

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEM



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Biomathématiques & Modélisations

présentée par

CHERIFI Hanaa

Identification des paramètres de quelques modèles épidémiologiques

M.T.M TOUAOULA

M.M MESK

M^{me}.BOUAYAD AGHA- SARI ZAKYA

Pr. Université de Tlemcen Président

MCA Université de Tlemcen Examineur

MCB Université de Tlemcen Encadrante

Année Universitaire : 2023-2024

Dédicaces

Ce projet de fin d'études est dédié à **mes très chers parents** qui m'ont toujours poussée et motivée dans mes études. Ce travail représente donc l'aboutissement du soutien et des encouragements qu'ils m'ont prodiguée tout au long de ma scolarité. Qu'ils trouvent ici ma sincère reconnaissance et mon amour.

À mon cher frère : *Mohammed Rayane*, à mon adorable petite sœur : *Aridj Anfel*, qui m'ont toujours encouragée.

À mes plus proches amies : *Meriem, Feryel, Rania, Salima, Achawak, Farah, Kamilia*.

À toute ma famille.

Remerciements

Au premier lieu et avant tout je tiens à remercier **ALLAH** qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon encadrante M^{me} **Bouayad Agha Sari Zakya** qui m'a offert la possibilité de réaliser ce travail sous sa direction, ses encouragements, ses précieux conseils, sa compréhension et ses suggestions.

Mes remerciements vont ensuite à Monsieur **Tarik Mohammed Touaoula** d'avoir toujours fait tout ce qu'il pouvait pour faciliter le déroulement de mon travail mais aussi pour sa gentillesse et sa modestie et aussi pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider mon jury de soutenance.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur **Mohammed Mesk** qui a accepté d'examiner ce travail.

Il m'est agréable d'exprimer ma respectueuse gratitude et mes sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont soutenue, de près ou de loin pour mener ce travail à terme.

Résumé

Dans ce mémoire, un modèle du type SIR pour une population fermée est considéré en vue d'identifier ses paramètres. L'analyse concerne trois phases, à savoir ;

En première phase, on établit un algorithme de résolution d'une équation fondamentale.

Une seconde phase est une phase d'analyse qui fait ressortir les limites de la première phase.

La troisième phase permet la prédiction d'un modèle pour identifier ses paramètres. Quelques applications avec des simulations numériques illustrent les résultats obtenus.

Abstract

In this work, we consider an SIR model for a closed population. The main question is asked for identifying the parameters. To do, we have to analyse three phases, namely ;

The first step concerns an algorithm of the resolution of a fundamental equation.

The second step is essentially analytical and draws the limits of the first step.

The third step allows us to predict a model for identifying its parameters.

Some applications and numerical simulations are given to illuminate the obtained results.

*"A la mémoire du grand mathématicien Pierre Magal,
Professeur à l'institut de Mathématiques à Bordeaux, décédé
un mardi du 21 Février 2024"*

Je n'ai jamais eu la chance de rencontrer le feu Professeur Magal, cependant, à quelques jours de son décès précoce, le destin m'a mis sur certains de ses articles pour servir d'un guide intéressant et enrichissant pour mon mémoire de Master.

C'est assurément une perte de taille à la communauté mathématique partout dans le monde, tout particulièrement aux jeunes chercheurs et aux étudiants.

J'aimerai, ici rendre un Hommage hautement respectueux en l'honneur du Pr Magal; un passionné de la recherche à l'empreinte scientifique. Reposez en paix.

Table des matières

1	Préliminaire	9
1.1	Introduction	9
1.2	Taux de reproduction de base " \mathfrak{R}_0 "	10
1.3	Modèle de base	13
1.3.1	Existence et unicité	14
1.3.2	Propriétés	15
2	Identification des paramètres	19
2.1	Introduction	19
2.2	Algorithme d'identification des paramètres	20
2.2.1	Analyse des équations du modèle	21
2.2.2	Équation fondamentale de l'algorithme	23
2.2.3	Détermination des paramètres	28
2.3	Le rôle de la proportion $\frac{I_0}{S_0}$ dans l'algorithme	29
2.4	Application	35
3	Identifiabilité des paramètres	37
3.1	Introduction	37
3.2	Identifiabilité des paramètres	38
3.3	Méthode d'identification des combinaisons	44
3.3.1	Équations fondamentales- Identifications des combinaisons	45
3.3.2	Équation du point tournant	50
3.3.3	Présentation de la méthode	60
3.4	Remarques	62

3.5	Application	63
4	Un modèle prédictif de l'épidémie du COVID-	
	19	67
4.1	Introduction	67
4.2	Présentation du modèle	67
4.3	Taux de transmission	71
4.4	Estimation des paramètres et des conditions initiales	72
4.5	Taux de reproduction de base \mathfrak{R}_0	76
4.6	Remarques	78
4.7	Application	79

Introduction générale

- L'épidémiologie est devenue de plus en plus un domaine où les mathématiques ont apporté des contributions significatives ; à travers la modélisation.
- Des modèles mathématiques à compartiments du type **SIR** : **S**usceptibles, **I**nfectés, **R**éfractaires ont fait leur apparition avec "**McKendrick**" [13], [14], [15].
- En réalité, on ne peut pas connaître tous les paramètres d'un modèle donné, cependant, certains auteurs ont procédé à l'identification de ces paramètres, encore faut-il qu'ils soient identifiables. Dans ce sens, on veut citer les travaux de "**P.Magal**" et "**G.Webb**" dans [19], [11].
- Par ailleurs, il se peut que le taux de transmission évolue rapidement avec le temps et l'infection évolue de manière exponentielle, on en a pour exemple le COVID-19. Cependant, la prédiction de quelques paramètres du modèle est à envisager pour les périodes à venir, cf. [23].
- Dans notre mémoire, on s'intéresse à un modèle du type SIR, en vue d'aborder les questions d'identification, d'identifiabilité, de plus, la prédiction des paramètres du

modèle de l'épidémie du COVID-19.

- Dans le premier chapitre, nous présentons un modèle du type SIR.
- Le second chapitre, concerne l'identification des paramètres du modèle SIR.
- L'identifiabilité fait l'objet du troisième chapitre.
- Le quatrième chapitre est consacré à la prédiction de paramètres du modèle des épidémies du COVID-19.
- Quelques simulations concluront notre travail.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Introduction

Le domaine de la santé publique reconnaît de plus en plus la modélisation mathématique comme un outil de recherche essentiel pour la gestion des maladies infectieuses. Il convient de se rappeler qu'un modèle mathématique est une représentation approximative du processus réel de la maladie. Il s'agit d'une traduction mathématique de nos hypothèses concernant la propagation du virus. Un autre aspect essentiel des modèles mathématiques est le test d'hypothèses : en comparant les résultats du modèle avec les connaissances ou les données existantes sur la maladie, nous pouvons utiliser le modèle pour tester différentes hypothèses concernant la maladie. [17]

- La modélisation mathématique en épidémiologie a fait son apparition avec Bernoulli dans [3] ensuite Ross dans [20]. C'est à Kermack et McKendrick [13][14], [15], qu'on doit le premier modèle épidémiologique à compartiments, ensuite Macdonald [16], Dietz et Heesterbeek [10]
- Ces modèles ont été analysés par d'autres chercheurs comme : Anderson and May (1991) [1], Bailey (1957)[2],

Brauer et al. (2008) [5], Brauer and Castillo-Chavez (2000)[4], Busenberg and Cooke (1993)[6], Diekmann et al. (2013)[9], Murray (1993) [18], ...

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques propriétés du modèle du type **SIR**. Rappelons que le modèle de "**Kermack_McKendrick**" est représenté par le système d'équations différentiel ;

$$\begin{cases} S'(t) = -\tau S(t)I(t), & S(0) = S_0 > 0, \\ I'(t) = \tau S(t)I(t) - \gamma I(t), & I(0) = I_0 > 0, \\ R'(t) = \gamma I(t), & R(0) = R_0 = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Où la population est divisée en trois compartiments : "**Susceptibles**", "**Infectés**", "**Réfractaires**" dont les densités sont notées par : **S(t)**, **I(t)**, **R(t)** respectivement.

De plus, τ et γ sont des paramètres strictement positifs tels que :

τ : taux de transmission de la maladie.

γ : taux de guérison ou de mortalité.

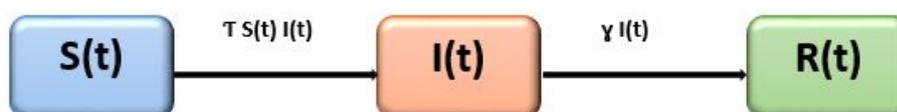


Schéma de transmission du virus

1.2 Taux de reproduction de base " \mathfrak{R}_0 "

Définition 1.1

Le nombre de reproduction de base \mathfrak{R}_0 est probablement la

quantité la plus significative en ce qui concerne la propagation des maladies infectieuses. C'est l'une des quantités d'urgence les plus estimées pour les maladies infectieuses en période d'épidémie, et sa valeur permet de donner un aperçu lors de la conception d'interventions de contrôle liées aux infections établies. Théoriquement, \mathfrak{R}_0 est un élément clé de l'analyse des modèles de maladies infectieuses et, par conséquent, de leur compréhension.

\mathfrak{R}_0 est le nombre moyen de nouvelles infections causées par une personne infectée habituelle, dans une population constituée exclusivement de personnes susceptibles durant sa période d'infectiosité.

(pour de plus amples détails, le lecteur est invité à consulter [9])

* En ce qui concerne le taux de reproduction de base pour le modèle (1.1), il est donné par :

$$\mathfrak{R}_0 = \tau \cdot S_0 \cdot \frac{1}{\gamma}$$

qui peut être interprété comme :

{ nombre moyen de contacts efficaces d'un seul hôte infectieux }
 × { nombre initial des individus susceptibles }
 × { période moyenne d'infection }

(D'après [17])

Remarque 1.1

▷ L'une des propriétés essentielles de \mathfrak{R}_0 est que :

1. Si $\mathfrak{R}_0 < 1$: aucune épidémie ne se produira car la décroissance sera exponentielle.

2. Si $\mathfrak{R}_0 > 1$: il y aura une épidémie puisque la croissance sera exponentielle.

Montrons les propriétés de \mathfrak{R}_0 :

- D'abord la fonction $S(t)$ est décroissante, $\forall t \geq 0$
- la population est constante :

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t), \quad \forall t \geq 0$$

$$N'(t) = S'(t) + I'(t) + R'(t)$$

$$N'(t) = -\tau S(t)I(t) + \tau S(t)I(t) - \gamma I(t) + \gamma I(t)$$

$$N'(t) = 0 \implies N(t) = N_0 = S_0 + I_0, \quad \forall t \geq 0$$

En particulier, $S(t) \leq S_0$.

D'autre part,

$$I'(t) = \tau S(t)I(t) - \gamma I(t) \iff I'(t) = (\tau S(t) - \gamma)I(t)$$

Nous obtenons ces deux cas :

- * **1er cas** : Si $\tau S_0 < \gamma$ alors $\frac{dI}{dt}|_{t=0} < 0$, puisque $S(t) \leq S_0 < \frac{\gamma}{\tau}$ alors, $\forall t \geq 0$ $I'(t) < 0$ ce qui donne : $I(t)$ est strictement décroissante, $\forall t \geq 0$

En conséquence, si $\frac{\tau S_0}{\gamma} = \mathfrak{R}_0 < 1$: il y aura une diminution exponentielle et l'épidémie se terminera.

- * **2ème cas** : Si $\tau S_0 > \gamma$ alors $\frac{dI}{dt}|_{t=0} > 0$, puisque $S(t)$ est décroissante, $\forall t \geq 0$ ça veut dire qu'il arrive un moment $t_1 > 0$ où $S(t_1) = \frac{\gamma}{\tau} \implies I'(t_1) = 0 \implies I$ atteint un maximum.
De plus, $S(t) > \frac{\gamma}{\tau}$, $\forall t \in [0, t_1)$ et $S(t) < \frac{\gamma}{\tau}$, $\forall t \in [t_1, +\infty)$ pour $t_1 > 0$

Alors :

$$\begin{cases} I(t) \text{ est strictement croissante sur } [0, t_1). \\ I(t) \text{ est strictement décroissante sur } [t_1, +\infty). \end{cases}$$

Ainsi, pour $\frac{\tau S_0}{\gamma} = \mathfrak{R}_0 > 1$: la croissance sera exponentielle et la propagation de l'épidémie sera rapide.

(Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter [17])

1.3 Modèle de base

Dans notre travail, on utilise le modèle du type **SIR** d'une population fermée ce qui signifie que les naissances et l'immigration ne sont pas présentées dans cette population. Il est représenté par le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = -\tau S(t)I(t), & S(0) = S_0 > 0, \\ I'(t) = \tau S(t)I(t) - (\nu_1 + \nu_2)I(t), & I(0) = I_0 > 0, \\ R'(t) = (\nu_1 + \nu_2)I(t), & R(0) = R_0 = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Les paramètres τ , ν_1 et ν_2 sont strictement positifs et représentent :

- * τ : taux de transmission de la maladie.
- * ν_1 : taux de guérison ou de mortalité des personnes infectées déclarées.
- * ν_2 : taux de guérison ou de mortalité des personnes infectées non déclarées.

1.3.1 Existence et unicité

Avant de prouver l'existence et l'unicité du modèle (1.2), il est nécessaire de rappeler le **théorème de Cauchy-Lipschitz** : Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

$$f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Si f est continue, localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Alors, il existe (J, Φ) solution unique maximale au problème de Cauchy telle que $\Phi(t_0) = x_0$ et $t_0 \in J \subset I$.

(Voir [8])

Remarque 1.2

(J, Φ) est une paire maximale si $(\bar{J}, \bar{\phi})$ est une solution au problème de Cauchy alors $\bar{\phi} = \phi|_{\bar{J}}$.

Théorème 1.1 [7]

Pour toute condition initiale ($S_0 > 0$, $I_0 > 0$, $R_0 \geq 0$), le problème (1.2) admet une unique solution $(S(t), I(t), R(t))$ définie $\forall t \geq 0$.

Preuve 1.1 Posons : $X(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{pmatrix}$, $X(0) = \begin{pmatrix} S_0 \\ I_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$ et

$$F(X(t)) = \begin{pmatrix} f_1(X(t)) \\ f_2(X(t)) \\ f_3(X(t)) \end{pmatrix} \text{ tel que :}$$

$$\begin{cases} f_1(X(t)) = -\tau S(t)I(t), \\ f_2(X(t)) = \tau S(t)I(t) - (\nu_1 + \nu_2)I(t), \\ f_3(X(t)) = (\nu_1 + \nu_2)I(t). \end{cases}$$

Alors le problème (1.2) devient sous la forme de problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_+^3 \end{cases} \quad (1.3)$$

Nous remarquons que f_1, f_2 et f_3 sont de classe C^1 , cela signifie que : $F(X(t))$ est de classe C^1 alors $F(X(t))$ est localement lipschitzienne.

D'après le théorème de Cauchy Lipschitz, le problème (1.3) admet une unique solution locale, c'est à dire : $\exists T > 0$ tel que la solution existe et unique sur $]0, T[$.

• Pour montrer que la solution est globale (définie $\forall t \geq 0$) il suffit de montrer que la solution est bornée.

On sait déjà que la population est constante ($N(t) = N_0$) et puisque $(S(t), I(t), R(t))$ sont positives (par 1.3.2) donc :

$$S(t) + I(t) + R(t) = N_0 \implies 0 < S(t) \leq N_0,$$

$$0 < I(t) \leq N_0, \quad 0 < R(t) \leq N_0$$

Alors $(S(t), I(t), R(t))$ est borné. \square

Conclusion : Le problème (1.2) avec la condition initiale $(S_0 > 0, I_0 > 0, R_0 \geq 0)$ admet une unique solution définie $\forall t \geq 0$.

1.3.2 Propriétés

Positivité :

Afin que le modèle soit bien posé, il est nécessaire que les solutions soient positives.

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\tau S(t)I(t) \implies \log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = -\tau \int_0^t I(\sigma) d\sigma$$

$$S(t) = S_0 \exp\left(-\tau \int_0^t I(\sigma) d\sigma\right) > 0$$

De même pour la fonction $I(t)$:

$$\frac{dI(t)}{dt} = (\tau S(t) - (\nu_1 + \nu_2)) I(t)$$

$$\log\left(\frac{I(t)}{I_0}\right) = \int_0^t (\tau S(\sigma) - (\nu_1 + \nu_2)) d\sigma$$

$$I(t) = I_0 \exp\left(\int_0^t (\tau S(\sigma) - (\nu_1 + \nu_2)) d\sigma\right) > 0$$

De plus :

$$R'(t) = (\nu_1 + \nu_2)I(t) \implies R(t) = (\nu_1 + \nu_2) \int_0^t I(\sigma) d\sigma > 0$$

* Pour toutes conditions initiales positives le problème (1.2) admet des solutions strictement positives. [7]

Limites :

- D'abord, on a :
 $S'(t) = -\tau S(t)I(t) < 0 \implies$ la fonction $S(t)$ est strictement décroissante
 De plus elle est minorée par 0 donc : $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)$ existe et noté par : $S_\infty \geq 0$.
- $R'(t) = (\nu_1 + \nu_2)I(t) > 0$ ce qui donne que la fonction $R(t)$ est strictement croissante et puisqu'elle est majorée par N_0 alors : $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = R_\infty \geq 0$ existe.
- $I(t) = N_0 - S(t) - R(t)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (N_0 - S(t) - R(t)) = N_0 - S_\infty - R_\infty \geq 0$$

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = I_\infty \geq 0$ existe.

▷ Montrons que : $S_\infty > 0$, $I_\infty = 0$ et $R_\infty < N_0$.

$$1. \log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = -\tau \int_0^t I(\sigma) d\sigma = -\frac{\tau}{(\nu_1 + \nu_2)} R(t)$$

passons à la limite :

$$\log\left(\frac{S_\infty}{S_0}\right) = -\frac{\tau}{(\nu_1 + \nu_2)} R_\infty \text{ de cette équation on conclut que } S_\infty > 0$$

$$2. \text{ On a } R(t) = (\nu_1 + \nu_2) \int_0^t I(\sigma) d\sigma \leq N_0, \quad \forall t \geq 0$$

$$\implies \lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\nu_1 + \nu_2) \int_0^t I(\sigma) d\sigma$$

$$\implies R_\infty = (\nu_1 + \nu_2) \int_0^{+\infty} I(\sigma) d\sigma < \infty$$

Alors : $I(\infty) = 0$ puisque l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} I(\sigma) d\sigma$ converge.

3. Comme $N_0 = S(t) + I(t) + R(t)$, alors :

$$N_0 = S_\infty + I_\infty + R_\infty$$

$$R_\infty = N_0 - S_\infty, \text{ ce qui donne : } R_\infty < N_0$$

[voir [7]]

Taux de reproduction de base :

D'après la définition (1.1), le taux de reproduction de base concernant le modèle (1.2) est donné par :

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\tau S_0}{\nu_1 + \nu_2}$$

Chapitre 2

Identification des paramètres

2.1 Introduction

L'une des difficultés principales dans l'utilisation des modèles épidémiques réside dans la détermination des paramètres du modèle. L'identification des paramètres du modèle SIR est un objectif intéressant dans le domaine de l'épidémiologie, qui a été abordé par de nombreux chercheurs, dont : **Magal & Webb** [19].

Dans ce chapitre, l'objectif est d'analyser un modèle SIR afin d'établir un algorithme permettant d'identifier les paramètres en utilisant les données épidémiques. Pour de plus amples détails, le lecteur intéressé peut consulter [19]. Considérons le modèle SIR suivant :

$$S'(t) = -\tau I(t)S(t), \quad (2.1)$$

$$I'(t) = \tau I(t)S(t) - (\nu_1 + \nu_2)I(t), \quad (2.2)$$

$$R'(t) = (\nu_1 + \nu_2)I(t). \quad (2.3)$$

avec les conditions initiales :

$$S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 > 0, R(0) = R_0 = 0.$$

Tous les paramètres sont inconnus tels que :

τ : taux de transmission de l'infection.

ν_1 : taux de guérison ou de mortalité des personnes infectées déclarées.

ν_2 : taux de guérison ou de mortalité des personnes infectées non déclarées.

Le nombre de reproduction de base est donné par :

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\tau S_0}{\nu_1 + \nu_2}$$

- * Cette approche est basée sur la connaissance de nouveaux cas déclarés pendant l'épidémie représentés par le nombre cumulé de cas déclarés.

Définition 2.1 *Le nombre cumulé est le nombre total de cas déclarés d'infection jusqu'au temps t , noté $CR(t)$ et défini par ;*

$$CR(t) = \nu_1 \int_0^t I(y) dy$$

tel que $\nu_1 I(t)$ représente le nombre de cas déclarés au temps t .

2.2 Algorithme d'identification des paramètres

On s'intéresse ici à la méthode de calcul des inconnues :

τ , ν_1 , ν_2 utilisant les données suivantes :

- Le point tournant (tp) : le temps de pic de l'infection i.e : le temps où le nombre de cas déclarés des infectés atteint son maximum ($I'(tp) = 0$).
- $\nu_1 I(tp) = CR'(tp)$.
- $CR(tp)$ "**nombre cumulé de cas déclarés au point tournant**" : nombre des personnes infectées qui atteint son maximum pendant l'épidémie.

- CR_∞ "nombre cumulatif de cas déclaré à la fin de l'épidémie" : nombre total de toutes les personnes infectées déclarées.

Tout revient à construire une équation fondamentale de l'algorithme qui dépend des données déclarées pour déterminer les paramètres qui correspondent aux données de cas déclarées et au point tournant.

2.2.1 Analyse des équations du modèle

L'équation (2.1) implique

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S(t)dt} &= -\tau I(t) \\ \log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) &= -\tau \int_0^t I(y)dy \end{aligned} \quad (2.4)$$

Alors

$$S(t) = S_0 \exp\left(-\tau \int_0^t I(y)dy\right)$$

- * Par la somme de (2.1) et (2.2), on obtient :

$$S'(t) + I'(t) = -(\nu_1 + \nu_2)I(t)$$

- * Intégrons cette équation de 0 à t :

$$S(t) + I(t) = S_0 + I_0 - (\nu_1 + \nu_2) \int_0^t I(y)dy$$

D'après (2.4) :

$$S(t) + I(t) = S_0 + I_0 + \frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau} \log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \quad (2.5)$$

- * Selon le premier chapitre, la fonction $S(t)$ admet une limite quand $t \mapsto +\infty$ notée $S_\infty > 0$, d'autre part, $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$.

Passant à la limite dans (2.5) :

$$S_\infty = S_0 + I_0 + \frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau} \log \left(\frac{S_\infty}{S_0} \right) \quad (2.6)$$

D'après (2.4) et la définition de $CR(t)$, nous aurons :

$$CR(t) = \frac{\nu_1}{\tau} \log \left(\frac{S_0}{S(t)} \right)$$

* Donc d'après cette expression le nombre cumulatif de cas déclarés à la fin de l'épidémie est :

$$CR_\infty = \frac{\nu_1}{\tau} \log \left(\frac{S_0}{S_\infty} \right)$$

Ce qui donne :

$$\log \left(\frac{S_\infty}{S_0} \right) = -\frac{\tau}{\nu_1} CR_\infty \implies S_\infty = S_0 \exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR_\infty \right)$$

On remplace dans (2.6), on obtient :

$$S_0 \exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR_\infty \right) = S_0 + I_0 - \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1} CR_\infty \quad (2.7)$$

* On sait que le nombre de cas déclarés des infectés atteint son maximum à l'instant tp , dit le point tournant, c'est-à-dire que $\nu_1 I'(tp) = 0$

$$(2.2) \implies \nu_1(\tau S(tp) - (\nu_1 + \nu_2))I(tp) = 0$$

* Puisque $\nu_1 I(t)$ admet un maximum au point tp qui est supérieur strictement à 0, alors $I(tp) \neq 0$, ce qui donne :

$$S(tp) = \frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau}$$

* Le nombre cumulatif de cas déclarés au point tournant est :

$$CR(tp) = \frac{\nu_1}{\tau} \log \left(\frac{S_0}{S(tp)} \right)$$

$$CR(tp) = \frac{\nu_1}{\tau} \log \left(\frac{\tau S_0}{\nu_1 + \nu_2} \right) \quad (2.8)$$

$$\iff \frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau} = S_0 \exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(tp) \right)$$

2.2.2 Équation fondamentale de l'algorithme

Après avoir effectué une analyse des équations du modèle, il s'avère que les deux équations (2.7) et (2.8) constituent la base de l'équation fondamentale.

Par (2.7) et (2.8), nous aurons :

$$S_0 \exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR_\infty \right) = S_0 + I_0 - \frac{\tau}{\nu_1} S_0 \exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(tp) \right) CR_\infty,$$

$$S_0 \exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR_\infty \right) + \frac{\tau}{\nu_1} S_0 \exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(tp) \right) CR_\infty - S_0 = I_0,$$

Divisons par $S_0 > 0$:

$$\exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR_\infty \right) + \frac{\tau}{\nu_1} \exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(tp) \right) CR_\infty - 1 = \frac{I_0}{S_0},$$

Il est possible d'écrire cette équation de cette forme :

$$\exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR_\infty \right) + \frac{\tau}{\nu_1} \exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} \frac{CR(tp)}{CR_\infty} CR_\infty \right) CR_\infty - 1 = \frac{I_0}{S_0}. \quad (2.9)$$

Posons maintenant : $X = \frac{\tau}{\nu_1}$, $c = CR_\infty > 0$ et

$r = \frac{CR(tp)}{CR_\infty}$ puisque $CR(tp) < CR_\infty$ donc $0 < r < 1$.

Alors l'algorithme est basé sur l'équation suivante :

$$\exp(-cX) + cX \exp(-rcX) - 1 = \frac{I_0}{S_0} \quad (2.10)$$

Posons : $B(X) = \exp(-cX) + cX \exp(-rcX) - 1$

C'est une équation qui dépend de CR_∞ , $CR(tp)$ et d'inconnue $X = \frac{\tau}{\nu_1}$

$$(2.10) \iff B(X) = \frac{I_0}{S_0}$$

Résolution de l'équation (2.10) : Supposons dans ce cas que I_0 et S_0 sont connus.

Les solutions de l'équation (2.10) sont les points d'intersections de la fonction $B(X)$ avec $\frac{I_0}{S_0}$, mais avant de résoudre cette équation nous devons d'abord examiner la fonction $B(X)$ pour déterminer son signe, ainsi que les conditions pour lesquelles l'équation (2.10) admet des solutions.

Étude de la fonction $B(X)$:

On a :

$$B(0) = 0$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} B(X) = -1$$

En outre :

$$\begin{aligned} B'(X) &= -c \exp(-cX) + c \exp(-crX) - c^2 r X \exp(-crX) \\ &= c \exp(-crX) [1 - crX - \exp(-c(1-r)X)] \end{aligned}$$

Posons : $D(X) = [1 - crX - \exp(-c(1-r)X)]$

Puisque $c \exp(-crX) > 0$, alors le signe de $B'(X)$ dépend du signe de la fonction $D(X)$.

Signe de la fonction $D(X)$:

$$D(0) = 0$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} D(X) = -\infty$$

$D'(X) = c(1-r)\exp(-c(1-r)X) - cr$, est strictement décroissante car : $D''(X) = -c^2(1-r)^2\exp(-c(1-r)X) < 0$ (puisque $r < 1$)

De plus, $D'(0) = c(1-2r)$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} D'(X) = -cr < 0$

• **1er cas :** Si $(1-2r) \leq 0$

Alors $D'(X) < 0$, $\forall X > 0$, donc la fonction $D(X)$ est strictement décroissante. Des limites de la fonction $D(X)$, on déduit que $D(X) < 0$, $\forall X > 0$.

Ce qui donne $B'(X) < 0$, $\forall X > 0 \implies$ la fonction $B(X)$ est strictement décroissante.

Sachant que $B(0) = 0$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} B(X) = -1$

On conclut que : $\forall X \geq 0$, $B(X) \leq 0$.

Dans ce cas l'équation (2.10) n'admet pas de solution.

• **2ème cas :** Si $(1-2r) > 0$

Dans ce cas, $\exists X^* > 0$ tel que $D'(X^*) = 0$, de plus :

$D(X)$ est strictement croissante de $(0, X^*)$ et elle est strictement décroissante de $(X^*, +\infty)$.

Puisque $\lim_{X \rightarrow +\infty} D(X) = -\infty$ alors : $\exists ! X_{max} > 0$ tel que :

$D(X_{max}) = 0$, de plus :

$$\begin{cases} D(X) > 0, & \forall X < X_{max} \\ D(X) < 0, & \forall X > X_{max} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} B'(X) > 0, & \forall X < X_{max} \\ B'(X) < 0, & \forall X > X_{max} \end{cases}$$

et $B'(X_{max}) = 0$

Ce qui donne que :

$$\begin{cases} B(X) \text{ est strictement croissante de } (0, X_{max}) \\ B(X) \text{ est strictement décroissante de } (X_{max}, +\infty) \end{cases}$$

De plus X_{max} est un point critique (maximum) de $B(X)$

D'autre part : $\forall Y_0 \in (0, Y_{max})$ avec $B(X_{max}) = Y_{max}$, il existe X_1 et X_2 tel que $X_1 \in (0, X_{max})$ et

$X_2 \in (X_{max}, +\infty)$ avec $B(X_1) = B(X_2) = Y_0$.

(selon la proposition donnée dans [19])

Conclusion : l'équation (2.10) admet des solutions si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $r = \frac{CR(tp)}{CR_\infty} < \frac{1}{2}$
2. $\frac{I_0}{S_0} < \text{Sup}_{X \geq 0} B(X)$

Remarque 2.1 La condition $\frac{CR(tp)}{CR_\infty} < \frac{1}{2}$ signifie que :

- *Après une période de déclenchement de l'épidémie le nombre de personnes infectés atteint son maximum au temps tp (le point tournant) et après ce pic, le nombre des infectés diminue progressivement jusqu'à la fin de l'épidémie cela veut dire que le nombre d'infections déclarées depuis le début de l'épidémie jusqu'au pic est inférieur au nombre d'infection déclarés depuis le pic jusqu'à la fin de l'épidémie. Autrement dit, après l'apogée il y aura plus que la moitié des cas déclarés.*

- D'autre part, il est nécessaire que cette condition doit être vérifiée pour que les données $CR(tp)$ et CR_∞ soient compatibles avec la solution du modèle.
- Le modèle SIR ne peut pas être utilisé pour l'analyse épidémique si les données ne satisfont pas cette condition.

Remarque 2.2

On a donc montré que si $2CR(tp) < CR_\infty$ l'équation (2.10) admet deux solutions c'est à dire que $\frac{\tau}{\nu_1} = X_1$ ou X_2

- ▷ Etant données que X_1 et X_2 sont les points d'intersections de $B(X)$ avec $\frac{I_0}{S_0}$, la valeur de $\frac{I_0}{S_0}$ doit être ajustée afin que l'une des solutions donne les paramètres τ , ν_1 et ν_2 de sorte que le graphe de la sortie de cas déclarés du modèle soit en accord avec les données épidémiques et son point tournant.

Remarque 2.3

- ◇ On définit le nombre cumulatif de cas non déclarés par :

$$CU(t) = \nu_2 \int_0^t I(y) dy$$

par la même façon on peut démontrer que $2CU(tp) < CU_\infty$

- ◇ De même pour tous les cas cumulatifs : $CT(t) = (\nu_1 + \nu_2) \int_0^t I(y) dy$, on trouve $2CT(tp) < CT_\infty$

⇒ le point tournant ne change pas, cela veut dire que : $CR(t)$, $CU(t)$ et $CT(t)$ admettent le même point

tournant

\implies *Le point tournant est unique.*

2.2.3 Détermination des paramètres

On sait déjà que tp , $CR(tp)$, CR_∞ , $CR'(tp)$ sont connus, supposons aussi dans ce cas que S_0 et I_0 sont connus.

Définir soit X_1 ou X_2 pour $\frac{\tau}{\nu_1}$.

$$(2.5) \implies S(tp) + I(tp) = S_0 + I_0 + \frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau} \log \left(\frac{S(tp)}{S_0} \right)$$

$$\frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau} + I(tp) = S_0 + I_0 + \frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau} \log \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau S_0} \right)$$

$$\frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau} \left(1 - \log \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau S_0} \right) \right) = S_0 + I_0 - I(tp)$$

On a $CR'(tp) = \nu_1 I(tp)$ donc, on peut écrire cette équation sous la forme suivante :

$$\frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau} \left(1 - \log \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau S_0} \right) \right) = S_0 + I_0 - \nu_1 I(tp) \frac{1}{\nu_1} \quad (2.11)$$

$$\iff \frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau} \left(1 - \log \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\tau S_0} \right) \right) = S_0 + I_0 - \frac{CR'(tp)}{\nu_1}$$

Utilisant (2.8), on obtient :

$$S_0 \exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(tp) \right) \left(1 + \frac{\tau}{\nu_1} CR(tp) \right) = S_0 + I_0 - \frac{CR'(tp)}{\nu_1}$$

$$\frac{CR'(tp)}{\nu_1} = S_0 + I_0 - S_0 \exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(tp) \right) \left(1 + \frac{\tau}{\nu_1} CR(tp) \right)$$

Alors :	$\nu_1 = \frac{CR'(tp)}{S_0 + I_0 - S_0 \exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(tp) \right) \left(1 + \frac{\tau}{\nu_1} CR(tp) \right)} \quad (2.12)$
---------	--

* On peut écrire τ sous la forme suivante :

$$\tau = \left(\frac{\tau}{\nu_1} \right) \nu_1 \quad (2.13)$$

* De l'équation (2.8), on obtient :

$$\nu_2 = \tau S_0 \exp \left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(tp) \right) - \nu_1 \quad (2.14)$$

2.3 Le rôle de la proportion $\frac{I_0}{S_0}$ dans l'algorithme

- Nous avons déjà observé que la proportion $\frac{I_0}{S_0}$ joue un rôle important dans l'algorithme afin de repérer les paramètres τ, ν_1, ν_2 qui correspondent aux données déclarées et à leur point tournant.
- A ce titre, si on pose $\frac{I_0}{S_0} = \frac{(kI_0)}{(kS_0)}$ avec k étant un facteur d'échelle strictement positif, est-ce que les paramètres " τ, ν_1, ν_2 ", le point tournant " tp ", taux de reproduction de base " \mathfrak{R}_0 ", ainsi que les combinaisons " $S_0\nu_1, S_0\tau$ et $\nu = \nu_1 + \nu_2$ " (à voir dans le troisième chapitre) dépendent de k ? (remarque donnée dans [19])

1. Paramètres :

Soient $S_0 = k\hat{S}_0, I_0 = k\hat{I}_0$.

- D'abord, nous avons besoin de la solution de l'équation (2.10) i.e :

$$\exp(-cX) + cX \exp(-rcX) - 1 = \frac{k\hat{I}_0}{k\hat{S}_0},$$

avec $X = \frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}$ donc pour $r < \frac{1}{2}$: $\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)} = X_1$ où X_2 qui sont indépendant de k .

$\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}$ est indépendant de k .

◦ Passons maintenant à (2.12) :

$$\begin{aligned}\nu_1(k) &= \frac{CR'(tp)}{k\hat{S}_0 + k\hat{I}_0 - k\hat{S}_0 \exp\left(-\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}CR(tp)\right) \left(1 + \frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}CR(tp)\right)} \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{CR'(tp)}{\hat{S}_0 + \hat{I}_0 - \hat{S}_0 \exp\left(-\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}CR(tp)\right) \left(1 + \frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}CR(tp)\right)} \right)\end{aligned}$$

posons

$$\hat{\nu}_1 = \frac{CR'(tp)}{\hat{S}_0 + \hat{I}_0 - \hat{S}_0 \exp\left(-\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}CR(tp)\right) \left(1 + \frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}CR(tp)\right)}$$

Ce qui donne $\nu_1(k) = \frac{\hat{\nu}_1}{k}$, alors $\nu_1(k)$ dépend de k avec $\hat{\nu}_1$ est indépendant de k .

◦ Maintenant par (2.13), on a : $\tau(k) = \left(\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}\right) \nu_1(k)$

$$\tau(k) = \left(\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}\right) \frac{\hat{\nu}_1}{k}$$

posons $\hat{\tau} = \left(\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}\right) \hat{\nu}_1$ qui est indépendant de k , alors que $\tau(k) = \frac{\hat{\tau}}{k}$ dépend de k .

◦ D'autre part, d'après (2.14), on a :

$$\begin{aligned}\nu_2(k) &= \tau(k)S_0 \exp\left(-\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}CR(tp)\right) - \nu_1(k) \\ &= \frac{\hat{\tau}}{k} k\hat{S}_0 \exp\left(-\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}CR(tp)\right) - \frac{\hat{\nu}_1}{k} \\ &= \hat{\tau}\hat{S}_0 \exp\left(-\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}CR(tp)\right) - \frac{\hat{\nu}_1}{k}\end{aligned}$$

posons $\varphi = \hat{\tau}\hat{S}_0 \exp\left(-\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}CR(tp)\right)$ qui est indépendant de k , alors $\nu_2(k) = \varphi - \frac{\hat{\nu}_1}{k}$ dépend de k .

2. Point tournant :

Soit le modèle :

$$\begin{cases} S'(t) = -\tau(k)S(t)I(t), & S_0 = k\hat{S}_0, \\ I'(t) = \tau(k)S(t)I(t) - (\nu_1(k) + \nu_2(k))I(t), & I_0 = k\hat{I}_0. \end{cases} \quad (2.15)$$

En utilisant les formules des paramètres $\nu_1(k)$, $\tau(k)$, $\nu_2(k)$ le modèle devient

$$\begin{cases} S'(t) = -\frac{\hat{\tau}}{k}S(t)I(t), \\ I'(t) = \frac{\hat{\tau}}{k}S(t)I(t) - (\frac{\hat{\nu}_1}{k} + \varphi - \frac{\hat{\nu}_1}{k})I(t). \end{cases} \quad (2.16)$$

Alors :

$$\begin{cases} S'(t) = -\frac{\hat{\tau}}{k}S(t)I(t), & S_0 = k\hat{S}_0, \\ I'(t) = \frac{\hat{\tau}}{k}S(t)I(t) - \varphi I(t), & I_0 = k\hat{I}_0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Multiplions les deux cotés des équations du modèle (2.17) par $\frac{1}{k}$:

$$\begin{cases} \frac{S'(t)}{k} = -\hat{\tau}\frac{S(t)}{k}\frac{I(t)}{k}, & S_0 = k\hat{S}_0, \\ \frac{I'(t)}{k} = \hat{\tau}\frac{S(t)}{k}\frac{I(t)}{k} - \varphi\frac{I(t)}{k}, & I_0 = k\hat{I}_0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Posons $\hat{S}(t) = \frac{S(t)}{k}$ et $\hat{I}(t) = \frac{I(t)}{k}$, on obtient :

$$\begin{cases} \hat{S}'(t) = -\hat{\tau}\hat{S}(t)\hat{I}(t), & S_0 = \hat{S}_0, \\ \hat{I}'(t) = \hat{\tau}\hat{S}(t)\hat{I}(t) - \varphi\hat{I}(t), & I_0 = \hat{I}_0. \end{cases} \quad (2.19)$$

* Supposons que $\hat{I}(t)$ admet un maximum au temps "tp" i.e : $\hat{I}'(tp) = 0 \iff I'(tp) = 0$ car : $\hat{I}'(t) = \frac{I'(t)}{k}$
 cela signifie que (2.17) et (2.19) admettent le même point tournant et puisque (2.17) est indépendant de k , donc le point tournant est également indépendant de k .

3. Taux de reproduction de base :

Nous avons dans ce cas :

$$\mathfrak{R}_0(k) = \frac{\tau(k)S_0k}{\nu_1(k) + \nu_2(k)}$$

revenons à (2.8) :

$$CR(tp) = \frac{\nu_1(k)}{\tau(k)} \log \left(\frac{\tau(k)S_0k}{\nu_1(k) + \nu_2(k)} \right)$$

$$\exp \left(\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)} CR(tp) \right) = \frac{\tau(k)S_0k}{\nu_1(k) + \nu_2(k)}$$

Ce qui donne :

$$\mathfrak{R}_0(k) = \exp \left(\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)} CR(tp) \right)$$

Sachant que $\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}$ est indépendant de k , alors :
 $\mathfrak{R}_0(k)$ est indépendant de k .

4. Les combinaisons :

▷ Revenons dans ce cas à (2.11) :

$$S_0k + I_0k - \frac{\nu_1(k)I(tp)}{\nu_1(k)} = \frac{\nu_1(k) + \nu_2(k)}{\tau(k)} \left(1 - \log \left(\frac{\nu_1(k) + \nu_2(k)}{S_0k\tau(k)} \right) \right)$$

Divisons par S_0k :

$$1 + \frac{I_0k}{S_0k} - \frac{\nu_1(k)I(tp)}{S_0k\nu_1(k)} = \frac{\nu_1(k) + \nu_2(k)}{S_0k\tau(k)} \left(1 - \log \left(\frac{\nu_1(k) + \nu_2(k)}{S_0k\tau(k)} \right) \right)$$

Nous remarquons que :

$$\frac{\nu_1(k) + \nu_2(k)}{S_0k\tau(k)} = \frac{1}{\mathfrak{R}_0(k)} \text{ qui est indépendante de } k.$$

Donc $1 + \frac{I_0k}{S_0k} - \frac{\nu_1(k)I(tp)}{S_0k\nu_1(k)}$ est indépendante de k .

Ce qui implique que $S_0k\nu_1(k)$ ne dépend pas de k .

▷ Il est possible d'écrire $S_0 k \tau(k)$ comme suit :

$$S_0 k \tau(k) = \frac{S_0 k \nu_1(k) \tau(k)}{\nu_1(k)}$$

Sachant que $S_0 k \nu_1(k)$ et $\frac{\tau(k)}{\nu_1(k)}$ sont indépendants de k , alors : $S_0 k \tau(k)$ ne dépend pas de k .

▷ Par la formule de $\mathfrak{R}_0(k)$ on a :

$$\nu_1(k) + \nu_2(k) = \frac{k S_0 \tau(k)}{\mathfrak{R}_0}, \text{ en conséquence :}$$

$(\nu_1(k) + \nu_2(k))$ est indépendant de k .

Remarque 2.4 ([19])

Nous avons supposé plus tôt que S_0 et I_0 sont connus.

1. *Si le nombre initial des personnes susceptibles " S_0 " est inconnu vu qu'une grande partie de la population ait acquis l'immunité contre une infection précédente. Cependant, le nombre initial de cas déclarés et non déclarés pour les personnes infectés " I_0 " peut être connu. Dans cette situation, l'algorithme est utilisé pour définir " S_0 ", on ajuste la valeur de " S_0 " du rapport " $\frac{I_0}{S_0}$ " avec " I_0 " fixé et on compare la sortie du modèle avec les données épidémiques. Puisqu'on s'intéresse à trouver des paramètres qui correspondent aux données de cas déclarés et à son point tournant cela signifie que la valeur de " S_0 " peut être appropriée au point tournant.*
2. *Si l'on considère l'inverse, c'est-à-dire que le nombre initial des personnes infectées " I_0 " peut être inconnu en raison du fait que le nombre initial des individus infectés est bien plus élevé que le nombre initialement déclaré d'infections. En revanche " S_0 " peut être connu,*

dans ce contexte en utilisant la même méthode précédente c'est-à-dire qu'en variant la valeur " I_0 " avec " S_0 " fixé utilisant l'algorithme et on compare la sortie du modèle aux données déclarées et à son point tournant. " I_0 " est généralement donnée au point tournant.

3. *D'autre part, supposons que ni " S_0 " ni " I_0 " ne sont connus. Dans ce cas précis, l'algorithme peut déterminer la valeur de " $\frac{I_0}{S_0}$ " en variant ce ratio jusqu'à ce que les données épidémiques et leur point tournant soient conformes avec la sortie du modèle. Plus précisément, au point tournant la valeur de " $\frac{I_0}{S_0}$ " peut être identifiée.*

▷ En conséquence, dans l'algorithme le rapport de $\frac{I_0}{S_0}$ joue un rôle essentiel dans l'identification des paramètres et des conditions initiales du modèle.

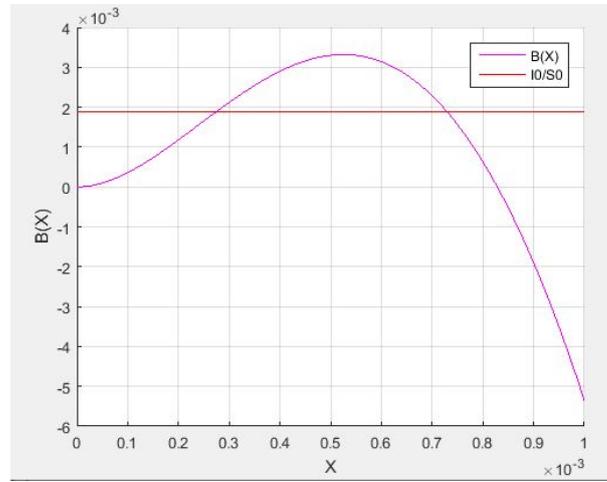
Question : Si S_0 et I_0 sont inconnus, comment peut-on calculer la valeur de S_0 et la valeur de I_0 ? (à examiner dans le troisième chapitre)

2.4 Application

Considérons l'exemple présenté dans [19] où les auteurs ont utilisé l'algorithme d'identification des paramètres pour l'épidémie de grippe de Hong Kong à New York en 1968-1969. Les données épidémiques sont les suivantes :

$S_0 = 7,900,000$, $I_0 = 15000$, $CR_\infty \approx 1080$, $tp \approx 6.15$ semaines, $CR(tp) \approx 500$, $CR'(tp) = \nu_1 I(tp) = 190$.

- D'abord nous remarquons que : $2CR(tp) < CR_\infty$, cela signifie que la condition de compatibilité est vérifiée.
- L'équation $B(X) = \frac{I_0}{S_0}$ admet deux solutions $X_1 = 0.000276$ et $X_2 = 0.000728$. Selon le graphe suivant :



Graphe de la fonction $B(X)$ et I_0/S_0

- La bonne solution qui donne l'accord avec les données épidémiques est : $X_2 = 0.000728$, tel que pour cette solution et par l'utilisation de (2.12), (2.13) et (2.14) , nous aurons : $\tau \approx 3.24 \times 10^{-7}$, $\nu_1 \approx 0.00044$, $\nu_2 \approx 1.78$. Par contre, pour $X_1 = 0.000276$, nous aurons : $\tau \approx 6.27 \times 10^{-7}$, $\nu_1 \approx 0.00227$, $\nu_2 \approx 4.31$ qui ne donnent pas l'accord avec les données. D'après les figures (2.1)

et (2.2) ci-dessous :

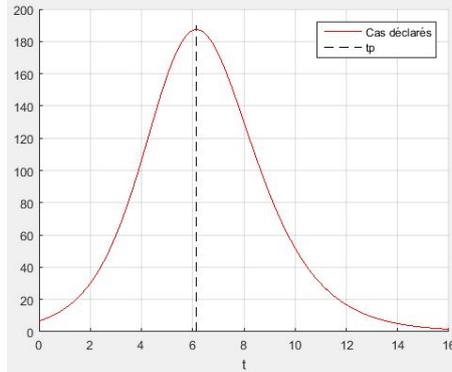


FIGURE 2.1 – Graphe de la sortie du modèle de cas déclarés pour $X_2 = 0.000728$

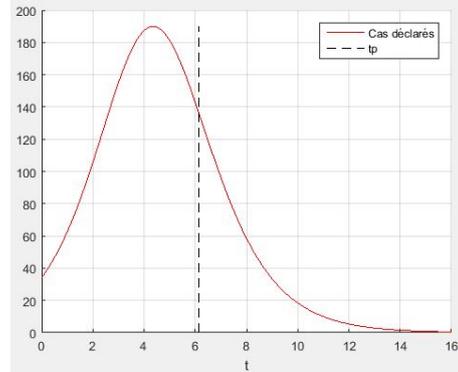
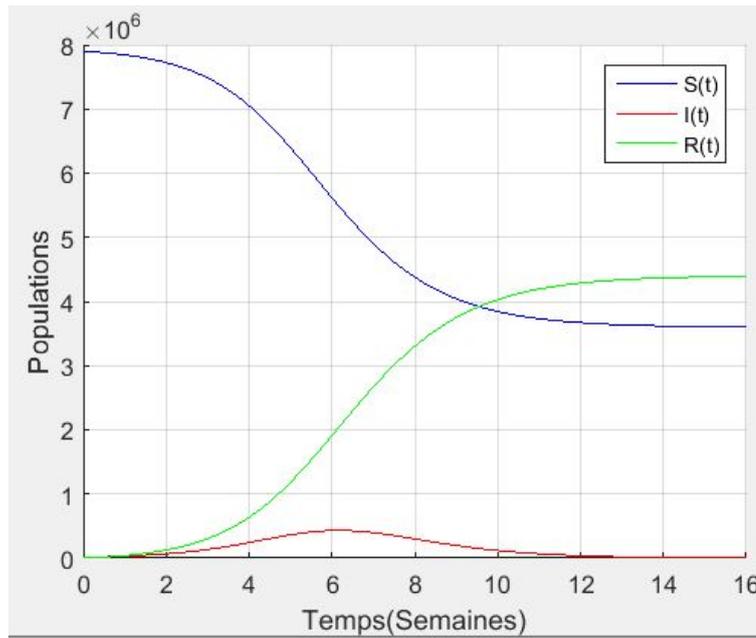


FIGURE 2.2 – Graphe de la sortie du modèle de cas déclarés pour $X_1 = 0.000276$



Graphiques de sortie du modèle de $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$

Chapitre 3

Identifiabilité des paramètres

3.1 Introduction

Après l'identification de paramètres du modèle donné dans [19], ce chapitre est concerné par la question d'identifiabilité du même modèle, voir [11]

◇ Rappelons le modèle suivant ($\nu = \nu_1 + \nu_2$) :

$$\begin{cases} S'(t) = -\tau S(t)I(t), & S(0) = S_0, \\ I'(t) = \tau S(t)I(t) - \nu I(t), & I(0) = I_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

- Dans ce cas, les conditions initiales et les paramètres sont inconnus.

- Le taux de reproduction de base est : $\mathfrak{R}_0 = \frac{S_0\tau}{\nu}$

◇ Nous avons vu dans le deuxième chapitre que l'approche utilisée est basée sur la connaissance du nombre cumulé des cas déclarés $CR(t)$ qui est défini par :

$$CR(t) = \nu_1 \int_0^t I(y)dy$$

tel que $\nu_1 > 0$ inconnu.

◇ Supposons connu $CR(t)$ pour tous les temps $t > 0$, comment pouvons-nous déterminer l'ensemble des paramètres $V = (S_0, I_0, \tau, \nu_1, \nu)$?

3.2 Identifiabilité des paramètres

Notons $V = (S_0, I_0, \tau, \nu_1, \nu) \in \mathbb{R}_{*+}^5$, on définit $(S(t, V), I(t, V))$ comme l'unique solution du système (3.1), et la donnée $CR(t, V) = \nu_1 \int_0^t I(y, V) dy$.

Définition 3.1 [12]

On dit que le modèle (3.1) est identifiable à partir de $CR(t)$ si :

$$CR(t, V) = CR(t, \bar{V}) \implies V = \bar{V}, \quad \forall t \geq 0.$$

▷ Pour le modèle (3.1), est-ce que l'ensemble des paramètres $V = (S_0, I_0, \tau, \nu_1, \nu)$ est identifiable à partir de $CR(t)$?

Proposition 3.1 [11]

Soient $(S(t, V), I(t, V))$ solution de (3.1) avec $V = (S_0, I_0, \tau, \nu_1, \nu)$ et $(\bar{S}(t, \bar{V}), \bar{I}(t, \bar{V}))$ solution de (3.1) pour $\bar{V} = (\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{\tau}, \bar{\nu}_1, \bar{\nu})$.

$$CR(t, V) = CR(t, \bar{V}), \quad \forall t \geq 0 \iff \nu = \bar{\nu}, \quad \frac{\tau}{\nu_1} = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\nu}_1}, \\ \tau S_0 = \bar{\tau} \bar{S}_0, \quad \tau I_0 = \bar{\tau} \bar{I}_0, \quad \nu_1 I_0 = \bar{\nu}_1 \bar{I}_0.$$

Preuve 3.1

" \implies " Supposons que $CR(t, V) = CR(t, \bar{V})$, montrons que $\nu = \bar{\nu}$, $\frac{\tau}{\nu_1} = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\nu}_1}$, $\tau S_0 = \bar{\tau} \bar{S}_0$, $\tau I_0 = \bar{\tau} \bar{I}_0$, $\nu_1 I_0 = \bar{\nu}_1 \bar{I}_0$.

D'abord, on a :

$CR(t, V) = \nu_1 \int_0^t I(y, V) dy$ et $CR(t, \bar{V}) = \bar{\nu}_1 \int_0^t \bar{I}(y, \bar{V}) dy$ sont dérivables, $\forall t \geq 0$

Donc : $CR'(t, V) = CR'(t, \bar{V}), \quad \forall t \geq 0.$

$$\nu_1 I(t, V) = \bar{\nu}_1 \bar{I}(t, \bar{V}), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2)$$

– Sachant que $I(t, V)$ et $\bar{I}(t, \bar{V})$ sont de classe C^1 , on dérive les deux côtés de (3.2) par rapport à t :

$$\nu_1 I'(t, V) = \bar{\nu}_1 \bar{I}'(t, \bar{V}), \quad \forall t \geq 0$$

– Nous avons :

$$I'(t, V) = \tau S(t, V)I(t, V) - \nu I(t, V)$$

et

$$\bar{I}'(t, \bar{V}) = \bar{\tau} \bar{S}(t, \bar{V})\bar{I}(t, \bar{V}) - \bar{\nu} \bar{I}(t, \bar{V})$$

d'où

$$\begin{aligned} \nu_1(\tau S(t, V)I(t, V) - \nu I(t, V)) &= \bar{\nu}_1(\bar{\tau} \bar{S}(t, \bar{V})\bar{I}(t, \bar{V}) - \bar{\nu} \bar{I}(t, \bar{V})) \\ \nu_1 I(t, V)(\tau S(t, V) - \nu) &= \bar{\nu}_1 \bar{I}(t, \bar{V})(\bar{\tau} \bar{S}(t, \bar{V}) - \bar{\nu}) \end{aligned}$$

D'après (3.2), on obtient :

$$\tau S(t, V) - \nu = \bar{\tau} \bar{S}(t, \bar{V}) - \bar{\nu}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3)$$

– Puisque $S(t, V)$ et $\bar{S}(t, \bar{V})$ sont de classe C^1 , on peut dériver les deux côtés de (3.3) par rapport à t , on obtient :

$$\tau S'(t, V) = \bar{\tau} \bar{S}'(t, \bar{V}), \quad \forall t \geq 0.$$

– D'après la formule de $S'(t, V)$ et $\bar{S}'(t, \bar{V})$, nous aurons :

$$\begin{aligned} -\tau^2 S(t, V)I(t, V) &= -\bar{\tau}^2 \bar{S}(t, \bar{V})\bar{I}(t, \bar{V}) \\ \tau^2 S(t, V)I(t, V) &= \bar{\tau}^2 \bar{S}(t, \bar{V})\bar{I}(t, \bar{V}) \end{aligned}$$

vu que $\nu_1 I(t, V) = \bar{\nu}_1 \bar{I}(t, \bar{V})$ donc, $I(t, V) = \frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1} \bar{I}(t, \bar{V})$,
on peut écrire cette équation comme suit :

$$\tau^2 S(t, V) \frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1} \bar{I}(t, \bar{V}) = \bar{\tau}^2 \bar{S}(t, \bar{V}) \bar{I}(t, \bar{V})$$

$$\text{donc : } \quad \frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1} \tau^2 S(t, V) = \bar{\tau}^2 \bar{S}(t, \bar{V}), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.4)$$

– Comme :

$$\begin{aligned} \tau S(t, V) - \nu &= \bar{\tau} \bar{S}(t, \bar{V}) - \bar{\nu} \\ \bar{S}(t, \bar{V}) &= \frac{\tau S(t, V) - \nu + \bar{\nu}}{\bar{\tau}} \end{aligned}$$

remplaçons $\bar{S}(t, \bar{V})$ dans (3.4), nous obtenons :

$$\frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1} \tau^2 S(t, V) = \bar{\tau}^2 \frac{\tau S(t, V) - \nu + \bar{\nu}}{\bar{\tau}}$$

$$\implies \frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1} \tau^2 S(t, V) = \bar{\tau} \tau S(t, V) + \bar{\tau}(\bar{\nu} - \nu), \quad \forall t \geq 0$$

$$\iff \frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1} \tau^2 S(t, V) - \bar{\tau} \tau S(t, V) = \bar{\tau}(\bar{\nu} - \nu), \quad \forall t \geq 0$$

Divisons par $\tau > 0$:

$$\left(\frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1} \tau - \bar{\tau} \right) S(t, V) = \frac{\bar{\tau}}{\tau} (\bar{\nu} - \nu), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.5)$$

– Dérivons par rapport à t :

$\left(\frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1} \tau - \bar{\tau} \right) S'(t, V) = 0$, ce qui implique d'après la formule de $S'(t, V)$:

$$\left(\frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1} \tau - \bar{\tau} \right) (-\tau S(t, V) I(t, V)) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.6)$$

Avec l'utilisation des équations (3.2), (3.3), (3.5), (3.6) à l'instant $t = 0$, nous arrivons à :

$$\nu_1 I_0 = \bar{\nu}_1 \bar{I}_0 \quad (3.7)$$

$$\tau S_0 - \nu = \bar{\tau} \bar{S}_0 - \bar{\nu} \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1} \tau - \bar{\tau}\right) S_0 = \frac{\bar{\tau}}{\tau} (\bar{\nu} - \nu) \quad (3.9)$$

$$-\left(\frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1} \tau - \bar{\tau}\right) \tau S_0 I_0 = 0 \quad (3.10)$$

* D'après (3.10) et puisque $\tau S_0 I_0 \neq 0$, alors :

$$\left(\frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1} \tau - \bar{\tau}\right) = 0 \implies \boxed{\frac{\tau}{\nu_1} = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\nu}_1}}$$

* De (3.9) on a : $\left(\frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1} \tau - \bar{\tau}\right) = \frac{\bar{\tau}}{S_0 \tau} (\bar{\nu} - \nu)$, remplaçons cette expression dans (3.10) :

$$-\tau S_0 I_0 \left(\frac{\bar{\tau}}{S_0 \tau} (\bar{\nu} - \nu)\right) = 0 \implies I_0 \bar{\tau} (\bar{\nu} - \nu) = 0$$

Comme $I_0 \bar{\tau} \neq 0$, donc : $(\bar{\nu} - \nu) = 0$, ce qui donne

$$\boxed{\bar{\nu} = \nu}$$

* Ainsi, d'après (3.8), nous obtenons : $\boxed{\tau S_0 = \bar{\tau} \bar{S}_0}$

* D'autre part, en utilisant $\frac{\tau}{\nu_1} = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\nu}_1} \implies \nu_1 = \frac{\tau \bar{\nu}_1}{\bar{\tau}}$ et d'après (3.7), nous aurons :

$$\frac{\tau \bar{\nu}_1}{\bar{\tau}} I_0 = \bar{\nu}_1 \bar{I}_0 \implies \boxed{\tau I_0 = \bar{\tau} \bar{I}_0}$$

▷ Par conséquent, pour $CR(t, V) = CR(t, \bar{V})$, $\forall t \geq 0$, on a :

$$\bar{\nu} = \nu, \quad \frac{\tau}{\nu_1} = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\nu}_1}, \quad \tau S_0 = \bar{\tau} \bar{S}_0, \quad \tau I_0 = \bar{\tau} \bar{I}_0, \quad \nu_1 I_0 = \bar{\nu}_1 \bar{I}_0.$$

" \Leftarrow " supposons que nous avons :
 $\bar{\nu} = \nu$, $\frac{\tau}{\bar{\nu}_1} = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\nu}_1}$, $\tau S_0 = \bar{\tau} \bar{S}_0$, $\tau I_0 = \bar{\tau} \bar{I}_0$, $\nu_1 I_0 = \bar{\nu}_1 \bar{I}_0$.
 Montrons que $CR(t, V) = CR(t, \bar{V})$, $\forall t \geq 0$.

D'abord, montrons que $CR(t, \bar{V})$ est une fonction de sortie pour le modèle (3.1) de solution $(\bar{S}(t, \bar{V}), \bar{I}(t, \bar{V}))$ pour $\bar{V} = (\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{\tau}, \bar{\nu}_1, \bar{\nu})$

- On définit : $\bar{S}(t) := \frac{\bar{S}_0}{S_0} S(t)$, $\bar{I}(t) := \frac{\bar{I}_0}{I_0} I(t)$ avec $\bar{S}_0 > 0$, $\bar{I}_0 > 0$.
- Remplaçons : $S(t) = \frac{S_0}{\bar{S}_0} \bar{S}(t)$ et $I(t) = \frac{I_0}{\bar{I}_0} \bar{I}(t)$ dans le système (3.1) :

$$\begin{cases} \frac{S_0}{\bar{S}_0} \bar{S}'(t) = -\tau \frac{S_0}{\bar{S}_0} \bar{S}(t) \frac{I_0}{\bar{I}_0} \bar{I}(t), & \bar{S}(0) = \bar{S}_0, \\ \frac{I_0}{\bar{I}_0} \bar{I}'(t) = \tau \frac{S_0}{\bar{S}_0} \bar{S}(t) \frac{I_0}{\bar{I}_0} \bar{I}(t) - \nu \frac{I_0}{\bar{I}_0} \bar{I}(t), & \bar{I}(0) = \bar{I}_0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Multiplions la première équation par : $\frac{\bar{S}_0}{S_0}$ et la deuxième par : $\frac{\bar{I}_0}{I_0}$, ce qui implique :

$$\begin{cases} \bar{S}'(t) = -\tau \frac{I_0}{\bar{I}_0} \bar{S}(t) \bar{I}(t), & \bar{S}(0) = \bar{S}_0, \\ \bar{I}'(t) = \tau \frac{S_0}{\bar{S}_0} \bar{S}(t) \bar{I}(t) - \nu \bar{I}(t), & \bar{I}(0) = \bar{I}_0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Nous avons :

$$\nu = \bar{\nu}.$$

$$\tau S_0 = \bar{\tau} \bar{S}_0 \implies \tau \frac{S_0}{\bar{S}_0} = \bar{\tau}.$$

$$\tau I_0 = \bar{\tau} \bar{I}_0 \implies \tau \frac{I_0}{\bar{I}_0} = \bar{\tau}.$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \bar{S}'(t) = -\bar{\tau} \bar{S}(t) \bar{I}(t), & \bar{S}(0) = \bar{S}_0, \\ \bar{I}'(t) = \bar{\tau} \bar{S}(t) \bar{I}(t) - \bar{\nu} \bar{I}(t), & \bar{I}(0) = \bar{I}_0. \end{cases} \quad (3.13)$$

* Par conséquent, $(\bar{S}(t, \bar{V}), \bar{I}(t, \bar{V}))$ satisfait (3.1) avec le nouvel ensemble de paramètres $\bar{V} = (\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{\tau}, \bar{\nu}_1, \bar{\nu})$.

* Par ailleurs, $CR(t, \bar{V})$ est une fonction de sortie pour l'ensemble de paramètres \bar{V} qui est défini par :

$$CR(t, \bar{V}) = \bar{\nu}_1 \int_0^t \bar{I}(y) dy, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\text{On a : } \bar{I}(t) := \frac{\bar{I}_0}{I_0} I(t), \text{ donc : } CR(t, \bar{V}) = \bar{\nu}_1 \frac{\bar{I}_0}{I_0} \int_0^t I(y) dy$$

$$\text{Sachant que : } \nu_1 I_0 = \bar{\nu}_1 \bar{I}_0 \iff \frac{\bar{\nu}_1 \bar{I}_0}{I_0} = \nu_1, \text{ alors :}$$

$$CR(t, \bar{V}) = \nu_1 \int_0^t I(y) dy = CR(t, V), \quad \forall t \geq 0. \quad \square$$

- Selon la proposition (3.1), on peut conclure que l'ensemble de paramètres V ne peut pas être identifié à partir de $CR(t)$, en outre ce dernier permet de déterminer la valeur des combinaisons.
- D'après ce qui a été mentionné précédemment, les hypothèses concernant $CR(t)$, $\forall t \geq 0$ permettent de définir les valeurs des combinaisons des paramètres et des

conditions initiales suivantes :

$$\boxed{\frac{I_0}{S_0}, S_0\tau, S_0\nu_1, \nu.} \quad (3.14)$$

L'objectif dans ce qui suit est de fournir une méthode pour calculer les combinaisons définies dans (3.14).

3.3 Méthode d'identification des combinaisons

Dans ce cas, nous prenons en compte le modèle (3.1) lorsque $\mathfrak{R}_0 > 1$, étant donné que la fonction $S(t)$ est décroissante et a pour limite $S_\infty > 0$, tandis que la fonction $I(t)$ a un seul point tournant (tp) tel qu'elle est croissante sur $(0, tp)$ et décroissante sur $(tp, +\infty)$, de plus $I_\infty = 0$. (d'après le premier chapitre).

Selon ces informations, nous considérons des quantités essentielles à utiliser pour calculer les combinaisons, à savoir :

◇ tp : le point tournant.

◇ $CR(tp)$: nombre cumulatif au point tournant définit par :

$$CR(tp) = \nu_1 \int_0^{tp} I(y) dy$$

◇ $CR'(tp) = \nu_1 I(tp)$.

◇ CR_∞ : nombre cumulatif à la fin de l'épidémie, tel que :

$$CR_\infty = \nu_1 \int_0^{+\infty} I(y) dy$$

Par ailleurs, il est nécessaire d'avoir des équations indépendantes pour calculer l'ensemble des combinaisons.

3.3.1 Équations fondamentales- Identifications des combinaisons

Rappelons les mêmes équations du chapitre précédent (pour Magal & Webb [19]), à savoir :

- L'équation fondamentale de l'algorithme :

$$\exp(-cX) + cX \exp(-rcX) - 1 = \frac{I_0}{S_0}$$

$$\text{avec } X = \frac{\tau}{\nu_1}, c = CR_\infty \text{ et } r = \frac{CR(tp)}{CR_\infty}$$

Posons dans ce cas : $X = c\frac{\tau}{\nu_1}$, on obtient :

$$\exp(-X) + X \exp(-rX) - 1 = \frac{I_0}{S_0} \quad (3.15)$$

Posons $H(X) = \exp(-X) + X \exp(-rX) - 1$

- En outre, en employant les expressions (2.12) et (2.14) :
* De (2.12), nous avons :

$$S_0\nu_1 = \frac{CR'(tp)}{1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp\left(-\frac{\tau}{\nu_1}CR(tp)\right) \left(1 + \frac{\tau}{\nu_1}CR(tp)\right)}$$

On peut écrire cette expression de la manière suivante :

$$S_0\nu_1 = \frac{CR'(tp)}{1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp\left(-\frac{\tau}{\nu_1}CR_\infty \frac{CR(tp)}{CR_\infty}\right) \left(1 + \frac{\tau}{\nu_1}CR_\infty \frac{CR(tp)}{CR_\infty}\right)}$$

$$S_0\nu_1 = \frac{CR'(tp)}{1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp(-rX)(1 + rX)}$$

Donc :

$$(S_0\nu_1) \times \left[1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp(-rX)(1 + rX)\right] = CR'(tp) \quad (3.16)$$

* D'autre part, d'après (2.14) on a :

$$\nu_1 + \nu_2 = (S_0\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(tp)\right) \iff \nu = (S_0\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(tp)\right)$$

Il est possible d'écrire cette expression de cette façon :

$$\nu = (S_0\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR_\infty \frac{CR(tp)}{CR_\infty}\right) \iff \boxed{\nu = (S_0\tau) \exp(-rX)} \quad (3.17)$$

Nous avons $X = c\frac{\tau}{\nu_1}$ multiplions les deux côtés par $(S_0\nu_1)$, on obtient :

$$\boxed{X \times (S_0\nu_1) = c(S_0\tau)} \quad (3.18)$$

▷ Il est évident que pour obtenir la valeur de $\frac{I_0}{S_0}$, $S_0\nu_1$, $S_0\tau$, ν utilisant (3.15), (3.16), (3.18), (3.17) respectivement, il est nécessaire de calculer d'abord la valeur de X . Ainsi, l'objectif dans ce qui suit est de résoudre une certaine équation en X , à déterminer plus loin.

▷ Cependant, avant de résoudre cette équation, nous devons d'abord étudier la fonction $H(X)$

Lemme 3.1 [11]

Soit la fonction $H(X) = \exp(-X) + X \exp(-rX) - 1$, avec $0 < r < 1$

1er cas : si $r \geq \frac{1}{2}$ alors : $\forall X > 0, H(X) < 0$.

2ème cas : si $0 < r < \frac{1}{2}$ alors $\exists! X(r) > 0$ solution de l'équation $H(x) = 0$. De plus, $\exists X_{max} \in (0, X(r))$ avec $H(x)$ est strictement croissante sur $(0, X_{max})$ et strictement décroissante sur $(X_{max}, +\infty)$.

D'autre part,

$$\begin{cases} H(X) > 0 & \text{si } 0 < X < X(r) \\ H(X) < 0 & \text{si } X(r) < X < +\infty \end{cases}$$

Preuve 3.2 D'abord : $H(0) = 0$, $\lim_{X \rightarrow +\infty} H(X) = -1$

$$\begin{aligned} H'(X) &= -\exp(-X) + \exp(-rX) - rX \exp(-rX) \\ &= \exp(-rX)(1 - rX - \exp(-(1-r)X)) \end{aligned}$$

Posons : $f(X) = 1 - rX - \exp(-(1-r)X)$

* **Étude du signe de la fonction $f(X)$:**

Nous avons : $f(0) = 0$, $\lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = -\infty$

$$f'(X) = -r + (1-r) \exp(-(1-r)X)$$

* **Signe de $f'(X)$:**

Posons : $g(X) = -r + (1-r) \exp(-(1-r)X)$

$$g(0) = 1 - 2r, \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} g(X) = -r$$

$g'(X) = -(1-r)^2 \exp(-(1-r)X)$, sachant que $r < 1$ alors $g'(X) < 0$, ce qui donne que la fonction $g(X)$ est strictement décroissante.

1. Si $(1 - 2r) \leq 0$: $g(X) < 0, \forall X > 0$, cela correspond à $f'(X) < 0, \forall X > 0$, ce qui implique que la fonction $f(X)$ est strictement décroissante et puisqu'on a $f(0) = 0$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = -\infty$, alors :

$f(X) < 0, \forall X > 0 \implies H'(X) < 0, \forall X > 0$ donc $H(X)$ est strictement décroissante $\forall X > 0$, vu que $H(0) = 0$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} H(X) = -1$, alors : $H(X) < 0, \forall X > 0$.

▷ Par conséquent, si $r \geq \frac{1}{2}$ alors $H(X) < 0, \forall X > 0$.

2. Si $(1 - 2r) > 0 : \exists! X > 0$ notons par X' tel que $g(X') = 0$.

$$g(X) = 0 \iff -r + (1 - r) \exp(-(1 - r)X) = 0$$

$$\exp(-(1 - r)X) = \frac{r}{1-r} \implies (1 - r)X = \ln\left(\frac{1-r}{r}\right)$$

$$X = \frac{1}{1-r} \ln\left(\frac{1}{r} - 1\right) := X' > 0$$

Alors :

$$\begin{cases} g(X) = f'(X) > 0, & \forall X \in (0, X') \\ g(X) = f'(X) < 0, & \forall X \in (X', +\infty) \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} f(X) \text{ est strictement croissante sur } (0, X') \\ f(X) \text{ est strictement décroissante sur } (X', +\infty) \end{cases}$$

Comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = -\infty$, donc $\exists! X_{max} > 0$ ainsi

$f(X_{max}) = 0$, ce qui donne que :

$f(X)$ est strictement positive $\forall X \in (0, X_{max})$ et elle est strictement négative $\forall X \in (X_{max}, +\infty)$, cela correspond à :

$$\begin{cases} H'(X) > 0, & \forall X \in (0, X_{max}) \\ H'(X) < 0, & \forall X \in (X_{max}, +\infty) \end{cases}$$

de plus : $H'(X_{max}) = 0$, alors : $H(X)$ est strictement croissante sur $(0, X_{max})$ et elle est strictement décroissante sur $(X_{max}, +\infty)$,

en outre $H(X_{max}) > 0$.

Vu que, $\lim_{X \rightarrow +\infty} H(X) = -1$ alors $H(X) = 0$ admet une unique solution notons par $X(r) > 0$ tel que $X(r) \in (X_{max}, +\infty)$.

De plus :

$$\begin{cases} H(X) > 0, & \forall 0 < X < X(r) \\ H(X) < 0, & \forall X > X(r) \end{cases}$$

□

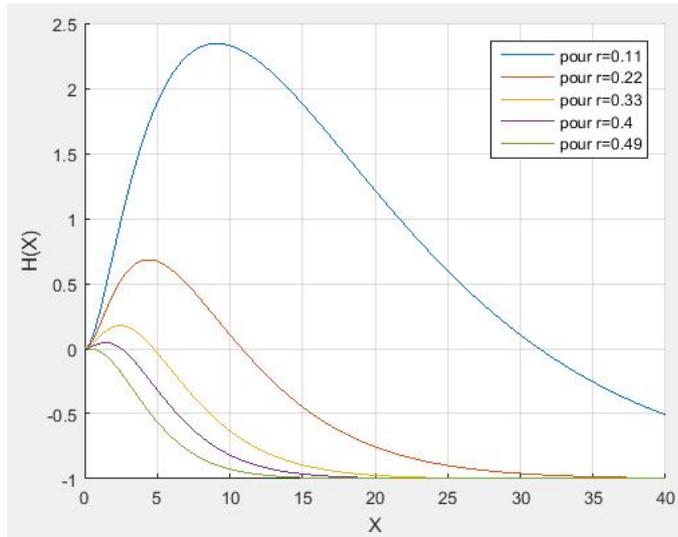


Figure 3.1 Graphe de $H(X)$ pour $r = 0.11$, $r = 0.22$,
 $r = 0.33$, $r = 0.4$, $r = 0.49$

Remarque 3.1 D'après l'étude de la fonction $H(X)$, il s'avère ;

1. Pour avoir la compatibilité entre les données épidémiologiques et la solution du modèle il faut que $r \in (0, \frac{1}{2})$ doit être vérifiée (voir [19]).
2. Puisque $X(r) > 0$ est l'unique solution pour l'équation $H(X) = 0$, nous concluons que X doit vérifier la condition :

$$0 < X < X(r)$$

Passons maintenant à la formulation de l'équation indépendante impliquant le point tournant "tp" et ce pour calculer l'inconnu $X = c \frac{\tau}{\nu_1}$.

3.3.2 Équation du point tournant

En utilisant le modèle (3.1), on fait la somme entre la première et la deuxième équation :

$$\begin{aligned} S'(t) + I'(t) &= -\nu I(t) \\ S(t) - S_0 + I(t) - I_0 &= -\nu \int_0^t I(y) dy \end{aligned}$$

– On sait que : $CR(t) = \nu_1 \int_0^t I(y) dy \iff \frac{CR(t)}{\nu_1} = \int_0^t I(y) dy$
donc, nous aurons :

$$S(t) + I(t) + \frac{\nu}{\nu_1} CR(t) = S_0 + I_0, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.19)$$

– Sachant que $CR'(t) = \nu_1 I(t)$, multiplions l'équation (3.19) par $\nu_1 > 0$:

$$\nu_1 \left[S(t) + I(t) + \frac{\nu}{\nu_1} CR(t) \right] = \nu_1 [S_0 + I_0]$$

$$\nu_1 I(t) + \nu_1 \left[S(t) + \frac{\nu}{\nu_1} CR(t) \right] = \nu_1 [S_0 + I_0]$$

$$\nu_1 I(t) = \nu_1 \left[S_0 + I_0 - S(t) - \frac{\nu}{\nu_1} CR(t) \right], \quad \forall t \geq 0$$

alors :

$$CR'(t) = \nu_1 \left[S_0 + I_0 - S(t) - \frac{\nu}{\nu_1} CR(t) \right], \quad \forall t \geq 0 \quad (3.20)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\tau S(t) I(t) \implies S(t) = S_0 \exp(-\tau \int_0^t I(y) dy) \\ S(t) &= S_0 \exp(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(t)) \end{aligned}$$

remplaçons l'expression de $S(t)$ dans (3.20), on obtient :

$$CR'(t) = \nu_1 \left[S_0 + I_0 - S_0 \exp\left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(t)\right) - \frac{\nu}{\nu_1} CR(t) \right], \quad \forall t \geq 0$$

$$CR'(t) = S_0 \nu_1 \left[1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp\left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(t)\right) - \frac{\nu}{S_0 \nu_1} CR(t) \right], \quad \forall t \geq 0 \quad (3.21)$$

Remarque 3.2 [11]

Puisque $CR'(t) = \nu_1 I(t) > 0$, cela signifie que :

$S_0 \nu_1 \left[1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp\left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(t)\right) - \frac{\nu}{S_0 \nu_1} CR(t) \right] > 0, \forall t \geq 0$,
de plus la fonction $t \rightarrow CR(t)$ est strictement croissante sur $(0, +\infty)$. Ainsi, nous avons :

$$\forall z \in [0, CR_\infty), 1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp\left(-\frac{\tau}{\nu_1} z\right) - \frac{\nu}{S_0 \nu_1} z > 0.$$

▷ Intégrons l'équation (3.21) de 0 à tp :

$$\int_0^{tp} CR'(t) dt = \int_0^{tp} S_0 \nu_1 \left[1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp\left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(t)\right) - \frac{\nu}{S_0 \nu_1} CR(t) \right] dt$$

$$\int_0^{tp} \frac{CR'(t)}{1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp\left(-\frac{\tau}{\nu_1} CR(t)\right) - \frac{\nu}{S_0 \nu_1} CR(t)} dt = (S_0 \nu_1) tp$$

– Faisons le changement de variable suivant :

Posons $\alpha = CR(t)$, donc : $d\alpha = CR'(t) dt$, de plus :

Pour $t = 0$: $\alpha = CR(0) = 0$.

Pour $t = tp$: $\alpha = CR(tp)$.

alors, nous aurons :

$$\int_0^{CR(tp)} \frac{1}{1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp\left(-\frac{\tau}{\nu_1} \alpha\right) - \frac{\nu}{S_0 \nu_1} \alpha} d\alpha = (S_0 \nu_1) tp$$

– Nous avons : $r = \frac{CR(tp)}{CR_\infty} \iff CR(tp) = CR_\infty \cdot r$,
sachant que $c = CR_\infty$ alors $CR(tp) = c \cdot r$

- D'autre part, du moment que $CR(tp) = c.r$ et lorsqu'on a posé $\alpha = CR(t)$, alors α aura la même forme, à savoir : $\alpha = c.\sigma$ (c étant une constante invariable). Ainsi, c'est σ qui va varier de 0 à r quand t varie de 0 à tp .

Donc remplaçons $\alpha = c.\sigma$ avec $d\alpha = cd\sigma$:

$$\int_0^r \frac{c}{1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp\left(-\frac{\tau c}{\nu_1}\sigma\right) - \frac{\nu c}{S_0\nu_1}\sigma} d\sigma = (S_0\nu_1)tp$$

Divisons par $c > 0$:

$$\int_0^r \frac{1}{1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp\left(-\frac{\tau c}{\nu_1}\sigma\right) - \frac{\nu c}{S_0\nu_1}\sigma} d\sigma = \frac{(S_0\nu_1)tp}{c}$$

- Vu qu'on a $X = \frac{c\tau}{\nu_1}$, alors :

$$\int_0^r \frac{1}{1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp(-X\sigma) - \frac{\nu}{S_0\tau}X\sigma} d\sigma = \frac{(S_0\nu_1)tp}{c}$$

- Utilisant (3.16), on obtient :

$$\int_0^r \frac{1}{1 + \frac{I_0}{S_0} - e^{-X\sigma} - \frac{\nu}{S_0\tau}X\sigma} d\sigma = \frac{CR'(tp)}{1 + \frac{I_0}{S_0} - e^{-rX}(1 + rX)} \frac{tp}{c}$$

Ce qui donne :

$$\int_0^r \frac{1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp(-rX)(1 + rX)}{1 + \frac{I_0}{S_0} - \exp(-X\sigma) - \frac{\nu}{S_0\tau}X\sigma} d\sigma = \frac{CR'(tp)tp}{c}$$

- D'autre part, d'après (3.15) et (3.17), nous aurons :

$$\int_0^r \frac{e^{-X} + Xe^{-rX} - e^{-rX}(1 + rX)}{e^{-X} + Xe^{-rX} - e^{-\sigma X} - \sigma Xe^{-rX}} d\sigma = \frac{CR'(tp)tp}{c}$$

• Par conséquent, l'équation du point tournant utilisée pour calculer l'inconnue X est la suivante :

$$T(X, r) = \frac{CR'(tp)tp}{c} \quad (3.22)$$

Avec : $\frac{CR'(tp)tp}{c}$ donné, $0 < X < X(r)$, et

$$T(X, r) = \int_0^r \frac{e^{-X} + Xe^{-rX} - e^{-rX}(1 + rX)}{e^{-X} + Xe^{-rX} - e^{-\sigma X} - \sigma X e^{-rX}} d\sigma$$

Posons :

$$\begin{aligned} J(X, r) &= e^{-X} + Xe^{-rX} - e^{-rX}(1 + rX) \\ J(X, r, \sigma) &= e^{-X} + Xe^{-rX} - e^{-\sigma X} - \sigma X e^{-rX}. \end{aligned}$$

Étude de l'équation du point tournant :

Lemme 3.2 [11]

Si $r \in (0, \frac{1}{2})$ et $X \in (0, X(r))$, alors :

$$0 < J(X, r, 0) \leq J(X, r, \sigma) \leq J(X, r, r), \quad \forall \sigma \in [0, r].$$

Preuve 3.3

Pour $r \in (0, \frac{1}{2})$ et $X \in (0, X(r))$, nous avons :

$$J(X, r, \sigma) = \exp(-X) + X \exp(-rX) - \exp(-\sigma X) - X \exp(-rX) \sigma$$

On considère :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(X, r, \sigma)}{\partial \sigma} &= X \exp(-\sigma X) - X \exp(-rX) \\ &= X(\exp(-\sigma X) - \exp(-rX)) \end{aligned}$$

Sachant que $0 \leq \sigma \leq r$, $X \in (0, X(r))$ alors :

$$\exp(-\sigma X) \geq \exp(-rX).$$

Ce qui donne $\frac{\partial J(X, r, \sigma)}{\partial \sigma} \geq 0, \forall \sigma \in [0, r]$, donc la fonction $J(X, r, \sigma)$ est croissante par rapport à σ . Alors :

$$J(X, r, 0) \leq J(X, r, \sigma) \leq J(X, r, r)$$

* Remarquons que :

$$J(X, r, 0) = \exp(-X) + X \exp(-rX) - 1 = H(X)$$

Pour $r \in (0, \frac{1}{2})$, on a $H(X) > 0, \forall X \in (0, X(r))$.

Donc :

Si $r \in (0, \frac{1}{2})$ et $X \in (0, X(r))$:

$$0 < J(X, r, 0) \leq J(X, r, \sigma) \leq J(X, r, r), \quad \forall \sigma \in [0, r] \quad \square$$

Soit :

$$\begin{aligned} T(X, r) &= \int_0^r \frac{J(X, r)}{J(X, r, \sigma)} d\sigma \\ &= \int_0^r \frac{e^{-X} + X e^{-rX} - e^{-rX}(1 + rX)}{e^{-X} + X e^{-rX} - e^{-X\sigma} - X e^{-rX\sigma}} d\sigma \end{aligned}$$

La fonction $X \mapsto T(X, r)$ est bien définie sur l'intervalle $(0, X(r))$.

Lemme 3.3 [11]

1. $\lim_{X \rightarrow X(r)} T(X, r) = +\infty$.
2. $\lim_{X \rightarrow 0} T(X, r) = \frac{r-1}{2} \ln(1 - 2r)$.

Preuve 3.4

1. Montrons que $\lim_{X \rightarrow X(r)} \int_0^r \frac{J(X, r)}{J(X, r, \sigma)} d\sigma = +\infty$

* Calculons d'abord $\lim_{X \rightarrow X(r)} \frac{J(X, r)}{J(X, r, \sigma)}$:

◇ Puisqu'on a la continuité au point $X = X(r)$, alors :

$$J(X(r), r) = e^{-X(r)} + X(r)e^{-rX(r)} - e^{-rX(r)}(1 + rX(r)).$$

Comme $X(r)$ est l'unique solution de l'équation $H(X) = 0$ i.e : $e^{-X(r)} + X(r)e^{-rX(r)} - 1 = 0$, donc :
 $J(X(r), r) = 1 - e^{-rX(r)}(1 + rX(r))$

◇ Posons maintenant :

$$p(x, r) = 1 - e^{-rx}(1 + rx), \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

$$\partial_x p(x, r) = r^2 x e^{-rx} > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty) \text{ et } r \in (0, \frac{1}{2})$$

Ce qui donne que $p(x, r)$ est strictement croissante alors : $p(0, r) < p(x, r)$, sachant que $p(0, r) = 0$, donc :

$p(x, r) > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty) \text{ et } r \in (0, \frac{1}{2})$. Par conséquent,

$$\forall r \in (0, \frac{1}{2}), \quad J(X(r), r) = 1 - e^{-rX(r)}(1 + rX(r)) > 0$$

◇ D'autre part

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{J(X(r), r, \sigma)}{\sigma} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\sigma X(r)} - X(r)e^{-rX(r)}\sigma}{\sigma} \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-X(r)\sigma}}{\sigma} - X(r)e^{-rX(r)} \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} -\frac{e^{-X(r)\sigma} - 1}{\sigma} - X(r)e^{-rX(r)} \\ &= X(r) - X(r)e^{-rX(r)} = X(r)(1 - e^{-rX(r)}) \end{aligned}$$

Dès que $X(r) > 0$ et $0 < r < \frac{1}{2}$, alors :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{J(X(r), r, \sigma)}{\sigma} = X(r)(1 - e^{-rX(r)}) > 0.$$

◇ Posons $L = X(r)(1 - e^{-rX(r)})$. Par définition :

$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon :$

$$0 < \sigma < A_\varepsilon \implies \left| \frac{J(X(r), r, \sigma)}{\sigma} - L \right| < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < \frac{J(X(r), r, \sigma)}{\sigma} < L + \varepsilon$$

$$(L - \varepsilon)\sigma < J(X(r), r, \sigma) < (L + \varepsilon)\sigma \quad (3.23)$$

◇ En outre,

$$\int_0^r \frac{J(X(r), r)}{J(X(r), r, \sigma)} d\sigma \geq \int_0^{\min(A_\varepsilon, r)} \frac{J(X(r), r)}{J(X(r), r, \sigma)} d\sigma$$

D'après (3.23), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{J(X(r), r)}{J(X(r), r, \sigma)} d\sigma &\geq \int_0^{\min(A_\varepsilon, r)} \frac{J(X(r), r)}{(L + \varepsilon)\sigma} d\sigma = \frac{J(X(r), r)}{(L + \varepsilon)} \int_0^{\min(A_\varepsilon, r)} \frac{1}{\sigma} d\sigma \\ &= \frac{J(X(r), r)}{(L + \varepsilon)} \left([\ln |\sigma|]_0^{\min(A_\varepsilon, r)} \right) = +\infty \end{aligned}$$

Alors :

$$\int_0^r \frac{J(X(r), r)}{J(X(r), r, \sigma)} d\sigma = +\infty$$

A l'aide du Lemme de Fatou, nous aurons :

$$\int_0^r \liminf_{X \rightarrow X(r)} \frac{J(X, r)}{J(X, r, \sigma)} d\sigma \leq \liminf_{X \rightarrow X(r)} \int_0^r \frac{J(X, r)}{J(X, r, \sigma)} d\sigma = \liminf_{X \rightarrow X(r)} T(X, r)$$

Ce qui donne :

$$\liminf_{X \rightarrow X(r)} T(X, r) = +\infty, \text{ alors :}$$

$$\lim_{X \rightarrow X(r)} T(X, r) = +\infty$$

2. Montrons que $\lim_{X \rightarrow 0} \int_0^r \frac{J(X, r)}{J(X, r, \sigma)} d\sigma = \frac{r-1}{2} \ln(1 - 2r)$.

* D'abord, $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{J(X, r)}{J(X, r, \sigma)} = \frac{0}{0}$ est une forme indéterminée, donc on utilise le développement de Taylor au voisinage de $X = 0$.

- Le développement de Taylor de la fonction $J(X, r) = e^{-X} + Xe^{-rX} - e^{-rX} - rXe^{-rX}$ est donné par :

$$J(X, r) = \frac{X^2}{2} - rX^2 + \frac{r^2X^2}{2} + \theta(X^3)$$

$$J(X, r) = \frac{(1-2r+r^2)X^2}{2} + \theta(X^3)$$

$$J(X, r) = \frac{(1-r)^2X^2}{2} + \theta(X^3)$$

- Le développement de Taylor de la fonction $J(X, r, \sigma) = e^{-X} + Xe^{-rX} - e^{-\sigma X} - \sigma Xe^{-rX}$ est donné comme suit :

$$J(X, r, \sigma) = \frac{X^2}{2} - rX^2 - \frac{\sigma^2X^2}{2} + r\sigma X^2 + \theta(X^3)$$

$$J(X, r, \sigma) = \frac{(1-2r-\sigma^2+2r\sigma)X^2}{2} + \theta(X^3)$$

Donc, on obtient :

$$\frac{J(X, r)}{J(X, r, \sigma)} = \frac{\frac{(1-r)^2X^2}{2} + \theta(X^3)}{\frac{(1-2r-\sigma^2+2r\sigma)X^2}{2} + \theta(X^3)}$$

Par simplification, nous aurons :

$$\frac{J(X, r)}{J(X, r, \sigma)} = \frac{(1-r)^2 + \theta(X)}{(1-2r-\sigma^2+2r\sigma) + \theta(X)}$$

tel que $\theta(X) \rightarrow 0$, quand $X \rightarrow 0$.

- La fonction $\frac{J(X, r)}{J(X, r, \sigma)}$ converge uniformément vers la fonction $Q(\sigma) = \frac{(1-r)^2}{(1-2r-\sigma^2+2r\sigma)}$ quand $X \rightarrow 0$, de plus :

$Q(\sigma)$ est bien définie sur $[0, r]$.

Puisque on a la convergence uniforme, donc :

$$\lim_{X \rightarrow 0} \int_0^r \frac{J(X,r)}{J(X,r,\sigma)} d\sigma = \int_0^r \lim_{X \rightarrow 0} \frac{J(X,r)}{J(X,r,\sigma)} d\sigma = \int_0^r \frac{(1-r)^2}{(1-2r-\sigma^2+2r\sigma)} d\sigma$$

$$\text{Posons : } I = \int_0^r \frac{(1-r)^2}{(1-2r-\sigma^2+2r\sigma)} d\sigma$$

Calcul de l'intégrale I :

▷ D'abord on a :

$$1 - 2r - \sigma^2 + 2r\sigma = (\alpha\sigma + \beta)(\sigma - 1)$$

Par identification : $\alpha = -1$, $\beta - \alpha = 2r$, $\beta = 2r - 1$,
ce qui donne :

$$1 - 2r - \sigma^2 + 2r\sigma = (2r - 1 - \sigma)(\sigma - 1)$$

Alors :

$$\frac{(1-r)^2}{(1-2r-\sigma^2+2r\sigma)} = \frac{(1-r)^2}{(2r-1-\sigma)(\sigma-1)}$$

▷ En utilisant la décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2r-1-\sigma)(\sigma-1)} &= \frac{a}{(2r-1-\sigma)} + \frac{b}{(\sigma-1)} \\ &= \frac{(a-b)\sigma + b(2r-1) - a}{(2r-1-\sigma)(\sigma-1)} \end{aligned}$$

par identification nous avons :

$$a - b = 0,$$

$$b(2r-1) - a = 1$$

donc : $a = b = \frac{1}{2(r-1)}$, ce qui donne :

$$\frac{1}{(2r-1-\sigma)(\sigma-1)} = \frac{1}{2(r-1)(2r-1-\sigma)} + \frac{1}{2(r-1)(\sigma-1)}$$

alors :

$$\begin{aligned}
I &= \frac{(1-r)^2}{2(r-1)} \left(\int_0^r \frac{1}{2r-1-\sigma} d\sigma + \int_0^r \frac{1}{\sigma-1} d\sigma \right) \\
&= \frac{(1-r)^2}{2(r-1)} \left(- \int_0^r \frac{1}{\sigma+1-2r} d\sigma - \int_0^r \frac{1}{1-\sigma} d\sigma \right) \\
&= \frac{(1-r)^2}{2(r-1)} \left(-[\ln(\sigma+1-2r)]_0^r + [\ln(1-\sigma)]_0^r \right) \\
&= \frac{(1-r)^2}{2(r-1)} (\ln(1-2r) - \ln(1-r) + \ln(1-r)) \\
&= \frac{(1-r)^2}{2(r-1)} \ln(1-2r) = \frac{(r-1)}{2} \ln(1-2r)
\end{aligned}$$

On peut l'écrire aussi comme suit :

$$I = \frac{(1-r)}{2} \ln \left(\frac{1}{1-2r} \right)$$

Par conséquent :

$$\lim_{X \rightarrow 0} T(X, r) = \frac{(r-1)}{2} \ln(1-2r)$$

Graphe de la fonction $T(X, r)$:

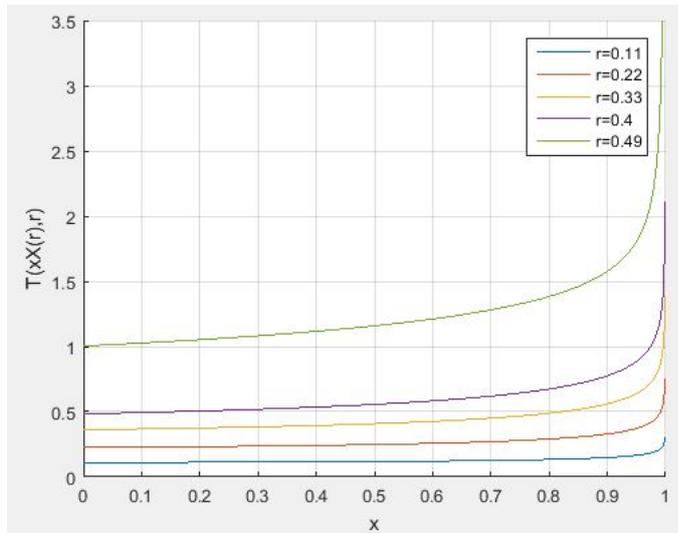


Figure 3.2 Graphes de $T(xX(r), r)$ pour plusieurs valeurs de r , avec $x \in (0, 1)$

- D'après ces graphiques, il est évident que pour chaque valeur de r , $T(X, r)$ est toujours en croissance.
- Par ailleurs, X doit satisfaire l'équation (3.22) avec le deuxième membre $\frac{CR'(tp).tp}{c}$ donné, ce qui signifie que X est le point d'intersection entre $T(X, r)$ et $\frac{CR'(tp).tp}{c}$. Étant donné que $T(X, r)$ est croissante $\forall r \in (0, \frac{1}{2})$ (numériquement), l'équation (3.22) admet **une seule solution** X , tel que $0 < X < X(r)$.
- Il est important de noter que la fonction $T(X, r)$ admet un minimum, et d'après le lemme (3.3), ce minimum est donné par : $\frac{(r-1)}{2} \ln(1-2r)$. Donc, afin d'obtenir l'unique solution X , il est nécessaire de satisfaire à cette condition :

$$\frac{CR'(tp).tp}{c} > \frac{(r-1)}{2} \ln(1-2r)$$

* Cette dernière relation constitue une nouvelle condition qui lie les données épidémiques : tp , $CR(tp)$, $CR'(tp)$, CR_∞ .

3.3.3 Présentation de la méthode

La fonction de sortie du modèle (3.1) définie par $CR(t)$, $\forall t \geq 0$ pour l'ensemble de paramètres $V = (S_0, I_0, \tau, \nu_1, \nu)$ est suffisante pour déterminer la valeur des combinaisons $[\frac{I_0}{S_0}, S_0\tau, S_0\nu_1, \nu]$ (d'après la proposition (3.1)), en utilisant des quantités essentielles qui sont connus, à savoir : tp , $CR(tp)$, $CR'(tp)$, CR_∞ , où plus $c = CR_\infty$ et $r = \frac{CR(tp)}{CR_\infty}$. Selon les études précédentes, la méthode suivante a été utilisée pour calculer les combinaisons : [11]

- **1ère étape :** Résoudre l'équation :
 $e^{-X} + Xe^{-rX} - 1 = 0$, afin de trouver l'unique solution
 $X(r) > 0$.

- **2ème étape :** L'équation du point tournant suivante est résolue (numériquement) pour obtenir la valeur de $X = c \frac{\tau}{\nu_1}$ de manière à ce que $0 < X < X(r)$:

$$\int_0^r \frac{e^{-X} + Xe^{-rX} - e^{-rX}(1 + rX)}{e^{-X} + Xe^{-rX} - e^{-X\sigma} - Xe^{-rX}\sigma} = \frac{CR'(tp).tp}{c}$$

- **3ème étape :**

1. Après avoir calculé la valeur de X , on peut obtenir :

$$\boxed{\frac{\tau}{\nu_1} = \frac{X}{c}}$$

2. En utilisant l'équation (3.15), nous obtenons la valeur de $\frac{I_0}{S_0}$ telle que : $\boxed{\frac{I_0}{S_0} = e^{-X} + Xe^{-rX} - 1}$

3. D'après (3.16), nous pouvons calculer la valeur de $(S_0\nu_1)$ où : $\boxed{S_0\nu_1 = \frac{CR'(tp)}{1 + \frac{I_0}{S_0} - e^{-rX}(1+rX)}}$

4. Selon l'équation (3.18), la valeur de $(S_0\tau)$ est obtenue telle que : $\boxed{S_0\tau = \frac{X}{c} \times (S_0\nu_1)}$

5. Par (3.17), nous avons : $\boxed{\nu = (S_0\tau)e^{-rX}}$

6. En outre, nous remarquons que la valeur de $\frac{I_0}{S_0}$ et $S_0\nu_1$, permettent d'obtenir la valeur de $(\nu_1 I_0)$ comme suit : $\boxed{\nu_1 I_0 = \left(\frac{I_0}{S_0}\right) \times S_0\nu_1}$

3.4 Remarques

D'après les remarques données dans [11], nous avons :

1. $\nu = \nu_1 + \nu_2$, ce qui signifie $\nu > \nu_1$, et l'on a les évaluations suivantes :

$$(a) \frac{\nu_1}{\nu} < 1 \implies \frac{S_0\nu_1}{\nu} < S_0$$

$$(b) \frac{\nu_1}{\nu} < 1 \implies \frac{I_0\nu_1}{\nu} < I_0$$

$$(c) \frac{\nu}{\nu_1} > 1 \implies \frac{\tau}{\nu_1}\nu > \tau$$

2. Si la valeur initiale des individus susceptibles S_0 est donnée, il est possible d'obtenir tous les paramètres $(I_0, \tau, \nu_1, \nu_2)$, ainsi que la taille finale de l'épidémie qui est donnée par :

$$C(\infty) = CR_\infty + CU_\infty \quad (3.24)$$

telle que :

* $C(\infty)$: le nombre cumulatif de cas déclarés et non déclarés à la fin de l'épidémie

* CU_∞ : nombre cumulatif de cas non déclarés à la fin de l'épidémie, représenté par :

$$CU_\infty = \nu_2 \int_0^{+\infty} I(y) dy$$

Sachant que : $CR_\infty = \nu_1 \int_0^{+\infty} I(y) dy$, donc :

$$CU_\infty = \frac{\nu_2}{\nu_1} CR_\infty.$$

(3.24) devient :

$$C(\infty) = CR_\infty + \frac{\nu_2}{\nu_1} CR_\infty = \frac{(\nu_1 + \nu_2)}{\nu_1} CR_\infty = \frac{\nu}{\nu_1} CR_\infty$$

Donc :
$$\boxed{C(\infty) = \nu \frac{S_0}{S_0 \nu_1} CR_\infty}$$

3. Faisons l'hypothèse que la valeur de S_0 est inconnue. Dans cette situation, on varie la valeur de S_0 de manière à ce que la sortie du modèle soit compatible avec les données épidémiques, telle que S_0 satisfait :

$$\frac{S_0 \nu_1}{\nu} < S_0 \leq N - I_0 \implies \frac{S_0 \nu_1}{\nu} < S_0 \leq N - S_0 \frac{I_0}{S_0}$$

$$\boxed{\frac{S_0 \nu_1}{\nu} < S_0 \leq \frac{N}{1 + \frac{I_0}{S_0}}}$$

avec $N = S_0 + I_0$, représente le nombre de personnes impliquées dans l'épidémie.

4. La formule suivante permet de déterminer le nombre d'individus susceptibles à la fin de l'épidémie :

$$S(\infty) = S_0 \left(1 + \frac{I_0}{S_0} - \nu \frac{CR_\infty}{S_0 \nu_1} \right)$$

3.5 Application

Nous utilisons dans cette partie la méthode examinée précédemment pour obtenir les paramètres (selon [11]). Concernant les données épidémiques de l'épidémie de grippe de Hong Kong à New York (1968-1969) (citées dans [19]), $CR_\infty = 1080$, $tp = 6.15$ semaines, $CR(tp) = 500$, $CR'(tp) = 190$ et la population totale de la ville de New York en 1968 est de 7,900,000.

1. En résolvant l'équation $e^{-X} + X e^{-\frac{500}{1080}X} - 1 = 0$, on obtient la solution $X(r) = 0,8948$, d'après le graphe suivant :

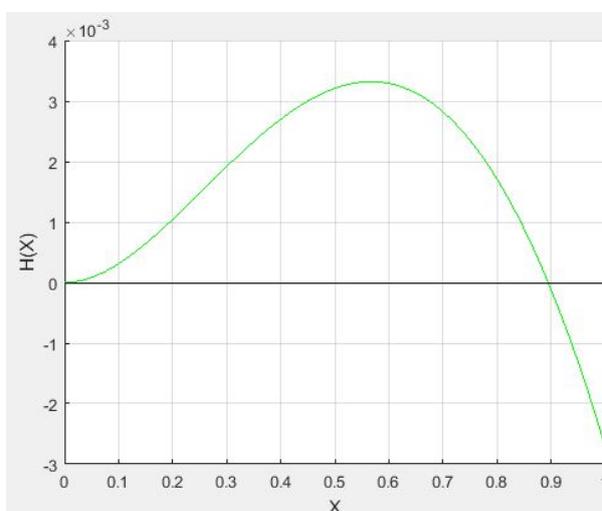


Figure 3.3 Graphe de $H(X) = e^{-X} + Xe^{-\frac{500}{1080}X} - 1$

2. Numériquement, l'équation

$$\int_0^{\frac{500}{1080}} \frac{e^{-X} + Xe^{-\frac{500}{1080}X} - e^{-\frac{500}{1080}X}(1 + \frac{500}{1080}X)}{e^{-X} + Xe^{-\frac{500}{1080}X} - e^{-X\sigma} - Xe^{-\frac{500}{1080}X}\sigma} d\sigma = \frac{190 \times 6.15}{1080}$$

admet comme solution $X=0.7869$, selon le graphe ci-dessous :

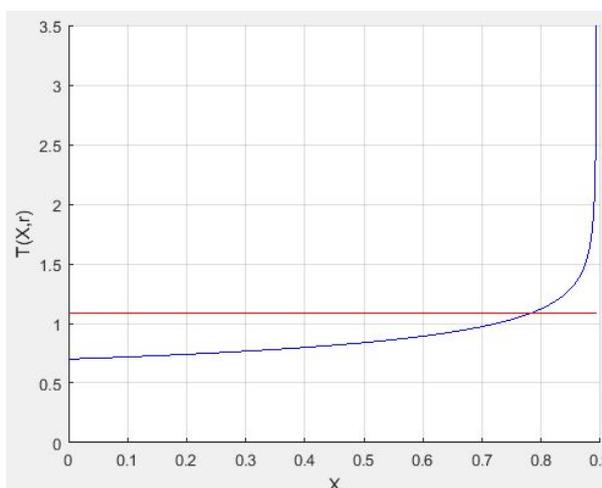


Figure 3.4 L'intersection de $T(X, r)$ "bleu" et $\frac{CR'(tp).tp}{CR_\infty}$ "rouge"

3. On peut donc obtenir les valeurs des combinaisons suivantes :

Combinaisons	valeur estimée
τ/ν_1	7.3×10^{-4}
I_0/S_0	0.002
$\nu_1 S_0$	3509.1
τS_0	2.56
$\nu_1 I_0$	6.65
ν	1.78

4. La valeur de S_0 est ajustée de façon à ce que la sortie du modèle soit compatible avec les données épidémiques, tel que : $1971.4 < S_0 \leq 7,885,047$. Les valeurs des paramètres avec différentes valeurs de S_0 sont présentées dans le tableau suivant (selon [11]) :

Paramètres	valeur estimée 1	valeur estimée 2	valeur estimée 3
S_0	1976	4,000,000	7,885,047
I_0	3.7472	7,586	14,953
τ	1.3×10^{-3}	6.4×10^{-7}	3.2×10^{-7}
ν_1	1.78	0.88×10^{-3}	4.5×10^{-4}
ν_2	3.1×10^{-4}	1.78	1.78

▷ D'après les graphiques ci-dessous concernant la sortie du modèle, nous pouvons tirer la conclusion que la valeur de S_0 appropriée qui correspond aux données épidémiques est $S_0 = 4,000,000$.

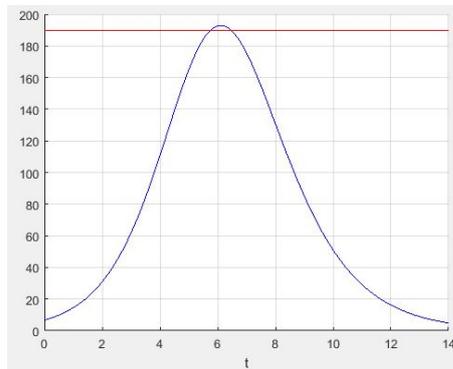


Figure 3.5 Graphe de la sortie du modèle de cas déclarés pour $S_0 = 1976$

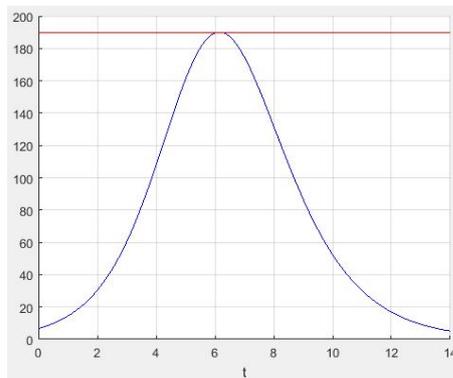


Figure 3.6 Graphe de la sortie du modèle de cas déclarés pour $S_0 = 4,000,000$

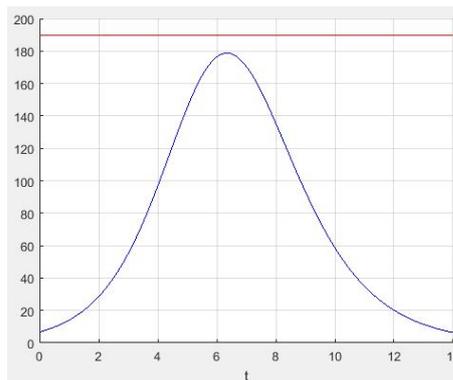


Figure 3.7 Graphe de la sortie du modèle de cas déclarés pour $S_0 = 7,885,047$

- Taux de reproduction de base est : $\mathfrak{R}_0 = \frac{\tau S_0}{\nu} = 1.44$

Chapitre 4

Un modèle prédictif de l'épidémie du COVID-19

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons la prédiction d'un modèle mathématique épidémiologique intéressant qui a été élaboré dans des recherches précédentes dont : [25], [24], [22]. Nous nous concentrons dans ce travail sur la prédiction du modèle d'épidémie de COVID-19 qui a été développé dans [23].

L'objectif consiste à prédire les futurs nouveaux cas en se basant sur les premiers données déclarées, en d'autres termes, cela signifie de poursuivre le travail sur le problème essentiel étudié dans les chapitres précédents en ce qui concerne l'identification des paramètres pour les modèles épidémiologiques.

4.2 Présentation du modèle

Ce modèle a été désigné comme le modèle **SEIRU**, qui a été présenté par les équations différentielles et les conditions

initiales suivantes :

$$\begin{cases} S'(t) = -\tau(t)S(t)[I(t) + U(t)], & S(t_0) = S_0 > 0, \\ E'(t) = \tau(t)S(t)[I(t) + U(t)] - \alpha E(t), & E(t_0) = E_0 > 0, \\ I'(t) = \alpha E(t) - \nu I(t), & I(t_0) = I_0 > 0, \\ R'(t) = \nu_1 I(t) - \eta R(t), & R(t_0) = R_0 = 0, \\ U'(t) = \nu_2 I(t) - \eta U(t), & U(t_0) = U_0 > 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

tel que :

- * $S(t)$ correspond au nombre de personnes susceptibles à l'instant t .
- * $E(t)$ est le nombre de personnes asymptomatiques non infectieuses (exposée) au moment t .
- * $I(t)$ représente le nombre d'individus asymptomatiques infectieux à l'instant t .
- * $R(t)$ est le nombre de personnes infectieuses symptomatiques déclarées à l'instant t .
- * $U(t)$ correspond au nombre de personnes infectieuses symptomatiques non déclarées au moment t .

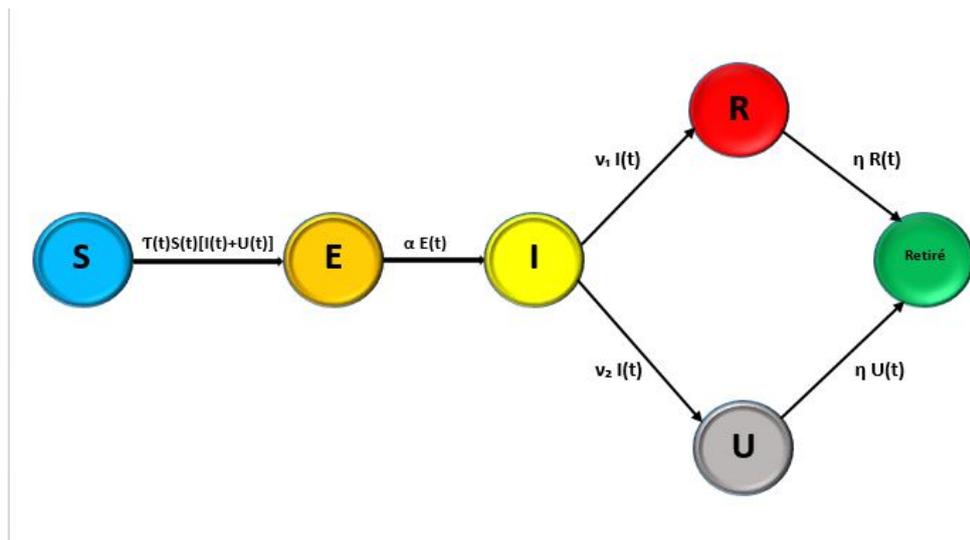


Figure 4.1 : Schéma de fonctionnement du modèle SEIRU

Paramètres du modèle :

- t_0 : Date de commencement de la pandémie.
 - S_0 : nombre initial des susceptibles.
 - E_0 : nombre initial des personnes asymptomatiques non infectieuses.
 - I_0 : nombre initial des individus asymptomatiques infectieux.
 - R_0 : nombre initial des individus symptomatiques infectieux déclarés.
 - U_0 : nombre initial des individus symptomatiques infectieux non déclarés.
 - $\tau(t)$: taux de transmission à l'instant t .
 - $\frac{1}{\alpha}$: durée moyenne de la période d'exposition non infectieuse.
 - $\frac{1}{\nu}$: période moyenne d'infectiosité des personnes infectieuses asymptomatiques.
 - $\frac{1}{\eta}$: période moyenne d'infectiosité des individus infectieux symptomatiques déclarés et non déclarés.
- * Considérons " h " comme la proportion des infections asymptomatiques qui deviennent symptomatiques déclarées.
D'autre part, " $(1 - h)$ " représente la fraction des in-

fections asymptomatiques qui deviennent symptomatiques non déclarées.

De plus, $\nu = \nu_1 + \nu_2$, avec le taux où une infection asymptomatique devient symptomatique déclarée est : $\nu_1 = h.\nu$, d'ailleurs, $\nu_2 = (1 - h).\nu$ est le taux auquel une infection asymptomatique devient symptomatique non déclarée.

◇ Les personnes infectieuses symptomatiques déclarées $R(t)$ sont supposées être isolées immédiatement et ne transmettent aucune autre infection. D'autre part, chaque infection est causée par des individus infectieux $I(t)$ ou $U(t)$.

◇ Les personnes asymptomatiques $I(t)$ peuvent aussi être évaluées comme présentant un état symptomatique de faible intensité.

* Cependant, les paramètres ainsi que " t_0 " et les conditions initiales sont indéterminés. Dans ce qui suit, le but est de les estimer en utilisant des données temporelles précises des cas infectieux symptomatiques déclarés.

* Le nombre cumulatif de cas infectieux symptomatiques déclarés au cours du temps t , représenté par :

$$CR(t) = \nu_1 \int_{t_0}^t I(\sigma) d\sigma, \quad t \geq t_0. \quad (4.2)$$

D'après ce qui a été mentionné dans [23], les épidémies de COVID-19 ont été divisées en trois étapes :

- **1ère étape** : le nombre cumulatif de cas déclarés s'accroît linéairement de jour en jour,
- **2ème étape** : il y a une augmentation exponentielle du nombre cumulatif de cas déclarés de jour en jour,
- **3ème étape** : chaque jour, il y a une diminution de cas déclarés quotidiennement.

L'approche utilisée peut être prédictive lorsque l'épidémie augmente de manière exponentielle pendant la deuxième étape. Prenons donc pour hypothèse que $CR(t)$ présente la forme particulière suivante lorsque l'épidémie est en phase de croissance exponentielle précoce :

$$CR(t) = \beta_1 e^{\beta_2 t} - \beta_3 \quad (4.3)$$

Ainsi, nous nous intéressons à estimer les paramètres et les conditions initiales du modèle (4.1) à partir de $CR(t)$ lors de la deuxième étape.

Avant d'examiner la procédure de l'estimation, nous avons :

4.3 Taux de transmission

Une fois que l'infection est transmise, des mesures gouvernementales comme l'isolement, la quarantaine et les fermetures publiques sont mises en place. Lors de la phase où le nombre cumulatif de cas déclarés augmente exponentiellement, le taux de transmission $\tau(t)$ est constant, représenté par τ_0 .

Cependant, suite à l'application des mesures gouvernementales strictes, la transmission de nouveaux cas diminue de manière exponentielle, ainsi la troisième phase commence. À cet effet, nous employons un taux de transmission $\tau(t)$ qui dépend du temps et qui diminue exponentiellement dans la troisième phase. Ainsi, d'après [23] la formule pour $\tau(t)$ apparaît comme suit :

$$\begin{cases} \tau(t) = \tau_0, & 0 \leq t \leq J, \\ \tau(t) = \tau_0 e^{-\mu(t-J)}, & t > J \end{cases} \quad (4.4)$$

Avec :

- ◇ " J " représente la première journée d'intervention publique.
- ◇ " μ " est l'intensité des interventions publiques.

4.4 Estimation des paramètres et des conditions initiales

En utilisant la méthode mentionnée dans [25] et [22].

Nous avons : $CR(t) = \beta_1 e^{\beta_2 t} - \beta_3$

1. Dans un premier temps, nous évaluons β_1 , β_2 et β_3 en utilisant les données de cas déclarés, c'est-à-dire que leurs valeurs sont obtenus en ajustant $\beta_1 e^{\beta_2 t} - \beta_3$ aux cas déclarés cumulatifs donnés dans $[t_1, t_2]$ (pendant la deuxième phase). Plus précisément, on peut également écrire la formule (4.3) de la manière suivante : $\ln(CR(t) + \beta_3) = \beta_2 t + \ln(\beta_1)$, donc nous commençons par évaluer la valeur de β_3 , puis nous employons une méthode basée sur "les moindres carrés" pour évaluer β_1 et β_2 . (voir figure 2 dans [25])

Remarque 4.1

En général, la valeur de β_3 est définie par 1, mais nous prenons en considération d'autres valeurs [23].

2. Par la suite, en se basant sur l'apport des épidémiologistes médicaux et biologistes, nous fixons les valeurs de " h ", " $\frac{1}{\nu}$ ", " $\frac{1}{\eta}$ " et " $\frac{1}{\alpha}$ ". De cette manière, nous obtenons :

$$\boxed{\nu_1 = h.\nu} \quad \text{et} \quad \boxed{\nu_2 = (1 - h).\nu}$$

3. Puisque $R(t_0) = 0$, cela signifie que $CR(t_0) = 0$. Par l'emploi de (4.3), nous obtenons :

$$CR(t_0) = 0 \iff \beta_1 e^{\beta_2 t_0} - \beta_3 = 0$$

$$\beta_2 t_0 = \ln\left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right) \implies t_0 = \frac{1}{\beta_2} \ln\left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right)$$

$$\text{donc : } \boxed{t_0 = \frac{1}{\beta_2} (\ln(\beta_3) - \ln(\beta_1))}$$

4. Grâce à (4.2) et (4.3), nous parvenons à obtenir :

$$CR'(t) = \nu_1 I(t) \iff \beta_1 \beta_2 e^{\beta_2 t} = \nu_1 I(t)$$

$$\text{d'autre part, } CR'(t_0) = \nu_1 I(t_0) = \beta_1 \beta_2 e^{\beta_2 t_0}.$$

D'après ces expressions, nous avons :

$$\frac{\nu_1 I(t)}{\nu_1 I(t_0)} = \frac{\beta_1 \beta_2 e^{\beta_2 t}}{\beta_1 \beta_2 e^{\beta_2 t_0}} \implies \frac{I(t)}{I_0} = e^{\beta_2(t-t_0)}$$

et donc :

$$\boxed{I(t) = I_0 e^{\beta_2(t-t_0)} \quad (4.5)}$$

- En outre, afin d'obtenir I_0 , nous utilisons :

$$\nu_1 I_0 = \beta_1 \beta_2 e^{\beta_2 t_0} \implies I_0 = \frac{\beta_1 \beta_2 e^{\beta_2 t_0}}{\nu_1} = \frac{\beta_1 \beta_2 e^{\beta_2 t_0}}{h.\nu}$$

Sachant que : $CR(t_0) = 0 \iff \beta_1 e^{\beta_2 t_0} = \beta_3$

donc : $\beta_2 \beta_1 e^{\beta_2 t_0} = \beta_3 \beta_2$, ce qui donne :
$$I_0 = \frac{\beta_3 \beta_2}{h \cdot \nu}$$

5. Pour estimer les paramètres du modèle, nous considérons que la variation de $S(t)$ est faible, ce qui signifie que nous négligeons la variation des susceptibles causée par l'épidémie, cela correspond parfaitement au fait que $CR(t)$ augmente de manière exponentielle. Ainsi, nous fixons S_0 comme la valeur de la population de la région des données de cas déclarées.

L'estimation de τ_0 , E_0 et U_0 reste donc à effectuer dans le système ci-dessous :

$$E'(t) = \tau_0 S_0 [I(t) + U(t)] - \alpha E(t), \quad (4.6)$$

$$I'(t) = \alpha E(t) - \nu I(t), \quad (4.7)$$

$$U'(t) = \nu_2 I(t) - \eta U(t). \quad (4.8)$$

- Par l'équation (4.7), nous avons :

$$E(t) = \frac{1}{\alpha} (I'(t) + \nu I(t))$$

Par ailleurs, par l'utilisation de l'équation (4.6), nous obtenons :

$$U(t) = \frac{1}{\tau_0 S_0} (E'(t) + \alpha E(t)) - I(t)$$

Donc, par ces expressions et d'après l'utilisation de la formule de $I(t)$ dans (4.5), nous devons avoir :

$$E(t) = E_0 \cdot e^{(\beta_2(t-t_0))} \quad (4.9)$$

et ce qui donne :

$$U(t) = U_0 \cdot e^{(\beta_2(t-t_0))} \quad (4.10)$$

- Remplaçons les expressions (4.5), (4.9) et (4.10) dans le système, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \beta_2 E_0 e^{\beta_2(t-t_0)} &= \tau_0 S_0(I_0 e^{\beta_2(t-t_0)} + U_0 e^{\beta_2(t-t_0)}) - \alpha E_0 e^{\beta_2(t-t_0)}, \\ \beta_2 I_0 e^{\beta_2(t-t_0)} &= \alpha E_0 e^{\beta_2(t-t_0)} - \nu I_0 e^{\beta_2(t-t_0)}, \\ \beta_2 U_0 e^{\beta_2(t-t_0)} &= \nu_2 I_0 e^{\beta_2(t-t_0)} - \eta U_0 e^{\beta_2(t-t_0)}. \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \beta_2 E_0 = \tau_0 S_0(I_0 + U_0) - \alpha E_0, \\ \beta_2 I_0 = \alpha E_0 - \nu I_0, \\ \beta_2 U_0 = \nu_2 I_0 - \eta U_0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Par la deuxième et la troisième équation de ce système, on peut obtenir E_0 et U_0 de la manière suivante :

$$\alpha E_0 = \beta_2 I_0 + \nu I_0 = (\beta_2 + \nu) I_0 \implies E_0 = \frac{(\beta_2 + \nu)}{\alpha} I_0$$

$$\text{En outre, } (\beta_2 + \eta) U_0 = \nu_2 I_0 \implies U_0 = \frac{\nu_2}{\beta_2 + \eta} I_0$$

- D'un autre côté, d'après la première équation du système (4.11) :

$$(\beta_2 + \alpha) E_0 = \tau_0 S_0(I_0 + U_0) \implies \tau_0 = \frac{(\beta_2 + \alpha) E_0}{S_0(I_0 + U_0)}$$

* Grâce aux formules obtenues pour I_0 , E_0 et U_0 , on obtient :

$$\tau_0 = \frac{(\beta_2 + \alpha) \frac{(\beta_2 + \nu) \beta_3 \beta_2}{\alpha \nu_1}}{S_0 \left[\frac{\beta_3 \beta_2}{\nu_1} + \frac{\nu_2}{(\beta_2 + \eta)} \cdot \frac{\beta_3 \beta_2}{\nu_1} \right]} = \frac{(\beta_2 + \alpha)(\beta_2 + \nu)}{S_0 \left[1 + \frac{\nu_2}{(\beta_2 + \eta)} \right]}$$

donc :

$$\tau_0 = \frac{(\beta_2 + \alpha)(\beta_2 + \nu)(\beta_2 + \eta)}{\alpha S_0 (\beta_2 + \eta + \nu_2)}$$

4.5 Taux de reproduction de base \mathfrak{R}_0

Afin d'obtenir le taux de reproduction de base \mathfrak{R}_0 dans cette section, nous utilisons une méthode mentionnée dans [7] en se basant sur les résultats obtenus dans [21]. "Next generation matrix" (méthode de la génération suivante), est utilisée pour calculer le \mathfrak{R}_0 .

Le système linéarisé est défini comme suit :

$$\begin{cases} E'(t) = \tau S_0(I(t) + U(t)) - \alpha E(t), \\ I'(t) = \alpha E(t) - \nu I(t), \\ U'(t) = \nu_2 I(t) - \eta U(t). \end{cases} \quad (4.12)$$

Posons : $F(t) = \begin{pmatrix} E(t) \\ I(t) \\ U(t) \end{pmatrix}$ les compartiments infectés,

donc le système (4.12) est généralement de la forme :

$$\frac{dF}{dt} = (A - B - C) F, \text{ tel que :}$$

A : matrice d'infection, B : matrice diagonale, C : matrice de transfert.

Pour le système (4.12), nous avons :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \tau S_0 & \tau S_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = B + C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & \nu & 0 \\ 0 & -\nu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\nu} & \frac{1}{\nu} & 0 \\ \frac{\nu_2}{\nu\eta} & \frac{\nu_2}{\nu\eta} & \frac{1}{\eta} \end{pmatrix}$$

$$A.D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\tau S_0}{\nu} + \frac{\tau S_0 \nu_2}{\nu\eta} & \frac{\tau S_0}{\nu} + \frac{\tau S_0 \nu_2}{\nu\eta} & \frac{\tau S_0}{\eta} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc le rayon spectral de la matrice $(A.D^{-1})$ est :

$$\rho(A.D^{-1}) = \frac{\tau S_0}{\nu} + \frac{\tau S_0 \nu_2}{\nu\eta}, \text{ alors}$$

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\tau S_0}{\nu} \left(1 + \frac{\nu_2}{\eta} \right)$$

et selon la formule de τ_0 :

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{(\beta_2 + \alpha)(\beta_2 + \nu)(\beta_2 + \eta) S_0}{\alpha S_0 (\beta_2 + \eta + \nu_2)} \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{\nu_2}{\eta} \right)$$

et par : $\nu_2 = (1 - h).\nu$, nous avons :

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{(\beta_2 + \alpha)(\beta_2 + \nu)(\beta_2 + \eta)}{\alpha\nu(\beta_2 + \eta + \nu_2)} \left(1 + \frac{(1-h)\nu}{\eta} \right)$$

◇ Une fois que les paramètres et les conditions initiales ont été estimés, il est nécessaire de comparer la sortie du modèle avec les données de cas déclarés. Cela fait appel à la simulation de : $CR(t)$, $CU(t)$ qui est le nombre cumulatif de cas infectieux symptomatiques non déclarés, donné par : $CU(t) = \nu_2 \int_{t_0}^t I(\sigma) d\sigma$, $t \geq t_0$, et pour $R(t)$ et $U(t)$, et les comparer aux données. Ainsi, il est possible de prédire les valeurs futures de l'épidémie en utilisant les données cumulatives.

4.6 Remarques

- ▷ L'intensité des interventions publiques, qui est exprimée par " μ ", est sélectionnée de manière à ce que les simulations soient compatibles avec les données cumulatives déclarées.
- ▷ Il est essentiel d'avoir des estimations valides des paramètres : " h " (la proportion des infections asymptomatiques qui devient symptomatiques déclarés), " $\frac{1}{\nu}$ " (période moyenne d'infectiosité des personnes infectieuses asymptomatiques), " $\frac{1}{\eta}$ " (période moyenne d'infectiosité des individus infectieux asymptomatiques déclarés et non déclarés) et " $\frac{1}{\alpha}$ " (durée moyenne de la période d'exposition non infectieuse) afin d'assurer la prédiction du modèle, tel que ces valeurs dépendent de l'apport des épidémiologistes médicaux et biologistes.

- ▷ Les mesures de protection de la santé publiques permettent de réduire de manière significative la taille finale de l'épidémie, de plus elles permettent également un point tournant beaucoup plus précoce que sans ces mesures.

4.7 Application

Certains pays ont utilisé le modèle SEIRU pour analyser les données pandémiques. Les données sur l'épidémie de COVID-19 en Espagne sont présentées dans le tableau ci-dessous (selon [23]).

S_0	R_0	t_1	t_2	μ	J	
46,700,000	1	13 mars	21 mars	0.125	20 mars	
β_1	β_2	β_3	h	ν	η	α
433.3	0.194	1	0.4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	1

- * On obtient les paramètres $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ en ajustant $[\beta_1 e^{\beta_2 t} - \beta_3]$ aux données cumulatives de cas déclarées entre les dates $[t_1, t_2]$. on peut donc obtenir $t_0 = 3$ février.
- * D'autre part, " h ", " ν ", " η ", " α " sont données selon l'apport des épidémiologistes médicaux et biologistes, donc nous aurons : $\nu_1 = h\nu = 0.07$ et $\nu_2 = (1 - h)\nu = 0.1$
- * Par ailleurs, nous obtenons :

- $I_0 = \frac{\beta_3 \beta_2}{h(\nu_1 + \nu_2)} = 2.896$
- $E_0 = \frac{(\beta_2 + \nu)}{\alpha} I_0 = 1.045$

- $U_0 = \frac{\nu_2}{\beta_2 + \eta} I_0 = 0.86$
- $\tau_0 = \frac{(\beta_2 + \alpha)(\beta_2 + \nu)(\beta_2 + \eta)}{\alpha S_0(\beta_2 + \eta + \nu_2)} = 7.11 \times 10^{-9}$
- $\mathfrak{R}_0 = \frac{(\beta_2 + \alpha)(\beta_2 + \nu)(\beta_2 + \eta)}{\alpha \nu (\beta_2 + \eta + \nu_2)} \left(1 + \frac{(1-h)\nu}{\eta}\right) \approx 3.39$

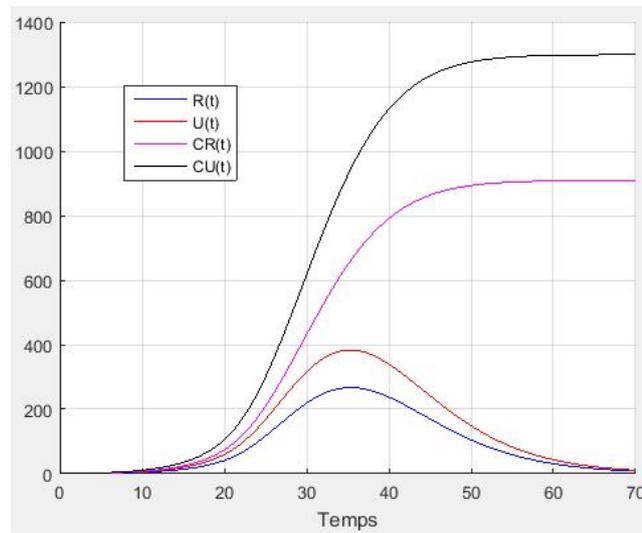
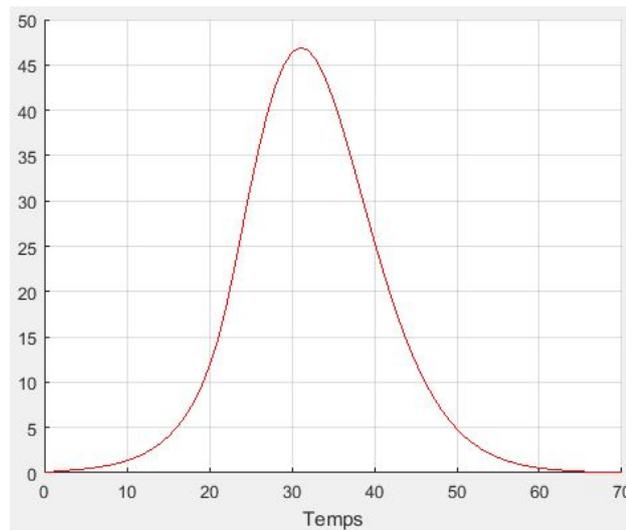
Figure 4.2 : Graphiques pour $CR(t)$, $CU(t)$, $R(t)$, $U(t)$ 

Figure 4.3 : Graphique de cas déclarés quotidiennement

Remarque 4.2

- *On a trouvé les mêmes allures de trajectoires avec exactement le même point tournant pour les cas déclarés $R(t)$ et non déclarés $U(t)$ et les mêmes phases de développement de COVID (sur l'échelle de temps). Cependant, dans la figure 4.3, on a trouvé la même allure et à peu près le même point tournant.*

Conclusion

- On a considéré un modèle du type **SIR** appliqué à une population fermée, ce dernier modélise le COVID-19.
- Le présent modèle a les caractéristiques suivantes :
 - * Un seul point tournant i.e : un seul temps de pic.
 - * Plus que la moitié des cas déclarés ont lieu après le point tournant.

L'identification ne peut se faire que sous les deux conditions précédentes. Cependant, la première condition est justifiée par la nature de l'épidémie et la seconde par la loi de "Gompertz".

- L'algorithme de l'identification requiert le rapport $\frac{I_0}{S_0}$ pour fournir les paramètres τ , ν_1 et ν_2 correspondants aux données épidémiques mais surtout au même point tournant " tp ". Dans ce sens, quand le rapport $\frac{I_0}{S_0}$ change, les paramètres τ , ν_1 , ν_2 changent. Il y a des situations où I_0 et/ou S_0 ne sont pas connus. Cependant, l'identifiabilité permet de confirmer qu'on ne peut identifier les paramètres un par un mais sous forme de combinaison de paramètres (rapport de paramètres).
- Pour le COVID-19, le taux de transmission dépend du temps ce qui fait que l'évolution de l'épidémie est divisée en trois phases. Du coup, on peut prédire à chaque phase son modèle, et l'on a par suite identifié certains paramètres : dans la seconde phase à la suite de l'application des mesures sanitaires (des gestes de barrières, isolation,...). En conséquence, la phase trois connaît une décroissance linéaire.

- Des simulations numériques viennent illustrer les résultats théoriques et permettent de conclure quant à l'importance de l'intensité de l'intervention publique.

- Perspective ; que deviennent ces résultats en cas de :
 - ▷ deux pics épidémiques ou plus ?
 - ▷ population ouverte (population contient les naissances, l'immigration,...)?

Bibliographie

- [1] Anderson RM, May RM *Infective diseases of humans : dynamics and control*. Oxford University Press, Oxford, 1991.
- [2] Bailey NTJ *The mathematical theory of epidemics*. Charles Griffin, London, 1957.
- [3] Bernoulli D *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir*, Mém. Math Phys Acad R Sci Paris, 1–45, 1760.
- [4] Brauer F, Castillo-Chavez C *Mathematical models in population biology and epidemiology*. Springer, New York, 2000.
- [5] Brauer F, van den Driessche P, Wu J (eds) *Mathematical epidemiology*. Springer, Berlin, 2008.
- [6] Busenberg S, Cooke K *Vertically transmitted diseases : models and dynamics*, vol 23. Lecture notes in biostatistics. Springer, Berlin, 1993.
- [7] Cours de Master 1, "Modélisation mathématique en épidémiologie", année universitaire 2022_2023.
- [8] Cours de troisième année licence, "Equations Différentielles", année universitaire 2021_2022.
- [9] Diekmann O, Heesterbeek H, Britton T *Mathematical tools for understanding infectious disease dynamics*. Princeton University Press, Princeton, 2013.

- [10] Dietz K, Heesterbeek JAP *Bernoulli was ahead of modern epidemiology*. Nature 408 :513–514, 2000.
- [11] A. Ducrot, P. Magal, T. Nguyen and G. Webb. *Identifying the number of Unreported Cases in SIR Epidemic Models*, Mathematical Medicine and Biology : A Journal of the IMA , vol. 00, 1- 19, 2019.
- [12] Evans, N.D., White, L.J., Chapman, M.J., Godfrey, K.R. and Chappell, M. *The structural identifiability of the susceptible infected recovered model with seasonal forcing*. Math. Biosci., 194, 175–197, 2005.
- [13] KermackWO,McKendrick AG *A contribution to the mathematical theory of epidemics*. Proc R Soc Lond A 115 :700–721, 1927.
- [14] Kermack WO, McKendrick AG *Contributions to the mathematical theory of epidemics : II*. Proc R Soc Lond A 138 :55–83, 1932.
- [15] Kermack WO, McKendrick AG *Contributions to the mathematical theory of epidemics : III*. Proc R Soc Lond A 141 :94–112, 1933.
- [16] Macdonald G *The epidemiology and control of malaria, in epidemics*. Oxford University Press. London, 1957.
- [17] Michael Y. Li *An Introduction to Mathematical Modeling of Infectious Diseases*.vol. 2, 1-163, 2018.
- [18] Murray JD *Mathematical biology*. Springer, Berlin, 1993.
- [19] P. Magal and G. Webb. *The parameter Identification Problem for SIR Epidemic Models : Identifying Unreported Cases*. J. Math. Biol., vol. 77, 1629- 1648, 2018.
- [20] Ross R *The prevention of malaria*. John Murray, London, 1910.

- [21] Van den Driessche, P.; Watmough, J. *Reproduction numbers and subthreshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*. Math. Biosci, 180, 29-48, 2002.
- [22] Z. Liu, P. Magal, O. Seydi, and G. Webb. *A COVID-19 epidemic model with latency period*. Infectious Disease Modelling, 323-337, 2020.
- [23] Z. Liu, P. Magal, O. Seydi, and G. Webb. *A model to predict COVID-19 epidemics with applications to South Korea, Italy, and Spain*. medRxiv, 2020.
- [24] Z. Liu, P. Magal, O. Seydi, and G. Webb. *Predicting the cumulative number of cases for the COVID-19 epidemic in China from early data*. medRxiv, 2020.
- [25] Z. Liu, P. Magal, O. Seydi, and G. Webb. *Understanding Unreported Cases in the COVID-19 Epidemic Outbreak in Wuhan, China, and the Importance of Major Public Health Interventions*. MPDI biology, 9(3), 50, 2020.