

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEM



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Option : Biomathématiques & Modélisations

présentée par

KACHEKOUCHE Kamila

Contrôle Optimal d'un modèle épidémiologique avec quarantaine

Soutenue devant le jury composé de :

M. DERHAB MOHAMMED	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mme. ATTAR YACHEUR SOUAD	MCB	Université de Tlemcen	Examinatrice
Mme. BOUAYAD AGHA SARI ZAKYA	MCB	Université de Tlemcen	Encadrante

Année Universitaire : 2023-2024

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A la mémoire de mon père, récemment décédé, qui m'a toujours soutenue, encouragée, motivée, aidée, et dirigée vers le savoir. Que ce travail soit l'accomplissement de votre vœu, et le fruit de votre sacrifice et votre soutien. Puisse Dieu, le tout puissant, vous avoir en sa sainte miséricorde.

A ma chère maman, la lumière de ma vie, et la source de mes efforts, pour vos sacrifices, votre aide, votre amour, vos prières et votre soutien indéfectible tout au long de mes études. Que dieu la protège.

A mes chers frères, pour leurs encouragements permanents, leurs conseils avisés, leur présence bienveillante, merci d'être là.

A mes chères sœurs, pour leur soutien moral et leurs encouragements inconditionnels, leur accompagnement constant.

A toute ma famille, mes amies et mes collègues avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables, je leur souhaite toute la réussite.

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier Allah le tout puissant miséricordieux de m'avoir donné la force, la volonté, le courage et la patience d'accomplir ce travail.

J'adresse mes plus sincères remerciements à mon encadrante, Madame Bouayad Agha Sari Zakya, pour avoir rempli parfaitement son rôle, pour ses orientations précieuses, ses conseils avisés et, ses encouragements constants, qui ont été grandement contribuant à la réussite de ce travail.

Mes profonds remerciements s'adressent aux membres du jury pour avoir pris la peine d'évaluer ce travail.

J'exprime également mes profondes gratitudes envers tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, tout particulièrement ceux du département de mathématiques.

Enfin, je remercie toute personne ayant contribué de près ou de loin, à l'élaboration de cette modeste étude.

Résumé

Dans ce travail, nous proposons un modèle mathématique du type SIR avec quarantaine. Ce modèle tient compte d'une certaine réponse de la population totale au dépistage et de la rechute dans la classe des réfractaires. Tout d'abord nous présentons quelques outils mathématiques qui nous aident dans notre étude. Ensuite, nous analysons la stabilité des points d'équilibre de notre modèle, qui se base essentiellement sur le taux de reproduction de base R_0 . Si $R_0 < 1$, le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable. Et si $R_0 > 1$, le point d'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable. Finalement, pour déterminer le dépistage optimal, on considère un problème de contrôle optimal dans lequel on maximise une certaine fonctionnelle coût. Nous donnons quelques simulations numériques pour illustrer les résultats théoriques.

Abstract

In this work, we propose an SIR mathematical model that takes into account the quarantine class after screening the total population and knowing the relapse into the refractory class. First, we present some mathematical tools that help us in our study. Then, after explaining and studying the properties of the model, we analyze the stability of the equilibrium points, which is essentially based on the basic reproduction rate R_0 . If $R_0 < 1$, the disease-free equilibrium point is globally asymptotically stable, and if $R_0 > 1$, the endemic equilibrium point is locally asymptotically stable. Finally, in order to find an optimal screening strategy, we consider an optimal control problem in which we maximize a certain cost functional. Finally, we give some numerical simulations to illustrate the theoretical results.

Table des matières

1	Outils mathématiques	9
1.1	Quelques rappels sur les systèmes dynamiques	9
1.1.1	Théoreme de Cauchy-Lipschitz sans contrôle	9
1.1.2	Principe de linéarisation	10
1.1.3	Stabilité des équilibres	10
1.2	Taux de reproduction de base R_0	12
1.2.1	Méthode de Van den Driessche et Watmough (méthode de matrice de génération suivante [21])	13
1.3	Contrôle optimal	14
1.3.1	Théorème de Cauchy-Lipschitz avec contrôle	14
1.3.2	Problème de contrôle optimal	15
1.3.3	Principe du maximum de Pontryagin(PMP)	16
2	Quelques modèles mathématiques en épidémiologie	19
2.1	Modèle avec traitement	19
2.2	Modèle avec quarantaine	20
3	Comportement asymptotique du modèle de base	22
3.1	Modèle de base	22
3.2	Le taux de reproduction de base	25
3.3	Stabilité de l'équilibre sans maladie	26
3.4	Existence et stabilité de l'équilibre endémique	29
3.5	Simulations numériques	32
4	Dépistage optimal	37
4.1	Formulation du problème	37
4.2	Existence du contrôle optimal	38
4.3	Système adjoint	40
4.4	Simulations numériques	41
	Bibliographie	47

Notations

Symbole Signification

\mathbb{R}^+	Ensemble de nombres réels positifs.
\mathbb{R}^n	$\mathbb{R} * \mathbb{R} * \dots * \mathbb{R}$ n fois.
$C^1(I)$	Ensemble des fonctions de I dans \mathbb{R} dont la dérivée première est continue.
$L^2(I)$	Espace des fonctions à valeurs réelles à carrée intégrable sur I .
$L^\infty(I)$	Espace des fonctions à valeurs réelles Lebesgue mesurables essentiellement bornées sur I .
FV^{-1}	Matrice de la génération suivante.
$\rho(FV^{-1})$	Le rayon spectral de la matrice FV^{-1} .
\in	Appartient.
\subset	Inclu.
\langle, \rangle	Produit scalaire.
p.p.t	Presque partout.
min	Minimum.
max	Maximum.

Introduction

L'épidémiologie est un domaine vaste où les mathématiques ont fait leurs preuves, et ont apporté des contributions significatives. Dans ce sens, on doit les travaux pionniers à Daniel Bernoulli pour avoir étudié l'efficacité de l'inoculation contre la variole voir [4].

Les modèles compartimentaux en épidémiologie ont fait leur apparition en 1927 avec Kermack et McKeindrick, dont leur premier modèle est une reformulation du modèle épidémique de Ronald Ross [17] (modèle de paludisme) en termes plus généraux, il s'agit d'un modèle de type susceptible-infectés-réfractaires (SIR) [12]. Bien après, des mesures sanitaires étaient prises en compte (vaccination, dépistage, quarantaine, traitement, ...). Glenn Webb et Pierre Magal ont étudié certains de ces modèles, pour ne citer que [15, 13].

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressées à un modèle compartimental du type SIR qui prend en considération la classe de la quarantaine et ce, après un dépistage qui tient compte de la réponse de la population totale. De plus, ce modèle connaît également la rechute dans la classe des réfractaires. En d'autres termes après un schéma thérapeutique strict dans la classe de la quarantaine, ces individus cessent d'être infectieux et sont donc tous considérés réfractaires. Dans la classe des réfractaires, ces individus doivent continuer un certain traitement. Malheureusement, il y a une fraction qui rechute et devient contagieuse, cela est dû à la négligence du traitement ou bien à la résistance au traitement. Ces individus sont remis dans la classe des infectés.

Dans ce travail, deux questions sont abordées :

- La stabilité, qui concerne le comportement asymptotique des trajectoires du modèle en question, par rapport aux états stationnaires, à savoir ; l'équilibre sans maladie E_0 et l'équilibre endémique E^* . Cependant, la stabilité de ces derniers est parfaitement déterminée par le calcul du dit "taux de reproduction de base" noté R_0 , et sa comparaison à l'unité.

Des simulations numériques sont établies afin de voir l'impact de certains paramètres sur la stabilité. En particulier, l'effet de la rechute, du dépistage

mais surtout de la population totale.

- Etude d'un problème de contrôle optimal. On considère le dépistage comme contrôle et on définit une fonctionnelle coût, critère d'optimisation ou objectif. L'existence du contrôle optimal et les conditions d'optimalité ont été établies. Quelques simulations numériques illustrent nos résultats.

Le chapitre 1 concerne quelques outils mathématiques et le chapitre 2 est consacré à certains modèles mathématiques en épidémiologie. Dans le chapitre 3, nous avons établi la stabilité du modèle. Le chapitre 4 s'articule autour du problème de contrôle optimal.

Des remarques et des perspectives permettent de conclure notre travail.

Chapitre 1

Outils mathématiques

1.1 Quelques rappels sur les systèmes dynamiques

1.1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz sans contrôle

Soient $I \times \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Définition 1.1 [9] *La fonction f est localement Lipschitzienne par rapport à x si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) et $k > 0$ tels que*

$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in V$, on a

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$$

Définition 1.2 [9] *Considérons le système différentiel (1.1), une fonction $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite solution du problème de Cauchy (1.1) si et seulement si :*

- 1. x est continue et, pour tout $t \in I$, $x(t) \in \Omega$.*
- 2. Pour tout $t \in I$, $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))d\tau$.*

Théorème 1.1 (Cauchy-Lipschitz)[9]

Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Alors il existe $\tau > 0$, et une fonction Φ solution de l'équation $\dot{x} = f(t, x(t))$ définie sur l'intervalle $J =]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$. Si de plus, $\Phi(t_0) = x_0$, alors Φ est unique.

Remarque 1.1 *Si cette solution est bornée, alors elle est définie sur tout I .*

1.1.2 Principe de linéarisation

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , on considère l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.2)$$

le système (1.2) est dit autonome et l'on a les définitions suivantes

Définition 1.3 [2] x^* est un point d'équilibre de l'équation (1.2) si $f(x^*) = 0$.

la linéarisation d'un système non linéaire est basée sur la linéarisation de la fonction f au voisinage d'un point d'équilibre x^* voir aussi [2, 11]. Soit la variable locale

$$u = x - x^*$$

tel que si u tend vers 0, x tend vers x^* . Pour t fixé, on considère l'approximation du premier ordre au voisinage de x^*

$$f_i(x_1, \dots, x_n, t) \simeq f_i(x_1^*, \dots, x_n^*, t) + \frac{\partial f_i(x_1^*, \dots, x_n^*, t)}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial f_i(x_1^*, \dots, x_n^*, t)}{\partial x_n} u_n. \quad (1.3)$$

où

$$f(x, t) = f(x).$$

On utilise les relations définissant le point d'équilibre, et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 dans le développement de Taylor, nous obtenons le système linéarisé suivant :

$$\dot{u} = F(t)u. \quad (1.4)$$

avec

$$F(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

est la matrice jacobienne de f au point x^* .

1.1.3 Stabilité des équilibres

Définition 1.4 [11] Un point d'équilibre x^* de (1.1) est dit stable. Si pour tout ε positif, il existe un δ positif tel que, pour toute solution $x(t)$ de (1.1), on a

$$\|x_0 - x^*\| \leq \delta \implies \|x(t) - x^*\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.5 [11] Un point d'équilibre x^* est dit instable, s'il n'est pas stable.

Définition 1.6 (*Attractivité [5]*)

- Un point d'équilibre x^* de (1.1) est dit attractif s'il existe un $D \subset \Omega$ voisinage de x^* tel que pour toute condition initiale x commençant dans D , la solution correspondante $\Phi_t(x)$ du système (1.1) est définie pour tout $t \geq 0$ et tend vers x^* lorsque t tend vers l'infini. En d'autres termes,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x) = x^*.$$

- Le point x^* est dit globalement attractif si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x) = x^*$ pour toute condition initiale $x \in \Omega$.

Définition 1.7 (*Stabilité asymptotique locale [5]*) Un point d'équilibre x^* de (1.1) est dit localement asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.**Définition 1.8** (*Stabilité asymptotique globale [5]*) Un point d'équilibre x^* de (1.1) est dit globalement asymptotiquement stable s'il est à la fois stable, globalement attractif.**Définition 1.9** (*Méthode fluctuation, [19] p.367*) Soit $F : [b, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée et différentiable, alors il existe des suites $s_k, t_k \rightarrow \infty$ telles que

$$\begin{cases} F(s_k) \rightarrow F_\infty, & F'(s_k) \rightarrow 0 \\ F(t_k) \rightarrow F^\infty, & F'(t_k) \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{quand } k \rightarrow \infty$$

Stabilité d'un système linéaire

Considérons le système linéaire suivant

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n$$

où A est une matrice $n \times n$.

Théorème 1.2 [9] Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres complexes de la matrice A , alors

- L'origine est un équilibre stable si toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles négatives ou nulles.
- L'origine est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.
- Si A a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'origine est instable.

Stabilité par linéarisation

On considère le système non linéaire (1.2), le linearisé de (1.2) est donné par

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.6)$$

où A est la matrice jacobienne de f au point x^* .

l'étude de la stabilité locale de (1.2) revient à l'étude de la stabilité de (1.6).

Théorème 1.3 [9] *Soit x^* un point d'équilibre pour (1.2)*

- *Si l'origine est stable pour (1.6) alors le point d'équilibre x^* est localement stable pour (1.2).*
- *Si l'origine est asymptotiquement stable pour (1.6) alors le point d'équilibre x^* est localement asymptotiquement stable pour (1.2).*

Critère de Routh-Hurwitz

La stabilité d'un système linéaire est liée à la nature des valeurs propres de la matrice A et qui sont solutions de l'équation

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

Soit la matrice de Routh-Hurwitz donnée par :

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

On considère les principaux déterminants mineurs diagonaux de la matrice (1.7)

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n.$$

Théorème 1.4 [11] *Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les racines de l'équation caractéristique aient la partie réelle strictement négative est que tous les mineurs diagonaux $\Delta_k, k = 1, \dots, n$ de la matrice (1.7) soient positifs.*

1.2 Taux de reproduction de base R_0

Pour voir si l'épidémie se propage ou pas, il est nécessaire de calculer le taux de reproduction de base R_0 , qui désigne le nombre moyen d'infection secondaires causées par un individu infectieux pendant sa période d'infectiosité dans une population totalement sensible [10].

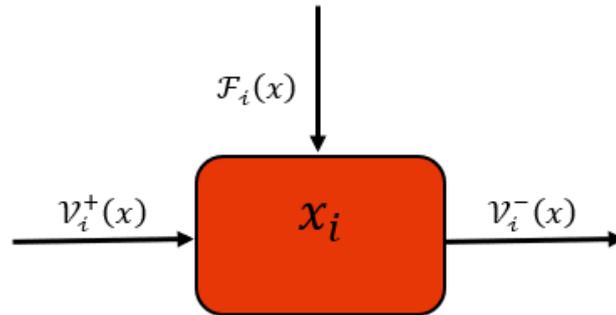


FIGURE 1.1 – Le flux entrant et sortant dans un compartiment infecté.

1.2.1 Méthode de Van den Driessche et Watmough (méthode de matrice de génération suivante [21])

Considérons une population de taille N divisée en n compartiments, dans lesquels les m premiers sont ceux des infectés. Le nombre d'individus dans chaque compartiment i définit par x_i , soit le système des équations différentielles qui modélise une épidémie

$$x' = f(t, x)$$

avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $x_i \geq 0$

Nous définissons X_s comme l'ensemble de tous les états sans maladie,

$$X_s = \{x \geq 0 \mid x_i = 0, \quad i = 1, \dots, m\}.$$

Sont notés ;

- $\mathcal{F}_i(x)$ le taux d'apparition de nouveaux infectés, dans le compartiment i .
- $\mathcal{V}_i^+(x)$ le taux de transfert des individus dans le compartiment i (déplacement, vieillissement, guérison, etc . . .).
- $\mathcal{V}_i^-(x)$ le taux de transfert des individus hors du compartiment i (mortalité, infection, mouvement, etc . . .).

qui sont toutes des fonctions continues, deux fois différentiables. Finalement le modèle de transmission de la maladie avec les conditions initiales positives est donné par

$$x' = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x). \quad (1.8)$$

où

$$\mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i^+(x) - \mathcal{V}_i^-(x)$$

De plus, ces fonctions satisfont aux hypothèses suivantes :

(H1) Si $x \geq 0$, alors $\mathcal{F}_i, \mathcal{V}_i^+, \mathcal{V}_i^- \geq 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

(H2) Si $x_i = 0$, alors $\mathcal{V}_i^- = 0$, en particulier pour tout $x \in X_s$.

S'il n'y a rien dans un compartiment, rien ne peut en sortir. C'est la propriété essentielle d'un modèle compartimental.

(H3) $\mathcal{F}_i = 0$, pour $i > m$.

(H4) Si $x \in X_s$, alors $\mathcal{F}_i(x) = V_i^+(x) = 0$ pour $i = 1, \dots, m$.

(H5) Si $\mathcal{F}(x) = 0$, alors toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne de f autour du point d'équilibre sans maladie ont des parties réelles négatives.

Lemme 1.1 [21] *Si x_0 est un équilibre sans maladie pour le système (1.8) et f_i satisfait (H1) – (H5), les dérivées $D\mathcal{F}(x_0)$, $D\mathcal{V}(x_0)$ sont partitionnées comme*

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D\mathcal{V}(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

où F et V sont les matrices $m \times m$ définies par :

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \quad V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \quad \text{avec } 1 \leq i, j \leq m.$$

De plus, F est non-négative, V est une matrice de Metzler (matrice dans laquelle toutes les composantes hors diagonale sont positives) non singulière, J_3 et J_4 sont deux matrices dont les valeurs propres de J_4 sont à partie réelle positive.

Définition 1.10 *On appelle rayon spectrale d'une matrice A , la valeur maximum du module des valeurs propres de A noté $\rho(A)$:*

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda|.$$

Définition 1.11 R_0 est défini comme le rayon spectral de la matrice de la génération suivante i.e

$$R_0 = \rho(FV^{-1}).$$

1.3 Contrôle optimal

1.3.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz avec contrôle

Soit $I = [t_0, T]$ ($0 < t_0 < T < +\infty$) un intervalle de \mathbb{R} , on considère le système de contrôle suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente la variable d'état et $u(t) \in U_{adm} \subset \mathbb{R}^k$ représente le contrôle. U_{adm} est un ouvert non vide de \mathbb{R}^k , et

$$U = \{u(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ mesurable } | u(t) \in U_{adm} \text{ p.p.t}\}$$

est le domaine des contrôles admissibles i.e l'ensemble des contrôles $u(\cdot)$ tels que la trajectoire associée est bien définie sur I [20].

$f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction qui satisfait les hypothèses suivantes

A1) $f \in C(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$.

A2) Pour tout $u \in U_{adm}$, $f(t, \cdot, u)$ est bornée sur les bornés de \mathbb{R}^n .

A3) $\exists C > 0$ tel que $\forall t \in I, \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall u \in U_{adm}$ on a

$$|f(t, y, u)|_{\mathbb{R}^n} \leq C(1 + |y|_{\mathbb{R}^n} + |u|_{\mathbb{R}^k}).$$

Théorème 1.5 (Cauchy-Lipschitz [20]) *Sous les conditions A1), A2) le problème de Cauchy (1.9) admet une solution Φ unique définie sur l'intervalle $t_0 \in J \subset I$. Si de plus, f satisfait l'hypothèse A3) alors cette solution sera définie sur I tout entier.*

Remarque 1.2 *J est dit un intervalle maximale i.e si $(\bar{J}, \bar{\Phi})$ est une solution de (1.9) alors $\bar{J} \subset J$ et $\bar{\Phi} = \Phi|_{\bar{J}}$.*

1.3.2 Problème de contrôle optimal

En plus d'un problème de contrôle, on s'intéresse à un problème d'optimisation, qui consiste à trouver un contrôle $u(t)$ ainsi que la trajectoire associée qui minimise ou maximise un certain objectif $C(u)$. Un problème de contrôle optimal se formule, en général, comme. Soit le système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.10)$$

pour le problème

$$(P) \begin{cases} \min C(u). \\ u \in U \end{cases} \quad (1.11)$$

$$C(u) = \psi(T, x(T)) + \int_{t_0}^T g(t, x(t), u(t)) dt.$$

avec

$$\begin{aligned} \psi &: [t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ g &: [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

sont deux fonctions données.

Maintenant, pour que le coût $C(u)$ soit bien défini pour tout contrôle $u \in U$, et l'infimum de $C(u)$ sur U soit fini, on met les hypothèses suivantes sur g et ψ :

A4) $\forall R > 0, \exists C_R > 0$ tel que $\forall t \in [t_0, T], \forall y \in \bar{B}(0, R), \forall u \in U_{adm},$

$$|g(t, y, u)| \leq C_R(1 + |u|_{\mathbb{R}^k}).$$

A5) les fonction g et ψ sont minorées sur $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ et sur $[t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ respectivement.

L'hypothèse A4) assure que le cout $C(u)$ est bien défini et l'hypothèse A5) que l'infimum de $C(u)$ sur U est fini.

1.3.3 Principe du maximum de Pontryagin(PMP)

Rappelons le système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.12)$$

pour le problème

$$(P) \begin{cases} \min C(u) \\ u \in U \end{cases} \quad (1.13)$$

avec

$$C(u) = \psi(T, x(T)) + \int_{t_0}^T g(t, x(t), u(t))dt.$$

$x(T)$ libre (c'est-à-dire non spécifiée) et T libre ou fixé.

Définition 1.12 *L'Hamiltonien associé au problème de contrôle optimal (1.12)-(1.13) est la fonctionnelle $H : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$H(t, x, \lambda, u) = \langle \lambda, f(t, x, u) \rangle + g(t, x, u).$$

Lorsque H ne dépend pas explicitement du temps, on dit que l'Hamiltonien est autonome. Ici, le produit scalaire est dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Avant d'énoncer le principe du maximum de Pontryagin (PMP), on suppose que les fonctions g et ψ satisfont aux hypothèses supplémentaires suivantes :

A6) $g \in C([t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k; \mathbb{R})$ et g est de classe C^1 par rapport à u , de plus $\psi \in C^1([t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

A7) Pour tout $R > 0$, il existe $\tilde{C}_R > 0$ tel que $\forall t \in [t_0, T], \forall y \in \bar{B}(0, R), \forall u \in U_{adm}$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, y, u) \leq \tilde{C}_R(1 + |u|_{\mathbb{R}^k}).$$

Théorème 1.6 (*Principe du maximum de Pontryagin [20]*) *On considère le problème de contrôle optimal (1.12)-(1.13) et on suppose que les hypothèses A_i pour $i = 1, \dots, 7$ sont satisfaites.*

Si u^ est un contrôle optimal et x^* est la trajectoire associée. Alors il existe une fonction $\lambda : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint telle que*

a)

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)), p.p.t \in [t_0, T] \\ &= f(t, x^*(t), u^*(t)), p.p.t \in [t_0, T], \\ x^*(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, X^*(t), \lambda(t), u^*(t)), p.p.t \in [t_0, T] \\ &= -\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)) \right]^\top \cdot \lambda(t) - \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)), p.p.t \in [t_0, T] \\ \lambda(T) &= \frac{\partial \psi}{\partial x}(T, x^*(T)). \text{(condition de transversalité)} \end{aligned}$$

b) $u^* \in \arg \min_{v \in U_{adm}} H(t, x^*(t), \lambda(t), v), p.p.t \in [t_0, T]$, c'est à dire

$$H(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{v \in U_{adm}} H(t, x^*(t), \lambda(t), v), p.p.t \in [t_0, T],$$

c) Si de plus le temps final T est libre, on a :

$$H(T, x^*(T), \lambda(T), u^*(T)) = -\frac{\partial \psi}{\partial t}(T, x^*(T)).$$

Un triplet (x^*, u^*, λ) satisfait aux conditions ci-dessus est appelé une extrémale ou bien un candidat d'optimalité.

Remarque 1.3 *Le principe du maximum de Pontryagin ne fournit qu'une condition nécessaire mais pas suffisante d'optimalité. En revanche, le PMP ne garantit pas l'existence d'un contrôle optimal. L'intérêt pratique du PMP est de restreindre le champ des possibilités en vue de l'obtention d'un contrôle optimal : on commence par considérer les extrémales et, en espérant qu'elles ne sont pas trop nombreuses, on en fait ensuite le tri.*

Remarque 1.4 Dans le cas où $U_{adm} = \mathbb{R}^k$, c'est à dire, lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition b) du théorème précédent devient

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Soit E un espace de Banach, on a les définitions suivantes

Définition 1.13 [7] Un ensemble $A \subset E$ est dit convexe si

$$tx + (1 - t)y \in A \quad \forall x, y \in A, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Définition 1.14 [7]

— Une fonction $\varphi : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite convexe si

$$\varphi(tx + (1 - t)y) \leq t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(y) \quad \forall x, y \in E, \quad \forall t \in]0, 1[.$$

— Une fonction φ est dite concave si $(-\varphi)$ est convexe i.e.

$$\varphi(tx + (1 - t)y) \geq t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(y) \quad \forall x, y \in E, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Corollaire 1.1 [7] Si φ est deux fois dérivable, alors ;

- 1) φ est convexe si φ'' est positive ou nulle,
- 2) φ est concave si φ'' est négative ou nulle.

Définition 1.15 Un ensemble est dit faiblement compact dans un espace vectoriel topologique si toute suite d'éléments de cet ensemble admet une sous-suite faiblement convergente dont la limite est dans l'ensemble.

Théorème 1.7 (Théorème de Mangasarian [16]) Supposons que les hypothèses du théorème 1.6 sont satisfaites, alors le principe du maximum de Pontryagin PMP fournit une condition suffisante d'optimalité sous les hypothèses suivantes :

- i) $U = L^2([t_0, T]; U_{adm})$, avec T fixé et U_{adm} un ensemble convexe fermé non vide.
- ii) La fonction $(x, u) \mapsto H(t, x, \lambda, u)$ est convexe presque pour tout $t \in [t_0, T]$.
- iii) La fonction $x \mapsto \psi(T, x) = h(x)$ est convexe.

Chapitre 2

Quelques modèles mathématiques en épidémiologie

2.1 Modèle avec traitement

Un modèle mathématique couramment utilisé en épidémiologie pour étudier l'efficacité d'un traitement est le modèle SIR avec traitement. Une forme de traitement possible pour certaines maladies est la vaccination, qui permet de se protéger contre l'infection avant le début d'une épidémie. Considérons le modèle SITR proposé dans [6] où T représente la classe de traitement. Dans ce modèle, une fraction des infectés est sélectionnée pour le traitement par un taux γ , le traitement réduit l'infectivité par un taux δ , et par un taux η pour quitter la classe de traitement.

Le modèle s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} S' = -\beta S[I + \delta T], \\ I' = \beta S[I + \delta T] - (\alpha + \gamma)I, \\ T' = \gamma I - \eta T, \\ R' = \alpha I + \eta T. \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $N(t) = S(t) + I(t) + T(t) + R(t)$ est la population totale. On note par S , I , T et R , la classe des susceptibles, infectés, traités et retirés respectivement. Pour calculer le taux de reproduction de base pour (2.1), on peut considérer qu'un infectieux dans une population totalement sensible provoque βN nouvelles infections par unité de temps, et que la durée moyenne de l'infection est $\frac{1}{\alpha + \gamma}$. En outre, une fraction $\frac{\gamma}{\alpha + \gamma}$ des personnes infectées est traitée. Alors qu'au stade du traitement, le nombre de nouvelles infections causées par unité de temps est βN , et la durée dans la classe de traitement est $\frac{1}{\eta}$. Le taux de

reproduction de base du modèle (2.1) est

$$R_0 = \frac{\beta N}{\alpha + \gamma} + \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \frac{\delta \beta N}{\eta}.$$

2.2 Modèle avec quarantaine

On présente, ici, un modèle du type SIR qui prend en considération la quarantaine. La population considérée est divisée en quatre sous-classes épidémiologiques :

$S(t)$: classe des susceptibles ; sont les individus qui risquent d'être infectés.

$I(t)$: classe des infectés ; sont des individus atteints de la maladie et capables de la transmettre.

$Q(t)$: classe de la quarantaine ; sont des individus infectés qui présentent des signes de la maladie et qui sont isolés.

$R(t)$: classe des réfractaires ; sont les individus mis en quarantaine qui se rétablissent de la maladie.

La dynamique de ce modèle est donnée par le système d'équations différentiel ordinaires suivant

$$\begin{cases} S'(t) = A - \beta S(t)I(t) - \mu S(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - (\gamma + \mu)I(t), \\ Q'(t) = \gamma I(t) - (\delta + \mu)Q(t), \\ R'(t) = \delta Q(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

avec

$S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0 \geq 0$, $Q(0) = Q_0 > 0$, $R(0) = r_0 \geq 0$ sont des conditions initiales.

$N(t) = S(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$ est la population totale.

A : flux entrant dans la classe des susceptibles,

μ : taux de mortalité naturelle,

β : taux de transmission de l'infection,

γ : taux de transfert de la classe des infectés en quarantaine,

δ : taux de guérison.

— Il existe d'autres modèles en équations différentielles ordinaires qui prennent en considération la quarantaine [6, 14]

- D'autres modèles prennent en considération le dépistage via la réponse de la population totale par exemple [1]
- Par ailleurs, pour un modèle qui tient compte du dépistage, de la réponse de la population totale et puis de la rechute, on peut citer [18]. Ces deux derniers présentent des modèles en équations aux dérivées partielles.
- Pour notre part, on a étudié la stabilité puis le contrôle optimal au modèle conçu en [18] mais en système différentiel ordinaire.

Chapitre 3

Comportement asymptotique du modèle de base

3.1 Modèle de base

Dans notre travail, rappelons que le modèle de base est un système d'équations différentiel ordinaires avec quarantaine. Ce dernier prend en considération le dépistage de la population totale et qui tient compte la rechute dans la classe des réfractaires. Nous considérons une population N divisée en quatre sous-classes épidémiologiques distinctes : des individus susceptibles, infectés, en quarantaine, réfractaires. La densité de chacune est notée respectivement $S(t)$, $I(t)$, $Q(t)$, $R(t)$, $t \geq 0$.

Le modèle se formule comme suit :

$$\begin{cases} S'(t) = A - \mu S(t) - \beta S(t)I(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) + \delta R(t) - (\mu + v(t)\psi(N(t)))I(t), \\ Q'(t) = v(t)\psi(N(t))I(t) - (\mu + \phi)Q(t), \\ R'(t) = \phi Q(t) - (\mu + \delta)R(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

où $N(t) = S(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$ est la population totale et,

$$S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 \geq 0, Q(0) = Q_0 > 0, R(0) = r_0 \geq 0.$$

sont des conditions initiales.

La fonction ψ est définie de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , supposée localement Lipschitzienne et décroissante. Tous les paramètres sont définis dans le tableau suivant et sont supposés positifs. Pour la stabilité, nous supposons que $v(t) = v$ constant.

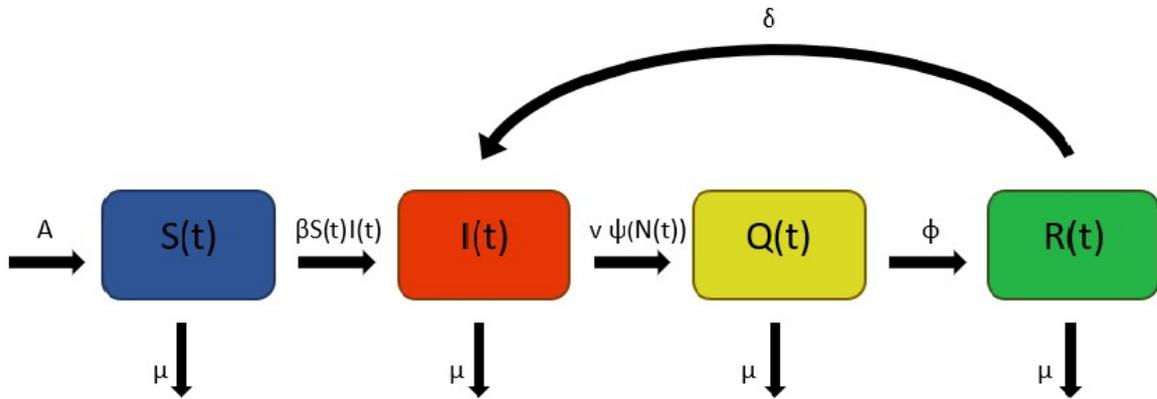


FIGURE 3.1 – Schéma de transmission du modèle SIQRI.

Dans ce modèle :

- Par le contact entre susceptibles et infectés à un taux β près, une fraction $\beta S(t)I(t)$ devient infectée (action de masse).
- Grâce au programme de dépistage appliqué à la population totale de taille $N(t)$, une fraction des dépistés sont identifiés infectés et sont systématiquement mis en quarantaine.
- Suite au schéma stricte de la quarantaine tous les individus en quarantaines cessent d'être infectieux (traitement avec succès) et sont considérés réfractaires.
- Pour quelques raisons (négligence du traitement, ...), quelques réfractaires rechutent et sont donc considérés comme de nouveaux cas infectés.
- Chaque classe connaît une mortalité naturelle μ supposée constante.

Proposition 3.1 *Le système (3.1) admet une unique solution $(S(t), I(t), Q(t), R(t))$ positive dès que les conditions initiales sont positives. De plus, la solution est bornée et on a*

$$S(t) + I(t) + Q(t) + R(t) = N(t) \leq \frac{A}{\mu}$$

PREUVE. Notons que le second membre du système (3.1) est continu, localement Lipschitzien par rapport à la trajectoire. L'existence et l'unicité de la

paramètre interprétation

A :	Recrutements des individus susceptibles.
μ :	taux de mortalité naturelle.
δ :	taux de rechute.
β :	taux de transmission de la maladie.
$v(t)$:	taux de dépistage (nombre des dépistés par unité de temps.)
ϕ :	taux de traitement
$\psi(N(t))$:	fonction réponse de la population totale $N(t)$ au dépistage.

TABLE 3.1 – interprétation des paramètres

solution est donc assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz .

Maintenant soit $M = \mathbb{R}_+^4$, Pour l'invariance de M , supposons par l'absurde qu'il existe un t^* tel que

$$t^* = \inf\{t > 0, (S(t^*), I(t^*), Q(t^*), R(t^*)) \in \partial M\}$$

Alors

- pour $S(t^*) = 0, I(t^*) > 0, Q(t^*) > 0, R(t^*) > 0$ on a
 $S'(t^*) = A > 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ petit tel que $S(t^* - \varepsilon) < S(t^*) = 0$
 contradiction par la définition de t^* .
- pour $I(t^*) = 0, S(t^*) > 0, Q(t^*) > 0, R(t^*) > 0$ on a
 $I'(t^*) = \delta R(t^*) > 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ petit tel que $I(t^* - \varepsilon) < I(t^*) = 0$.
- pour $Q(t^*) = 0, S(t^*) > 0, I(t^*) > 0, R(t^*) > 0$ on a
 $Q'(t^*) = v\psi(N(t^*))I(t^*) > 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ petit tel que $Q(t^* - \varepsilon) < Q(t^*) = 0$ contradiction par la définition de t^* .
- pour $R(t^*) = 0, S(t^*) > 0, I(t^*) > 0, Q(t^*) > 0$ on a
 $R'(t^*) = \phi Q(t^*) > 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ petit tel que $R(t^* - \varepsilon) < R(t^*) = 0$
 contradiction par la définition de t^* .

d'où l'invariance de \mathbb{R}_+^4 . Pour la bornitude de la solution par $\frac{A}{\mu}$, l'addition des

équations du système (3.1) nous donne :

$$N'(t) = A - \mu N(t),$$

après un simple calcul nous obtenons

$$N(t) = \frac{A}{\mu} + \left(N_0 - \frac{A}{\mu}\right) \exp(-\mu t),$$

de plus,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{A}{\mu}.$$

Par conséquent, le modèle (3.1) admet une solution unique, positive et bornée par $\frac{A}{\mu}$, et on définit le domaine biologique de notre modèle par

$$\Omega = \{(S(t), I(t), Q(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^4, S(t) + I(t) + Q(t) + R(t) \leq \frac{A}{\mu}\}$$

■

3.2 Le taux de reproduction de base

Pour calculer le taux de reproduction de base R_0 , on utilise la matrice de la génération suivante (next-generation matrix) [21], le système réduit de (3.1) peut s'écrire sous la forme :

$$X' = \mathcal{F}(X) - \mathcal{V}(X).$$

où $X = (I, Q, R)^T$,

$$\mathcal{F}(X) = \begin{pmatrix} \beta S(t) I(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(X) = \begin{pmatrix} (\mu + v\psi(N(t)))I(t) - \delta R(t) \\ -v\psi(N(t)) + (\mu + \phi)Q(t) \\ -\phi Q(t) + (\mu + \delta)R(t) \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $E_0 = (\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0)$ est un équilibre trivial pour (3.1), soient F et V les matrices Jacobiennes de \mathcal{F} et \mathcal{V} respectivement au point E_0 ,

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\beta A}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right) & 0 & -\delta \\ -v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right) & \mu + \phi & 0 \\ 0 & -\phi & \mu + \delta \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de V est donné par

$$\det V = (\mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right))(\mu + \phi)(\mu + \delta) - \delta\phi v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right).$$

On a alors,

$$V^{-1} = \frac{1}{\det V} \begin{pmatrix} (\mu + \phi)(\mu + \delta) & \phi\delta & \delta(\mu + \phi) \\ v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)(\mu + \delta) & (\mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right))(\mu + \delta) & \delta\psi\left(\frac{A}{\mu}\right) \\ v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)\phi & \phi(\mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)) & (\mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right))(\mu + \phi) \end{pmatrix},$$

$$FV^{-1} = \frac{1}{\det V} \begin{pmatrix} \frac{\beta A(\mu + \phi)(\mu + \delta)}{\mu} & \frac{\beta A\phi\delta}{\mu} & \frac{\beta A\delta(\mu + \phi)}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le taux de reproduction de base est le rayon spectrale de matrice de la génération suivante FV^{-1} , et est donné par

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta A(\mu + \phi)(\mu + \delta)}{\mu((\mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right))(\mu + \phi)(\mu + \delta) - \delta\phi v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right))}.$$

3.3 Stabilité de l'équilibre sans maladie

Théorème 3.1 *Si $R_0 < 1$, l'équilibre sans maladie E_0 est globalement asymptotiquement stable, instable si $R_0 > 1$.*

PREUVE. Pour prouver la S.A.G (stabilité asymptotique globale) de E_0 , il suffit de prouver la stabilité locale ensuite l'attractivité globale.

Linéarisons (3.1) au voisinage de E_0 , nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = -\mu S(t) - \frac{\beta A}{\mu} I(t), \\ I'(t) = \frac{\beta A}{\mu} I(t) + \delta R(t) - (\mu + v\psi(\frac{A}{\mu})) I(t), \\ Q'(t) = v\psi(\frac{A}{\mu}) I(t) - (\mu + \phi) Q(t), \\ R'(t) = \phi Q(t) - (\mu + \delta) R(t). \end{array} \right. \quad (3.2)$$

la matrice jacobienne du système linéarisé est la suivante :

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\frac{\beta A}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu + \frac{\beta A}{\mu} - v\psi(\frac{A}{\mu}) & 0 & \delta \\ 0 & v\psi(\frac{A}{\mu}) & -(\mu + \phi) & 0 \\ 0 & 0 & \phi & -(\mu + \delta) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ de la matrice jacobienne $J(E_0)$ sont les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\frac{\beta A}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu + \frac{\beta A}{\mu} - v\psi(\frac{A}{\mu}) - \lambda & 0 & \delta \\ 0 & v\psi(\frac{A}{\mu}) & -(\mu + \phi) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \phi & -(\mu + \delta) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

L'équation caractéristique est donnée par

$$(\lambda + \mu)H(\lambda) = 0 \quad (3.3)$$

où

$$H(\lambda) = \left(\lambda - \frac{\beta A}{\mu} + \mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)\right)(\lambda + \mu + \phi)(\lambda + \mu + \delta) - \delta\phi v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right).$$

Il est clair que $-\mu$ est une valeur propre de (3.3), et toutes les autres valeurs propres sont les racines de $H(\lambda) = 0$.

Etape 1 : si $R_0 < 1$, prouvons la stabilité locale par le critère de Routh-Hurwitz; l'équation de $H(\lambda)$ s'écrit sous la forme :

$$H(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

avec

$$a = -\frac{\beta A}{\mu} + \mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right) + 2\mu + \phi + \delta.$$

$$b = (\mu + \phi)(\mu + \delta) + \left(-\frac{\beta A}{\mu} + \mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)\right)(\mu + \phi)(\mu + \delta).$$

$$c = \left[(\mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right))(\mu + \phi)(\mu + \delta) - \delta\phi v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)\right](1 - R_0).$$

Remarquons que si $R_0 < 1$, les coefficients a , b et c de $H(\lambda)$ sont positifs. De plus, on a

$$\begin{aligned} ab - c &= (2\mu + \phi + \delta)(\mu + \phi)(\mu + \delta) + (2\mu + \phi + \delta)^2\left(-\frac{\beta A}{\mu} + \mu + \psi\left(\frac{A}{\mu}\right)\right) \\ &\quad + \left(-\frac{\beta A}{\mu} + \mu + \psi\left(\frac{A}{\mu}\right)\right)^2(2\mu + \phi + \delta) - \delta\phi v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Alors selon le critère de Routh-Hurwitz, l'équilibre sans maladie E_0 est localement asymptotiquement stable.

Etape 2 : si $R_0 > 1$, prouvons l'instabilité de E_0 . Pour toute $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$H(0) = \left[(\mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right))(\mu + \phi)(\mu + \delta) - \delta\phi v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)\right](1 - R_0) < 0$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} H(\lambda) = +\infty$$

ce qui assure l'existence d'une valeur propre positive. Par conséquent, E_0 est instable pour $R_0 > 1$.

Etape 3 : prouvons l'attractivité globale par le lemme de fluctuation (voir chapitre 1, définition 1.9);

On définit premièrement

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (S(t), I(t), Q(t), R(t)) = (S^\infty, I^\infty, Q^\infty, R^\infty).$$

on a aussi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N^\infty \leq \frac{A}{\mu}.$$

Nous utilisons le lemme de fluctuation [19], il existe des suites $(s_k), (i_k), (q_k), (r_k)$,

$k \in N$, qui tendent vers l'infini quand k tend vers l'infini tel que

$$\begin{cases} S(s_k) \rightarrow S^\infty & \text{et } S'(s_k) \rightarrow 0, \\ I(i_k) \rightarrow I^\infty & \text{et } I'(i_k) \rightarrow 0, \\ Q(q_k) \rightarrow Q^\infty & \text{et } Q'(q_k) \rightarrow 0, \\ R(r_k) \rightarrow R^\infty & \text{et } R'(r_k) \rightarrow 0. \end{cases}$$

De la troisième équation de (3.1) on a

$$Q^\infty \leq \frac{v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)}{(\mu + \phi)} I^\infty. \quad (3.4)$$

Et de la quatrième équation de (3.1) on a

$$R^\infty \leq \frac{\phi v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)}{(\mu + \phi)(\mu + \delta)} I^\infty. \quad (3.5)$$

D'après (3.4) et (3.5) et la deuxième équation de (3.1) on a

$$0 \leq \beta S^\infty I^\infty - (\mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)) I^\infty + \frac{\delta\phi v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)}{(\mu + \phi)(\mu + \delta)} I^\infty.$$

puisque $S^\infty \leq \frac{A}{\mu}$ alors

$$0 \leq \frac{\beta A}{\mu} I^\infty - (\mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)) I^\infty + \frac{\delta\phi v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)}{(\mu + \phi)(\mu + \delta)} I^\infty.$$

ce qui donne

$$0 \leq \frac{(\mu + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right))(\mu + \phi)(\mu + \delta) - \delta\phi v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right)}{(\mu + \phi)(\mu + \delta)} I^\infty (R_0 - 1).$$

Puisque $R_0 < 1$, alors nécessairement $I^\infty = 0$, ce qui implique que $Q^\infty = 0$ et $R^\infty = 0$. Par conséquent $\beta I^\infty S^\infty \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ et le comportement asymptotique de S obéit à l'équation $S'(t) = A - \mu S(t)$. Ceci implique que $S(t) \rightarrow \frac{A}{\mu}$ quand $t \rightarrow \infty$.

■

3.4 Existence et stabilité de l'équilibre endémique

Lemme 3.1 *Si $R_0 > 1$, il existe un équilibre endémique unique E^* pour le système (3.1).*

PREUVE. L'équilibre endémique satisfait le système suivant

$$\begin{cases} A - \mu S^* - \beta S^* I^* = 0, \\ \beta S^* I^* + \delta R^* - (\mu + v\psi(N^*))I^* = 0, \\ v\psi(N^*)I^* - (\mu + \phi)Q^* = 0, \\ \phi Q^* - (\mu + \delta)R^* = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

de la première équation de (3.6), on a

$$S^* = \frac{A}{\mu + \beta I^*}. \quad (3.7)$$

ainsi, de la troisième et quatrième équation de système (3.6), on a

$$Q^* = \frac{v\psi(\frac{A}{\mu})}{\mu + \phi} I^*. \quad (3.8)$$

$$R^* = \frac{\phi v\psi(\frac{A}{\mu})}{(\mu + \phi)(\mu + \delta)} I^*. \quad (3.9)$$

Ensuite, en combinant (3.7), (3.9) et la deuxième équation de (3.6), nous avons

$$\frac{\beta A}{\mu + \beta I^*} I^* + \frac{\delta \phi v\psi(\frac{A}{\mu})}{(\mu + \phi)(\mu + \delta)} I^* - (\mu + v\psi(\frac{A}{\mu})) I^* = 0.$$

pour $I^* \neq 0$, on a

$$\frac{\beta A}{\mu + \beta I^*} + \frac{\delta \phi v\psi(\frac{A}{\mu})}{(\mu + \phi)(\mu + \delta)} - (\mu + v\psi(\frac{A}{\mu})) = 0.$$

Finalement si $\beta A(\mu + \phi)(\mu + \delta) > \mu[(\mu + v\psi(\frac{A}{\mu}))(\mu + \phi)(\mu + \delta) - \delta \phi v\psi(\frac{A}{\mu})]$ autrement dit $R_0 > 1$, l'expression de I^* est donnée par

$$I^* = \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\beta A(\mu + \phi)(\mu + \delta)}{\mu[(\mu + v\psi(\frac{A}{\mu}))(\mu + \phi)(\mu + \delta) - \delta \phi v\psi(\frac{A}{\mu})]} - 1 \right).$$

Nous concluons que si $R_0 > 1$ il existe un unique équilibre endémique $E^* = (S^*, I^*, Q^*, R^*)$ pour le système (3.1) avec,

$$S^* = \frac{A}{\mu R_0}, \quad I^* = \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1)$$

$$Q^* = \frac{\mu v\psi(\frac{A}{\mu})}{\beta(\mu + \phi)}(R_0 - 1), \quad R^* = \frac{\mu \phi v\psi(\frac{A}{\mu})}{\beta(\mu + \phi)(\mu + \delta)}(R_0 - 1)$$

■

Théorème 3.2 *Si $R_0 > 1$ et si l'inégalité $a_3(a_1a_2 - a_3) > a_1^2a_4$ est satisfaite, alors l'équilibre E^* est localement asymptotiquement stable. Les paramètres a_1 , a_2 , a_3 et a_4 sont les coefficients de l'équation caractéristique du système (3.1) au voisinage de E^* .*

PREUVE. La preuve du théorème fait intervenir le critère de Routh-Hurwitz, commençons par linéariser le système (3.1) autour de E^* , nous avons :

$$\begin{cases} s'(t) = -\mu S(t) - \beta I^* S(t) - \beta S^* I(t), \\ I'(t) = \beta I^* S(t) + \beta S^* I(t) + \delta R(t) - (v\psi(N^*) + \mu)I(t) - v\psi'(N^*)I^*N(t), \\ Q'(t) = v\psi'(N^*)I^*N(t) + v\psi(N^*)I(t) - (\mu + \phi)Q(t), \\ R'(t) = \phi Q(t) - (\mu + \delta)R(t). \end{cases} \quad (3.10)$$

La jacobienne du système (3.10) est

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta I^* & -\beta S^* & 0 & 0 \\ \beta I^* - dI^* & \beta S^* - \mu - dI^* - v\psi(N^*) & -dI^* & -v\psi'(N^*)I^* + \delta \\ dI^* & dI^* + v\psi(N^*) & dI^* - (\mu + \phi) & dI^* \\ 0 & 0 & \phi & (\mu + \delta) \end{pmatrix}$$

où $d = v\psi'(N^*)$ et $N^* = S^* + I^* + Q^* + R^* = \frac{A}{\mu}$.

L'équation caractéristique du système (3.10) au point E^* est donnée par :

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0.$$

avec

$$a_1 = -\frac{\beta A}{\mu R_0} + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right) + 3\mu + \phi + \delta + \mu R_0.$$

$$a_2 = \left(-\frac{\beta A}{\mu R_0} + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right) + \mu\right)(3\mu + \phi + \delta) + (\mu + \phi)(\mu + \delta) + (\mu + \phi)\mu R_0 \\ + (\mu + \delta)\mu R_0 + \left(v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right) + \mu\right)\mu(R_0 - 1).$$

$$a_3 = (\mu + \phi)(\mu + \delta)\mu R_0 + \left(-\frac{\beta A}{\mu R_0} + v\psi\left(\frac{A}{\mu}\right) + \mu\right)(2\mu + \delta + \phi)(\mu R_0) \\ + \frac{A(R_0 - 1)}{R_0}(2\mu + \phi + \delta).$$

$$a_4 = \frac{A(R_0 - 1)(\mu + \phi)(\mu + \delta)}{R_0}.$$

remarquons que tous les coefficients $a_i, i = 1, \dots, 4$ sont positifs si et seulement si $R_0 > 1$, alors par le critère de Routh-Hurwitz le point d'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable si on a l'inégalité

$$a_3(a_1 a_2 - a_3) > a_1^2 a_4.$$

■

3.5 Simulations numériques

Afin d'illustrer les résultats théoriques et voir le comportement des trajectoires, on fixe a priori les paramètres suivants, voir [18] :

$$A = 0.01, \quad \mu = 0.02, \quad \phi = 0.2, \quad \beta = 0.5.$$

et les conditions initiales :

$$S_0 = 0.9, \quad I_0 = 0.01, \quad Q_0 = 0, \quad r_0 = 0.$$

Avec la première catégorie de données : $\psi_1(N) = \frac{1}{1+0.5N}$

premier sous cas : $\delta = 0.01, v = 0.5$, on obtient un taux de reproduction de base $R_0 = 0.83 < 1$, remarquons d'après la figure 3.4 qu'il y a une convergence vers l'équilibre sans maladie $E_0 = (0.5, 0, 0, 0)$.

deuxième sous cas : $\delta = 0.4, v = 0.9$, on obtient un taux de reproduction de base $R_0 = 2.14 > 1$, remarquons d'après la figure 3.5 qu'il y a une convergence

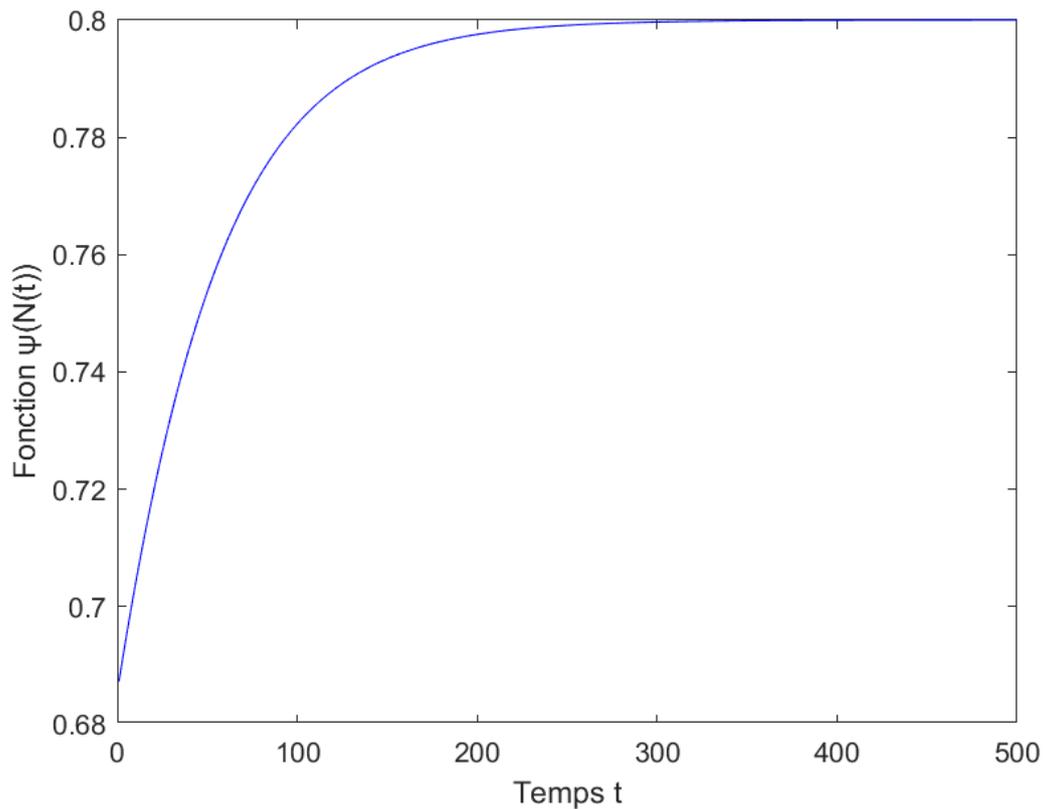


FIGURE 3.2 – L'évolution de la fonction $\psi(N(t)) = \psi_1(N(t))$ par rapport au temps t .

vers l'équilibre endémique $E^* = (0.23, 0.04, 0.14, 0.07)$.

troisième sous cas : $\delta = 0.01$, $v = 0.1$, on obtient un taux de reproduction de base $R_0 = 3,30 > 1$, remarquons d'après la figure 3.6 qu'il y a une convergence vers l'équilibre endémique $E^* = (0.15, 0.09, 0.03, 0.22)$

Avec la deuxième catégorie de données : $\psi_2(N) = \frac{1}{1+10N}$

premier sous cas : $\delta = 0.01$, $v = 0.5$. On obtient $R_0 = 3.20 > 1$ et d'après la figure 3.7 il y a une convergence vers l'équilibre endémique $E^* = (0.15, 0.08, 0.03, 0.22)$.

deuxième sous cas : $\delta = 0.01$, $v = 0.9$. On obtient $R_0 = 2.00 > 1$ et d'après la figure 3.8 il y a une convergence vers l'équilibre endémique $E^* = (0.24, 0.04, 0.02, 0.18)$.

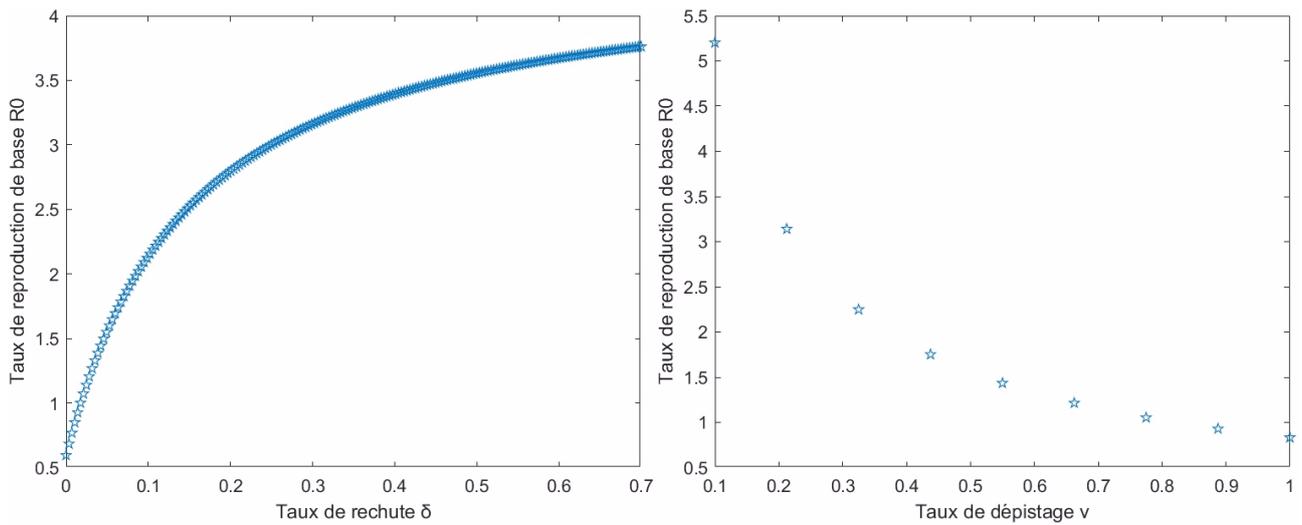


FIGURE 3.3 – Variation du taux de reproduction de base R_0 par rapport au taux de rechute δ , et au taux de dépistage v .

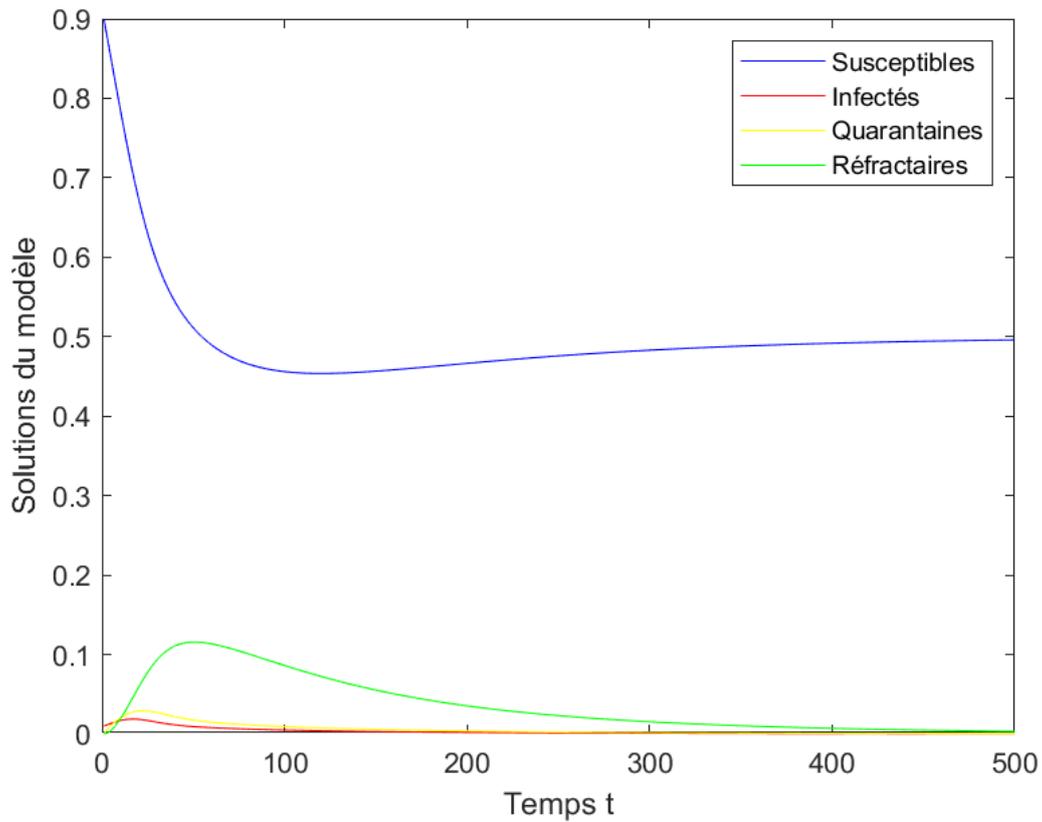


FIGURE 3.4 – L'évolution des solutions du système (3.1) par rapport au temps t , dans le cas où $\psi = \psi_1$, $\delta = 0.01$, $v = 0.5$.

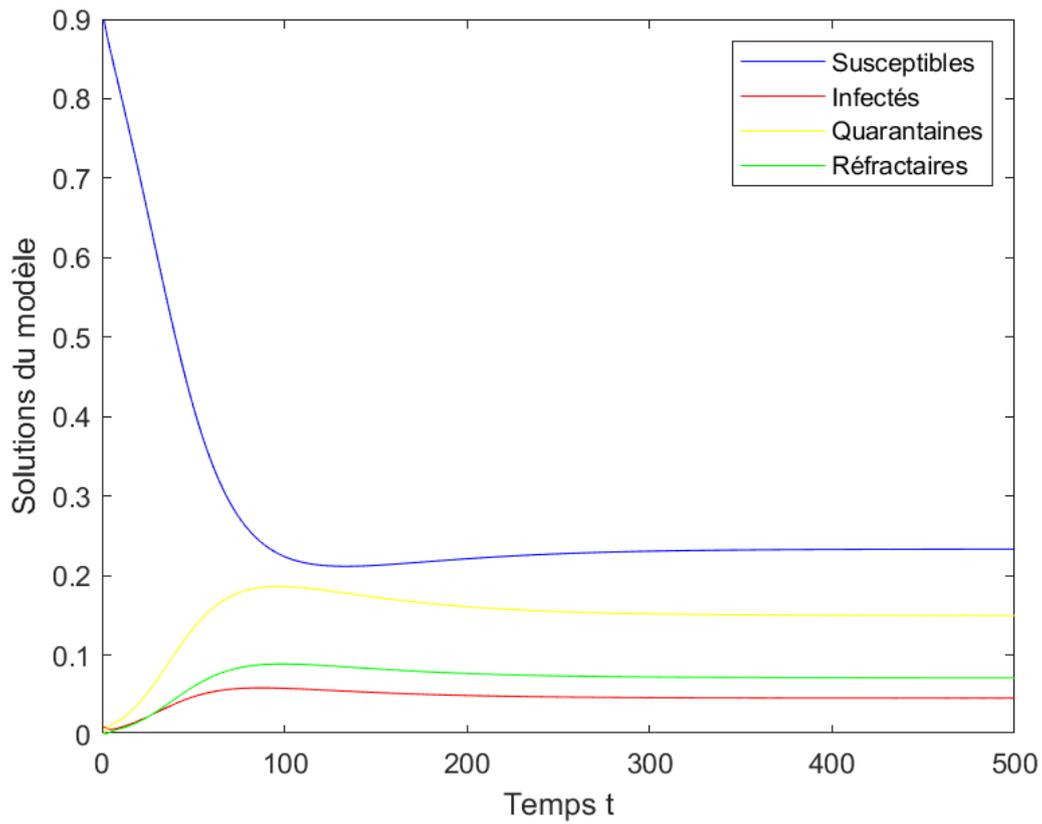


FIGURE 3.5 – L'évolution des solutions du système (3.1) par rapport au temps t , dans le cas où $\psi = \psi_1$, $\delta = 0.4$, $v = 0.9$.

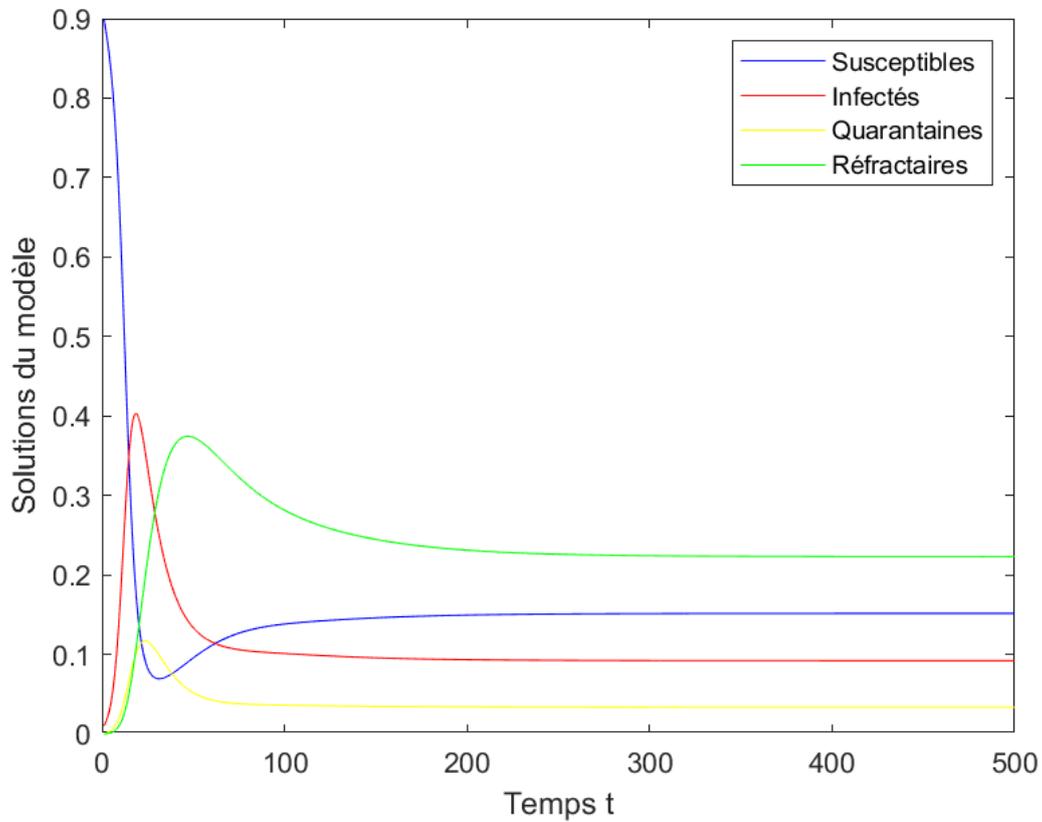


FIGURE 3.6 – L'évolution des solutions du système (3.1) par rapport au temps t , dans le cas où $\psi = \psi_1$, $\delta = 0.01$, $v = 0.1$.

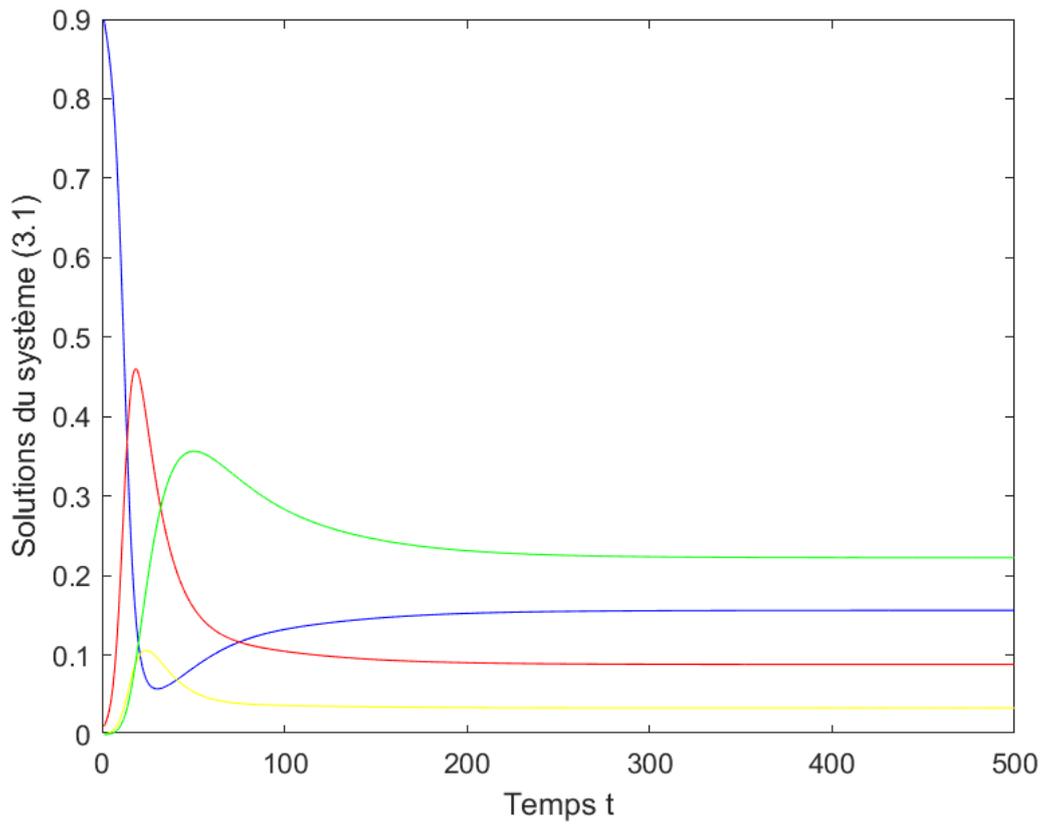


FIGURE 3.7 – L'évolution des solutions du système (3.1) par rapport au temps t , dans le cas où $\psi = \psi_2$, $\delta = 0.01$, $v = 0.5$.

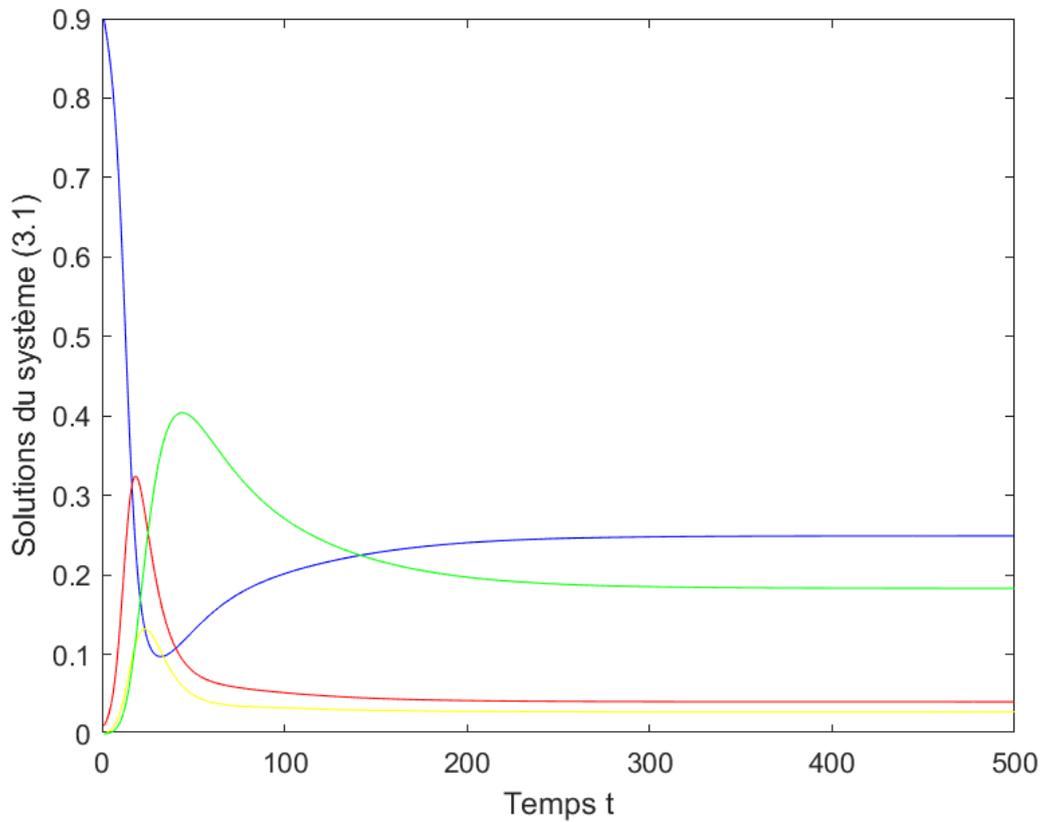


FIGURE 3.8 – L'évolution des solutions du système (3.1) par rapport au temps t , dans le cas où $\psi = \psi_2$, $\delta = 0.01$, $v = 0.9$.

Chapitre 4

Dépistage optimal

4.1 Formulation du problème

Dans cette section nous avons étendu le modèle (3.1) à un problème de contrôle optimal, avec le paramètre de contrôle v qui représente le dépistage de la population. L'objectif ici est de trouver la meilleure stratégie de dépistage qui minimise la densité des infectés tout en tenant compte des ressources disponibles et des coûts associés au dépistage.

Soit $I = [0, T]$, $T > 0$ fixé, pour tout $t \in I$ considérons le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = A - \mu S(t) - \beta S(t)I(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) + \delta R(t) - (\mu + v(t)\psi(N(t)))I(t) \\ Q'(t) = v(t)\psi(N(t))I(t) - (\mu + \phi)Q(t), \\ R'(t) = \phi Q(t) - (\mu + \delta)R(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

avec les conditions initiales :

$$S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 \geq 0, Q(0) = Q_0 > 0, R(0) = r_0 \geq 0.$$

et pour $\varepsilon > 0$, la famille d'objectifs :

$$J^\varepsilon(v) = \gamma \int_0^T v(t)\psi(N(t))I(t)dt - \eta \int_0^T I(t)dt - \theta \int_0^T v(t)dt - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T v^2 dt. \quad (4.2)$$

Considérons la famille de problèmes de contrôle optimal ;

$$(p_\varepsilon) \begin{cases} \max J^\varepsilon(v), \\ v \in V. \end{cases} \quad (4.3)$$

Où

$$V = \{v \in L^\infty(I; \mathbb{R}^+); v_{min} \leq v(t) \leq v_{max}, \text{ p.p.t.}\}.$$

Les différents termes dans la fonctionnelle coût (4.2) sont pondérés par les constants positives $\gamma, \eta, \theta, \varepsilon$. Le premier terme dans (4.2) désigne la densité des individus ayant répondu favorablement au dépistage et identifiés infectés. Le second et le troisième termes notent la densité des infectés et le coût social du programme de dépistage. Le dernier terme dans (4.2) est formel (répond à un besoin mathématique) et est donc faiblement pondéré.

On fait l'hypothèse suivante :

H) ψ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.

4.2 Existence du contrôle optimal

Proposition 4.1 *Pour tout v fixé dans V , le problème (4.1) admet une solution globale.*

Etant donnée que la solution locale est bornée, elle sera donc globale.

Les deux lemmes suivants sont utiles pour la suite :

Lemme 4.1 *L'ensemble V est convexe.*

Il est aisé de prouver la convexité, en effet :

pour tous $v_1, v_2 \in V$, et $\lambda \in [0, 1]$ on a,

$$v_{\min} \leq v_1 \leq v_{\max} \implies \lambda v_{\min} \leq \lambda v_1 \leq \lambda v_{\max}, \quad (4.4)$$

$$v_{\min} \leq v_2 \leq v_{\max} \implies (1 - \lambda)v_{\min} \leq (1 - \lambda)v_2 \leq (1 - \lambda)v_{\max}, \quad (4.5)$$

alors par (4.4) et (4.5) nous avons

$$v_{\min} \leq v_1 + (1 - \lambda)v_2 \leq v_{\max}.$$

ce qui implique que $v_1 + (1 - \lambda)v_2 \in V$.

Lemme 4.2 *La fonctionnelle J^ε est continue, bornée et concave.*

Notons que pour ε fixé, J^ε est quadratique donc continue concave (car la dérivée seconde par rapport à v est strictement négative). De plus, J^ε est uniformément bornée sur V borné.

Théorème 4.1 *Supposons que l'hypothèse H) est satisfaite. Le problème (4.1)-(4.3) admet une solution optimale.*

PREUVE.

- Etant donné V un domaine non vide, fermé, borné, convexe dans $L^\infty(I)$ et donc dans l'espace réflexif $L^2(I)$ puisque I est borné, (le lecteur est invité à consulter les espaces L^p , dans [7]) alors V est faiblement-compact, (confère [7] également).
- La fonctionnelle J^ε étant uniformément bornée alors son suprémum "d" est fini. Montrons que "d" est atteint.
Puisque "d" est fini, il existe $(v_n)_n$ dans V et $(S_n, I_n, Q_n, R_n)_n$ la trajectoire correspondante (où on a omis le epsilon) une suite maximisante i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} J^\varepsilon(v_n) = d$. Alors, il existe \hat{v} dans V telle que (v_n) converge faiblement vers \hat{v} dans V (lemme 4.1).
En utilisant les équations du modèle, les trajectoires sont bornées et équi-continues, puisqu'en intégrant la première équation (il en est de même pour les autres) entre tous t_1 et t_2 , il existe $c > 0$;

$$S(t_1) - S(t_2) \leq c|t_1 - t_2|$$

les trajectoires sont donc uniformément convergentes, grâce au théorème d'Ascoli ([7]), vers $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R})$.

En écrivant les équations différentielles sous forme intégrale, le passage à la limite se fait facilement, on retrouve que $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R})$ satisfait le modèle avec \hat{v} . En effet ;

$S_n(t) = S_n(0) + \int_0^t (A - \beta S_n(r) I_n(r)) dr$ converge vers $\hat{S}(t) = \hat{S}(0) + \int_0^t (A - \beta \hat{S}(r) \hat{I}(r)) dr$. Il en serait de même pour les autres équations.

En dérivant ces dernières équations, on trouve que $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R})$ satisfait le modèle avec \hat{v} .

Par ailleurs, dans l'objectif, le passage à la limite se fait dans chaque terme. On aura $J^\varepsilon(v_n)$ qui converge vers $J^\varepsilon(\hat{v})$, d'où l'optimalité est atteinte.

■

Remarque 4.1 1) *Il est facile de montrer que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, \hat{v}_ε (qui maximise J^ε) tend vers \hat{v} (qui maximise J^0), et la trajectoire $(\hat{S}_\varepsilon, \hat{I}_\varepsilon, \hat{Q}_\varepsilon, \hat{R}_\varepsilon)$ associée à \hat{v}_ε tend vers $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R})$ associée à \hat{v} , il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{n}$.*

2) *L'objectif J^ε étant concave, maximiser J^ε revient à minimiser $(-J^\varepsilon)$ qui est convexe sur un domaine convexe. La solution optimale d'un problème convexe est unique et sera caractérisée par les conditions d'optimalité.*

4.3 Système adjoint

L'Hamiltonien associé au système (4.1) est :

$$\begin{aligned}
H(t, x(t), \lambda(t), v(t)) &= \gamma v(t)\psi(N(t))I(t) - \eta I(t) - \theta v(t) - \frac{\varepsilon}{2}v^2(t) \\
&+ \lambda_1[A - \mu S(t) - \beta S(t)I(t)] \\
&+ \lambda_2[\beta S(t)I(t) + \delta R(t) - (\mu + v(t)\psi(N(t)))I(t)] \\
&+ \lambda_3[v(t)\psi(N(t))I(t) - (\mu + \phi)Q(t)] \\
&+ \lambda_4[\phi Q(t) - (\mu + \delta)R(t)].
\end{aligned} \tag{4.6}$$

D'après le principe de maximum de Pontryagin, si \hat{v} est un contrôle optimal et $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R})$ est la trajectoire associée, il existe une fonction $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^4$ telle que :

$$\left\{ \begin{aligned}
\dot{\lambda}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial S}(t, \hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R}, \lambda, \hat{v}) = -\gamma \hat{v}(t)\psi'(\hat{N}(t))\hat{I}(t) + \lambda_1(t)\mu + (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))\beta \hat{I}(t) \\
&+ (\lambda_2(t) - \lambda_3(t))\hat{v}(t)\psi'(\hat{N}(t))\hat{I}(t), \\
\dot{\lambda}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial I}(t, \hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R}, \lambda, \hat{v}) = -\gamma \hat{v}(t)(\psi'(\hat{N}(t))\hat{I}(t) + \psi(\hat{N}(t))) + \eta + \lambda_2(t)\mu \\
&+ (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))\beta \hat{S}(t) + (\lambda_2(t) - \lambda_3(t))\hat{v}(t)(\psi'(\hat{N}(t))\hat{I}(t) + \psi(\hat{N}(t))), \\
\dot{\lambda}_3(t) &= -\frac{\partial H}{\partial Q}(t, \hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R}, \lambda, \hat{v}) = -\gamma \hat{v}(t)\psi'(\hat{N}(t))\hat{I}(t) + \lambda_3(t)(\mu + \phi) \\
&+ (\lambda_2(t) - \lambda_3(t))v(t)\psi'(\hat{N}(t))\hat{I}(t) - \lambda_4\phi, \\
\dot{\lambda}_4(t) &= -\frac{\partial H}{\partial R}(t, \hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R}, \lambda, \hat{v}) = -\gamma \hat{v}(t)\psi'(\hat{N}(t))\hat{I}(t) - \lambda_2(t)\delta \\
&+ (\lambda_2(t) - \lambda_3(t))\hat{v}(t)\psi'(\hat{N}(t))\hat{I}(t) + \lambda_4(\mu + \delta). \\
\lambda_1(T) &= \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = 0 \text{ (conditions de transversalité)}
\end{aligned} \right.$$

On utilise la condition d'optimalité

$$\frac{\partial H}{\partial v}(t, \hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R}, \hat{v}) = 0,$$

nous avons

$$\gamma\psi(\hat{N}(t))\hat{I}(t) - \theta - \varepsilon\hat{v} + (\lambda_3(t) - \lambda_2(t))\psi(\hat{N}(t))\hat{I}(t) = 0$$

ceci implique que

$$\hat{v} = \frac{\gamma\psi(\hat{N}(t))\hat{I}(t) + (\lambda_3(t) - \lambda_2(t))\psi(\hat{N}(t))\hat{I}(t) - \theta}{\varepsilon}.$$

Finalement, en utilisant l'hypothèse de bornitude sur V , les différents cas de contrôle optimal sont données par

$$\hat{v} = \max \left\{ v_{\min}, \min \left\{ v_{\max}, \frac{\gamma\psi(\hat{N}(t))\hat{I}(t) + (\lambda_3(t) - \lambda_2(t))\psi(\hat{N}(t))\hat{I}(t) - \theta}{\varepsilon} \right\} \right\}. \quad (4.8)$$

4.4 Simulations numériques

Pour toutes les simulations suivantes, on garde les mêmes données que précédemment :

$$A = 0.01, \quad \mu = 0.02, \quad \phi = 0.2, \quad \beta = 0.5.$$

$$\psi_1 = \frac{1}{1 + 0.5N}, \quad \psi_2 = \frac{1}{1 + 10N}.$$

ainsi que les conditions initiales :

$$S_0 = 0.9, \quad I_0 = 0.01, \quad Q_0 = 0, \quad r_0 = 0.$$

Sous MATLAB, nous avons utilisé Runge-Kutta avant-arrière pour calculer les solutions du système d'états et les solutions du système adjoint. Les contrôles sont mis à jour en utilisant une combinaison convexe des contrôles précédents et des valeurs de l'équation (4.8). L'itération est arrêtée si les valeurs des inconnues à l'itération précédente sont très proches de celles de l'itération actuelle voir [8].

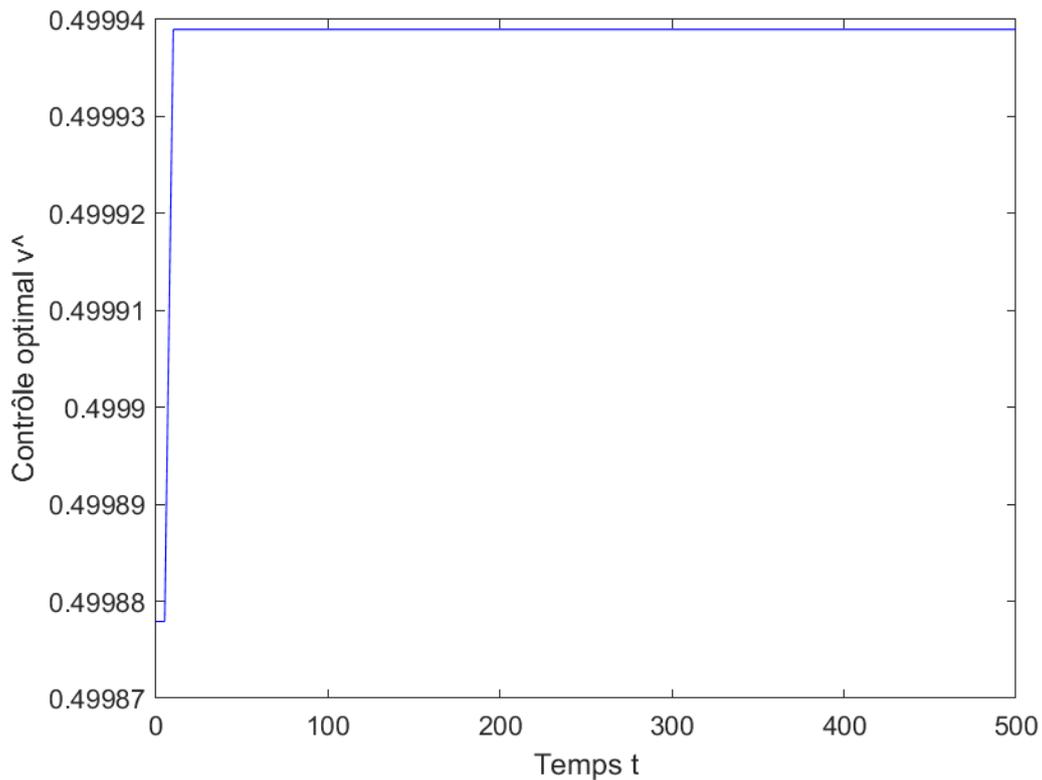


FIGURE 4.1 – Le contrôle optimal \hat{v} pour le problème (4.1)-(4.3) dans le cas où $\psi = \psi_1$ et $\delta = 0.2$.

Dans la figure (4.2), on remarque qu'avec une bonne réponse de la population totale, le contrôle optimal oscille autour de 0.5 (devant un taux de rechute important 0.4) afin de diminuer au mieux la densité des infectés, figure (4.3).

Dans la figure (4.4), avec une faible réponse au dépistage et devant un taux de rechute assez important, le contrôle optimal s'éternise pour croître à son maximum, en vue de décroître la densité des infectés, figure (4.5).

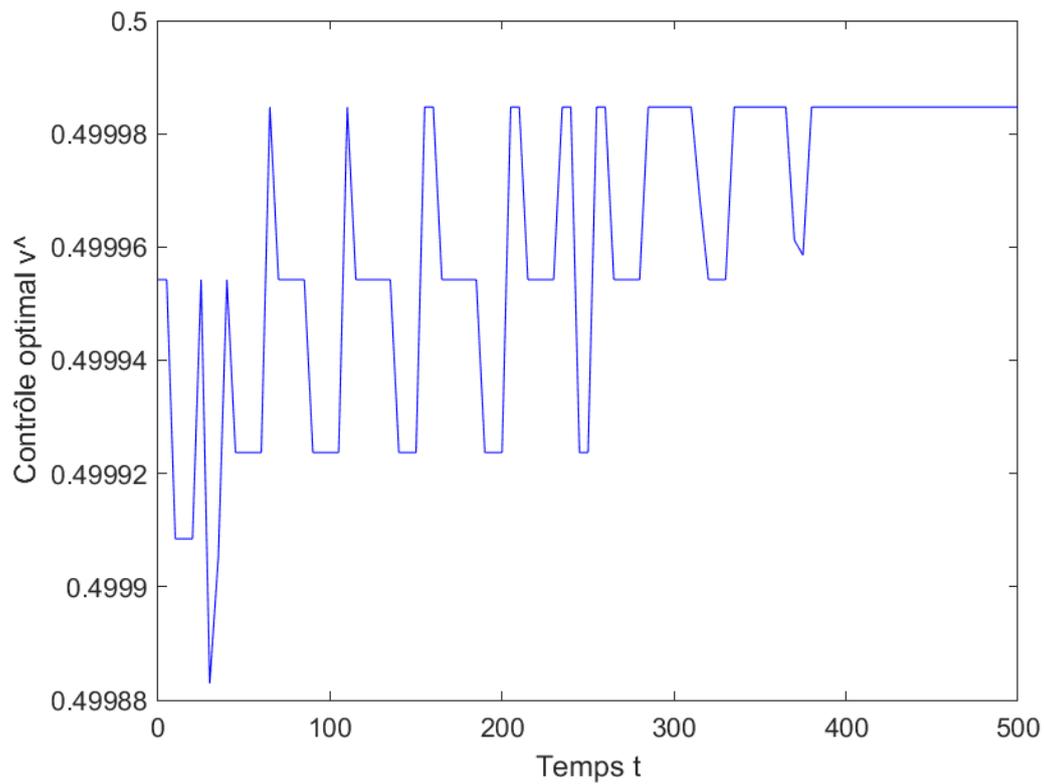


FIGURE 4.2 – Le contrôle optimal \hat{v} pour le problème (4.1)-(4.3) dans le cas où $\psi = \psi_1$ et $\delta = 0.4$.

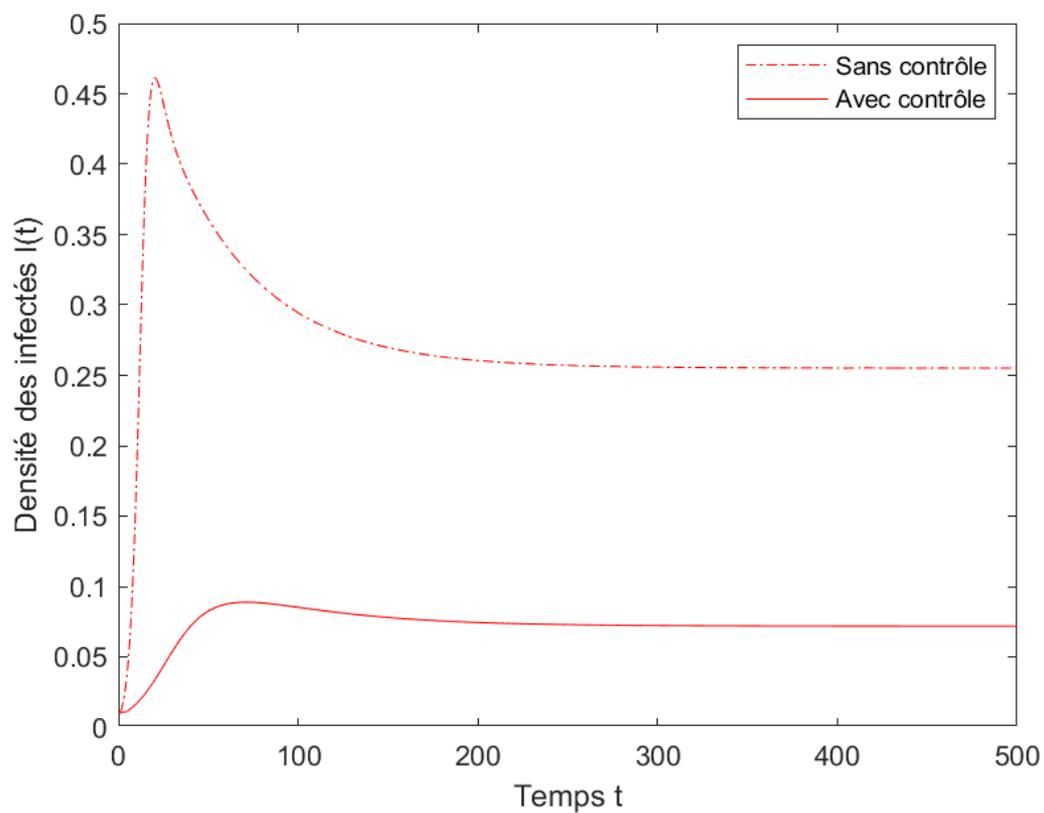


FIGURE 4.3 – L'évolution de la densité des infectés $I(t)$ par rapport au temps t dans le cas où $\psi = \psi_1$ et $\delta = 0.2$.

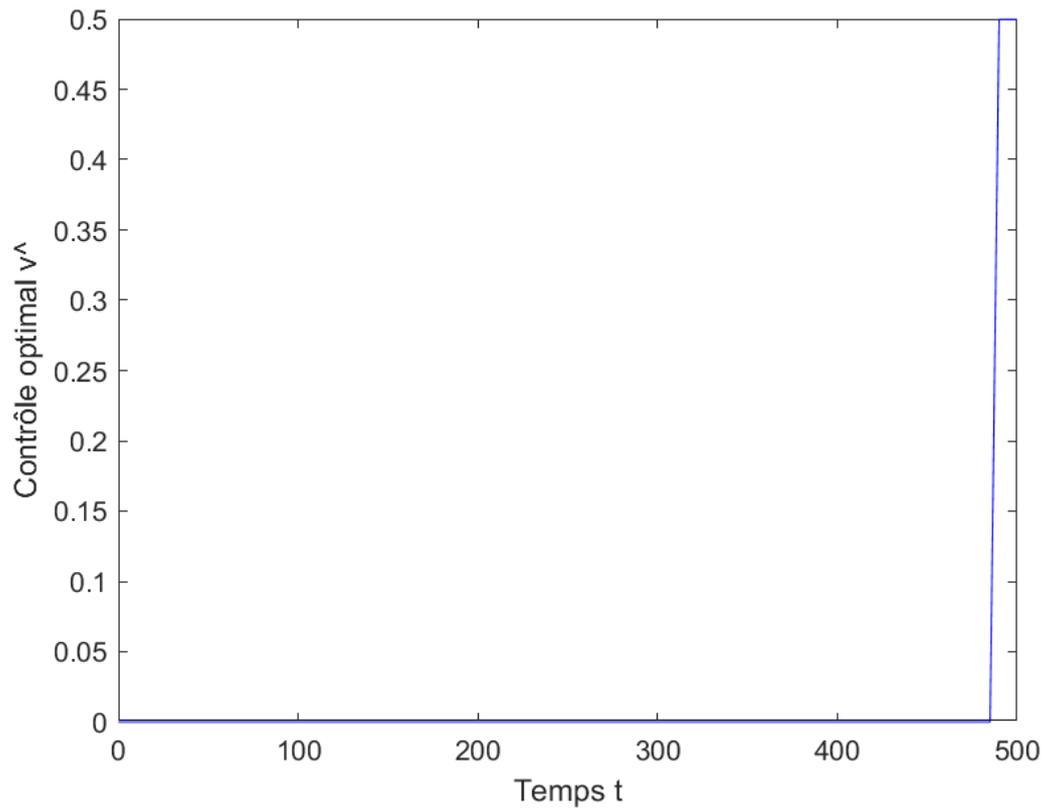


FIGURE 4.4 – Le contrôle optimal \hat{v} pour le problème de contrôle optimal (4.1)-(4.3) dans le cas où $\psi = \psi_2$ et $\delta = 0.2$.

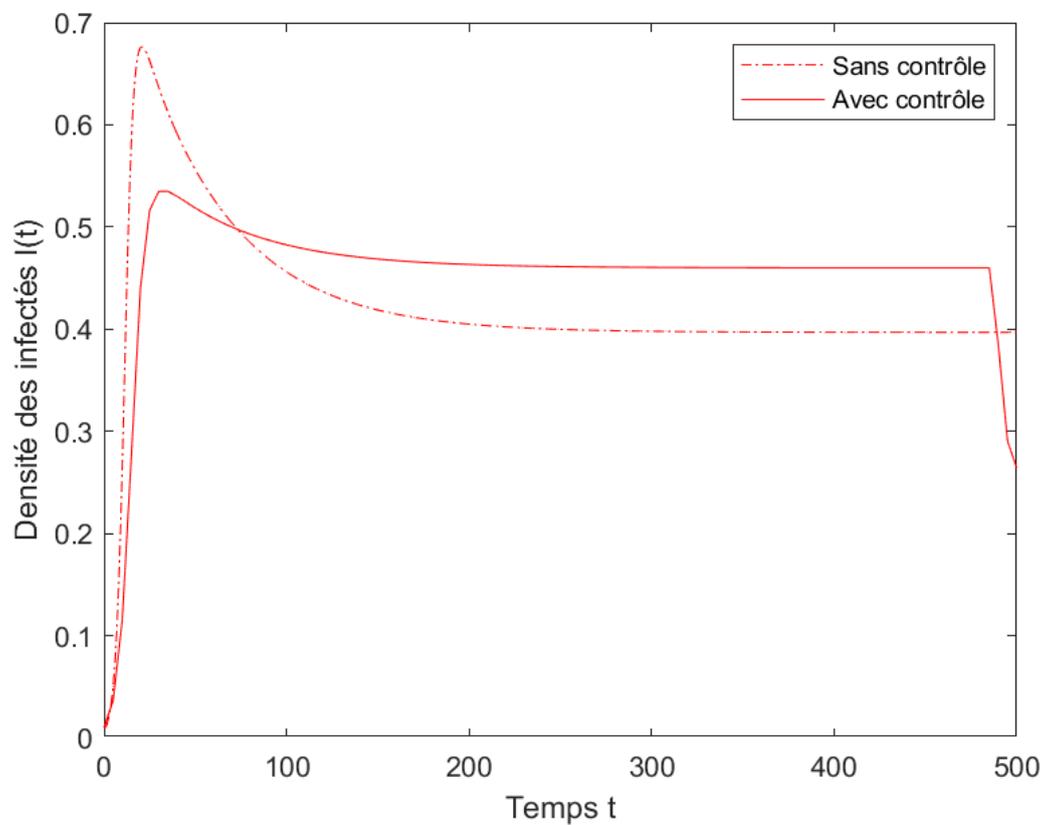


FIGURE 4.5 – L'évolution de la densité des infectés $I(t)$ par rapport au temps t dans le cas où $\psi = \psi_2$ et $\delta = 0.2$.

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons étudié un modèle épidémique sujet au dépistage via la réponse de la population totale, le modèle connaît également la rechute dans la classe des réfractaires. L'étude se fait en deux parties, à savoir la stabilité, et le contrôle optimal.

Numériquement, nous optons par l'analyse de variation par rapport à un certain nombre de paramètres. Pour cela, nous fixons certaines valeurs et faisons varier d'autres comme suit :

Première catégorie

- Dans le cas où nous avons pris $\delta = 0.01$ et $v = 0.5$, on eu $R_0 < 1$.
- Quand la rechute augmente à $\delta = 0.4$, même avec un dépistage $v = 0.9$, et une certaine réponse appréciable de la population totale, on a eu $R_0 > 1$. D'où l'intérêt du protocole sanitaire afin d'éviter la rechute.
- Ensuite, on affaibli la réponse de la population totale au dépistage, il s'avère qu'avec les mêmes données précédentes, $R_0 > 1$. D'ou l'intérêt de la réponse de la population totale au dépistage.

Deuxième catégorie

- Avec $\psi_1 = \frac{1}{1+0.5N}$, on a remarqué que les infectés ont diminué significativement comparant aux infectés obtenus pour le même contrôle optimal mais avec la réponse $\psi_2 = \frac{1}{1+10N}$.

On conclut alors que les mesures sanitaires de prévention et d'intervention sont impératives devant certaines épidémies. Cependant, celles-ci sont d'autant plus efficaces que la population réponde massivement. D'où l'intérêt de sensibilisation des populations.

En perspectives, on a étudié un système d'équations différentielles ordinaires dans l'espoir de l'étendre à un système d'équations aux dérivées partielles avec contrôle optimal.

Je voudrais, dans ce mémoire, rendre un hommage hautement respectueux à feu Pr Pierre Magal, professeur à l'université de Bordeaux (France). Une icône de la recherche scientifique qui vient de quitter précocement la communauté mathématique. Paix à son âme.

Bibliographie

- [1] B. Aïnseba, M. Iannelli, Optimal Screening in structured SIR Epidemics, *Math. Model. Nat. Phenom*, 7, 12-27, 2012.
- [2] P. Auger, *Modélisation mathématique en écologie*. Dunod, Paris, 2010.
- [3] D. Bernoulli, Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, *Mem. Math. Phys. Acad. Roy. Sci*, Paris, 1-45, 1766.
- [4] D. Bernoulli, Reflexions sur les avantages de l'inoculation. *Mercure de France*, 173-190, 1760.
- [5] D. Bichara, étude de modèles épidémiologiques : Stabilité, observation et estimation de paramètres, Thèse de doctorat, 2013.
- [6] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer, New York, 2000.
- [7] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et application*, Dunod, Paris, 2005.
- [8] C. Campos, C. J. Silva and D. F. M. Torres, Numerical Optimal Control of HIV Transmission in Octave/MATLAB, *Mathematical and Computational Applications*, 25(1), 1, 2020.
- [9] J. Demailly, *analyse numérique et équations différentielles*, EDP science, 2016.
- [10] O. Diekmann and J.A.P. Heesterbeek. *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and Interpretation*. Wiley Series in Mathematical et Computational Biology. Wiley, 2000.
- [11] A. El Jai et E. Zerrik, *Stabilité des systèmes dynamiques*, 2013.
- [12] W.O.Kermack , A.G.McKendrick , A contribution to the mathematical theory of epidemics Part II *Proc. R. Soc. Lond A*, 138, 55-83, 1932.
- [13] Z. Liu, P. Magal, O.Seydi and G. Webb, Understanding Unreported Cases in the COVID-19 Epidemic Outbreak in Wuhan, China, and the Importance of Major Public Health Interventions, *Biology*, 9(3), 50, 2020.
- [14] Y. Ma, J. B. Liu and H. Li, Global Dynamics of an SIQR Model with Vaccination and Elimination Hybrid Strategies, *Mathematics*, 6(12), 328, 2018.

- [15] P. Magal, O. Seydi, and G Webb, Final size of an epidemic for a two-group SIR model, *SIAM J. APPL. MATH*, 76, 2042–2059, 2016.
- [16] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [17] R. Ross, *The prevention of malaria*, JohnMurray, 1911.
- [18] Z. Sari, T. M. Touaoula and B. Ainseba, Mathematical analysis of an age structured epidemic model with a quarantine class, *Math. Model. Nat. Phenom*, 16, 57, 2021.
- [19] H.L. Smith, H.R.Thieme, *Dynamical Systems and Population Persistence*, Graduate Studies in Mathematics, 118 AMS, 2011.
- [20] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005.
- [21] P. van den Driessche, J. Watmough, Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Mathematical Biosciences*, 180, 29–48, 2002.