z_n) \in (H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^2$, ainsi on a $(f_n)_n, (g_n)_n \subset L^\infty(\Omega)$, alors $f_n \to f$ et $g_n \to g$ fortement dans $L^2(\Omega)$.

On fixe $\alpha > 0$, où $p < \frac{\alpha+1}{2} < \frac{1}{q}$. En utilisant z_n^α comme fonction test dans la deuxième équation de (2.11), il s'ensuit que :

$$\int_\Omega -\Delta z_n z_n^\alpha \, dx = \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} z_n^\alpha \, dx + \int_\Omega g_n(x) \; z_n^\alpha \, dx. \tag{2.17}$$

Estimons chaque terme de cette égalité.

$$\int_\Omega -\Delta z_n z_n^\alpha \, dx = \int_\Omega \nabla z_n \nabla z_n^\alpha \, dx = \alpha \int_\Omega |\nabla z_n|^2 z_n^{\alpha-1} \, dx = \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2} \int_\Omega |\nabla z_n^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2 \, dx.$$

Maintenant, dans la partie gauche de l'inégalité (2.17).

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} z_n^\alpha \, dx &\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^q z_n^\alpha \, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega z_n^{\alpha\frac{2}{2-q}} \, dx\right)^{\frac{2-q}{2}} \\
&\leq \frac{q}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{2-q}{2} \int_\Omega z_n^{\alpha\frac{2}{2-q}} \, dx \\
&\leq \frac{q}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{2-q}{2} \left(\int_\Omega z_n^{2^*\frac{\alpha+1}{2}} \, dx\right)^{\frac{1}{\beta}} |\Omega|^{1-\frac{1}{\beta}} \\
&\leq \frac{q}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{2-q}{2} S \left(\int_\Omega |\nabla z_n^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2 \, dx\right)^{\frac{2^*}{2\beta}} |\Omega|^{1-\frac{1}{\beta}} \\
&\leq \frac{q}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \varepsilon_1 \int_\Omega |\nabla z_n^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2 \, dx + C(\varepsilon_1, \Omega).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Avec $\beta = \frac{2^*(\alpha+1)(2-q)}{4\alpha}$, et on a $\frac{2^*}{2\beta} < 1$ car $\alpha < \frac{2-q}{q}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g_n(x)\ z_n^\alpha\ dx &\le \|g_n\|_{L^2(\Omega)} \Big(\int_\Omega z_n^{2\alpha}\ dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\le (o(1) + \|g\|_{L^2(\Omega)}) \left[\left(\int_\Omega \left(z_n^{\frac{\alpha+1}{2}} \right)^{2^*}\ dx \right)^{\frac{2\alpha}{2^*}\frac{2}{\alpha+1}} |\Omega|^{1-\frac{4\alpha}{2^*(\alpha+1)}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\le (o(1) + \|g\|_{L^2(\Omega)}) S \left(\int_\Omega |\nabla z_n^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} |\Omega|^{\frac{1}{2}-\frac{2\alpha}{2^*(\alpha+1)}} \\
&\le (o(1) + \|g\|_{L^2(\Omega)}) \left(\varepsilon_2 \int_\Omega |\nabla z_n^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2 dx + C(\varepsilon_2, \Omega) \right). \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

d'après les estimation (2.18) et (2.19), nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2} \int_\Omega |\nabla z_n^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2\ dx \le \frac{q}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \varepsilon_1 \int_\Omega |\nabla z_n^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2\ dx + C(\varepsilon_1, \Omega) \\
+ (o(1) + \|g\|_{L^2(\Omega)}) \left(\varepsilon_2 \int_\Omega |\nabla z_n^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2 dx + C(\varepsilon_2, \Omega) \right).
\end{aligned}$$

Pour ε_1 et ε_2 assez petit on obtient :

$$\int_\Omega |\nabla z_n^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2\ dx \le C_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + C_2. \qquad (2.20)$$

Par l'inégalité de Sobolev on a alors :

$$\|z_n^{\frac{\alpha+1}{2}}\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \le C_3 \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + C_4. \qquad (2.21)$$

On utilise u_n comme fonction test dans la première équation de (2.11)

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \le \int_\Omega z_n^p u_n\ dx + \int_\Omega f_n(x)\ u_n\ dx. \qquad (2.22)$$

Estimons chaque terme de l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega z_n^p u_n\ dx &\le \left(\int_\Omega z_n^{\frac{\alpha+1}{2}2^*}\ dx \right)^{\frac{2p}{2^*(\alpha+1)}} \left(\int_\Omega u_n^\gamma\ dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\le \left(\int_\Omega z_n^{\frac{\alpha+1}{2}2^*}\ dx \right)^{\frac{2p}{2^*(\alpha+1)}} \left(\int_\Omega u_n^{2^*}\ dx \right)^{\frac{1}{2^*}} |\Omega|^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2^*}} \\
&\le \left(\int_\Omega z_n^{\frac{\alpha+1}{2}2^*}\ dx \right)^{\frac{2p}{2^*(\alpha+1)}} \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\ dx \right)^{\frac{1}{2}} S|\Omega|^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2^*}},
\end{aligned}$$

avec $\gamma = \frac{2^*(\alpha+1)}{2^*(\alpha+1)-2p}$ et puisque $\gamma < 2^*$, donc d'après (2.21) on a :

$$\int_\Omega z_n^p u_n\ dx \leq C_1(\Omega)\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\ dx\right)^{\frac{p}{\alpha+1}+\frac{1}{2}} + C_2(\Omega)\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, pour le deuxième terme du côté gauche de l'inégalité (2.22), nous avons :

$$\int_\Omega f_n(x)\ u_n\ dx \leq \|f_n\|_{L^2(\Omega)}\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\left(o(1)+\|f\|_{L^2(\Omega)}\right)\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après les deux dernières estimations, (2.22) implique :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq C_1(\Omega)\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\ dx\right)^{\frac{p}{\alpha+1}+\frac{1}{2}} + C_2(\Omega)\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} + C(\Omega)\left(o(1)+\|f\|_{L^2(\Omega)}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a $\frac{p}{\alpha+1}+\frac{1}{2}<1$ car $p<\frac{\alpha+1}{2}$, et donc d'après l'inégalité du Young, on conclut :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors il existe une sous suite $\{u_n\}_n$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, par les injections compactes, on obtient $u_n \to u$ fortement dans $L^\rho(\Omega)$ avec $\rho < 2^*$.

Selon (2.20), nous avons donc :

$$\int_\Omega |\nabla z_n^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2\ dx \leq C_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On obtient donc l'existence d'une sous suite $\{z_n^{\frac{\alpha+1}{2}}\}_n$, telle que $z_n^{\frac{\alpha+1}{2}} \rightharpoonup z^{\frac{\alpha+1}{2}}$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, et $z_n \to z$ fortement dans $L^\sigma(\Omega)$ avec $\sigma < \frac{2^*(\alpha+1)}{2}$.

Puisque $p<\frac{\alpha+1}{2}$, alors $\frac{2^*p}{2^*-1} < \frac{2^*(\alpha+1)}{2}$. Et ainsi, nous avons $z_n \to z$ fortement dans $L^{\frac{2^*p}{2^*-1}}(\Omega)$.

À présent, nous soustrayons les premières équations de (2.11) et (2.10), et en utilisant (u_n-u) comme fonction de test, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2\ dx &\leq \int_\Omega (z_n^p - z^p)(u_n-u)\ dx + \int_\Omega (f_n-f)(u_n-u)\ dx\\ &\leq \|z_n^p - z^p\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)}\|u_n-u\|_{L^{2^*}(\Omega)} + \|f_n-f\|_{L^2(\Omega)}\|u_n-u\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \|z_n^p - z^p\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)} S\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f_n-f\|_{L^2(\Omega)}C(\Omega)\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Alors

$$\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq S\|z_n^p - z^p\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)} + C(\Omega)\|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \quad \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Donc nous concluons que $u_n \to u$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

En conclusion, nous obtenons que (u, z) est une solution du système (2.10) au sens de la Définition 2.1 avec $(u, z^{\frac{\alpha+1}{2}}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

□

Comme application directe du Théorème 2.4, nous obtenons le résultat d'existence suivant pour le problème bi-laplacien avec terme de gradient.

Théorème 2.5. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné. Supposons que $q < 1$ et $g \in L^2(\Omega)$, alors le problème suivant admet une solution positive u telle que $u \in H_0^1(\Omega)$ et $|\Delta u|^{\frac{\alpha+1}{2}} \in H_0^1(\Omega)$, où $\alpha > 0$ satisfait $1 < \frac{\alpha+1}{2} < \frac{1}{q}$.*

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= |\nabla u|^q + g(x) \ \textit{dans } \Omega, \\ \Delta u &= u = 0 \qquad\qquad \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Démonstration. Étant donné le résultat du Théorème 2.4 où $f \equiv 0$ et $p = 1$, il est donc évident que le système suivant

$$\begin{cases} -\Delta u &= z \qquad\qquad\quad \text{dans } \Omega, \\ -\Delta z &= |\nabla u|^q + g(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ z = u &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.23}$$

admet une solution (u, z) avec $(u, z^{\frac{\alpha+1}{2}}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, et $1 < \frac{\alpha+1}{2} < \frac{1}{q}$.

Et en remplaçant $-\Delta u = z$ dans la deuxième équation du système (2.23), nous trouvons :

$$\Delta^2 u = |\nabla u|^q + g(x) \text{ dans } \Omega.$$

On déduit notre résultat.

□

2.2.2 Résultats optimaux

Théorème 2.6. *Supposons que $N > 4$ et que $q > 2^*$, alors il existe $f, g \in L^2(\Omega)$ tel que le système (2.10) n'a pas de solution positive.*

Démonstration. Nous définissons $f(x) = \dfrac{1}{|x-x_0|^{2+\sigma}} \in L^2(\Omega)$ où $x_0 \in \Omega$ et $\sigma > 0$ sera donnée plus tard. Puisque $N > 4$ et $q > 2^*$, alors l'intervalle $(\frac{N-q}{q}, \frac{N-4}{2})$ n'est pas vide. Ainsi, nous choisissons $\sigma \in (\frac{N-q}{q}, \frac{N-4}{2})$.

Maintenant, supposons par l'absurde que le système (2.10) admet une solution positive (u, z), tell que $|\nabla u|^q \in L^1(\Omega)$ et $(z^p + f) \in L^1(\Omega)$. Alors $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Prenons en compte le fait que

$$-\Delta u = z^p + f(x) \geq \frac{1}{|x-x_0|^{2+\sigma}} \quad \text{dans } \Omega.$$

Dans une petite boule $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$, on obtient

$$u(x) \geq \frac{1}{|x-x_0|^{\sigma}}.$$

Ainsi $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, et en utilisant l'inégalité de Sobolev, nous concluons que $u \in L^{q^*}(\Omega)$ alors $u \in L^{q^*}(B_r(x_0))$. Par conséquent, nous obtenons que

$$\frac{1}{|x-x_0|^{\sigma}} \in L^{q^*}(B_r(x_0)).$$

Ce qui signifie que

$$\int_{B_r(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|^{\sigma q^*}}\, dx < \infty.$$

Nous allons utiliser les coordonnées polaires pour simplifier l'intégrale.

$$\int_{B_r(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|^{\sigma q^*}}\, dx = \int_0^r \int_{S^{N-1}} \frac{1}{\rho^{\sigma q^*}}\, \rho^{N-1}\, d\theta\, d\rho,$$

où :

- S^{N-1} est la surface de la sphère unité dans $\mathbb{R}^N$.
- $\rho = |x - x_0|$.
- θ représente les coordonnées angulaires.

$$S^{N-1} \int_0^r \frac{\rho^{N-1}}{\rho^{\sigma q^*}}\, d\rho = S^{N-1} \int_0^r \rho^{N-1-\sigma q^*}\, d\rho.$$

L'intégrale converge si $(N - 1 - \sigma q^*) > -1$. Alors, pour que la fonction $\frac{1}{|x-x_0|^\sigma} \in L^{q^*}(B_r(x_0))$, il faut que $\sigma q^* < N$.

Alors $\sigma < \frac{N-q}{q}$, ce qui est une contradiction avec le choix de σ.

□

Commençons par démontrer que la condition $pq < 1$ est optimale. Plus précisément , le résultat suivant donne la non-existence dans le cas contraire :

Théorème 2.7. *Supposons que $q = 2$, alors pour tout $p > 1$, il existe $f, g \in L^2(\Omega)$, tel que le système (2.10) ne possède pas de solution positive.*

Démonstration. On peut supposer que $f = \lambda f_1$ et $g = \mu g_1$, avec $f_1, g_1 \in L^\infty(\Omega)$.

Supposons par l'absurde que le système (2.10) admet une solution positive (u, z) telle que $|\nabla u|^q \in L^1(\Omega)$ et $z^p \in L^1(\Omega)$. Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, en utilisant ϕ^2 comme fonction test dans la première équation du système (2.10).

$$-\int_\Omega \Delta u\, \phi^2\, dx = 2\int_\Omega \phi \nabla\phi \nabla u\, dx = \int_\Omega z^p \phi^2\, dx + \lambda \int_\Omega f_1 \phi^2\, dx.$$

Maintenant, par l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\int_\Omega z^p \phi^2\, dx + \lambda \int_\Omega f_1 \phi^2\, dx \le \int_\Omega \phi^2 |\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega |\nabla \phi|^2\, dx. \tag{2.24}$$

D'après la deuxième équation du système (2.10), on peut établir que $|\nabla u|^2 \le -\Delta z$, ce qui signifie que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi^2 |\nabla u|^2\, dx &\le \int_\Omega \phi^2(-\Delta z)\, dx = \int_\Omega z(-\Delta \phi^2)\, dx \\
&= 2\int_\Omega \nabla z\, \phi \nabla \phi\, dx \\
&= 2\int_\Omega z \left[-|\nabla\phi|^2 - \phi(\Delta|\phi|) \right] dx \\
&= -2\int_\Omega z|\nabla\phi|^2\, dx + 2\int_\Omega z\phi(-\Delta|\phi|)\, dx \\
&\le 2\int_\Omega z\phi(-\Delta|\phi|)\, dx.
\end{aligned}$$

D'après Inégalité de Kato Lemme 1.1, nous concluons que :

$$\int_\Omega \phi^2 |\nabla u|^2\, dx \le 2\int_\Omega z\phi(-\Delta\phi)\, dx.$$

Puisque $p > 1$, en utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi^2 |\nabla u|^2 \, dx &\leq \varepsilon \int_\Omega \phi^2 z^p \, dx + c(\varepsilon) \int_\Omega |\phi|^{(1-\frac{2}{p})p'} |\Delta \phi|^{p'} \, dx \\ &= \varepsilon \int_\Omega \phi^2 z^p \, dx + c(\varepsilon) \int_\Omega |\phi|^{\frac{p-2}{p-1}} |\Delta \phi|^{p'} \, dx.\end{aligned}$$

Après avoir choisi ε petit et en revenant à (2.24), on obtient que

$$\lambda \int_\Omega f_1 \phi^2 \, dx \leq c(\varepsilon) \int_\Omega |\phi|^{\frac{p-2}{p-1}} |\Delta \phi|^{p'} \, dx + \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \, dx.$$

Donc

$$\lambda \leq \frac{c(\varepsilon) \int_\Omega |\phi|^{\frac{p-2}{p-1}} |\Delta \phi|^{p'} \, dx + \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \, dx}{\int_\Omega f_1 \phi^2 \, dx}.$$

En définissant

$$M \equiv \inf_{\phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \neq 0} \frac{c(\varepsilon) \int_\Omega |\phi|^{\frac{p-2}{p-1}} |\Delta \phi|^{p'} \, dx + \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \, dx}{\int_\Omega f_1 \phi^2 \, dx}.$$

Alors si $\lambda > M$, alors le système (2.10) n'a pas de solution positive.

□

Chapitre 3

Résolution d'une classe de systèmes elliptiques avec un terme de potentiel-gradient dans le cas $pq > 1$

Dans ce chapitre, nous abordons l'étude de l'existence des solutions positives dans le cas $pq > 1$, dans un contexte plus général.

Les résultats de ce chapitre sont inspirés de [1].

3.1 Position du problème

On considère le système elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = z^p + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta z = |\nabla u|^q + \mu g & \text{dans } \Omega, \\ u, z > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = z = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, $q \geq 1$, $p > 0$ avec $pq > 1$, f et g sont des fonctions mesurables et non négatives, et λ et μ sont des constantes réelles non négatives.

Notre objectif dans ce chapitre est de répondre à la question suivante : Quelles sont les conditions nécessaires à déterminer pour garantir l'existence, notamment en ce qui concerne les conditions d'intégrabilité sur f et g, ainsi que les conditions de petitesse sur λ et μ ?

3.2 Résultats d'existence

Notre premier résultat est donné dans le Théorème suivant.

Théorème 3.1. *Supposons que* $q \geq 1$, $p > 0$ *avec* $pq > 1$. *Soit* $(m, \sigma) \in [1, +\infty)^2$. *Supposons que* $(f, g) \in L^m(\Omega) \times L^\sigma(\Omega)$ *où* (m, σ) *satisfait l'une des conditions suivantes :*

$$\begin{cases} m, \sigma \in [1, N), \\ \\ q\sigma < \frac{mN}{N-m} = m^*, \\ \\ \frac{pm}{N+pm} < \frac{\sigma}{N-\sigma}, \end{cases} \tag{3.2}$$

ou

$$\sigma \geq N \quad et \quad m > \frac{q\sigma N}{N + q\sigma}, \tag{3.3}$$

ou

$$m \geq N \quad et \quad \sigma > \frac{pmN}{N + 2pm}. \tag{3.4}$$

Alors il existe $\Lambda^* > 0$ *tel que pour tout* $(\lambda, \mu) \in \Pi$, *où*

$$\Pi := \{(\lambda, \mu) \in [0, +\infty)^2 \mid \lambda^q \|f\|^q_{L^m(\Omega)} + \mu \|g\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq \Lambda^*\}, \tag{3.5}$$

le système (3.1) admet une solution non négative (u, z). *De plus,* $(u, z) \in W_0^{1,\theta}(\Omega) \times W_0^{1,r}(\Omega)$, *pour tout* $\theta < \frac{mN}{N-m}$ *et* $r < \frac{\sigma N}{N-\sigma}$.

Remarque 3.1. *Pour éclairer les hypothèses* (3.2), (3.3) *et* (3.4), *explicitons les conditions de taille sur* (p, q) *pour un* (m, σ) *donné.*

— *Si* $m = \sigma = 1$ *et* $N \geq 2$, *alors* (3.2) *est satisfaite pour* $q < \frac{N}{N-1}$ *et* $p < \frac{N}{(N-2)_+}$, *c'est-à-dire la plage classique lorsqu'on traite des solutions entropiques.*

— *Si* $m = \sigma = 2$ *et* $N \geq 3$, *alors* (3.2) *est satisfaite pour* $q < \frac{N}{N-1}$ *et* $p < \frac{N}{N-2}$.

— *Si* $m = \sigma = \frac{N}{2}$ *et* $N \geq 3$, *alors* (3.2) *est satisfaite pour* $q < 2$ *et pour tout* p.

— *Si* $m = \sigma \geq N$, *alors* (3.3) *et* (3.4) *sont satisfaites pour tout* $(p, q) \in [1, +\infty)^2$.

— *Si* $m = N$ *et* $\sigma = \frac{N}{2}$, *alors* (3.4) *est satisfaite pour tout* $(p, q) \in [1, +\infty)^2$.

— *Si* $\sigma = N$ *et* $m = \frac{3N}{4}$, *alors* (3.3) *est satisfaite pour tout* $q < 3$ *et pour tout* p.

Démonstration. Nous donnons la preuve dans le cas où (m, σ) satisfait (3.2), c'est-à-dire

$$m, \sigma \in [1, N), \quad q\sigma < \frac{mN}{N-m} = m^*, \quad \frac{pm}{N+pm} < \frac{\sigma}{N-\sigma}.$$

Les autres cas découlent en utilisant les mêmes arguments.

Pour $s \geq 0$, nous définissons la fonction $\Upsilon : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, telle que

$$\Upsilon(s) = s^{\frac{1}{pq}} - \bar{C}s,$$

où $\bar{C}$ est une constante positive qui dépend uniquement des données et qui sera spécifiée plus tard.

En utilisant le fait que $pq > 1$, alors il existe $s_0 > 0$ tel que $\Upsilon(s_0) = 0$, $\Upsilon(s) > 0$ pour tout $s \in (0, s_0)$, $\Upsilon(s) < 0$ pour tout $s \in (s_0, +\infty)$, et nous obtenons l'existence deux constantes positives $l, \bar{\Lambda} > 0$ telles que

$$\max_{s \geq 0} \Upsilon(s) = \Upsilon(l) = \bar{\Lambda}.$$

Ainsi,

$$l^{\frac{1}{pq}} = \bar{C}\left(l + \frac{\bar{\Lambda}}{\bar{C}}\right). \tag{3.6}$$

Soit $l > 0$ fixé et satisfaisant (3.6). Alors, nous trouvons que

$$\Pi := \left\{(\lambda, \mu) \in [0, +\infty)^2 \mid \lambda^q \|f\|^q_{L^m(\Omega)} + \mu \|g\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq \frac{\bar{\Lambda}}{\bar{C}} := \Lambda^*\right\}.$$

Il est clair que Π est un ensemble non vide, borné et fermé de $\mathbb{R}^2$. De plus, pour tout $(\lambda, \mu) \in \Pi$, nous avons

$$\bar{C}\left(l + \lambda^q \|f\|^q_{L^m(\Omega)} + \mu \|g\|_{L^\sigma(\Omega)}\right) \leq l^{\frac{1}{pq}}. \tag{3.7}$$

Dans ce qui suit, nous fixons $(\lambda, \mu) \in \Pi$. Puisque $\frac{pmN}{N+pm} < \frac{\sigma N}{N-\sigma}$, alors il existe $r > 1$ tel que

$$\frac{pmN}{N+pm} < r < \frac{\sigma N}{N-\sigma}. \tag{3.8}$$

De plus, si $r < N$, alors

$$mp < \frac{rN}{N-r} = r^*. \tag{3.9}$$

et si $r \geq N$, alors (3.9) tient trivialement avec $r^* = \infty$.

Maintenant, fixons l et r comme ci-dessus, nous définissons l'ensemble

$$E = \{w \in W_0^{1,1}(\Omega) \mid w \in W_0^{1,r}(\Omega) \text{ et } \|\nabla w\|_{L^r(\Omega)} \leq l^{\frac{1}{pq}}\}. \tag{3.10}$$

On peut facilement vérifier que E est un sous-ensemble convexe fermé de $W_0^{1,1}(\Omega)$. Considérons maintenant l'opérateur

$$T : E \longrightarrow W_0^{1,1}(\Omega)$$

$$w \longmapsto T(w) = z,$$

où z est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta z = |\nabla u|^q + \mu g & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

et u étant l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = w_+^p + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.12}$$

Il est clair que si z est un point fixe de T, alors (u, z) résout le système (3.1). Ainsi, nous devons simplement montrer que T admet un point fixe dans E, en suivant plusieurs étapes.

Dans ce qui suit, nous désignons par $C_1, C_2, \ldots$ toutes les constantes positives qui dépendent uniquement des données du problème et qui peuvent être changées d'une ligne à la suivante.

Soit $w \in E$, en utilisant l'inégalité de Sobolev, nous concluons que $w \in L^{r^*}(\Omega)$. Puisque $pm < r^*$, alors $w_+^p \in L^m(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Par conséquent, par le Théorème 1.10, u est bien défini comme étant la solution faible unique du problème (3.12), et $u \in W_0^{1,\theta}(\Omega)$ pour tout $\theta < \frac{N}{N-1}$. En tenant compte de l'hypothèse sur f, nous concluons que $(w_+^p + \lambda f) \in L^m(\Omega)$. Par conséquent, selon le Théorème 1.11, il existe C_1 tel que

$$\|\nabla u\|_{L^\beta(\Omega)} \leq C_1 \|w_+^p + \lambda f\|_{L^m(\Omega)}, \quad \text{pour tout } \beta \leq m^* = \frac{mN}{N-m}.$$

Remarquons que par (3.8), nous avons $pm < r^*$, donc en utilisant les inégalités de Hölder et de Sobolev, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^\beta(\Omega)} &\leq C_1\left(\|w^p\|_{L^m(\Omega)}+\lambda\|f\|_{L^m(\Omega)}\right)\\ &\leq C_2\left(\|w\|^p_{L^{r^*}(\Omega)}+\lambda\|f\|_{L^m(\Omega)}\right)\\ &\leq C_3\left(\|\nabla w\|^p_{L^r(\Omega)}+\lambda\|f\|_{L^m(\Omega)}\right). \end{aligned}\tag{3.13}$$

Par (3.2), $m^* > q$, alors (3.13) est vraie avec $\beta = q$. Ainsi,

$$\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_3\left(\|\nabla w\|^p_{L^r(\Omega)}+\lambda\|f\|_{L^m(\Omega)}\right).\tag{3.14}$$

Puisque $g \in L^\sigma(\Omega)$ et $|\nabla u|^q \in L^1(\Omega)$, alors $|\nabla u|^q + \mu g \in L^1(\Omega)$ et z est la solution faible unique du problème (3.11). En appliquant à nouveau le Théorème 1.10, $z \in W_0^{1,\theta}(\Omega)$ pour tout $\theta < \frac{N}{N-1}$ et donc T est bien défini.

<u>Étape 01</u> : Montrons que $T(E) \subset E$.

Premièrement, par hypothèse $q\sigma < m^*$, nous avons $|\nabla u|^q \in L^\sigma(\Omega)$. Deuxièmement, en utilisant le fait que $g \in L^\sigma(\Omega)$ et par le Théorème 1.11, nous obtenons que pour tout $\theta \leq \sigma^* = \frac{\sigma N}{N-\sigma}$,

$$\begin{aligned}\|\nabla z\|_{L^\theta(\Omega)} &\leq C_4\left\||\nabla u|^q+\mu g\right\|_{L^\sigma(\Omega)}\\ &\leq C_4\left(\|\nabla u\|^q_{L^{q\sigma}(\Omega)}+\mu\|g\|_{L^\sigma(\Omega)}\right).\end{aligned}\tag{3.15}$$

Rappelons à nouveau que $q\sigma < m^*$, alors en utilisant (3.13) avec $\beta = q\sigma$, nous obtenons

$$\|\nabla u\|^q_{L^{q\sigma}(\Omega)} \leq C_5\left(\|\nabla w\|^{pq}_{L^r(\Omega)}+\lambda^q\|f\|^q_{L^m(\Omega)}\right).\tag{3.16}$$

En revenant à (3.15), nous concluons que

$$\|\nabla z\|_{L^\theta(\Omega)} \leq C_6\left(\|\nabla w\|^{pq}_{L^r(\Omega)}+\lambda^q\|f\|^q_{L^m(\Omega)}+\mu\|g\|_{L^\sigma(\Omega)}\right).$$

Puisque $r < \frac{\sigma N}{N-\sigma}$, en choisissant $\theta = r$ dans l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\|\nabla z\|_{L^r(\Omega)} \leq C_7\left(\|\nabla w\|^{pq}_{L^r(\Omega)}+\lambda^q\|f\|^q_{L^m(\Omega)}+\mu\|g\|_{L^\sigma(\Omega)}\right).$$

Rappelons que $w \in E$, donc

$$\|\nabla z\|_{L^r(\Omega)} \leq C_7\left(l+\lambda^q\|f\|^q_{L^m(\Omega)}+\mu\|g\|_{L^\sigma(\Omega)}\right).$$

En choisissant $\bar{C} = C_7$ et en tenant compte de la définition de l, nous concluons que $\|\nabla\|_{L^r(\Omega)} \leq l^{1/pq}$. Ainsi, $z \in E$ et donc $T(E) \subset E$.

Étape 02 : La continuité de l'opérateur T.

Supposons que $\{w_n\}_n \subset E$, $w \in E$, soient tels que $w_n \to w$ fortement dans $W_0^{1,1}(\Omega)$, et définissons $z_n = T(w_n)$ et $z = T(w)$. Alors, (u_n, z_n) et (u, z) satisfont

$$\begin{cases} -\Delta u_n = w_{n+}^p + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta u = w_+^p + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u_n = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.17}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta z_n = |\nabla u_n|^q + \mu g & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta z = |\nabla u|^q + \mu g & \text{dans } \Omega, \\ z_n = z = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.18}$$

Grâce à l'inégalité de Sobolev dans l'espace $W_0^{1,1}(\Omega)$, nous avons

$$\|w_n - w\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \leq S_1 \|w_n - w\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Ainsi, $w_n \to w$ fortement dans $L^s(\Omega)$, pour tout $s \leq \frac{N}{N-1}$.

Comme $\{w_n\}_n$ est bornée dans l'espace $W_0^{1,r}(\Omega)$, alors en utilisant le Théorème de Vitali, il en résulte que $w_n \to w$ fortement dans $L^a(\Omega)$ pour tout $a < r^*$.

En particulier, $w_{n+}^p \to w_+^p$ fortement dans $L^1(\Omega)$. Par conséquent, grâce au Théorème 1.10, nous concluons que $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,a}(\Omega)$ pour tout $a < \frac{N}{N-1}$.

En particulier, nous avons

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Maintenant, par (3.16), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|\nabla u_n\|_{L^{q\sigma}(\Omega)}^q &\leq C \left(\|\nabla w_n\|_{L^r(\Omega)}^{pq} + \lambda^q \|f\|_{L^m(\Omega)}^q \right) \\ &\leq C \left(l + \lambda^q \|f\|_{L^m(\Omega)}^q \right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ainsi, $\{u_n\}_n$ est bornée dans $W_0^{1,q\sigma}(\Omega)$. En utilisant à nouveau le Théorème de Vitali, nous obtenons

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^q(\Omega)} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Par conséquent, grâce au Théorème 1.10, il en résulte que

$$\|\nabla z_n - \nabla z\|_{L^s(\Omega)} \leq C \Big\| |\nabla u_n|^q - |\nabla u|^q \Big\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{3.20}$$

donc, nous concluons que $z_n \to z$ fortement dans $W_0^{1,s}(\Omega)$ pour tout $s < \frac{N}{N-1}$.

En particulier, nous avons

$$z_n \to z \;\text{ fortement dans }\; W_0^{1,1}(\Omega),$$

et donc on a la continuité de T.

Étape 03 : La compacité de l'opérateur T.

Soit $\{w_n\}_n \subset E$ tel que $\|w_n\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \leq C$ et soit $z_n = T(w_n)$.

Comme $\{w_n\}_n \subset E$, $\|\nabla w_n\|_{L^r(\Omega)} \leq C$ et donc, en passant éventuellement à une sous-suite $\{w_n\}_n$ de nouveau, notée également $\{w_n\}_n$, nous avons

$$w_n \rightharpoonup w \;\text{ faiblement dans }\; W_0^{1,r}(\Omega).$$

Par le théorème de Rellich-Kondrachov, il s'ensuit que $w_n \to w$ fortement dans $L^a(\Omega)$ pour tout $a < r^*$.

En particulier,

$$w_{n+}^p \to w_+^p \;\text{ fortement dans }\; L^1(\Omega).$$

Soit u la solution faible unique du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = w_+^p + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.21}$$

Par le résultat du Théorème 1.10, nous concluons que

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \;\text{ lorsque }\; n \to \infty.$$

Maintenant, en posant $z = T(w)$ et en suivant le même argument que dans la preuve de la continuité de T, nous obtenons que

$$z_n \to z \;\text{ fortement dans }\; W_0^{1,1}(\Omega).$$

Ainsi, T est compact.

Par conséquent, grâce au théorème du point fixe de Schauder, nous obtenons l'existence de $z \in E$ tel que $T(z) = z$. Il est clair que $z \in W_0^{1,r}(\Omega)$. En tenant compte de l'hypothèse (3.8), on a $z \in W_0^{1,r}(\Omega)$ pour tout $r < \frac{\sigma N}{N-\sigma}$. En revenant à (3.12), nous concluons que $u \in W_0^{1,\theta}(\Omega)$ pour tout $\theta < \frac{mN}{N-m}$.

Ainsi, la preuve du Théorème 3.1 s'ensuit.

□

Remarquons que l'ensemble défini dans (3.5) est un ensemble borné de $\mathbb{R}_+^2$. Le prochain résultat de non-existence explique clairement qu'une condition de petitesse sur (λ, μ) est nécessaire pour l'existence de solutions à (3.1), du moins pour $q > 1$ et $p \geq 1$.

Théorème 3.2. *Supposons que $q > 1$ et $p \geq 1$. Soient f et g des fonctions mesurables non négatives telles que $(f, g) \neq (0, 0)$ et $f, g \in L^1(\Omega)$. Soit $(\lambda, \mu) \in (0, +\infty)^2$ tel que le système (3.1) admet une solution non négative (u, z). Alors il existe $(\lambda^*, \mu^*) \in (0, +\infty)^2$ tels que $\lambda \leq \lambda^*$ et $\mu \leq \mu^*$.*

Démonstration. Soit $\lambda > 0$, $\mu > 0$, et f, $g > 0$. Supposons que le système

$$\begin{cases} -\Delta u = z^p + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta z = |\nabla u|^q + \mu g & \text{dans } \Omega, \\ u = z = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u, z \geq 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.22}$$

admet une solution non négative (u, z). Rappelons que f et g appartiennent à $L^1(\Omega)$.

Afin de prouver l'existence de μ^* et λ^*, nous distinguerons deux cas : lorsque p et q sont tous les deux supérieurs à 1, et lorsque $q > 1$ et $p = 1$.

Dans ce qui suit, nous utiliserons l'inégalité de Young sous la forme suivante :

$$\forall (a, b) \in (0, +\infty)^2 \quad \text{et} \quad \forall s \in (1, +\infty), \quad ab \leq a^s + C_s b^{s'} \ \text{ où } C_s = \frac{s-1}{s^{s'}} \ \text{ et } \ s' = \frac{s}{s-1}.$$

1. **Cas** $p, q > 1$.

   Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi > 0$. En multipliant les deux équations de (3.22) par φ et en intégrant sur Ω, nous obtenons

$$\int_\Omega z^p \varphi \, dx + \lambda \int_\Omega f \varphi \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx, \tag{3.23}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla u|^q \varphi \; dx + \mu \int_\Omega g\varphi \; dx = -\int_\Omega \Delta z \varphi \; dx = \int_\Omega z(-\Delta\varphi) \; dx. \tag{3.24}$$

Détermination de λ^*.

Grâce à l'inégalité de Young, (3.23) donne

$$\int_\Omega z^p \varphi \; dx + \lambda \int_\Omega f\varphi \; dx \leq \int_\Omega \varphi |\nabla u|^q \; dx + C_q \int_\Omega \varphi^{1-q'} |\nabla \varphi|^{q'} \; dx. \tag{3.25}$$

Par la non-négativité de chaque terme de (3.24), nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla u|^q \varphi \; dx \leq \int_\Omega z(-\Delta\varphi) \; dx. \tag{3.26}$$

Par conséquent, l'inégalité de Young donne

$$\int_\Omega |\nabla u|^q \varphi \; dx \leq \int_\Omega z^p \varphi \; dx + C_p \int_\Omega \varphi^{1-p'} |\Delta\varphi|^{p'} \; dx. \tag{3.27}$$

Posons

$$F(\varphi) = C_q \int_\Omega \varphi^{1-q'} |\nabla\varphi|^{q'} \; dx + C_p \int_\Omega \varphi^{1-p'} |\Delta\varphi|^{p'} \; dx.$$

À partir de (3.25) et (3.27), nous déduisons

$$\lambda \int_\Omega f\varphi \; dx \leq F(\varphi), \tag{3.28}$$

puis $\lambda \leq \lambda^*$ avec

$$\lambda^* := \inf \left\{ F(\varphi) \; ; \; \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \;\text{ et }\; \int_\Omega f\varphi \; dx = 1 \right\}. \tag{3.29}$$

Pour conclure cette partie, nous devons montrer que $\lambda^* < \infty$.

Il est clair que $\lambda^* \geq 0$. Soit $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\psi \geq 0$ et définissons $\varphi = \bar{C}\psi^\theta$ avec $\theta = [\max\{q', 2p'\}] + 1$ (où [.] désigne la partie entière) et $\bar{C} > 0$ est choisi de telle sorte que $\int_\Omega f\varphi = 1$, puisque $\theta \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

De plus

$$\varphi^{1-q'} |\nabla\varphi|^{q'} = \bar{C}\theta^{q'} \psi^{\theta-q'} |\nabla\psi|^{q'},$$

et

$$\varphi^{1-p'} |\Delta\varphi|^{p'} \leq C(p,\theta,\bar{C}) \left(\psi^{\theta-p'} |\Delta\psi|^{p'} + \psi^{\theta-2p'} |\nabla\psi|^{2p'} \right).$$

Ainsi,

$$F(\varphi) \leq \bar{C}\theta^{q'} \int_\Omega \psi^{\theta-q'}|\nabla\psi|^{q'}\, dx + C(p,\theta,\bar{C}) \int_\Omega \psi^{\theta-p'}|\Delta\psi|^{p'}\, dx + \psi^{\theta-2p'}|\nabla\psi|^{2p'}\, dx < \infty.$$

Par conséquent, $\lambda^* < \infty$.

Il est clair que si $\lambda > \lambda^*$, le système (3.22) n'a aucune solution positive.

Détermination de μ^*.

Pour cela, nous procéderons de la même manière qu'auparavant. En appliquant l'inégalité de Young, (3.24) implique

$$\int_\Omega (|\nabla u|^q + \mu g)\varphi\, dx \leq \int_\Omega \varphi z^p\, dx + C_p \int_\Omega \varphi^{1-p'}|\Delta\varphi|^{p'}\, dx. \tag{3.30}$$

Grâce à la non-négativité de chaque terme, (3.23) donne

$$\int_\Omega z^p\varphi\, dx \leq \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\, dx, \tag{3.31}$$

et donc

$$\int_\Omega z^p\varphi\, dx \leq \int_\Omega \varphi|\nabla u|^q\, dx + C_q \int_\Omega \varphi^{1-q'}|\nabla\varphi|^{q'}\, dx. \tag{3.32}$$

Ainsi, (3.30) et (3.32) impliquent

$$\mu \int_\Omega g\varphi\, dx \leq F(\varphi). \tag{3.33}$$

et donc

$$\mu^* := \inf\left\{F(\varphi)\ ;\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \ \text{ et } \ \int_\Omega g\varphi\, dx = 1\right\}. \tag{3.34}$$

Comme ci-dessus, nous pouvons montrer que $\mu^* < \infty$. Ainsi, $\mu \leq \mu^*$.

2. **Cas $p = 1$ et $q > 1$.**

Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\phi > 0$ et définissons φ comme l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \phi & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.35}$$

Il est clair que $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ et $-\Delta\varphi > 0$. En multipliant la première équation de (3.22) par $(-\Delta\varphi)$ et la deuxième équation par φ et en intégrant, nous obtenons

$$\int_\Omega z(-\Delta\varphi)dx+\lambda\int_\Omega f(-\Delta\varphi)dx=\int_\Omega(-\Delta u)(-\Delta\varphi)dx=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla(-\Delta\varphi)dx, \quad (3.36)$$

et

$$\int_\Omega |\nabla u|^q\varphi\ dx+\mu\int_\Omega g\varphi\ dx=\int_\Omega(-\Delta z)\varphi\ dx=\int_\Omega z(-\Delta\varphi)\ dx. \quad (3.37)$$

Détermination de λ^*.

Grâce à l'inégalité de Young, nous avons

$$\int_\Omega z(-\Delta\varphi)\ dx+\lambda\int_\Omega f(-\Delta\varphi)\ dx\leq\int_\Omega |\nabla u|^q\varphi\ dx+C_q\int_\Omega \varphi^{1-q'}|\nabla(-\Delta\varphi)|^{q'}dx. \quad (3.38)$$

Mais

$$\int_\Omega |\nabla u|^q\varphi\ dx\leq\int_\Omega |\nabla u|^q\varphi\ dx+\mu\int_\Omega g\varphi\ dx=\int_\Omega(-\Delta z)\varphi\ dx=\int_\Omega z(-\Delta\varphi)\ dx,$$

donc

$$\int_\Omega z(-\Delta\varphi)dx+\lambda\int_\Omega f(-\Delta\varphi)dx\leq\int_\Omega(-\Delta z)\varphi\ dx+C_q\int_\Omega \varphi^{1-q'}|\nabla(-\Delta\varphi)|^{q'}dx. \quad (3.39)$$

Ainsi,

$$\lambda\int_\Omega f(-\Delta\varphi)\ dx\leq C_q\int_\Omega \varphi^{1-q'}|\nabla(-\Delta\varphi)|^{q'}\ dx. \quad (3.40)$$

Définissons $G(\phi)=C_q\int_\Omega \varphi^{1-q'}|\nabla\phi|^{q'}$. Revenant à la définition de φ et en utilisant le principe du maximum fort, il existe $C>0$ tel que $\varphi\geq C$ dans le support de ϕ. Ainsi, $G(\phi)$ est bien défini pour tout $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ et $\phi>0$.

Définissons

$$\lambda^*:=\inf\left\{G(\phi)\ ;\ \phi\in C_0^\infty(\Omega),\ \phi>0\ \text{ et }\ \int_\Omega f\phi\ dx=1\right\}. \quad (3.41)$$

alors $\lambda^*<\infty$ et $\lambda\leq\lambda^*$.

Détermination de μ^*.

De la même manière, nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla u|^q \varphi \, dx + \mu \int_\Omega g\varphi \, dx = \int_\Omega (-\Delta z)\varphi \, dx = \int_\Omega z(-\Delta\varphi) \, dx, \tag{3.42}$$

et

$$\int_\Omega z(-\Delta\varphi) \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^q \varphi \, dx + C_q \int_\Omega \varphi^{1-q'} |\nabla(-\Delta\varphi)|^{q'} \, dx. \tag{3.43}$$

Ainsi,

$$\mu \int_\Omega g\varphi \, dx \leq G(\phi),$$

et donc $\mu \leq \mu^*$ avec

$$\mu^* := \inf \left\{ G(\phi) \mid \int_\Omega g\varphi \, dx = 1 \right\}. \tag{3.44}$$

Nous concluons comme ci-dessus que $\mu^* < \infty$.

$\square$

3.3 Résultats sur la non-existence

Dans cette section, nous démontrons que les conditions de régularité (3.2) sont optimales pour l'existence, au moins dans certains cas spécifiques. En particulier, nous examinerons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta^2 u = |\nabla u|^q + \mu g(x) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.45}$$

cela signifie que lorsque $p = 1$ et $f \equiv 0$.

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.3. *Supposons que $g \in L^\sigma(\Omega)$ avec $\sigma \geq 1$, et $q > 1$. Il existe $\Gamma(g) > 0$ tel que si $\mu > \Gamma(g)$, alors le problème (3.45) n'admet pas de solution positive.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que le problème (3.45) admet une solution positive u.

Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, nous prenons $|\phi|^{q'}$ comme fonction test dans (3.45), on obtient

$$\int_\Omega (-\Delta u)(-\Delta|\phi|^{q'}) \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^q |\phi|^{q'} \, dx + \mu \int_\Omega g|\phi|^{q'} \, dx. \tag{3.46}$$

Puisque $q' > 1$, et par la proposition 1.5 et l'inégalité de Kato Lemme 1.1, on obtient

$$-\Delta|\phi|^{q'} \leq q'|\phi|^{q'-2}\phi(-\Delta\phi).$$

Puisque $-\Delta u > 0$, en utilisant l'inégalité de Young, on peut conclure que :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (-\Delta u)(-\Delta|\phi|^{q'})\ dx &\leq q' \int_\Omega |\phi|^{q'-2}\phi(-\Delta\phi)(-\Delta u)\ dx \\
&\leq q' \int_\Omega \nabla u \nabla(|\phi|^{q'-2}\phi(-\Delta\phi))\ dx \\
&\leq q'\varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^q|\phi|^{q'}\ dx + q'c(\varepsilon)\int_\Omega |\phi|^{\frac{-(q')^2}{q}}|\nabla(|\phi|^{q'-2}\phi(-\Delta\phi))|^{q'}\ dx \\
&= q'\varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^q|\phi|^{q'}\ dx + q'c(\varepsilon)\int_\Omega \frac{|\nabla(|\phi|^{q'-2}\phi(-\Delta\phi))|^{q'}}{|\phi|^{\frac{q}{(q-1)^2}}}\ dx,
\end{aligned}$$

en choisissant $q'\varepsilon \leq 1$

$$\mu \int_\Omega g|\phi|^{q'}\ dx \leq C(\varepsilon, q)\int_\Omega \frac{|\nabla(|\phi|^{q'-2}\phi(-\Delta\phi))|^{q'}}{|\phi|^{\frac{q}{(q-1)^2}}}\ dx.$$

Alors

$$\mu \leq \frac{C(\varepsilon, q)\int_\Omega \frac{|\nabla(|\phi|^{q'-2}\phi(-\Delta\phi))|^{q'}}{|\phi|^{\frac{q}{(q-1)^2}}}\ dx}{\int_\Omega g|\phi|^{q'}\ dx}.$$

En définissant

$$\Gamma(g) \equiv \inf_{\phi\in C_0^\infty(\Omega),\phi\neq 0} \frac{C(\varepsilon, q)\int_\Omega \frac{|\nabla(|\phi|^{q'-2}\phi(-\Delta\phi))|^{q'}}{|\phi|^{\frac{q}{(q-1)^2}}}\ dx}{\int_\Omega g|\phi|^{q'}\ dx}.$$

Alors si $\mu > \Gamma(g)$, le problème (3.45) n'a pas de solution positive.

$\square$

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui, A. Attar, EH Laamri, On the existence of positive solutions to semilinear elliptic systems involving gradient term, Applicable Analysis, 2018, 1289-1306

[2] B. Abdellaoui, Y.O. Boukarabila, S.E. Miri, Introduction aux méthodes variationnelles et application à la résolution des EDP elliptiques. Polycopié en ligne, 2018.

[3] A. Attar, Problèmes elliptiques et paraboliques non-linéaires avec dépendance du gradient et potentiel de Hardy singulier. Thèse de Doctorat 2013 .

[4] A. Attar, R. Bentifour, Existence of positive solutions to nonlinear elliptic systems involving gradient term and reaction potential, Electronic Jornal of Differential Equation, 2017, 1-10.

[5] A Attar, R Bentifour, EH Laamri, Nonlinear elliptic systems with coupled gradient terms, Journal of Acta Applicandae Mathematicae, 2020, 163-183.

[6] P. Baras, M.Pierre, Singularités éliminables pour des équations semi-linéaires, Annales de l'institut Fourier, 1984, 185-206.

[7] L. Boccardo, G. Croce, Elliptic partial differential equations : existence and regularity of distributional solutions. Stud Math. 2014.

[8] L. Boccardo, L. Orsina, A. Porretta, Existence of finite energy solutions for elliptic systems with L^1-value nonlinearities. Math Methods Appl Sci. 2008, 669–687.

[9] L. Boccardo, L. Orsina, I. J. Puel, A quasilinear elliptic system with natural growth terms. Ann Matematica, 2015, 1733-1750.

[10] H.Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications. Dunod, 1999.

[11] H. Brezis, S. Kamin, Sublinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. Manuscripta Math, 1992, 87-106.

[12] H.Brezis, A.C.Ponce, Kato's inequality when Δu is a measure. C. R. Acad. Sci. Paris, 2004, 1-5.

[13] S. Clain, J. Rappaz, M. Swierkosz, R. Touzani, Numerical modeling of induction heating for two dimentional geometrie. Math Methods Appl Sci. 1993, 805-822.

[14] J. I. Diaz, M. Lazzo, P. G. Schmidt, Large Solutions for a System of elliptic equations arising from fluid dynamics, Siam Journal on Mathematical Analysis, 2005, 490-513.

[15] L. C. Evans, Partial differential equations. American Mathematical Society, 2010.

Abstract

In this work, we study the existence of positive solutions for a nonlinear elliptic system with
interaction between potential and gradient terms, using the Schauder fixed point and approximation method.

Key words : Elliptic system, approximation method, gradient terms , Bi-laplacian.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence de solutions positives pour un systèmes elliptiques non-linéaire avec interaction entre les termes de potentiel et de gradient, à l'aide de la méthode d'approximation, et en utilisant de point fixe de Schauder.

Mots clés : Système elliptique, méthode d'approximation, termes de gradient , Bi-laplacien.

ملخص:

في هذه المذكرة، ندرس وجود حلول موجبة لنظام إهليلجي غير خطي مع التفاعل بين حدود الإمكانات وحدود التدرج، باستخدام طريقة التقريب وباستخدام نقطة شودر الثابتة.

الكلمات المفتاحية: النظام الإهليلجي، طريقة التقريب، شروط التدرج، ثنائي لابلاسيان.