République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement Supérieure de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Option : Équations aux dérivées partielles et applications

présenté par

Chaima BENSBA

Soutenu le : 20 06 2024

Caractérisation variationnelle des valeurs propres du Laplacien fractionnaire et applications.

Soutenu devant le jury composé de :

Mme. Yasmina NASRI	Pr.	Université de Tlemcen	Présidente
M. Boumediene ABDELLAOUI	Pr.	Université de Tlemcen	Examinateur
M. Mohammed Brahim ZAHAF	MCA	Université de Tlemcen	Encadrant
M. Maxime INGREMEAU	MC	Université Côte d'Azur- Nice	co-Encadrant
M. Youssouf Oussama BOUKARABILA	MCA	Université de Tlemcen	Invité

Année Universitaire : 2023-2024

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :
Mes très chers parents.
Mes frères : Walid et Haroun.
Ma soeur :Farah.
Toute ma famille.
Tous mes amies et mes collègues sans exception.

Remerciements

En tout premier lieu , Je remercie **Dieu** tout puissant de la patience et de la volonté qu'il m'a donné pour réaliser ce travail.

Je remercie chaleureusement Monsieur **Mohammed Brahim ZAHAF** qu'il m'a fait l'honneur d'accepter l'encadrement de ce mémoire. Il était très généreux à travers sont soutient, sa disponibilité, ses conseils et ses orientations qui m'ont permet de mener ce travail à son terme. C'est grâce à vous que ce travail a pris cette forme.

Je remercie aussi mon co-encadrant Monsieur **Maxime INGREMEAU** pour ses commentaires, ses remarques et ses conseils qui avaient un rôle important dans l'amélioration de ce mémoire.

Je tiens à remercier, également, Madame **Yasmina NASRI**, pour l'honneur d'avoir accepter de présider le jury.

Je tiens aussi à remercier Monsieur **Boumediene ABDELLAOUI** d'avoir accepter d'examiner mon mémoire et de faire partie du jury.

J'adresse mes vifs remerciements à l'ensemble des enseignants du département de Mathématique qui m'ont aidé à m'améliorer durant mon cursus universitaire.

Je remercie mes chers parents, pour tous leur amour, leurs incessantes sacrifices, leurs précieux conseils, leur soutien et leurs prières et tout ce qui ils ont fait pour que je puisse arriver à ce stade.

Table des matières

Notation

Symbole	**Signification**
$x = (x_1, x_2, ..., x_d)$	Élément de $\mathbb{R}^d$
$r = \vert x\vert = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_d^2}$	Module de x
$(-\Delta)^s u$	Laplacien fractionnaire de u
$\Omega \subset \mathbb{R}^d$	Domaine borné à frontière régulière
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
Ω^c	Complémentaire de Ω dans $\mathbb{R}^d$
supp u	Support de la fonction u
B_R	Boule de $\mathbb{R}^d$ de rayon R centrée à l'origine
$B_R(x_0)$	Boule de $\mathbb{R}^d$ de rayon R centrée en $x_0 \in \mathbb{R}^d$
S^{d-1}	La sphère unité de $\mathbb{R}^d$
ω_{d-1}	La mesure de Lebesgue de la sphère unité S^{d-1}
ϖ_d	La mesure de Lebesgue de la boule unité de $\mathbb{R}^d$
E'	Espace dual de E
u_+	Partie positive de la fonction u, $u_+ = \max(u, 0)$
u_-	Partie négative de la fonction u, $u_- = \max(-u, 0)$
$C_0^n(\mathbb{R}^d)$	$\{u \in C^n(\mathbb{R}^d);\ u(x) \to 0 \ quand\ \vert x\vert \to +\infty\}$
$C_0^n(\Omega)$	$\{u \in C^n(\Omega);\ u(x) \to 0 \ quand\ \vert x\vert \to +\infty\}$
$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$	$\{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d);\ u$ à support compact $\}$
$C_c^\infty(\Omega)$	$\{u \in C^\infty(\Omega);\ u$ à support compact dans $\Omega\}$

Introduction

Récemment, une grande attention a été portée à l'étude des opérateurs fractionnaires et non locaux de type elliptique. Ce type d'opérateurs apparaît de manière tout à fait naturelle dans divers contextes, tels que le traitement d'images, la finance, l'électromagnétique, la diffusion des fluides, la péridynamique, l'écoulement de milieux poreux, et bien d'autres encore.
L'exemple de base de ces opérateurs non locaux est le laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ défini par

$$(-\Delta)^s u(x) := C(d,s) \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+2s}}\, dy, \ x \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

où

$$C(d,s) := \frac{s4^s \Gamma\left(\frac{2s+d}{2}\right)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(1-s)} \tag{2}$$

est la constante de normalisation. Un problème intéressant concernant le Laplacien fractionnaire est de trouver ses valeurs propres sur des domaines bornés. A savoir, trouver un nombre positif λ (valeur propre) et une fonction $u \not\equiv 0$ (fonction propre) telle que

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda u & dans\ \Omega \\ u = 0 & dans\ \mathbb{R}^d \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

où $s \in]0,1[$ et et Ω est un sous-ensemble ouvert, borné de $\mathbb{R}^d$ avec frontière Lipschitzienne.
Il est bien connu [17, Proposition 9], [13, Proposition 3.1] (voir aussi chapitre 2) que, pour tout $s \in]0,1[$ le problème (3.3.2) admet une suite ordonnée de valeurs propres $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ avec $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$ et une base L^2-orthonormale correspondante des fonctions propres e_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$
Notons que même si Ω est un intervalle, il est très difficile d'obtenir des expressions analytiques explicites pour les valeurs propres et les fonctions propres du Laplacien fractionnaire. Cela motive l'utilisation d'approximations de ce problème.

Dans ce mémoire, notre objectif est la caractérisation variationnelle des valeurs propres et des vecteurs propres du problème (3.3.2) et de proposer des estimations pour les premières valeurs propres de $(-\Delta)^s$ dans la boule unité B_1 de $\mathbb{R}^d$.

Le plan de ce mémoire est le suivant :
Dans le premier chapitre, nous donnons une introduction aux espaces de Sobolev fractionnaires et étudions certaines de leurs propriétés fondamentales, puis nous rappelons quelques définitions équivalentes de l'opérateur de Laplace fractionnaire dont nous introduisons l'opérateur laplacien fractionnaire via la transformée de Fourier. Nous donnons aussi quelques propriétés de la

constante de normalisation $C(d,s)$ donnée par (2). Notons que $C(d,s)$ est choisie de sorte que les différentes définitions du laplacien fractionnaire soient équivalentes et que $\lim_{s\to 0^+}(-\Delta)^s u = u$ et $\lim_{s\to 1^-}(-\Delta)^s u = -\Delta u$. Nous étudierons ensuite le Laplacien fractionnaire comme opérateur de Dirichlet-Neumann pour un problème d'extension pour lequel nous présentons la méthode introduite par Caffarelli et Silvestre [3] qui permet de transformer des problèmes non locaux dans $\mathbb{R}^d$ en d'autres dans lesquels apparaît un opérateur différentiel dans $\mathbb{R}^{d+1}_+$. Nous terminons ce premier chapitre par définir ledit laplacien fractionnaire spectral qui est défini comme la puissance de l'opérateur Laplacien "classique" $-\Delta$, obtenue en utilisant la décomposition spectrale du Laplacien.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons une caractérisation variationnelle des valeurs propres et des vecteurs propres du problème (3.3.2) et discutons de certaines de leurs propriétés telles que la positivité de la première fonction propre, la multiplicité des valeurs propres et la L^2-orthonormalité des fonctions propres.

Dans le dernier chapitre, nous rappelons en première section quelques notions de base sur les fonctions de gamma et bêta d'Euler ainsi de la fonction hypergéométrique de Gauss ${}_2F_1$ dont nous aurons besoin dans la suite. Dans la deuxième section, nous prouvons le théorème suivant pour $d = 1$ et $d > 1$:

Théorème 0.1 *Soit $d \geq 1$, $0 < s < 1$ et $p > -1$. On définit*

$$u_p^{(d)}(x) = (1-|x|^2)_+^p, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$
$$v_p^{(d)}(x) = (1-|x|^2)_+^p x_d, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

Si $x \in \mathbb{R}^d$ et $|x| < 1$, alors

$$-(-\Delta)^s u_p^{(d)}(x) = \frac{C(d,s)B(-s,p+1)\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}\,{}_2F_1\Big(s+\frac{d}{2}, -p+s; \frac{d}{2}; |x|^2\Big),$$
$$-(-\Delta)^s v_p^{(d)}(x) = x_d\,\frac{C(d+2,s)B(-s,p+1)\pi^{(d+2)/2}}{\Gamma(\frac{d+2}{2})}\,{}_2F_1\Big(s+\frac{d+2}{2}, -p+s; \frac{d+2}{2}; |x|^2\Big).$$

Dans la dernière section, nous utilisons la méthode variationnelle standard pour trouver des estimations des premières valeurs propres de $(-\Delta)^s$ dans la boule unité B_1 de $\mathbb{R}^d$. Pour cela, nous utilisons le théorème 0.1 car dans notre situation cette méthode nécessite des expressions explicites pour l'opérateur fractionnaire de Laplace appliqué à un ensemble linéairement dense de fonctions dans $L^2(B_1)$, notamment, les fonctions de la forme $f(x) = (1-|x|^2)_+^p$. On termine ce chapitre par quelques exemples de calcul numérique des bornes supérieure et inférieure des premières valeurs propres.

Chapitre 1

Laplacien fractionnaire

Dans ce premier chapitre, nous donnons un aperçu du Laplacien fractionnaire. Nous apportons notamment plusieurs définitions de cet opérateur non local et une série de preuves de ses propriétés.

1.1 Transformée de Fourier

Définition 1.1 (Espace de Schwartz) *On note par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables dont les dérivées à tout ordre sont à décroissance rapide :*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d);\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \ \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\beta D^\alpha \varphi(x)\right| < +\infty\},$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\ldots\partial_d^{\alpha_d}$.
La topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est définie par la famille de semi-normes suivante

$$p_N(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|)^N \sum_{|\alpha|\leq N} |D^\alpha \varphi(x)|\,, \quad N = 0, 1, 2, \ldots,$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_d$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.2 *On note*

$$\mathscr{F}\varphi(\xi) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot x}\,\varphi(x)\,dx \tag{1.1}$$

la transformée de Fourier d'une fonction φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Notez que, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $\mathscr{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On peut facilement vérifier que la transformée de Fourier (1.1) et la transformée de Fourier inverse, données par

$$\mathscr{F}^{-1}\varphi(x) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\,\varphi(\xi)\,d\xi \tag{1.2}$$

sont toutes deux continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. De plus, puisque

$$\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\varphi = \mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}\varphi = \varphi,$$

chacune d'elles est, en fait, un isomorphisme et un homéomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
En utilisant la définition 1.1, on a

$$u \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ si et seulement si } \mathscr{F}u \in L^2(\mathbb{R}^d) \tag{1.3}$$

et

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathscr{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{1.4}$$

pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. La formule (1.4) est la formule dite de Parseval – Plancherel.

1.2 Espaces de Sobolev fractionnaires

Soit Ω un ouvert, éventuellement non régulier, de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ et $p \in [1, +\infty[$. Pour tout $s > 0$, nous définissons l'espace de Sobolev fractionnaire.
Si $s \geq 1$ est un entier positif, on note $W^{s,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev classique muni de la norme standard

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \sum_{0<|\alpha|<s} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Définition 1.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Soit $0 < s < 1$ et $1 \leq p < \infty$. L'espace de Sobolev fractionnaire, noté par $W^{s,p}(\Omega)$, est défini par*

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}}\, dy\, dx < \infty \right\}.$$

C'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + [u]_{W^{s,p}(\Omega)},$$

où

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}}\, dy\, dx \right)^{1/p} \tag{1.5}$$

appelé la semi-norme de Gagliardo.

Lorsque $s > 1$ et $s \notin \mathbb{N}$, on peut écrire $s = m + \sigma$, où $m \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in]0, 1[$. Nous pouvons définir $W^{s,p}(\Omega)$ comme suit :

$$W^{s,p}(\Omega) := \{u \in W^{m,p}(\Omega) :\ D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \text{ tel que } |\alpha| = m\}.$$

Dans ce cas, $W^{s,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)} \right)^{1/p},$$

pour tout $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

Remarque 1.1 *L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est bien défini et est un espace de Banach pour tout $s > 0$.*

Comme dans le cas classique où $s \in \mathbb{N}$, toute fonction dans l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ peut être approximée par une suite de fonctions de classe C^∞ à support compact.

Théorème 1.1 *Pour tout $s > 0$, l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$.*

$$\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)}} = W^{s,p}(\mathbb{R}^d).$$

Preuve. Une preuve peut être trouvée dans [1, Théorème 7.38]. ■

En général, si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{s,p}(\Omega)$. On note donc par $W_0^{s,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme , c'est,

$$W_0^{s,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}}.$$

Avec cette définition, on peut aussi construire $W^{s,p}(\Omega)$ lorsque $s < 0$. En effet, pour $s < 0$ et $p \in]1, +\infty[$, on peut définir

$$W^{s,p}(\Omega) = \left(W_0^{-s,q}(\Omega)\right)',$$

c'est-à-dire que $W^{s,p}(\Omega)$ est l'espace dual de $W_0^{-s,q}(\Omega)$, où $1/p + 1/q = 1$.

Proposition 1.1 *Soit $p \in [1, +\infty)$ et $0 < s \leq s' < 1$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors il existe une constante $C = C(d, s, p) \geq 1$ telle que*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}.$$

En particulier,

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)\,.$$

Preuve. Remarquons que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{d+sp}}\,dx\,dy \;&\leq\; \int_\Omega \left(\int_{|z|\geq 1} \frac{1}{|z|^{d+sp}}\,dz\right) |u(x)|^p\,dx \\ &\leq\; C(d,s,p)\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\,,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $1/|z|^{d+sp}$ est intégrable puisque $d + sp > d$.
Compte tenu de l'estimation ci-dessus, il s'ensuit

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}}\,dx\,dy \\ &\qquad\leq 2^{p-1} \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p + |u(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}}\,dx\,dy \\ &\qquad\leq 2^p C(d,s,p)\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

D'autre part,

$$\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}}\,dx\,dy \;\leq\; \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{d+s'p}}\,dx\,dy\,. \tag{1.7}$$

Ainsi, en combinant (1.6) avec (1.7), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}}\,dx\,dy \\ &\qquad\leq 2^p C(d,s,p)\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{d+s'p}}\,dx\,dy\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} &\leq \left(2^p C(d,s,p)+1\right)\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{d+s'p}}\,dx\,dy \\ &\leq C(d,s,p)\|u\|^p_{W^{s',p}(\Omega)},\end{aligned}$$

ce qui donne l'estimation souhaitée. ∎

Proposition 1.2 *Soit $p \in [1,+\infty)$. Soient Ω un ouvert Lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors on a les assertions suivantes :*
1. Si $s \in]0,1[$ et Ω est de frontière bornée alors il existe constante $C = C(d,s,p) \geq 1$ telle que

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.8}$$

En particulier,

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)\,.$$

2. Si $s' \geq s > 1$ alors

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Preuve. Voir [14] la proposition 2.2 et le corollaire 2.3 ∎

1.2.1 L'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et soit $0 < s < 1$,on note $H^s(\Omega)$ l'espace $W^{s,2}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{W^{s,2}(\Omega)}$ est un espace de Hilbert et le produit scalaire associé à la norme est défini par :

$$\langle u,v\rangle_{H^s(\Omega)} := \int_\Omega u(x)v(x)\,dx + \int_\Omega\int_\Omega \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{d+2s}}\,dx\,dy,$$

pour tout $u, v \in H^s(\Omega)$.
Si $\Omega = \mathbb{R}^d$, pour tout $s \in]0,1[$, on a

$$H^s(\mathbb{R}^d) := W^{s,2}(\mathbb{R}^d) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : [u]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^d)} < +\infty\right\} \tag{1.9}$$

où $[\cdot]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^d)}$ est défini dans la formule (1.5).
L'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ peut être défini d'une manière alternative via une transformée de Fourier. Précisément, définissons

$$\widehat{H}^s(\mathbb{R}^d) := \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^{2s})|\mathscr{F}u(\xi)|^2\,d\xi < +\infty\right\} \tag{1.10}$$

pour tout $s > 0$,et

$$\widehat{H}^s(\mathbb{R}^d) := \left\{u \in \mathcal{S}' : \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s|\mathscr{F}u(\xi)|^2\,d\xi < +\infty\right\}$$

pour tout $s < 0$. L'équivalence entre l'espace $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^d)$ défini dans (1.10) et celui défini via la norme de Gagliardo dans (1.9) est énoncée et prouvée plus loin pour tout $s \in]0,1[$ (voir corollaire 1.1).

1.3 Le Laplacien fractionnaire

Définition 1.4 *Pour $s \in]0,1[$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, le Laplacien fractionnaire de u est définit par*

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s u(x) &:= C(d,s)\, P.V. \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+2s}}\, dy \\ &= C(d,s) \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+2s}}\, dy.\end{aligned} \tag{1.11}$$

où on entend par P.V. l'intégrale au sens de la valeur principale,

$$C(d,s) := \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1-\cos\zeta_1}{|\zeta|^{d+2s}}\, d\zeta\right)^{-1} \tag{1.12}$$

est la constante de normalisation.

Remarque 1.2 *La constante de normalisation $C(d,s)$ ne dépend que de d et s (voir la preuve de la proposition 1.6).*

L'intégrale dans (1.11) est absolument convergente quand $0 < s < 1/2$. En effet,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{d+2s}}\, dy &\le C \int_{B_r} \frac{|x-y|}{|x-y|^{d+2s}}\, dy + \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_r} \frac{dy}{|x-y|^{d+2s}} \\ &\le C\left[\int_{B_r} \frac{dy}{|x-y|^{d+2s-1}} + \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_r} \frac{dy}{|x-y|^{d+2s}}\right] \\ &= C\left[\int_0^r \frac{dt}{|t|^{2s}} + \int_r^{+\infty} \frac{dt}{|t|^{2s+1}}\right] < \infty,\end{aligned}$$

où la constante $C > 0$ ne dépend que de $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$, $\|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ et d. Ainsi, dans le cas $0 < s < 1/2$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{d+2s}}\, dy$$

n'est pas singulier au voisinage de x, on peut donc se débarrasser du P.V. dans (1.11).
Pour $1/2 \le s < 1$, l'intégrale en (1.11) s'entend au sens de la Valeur Principale, i.e.,

$$(-\Delta)^s u(x) = C(d,s) \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+2s}}\, dy.$$

Remarque 1.3 *Pour $s \in]0,1[$, on verra plus loin que la constante $C(d,s)$ dans (1.11) ne joue aucun rôle essentiel sur les propriétés du Laplacien fractionnaire. Son rôle n'est important que dans les limites $s \to 0^+$ et $s \to 1^-$.*

Remarque 1.4 *Notons que le Laplacien fractionnaire est un opérateur non-local dans le sens où pour avoir la valeur de $(-\Delta)^s u(x)$ il faut que u soit donnée sur $\mathbb{R}^d$ tout entier.*

Proposition 1.3 *soit $s \in]0,1[$. Alors, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,*

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(d,s) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+y)-u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\, dy. \tag{1.13}$$

Preuve. D'après (1.11) , on a

$$(-\Delta)^s u(x) = -C(d,s)\,\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(y)-u(x)}{|x-y|^{d+2s}}\,dy, \tag{1.14}$$

Par conséquent, en substituant $z = y - x$ dans (1.14) ,il s'ensuit que

$$(-\Delta)^s u(x) = -C(d,s)\,\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{d+2s}}\,dz. \tag{1.15}$$

Cependant, en mettant $\tilde{z} = -z$,on a

$$\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{d+2s}}\,dz = \mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x-\tilde{z})-u(x)}{|\tilde{z}|^{d+2s}}\,d\tilde{z}$$

Ainsi, après avoir renommé $\tilde{z}$ en z, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} 2\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d} &\frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{d+2s}}\,dz \\ &= \mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{d+2s}}\,dz + \mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x-z)-u(x)}{|z|^{d+2s}}\,dz \\ &= \mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\,dy\,. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Finalement, un développement de Taylor du second ordre donne

$$\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}} \leq \frac{\|D^2u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}}{|y|^{d+2s-2}},$$

et puisque $s \in]0,1[$, on a

$$\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}} \in L^1(\mathbb{R}^d)\,.$$

Ainsi, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\,dy, \tag{1.17}$$

En conclusion, la relation (1.13) est vérifiée grâce à (1.15)-(1.17) ■

Proposition 1.4 *Soit $s \in]0,1[$. L'opérateur laplacien fractionnaire est linéaire :*

$$\forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ \text{et}\ \alpha \in \mathbb{R}\ \text{on a}\ (-\Delta)^s(\alpha u(x) + v(x)) = \alpha(-\Delta)^s u(x) + (-\Delta)^s v(x).$$

Preuve. Conséquence directe de la linéarité de l'intégrale. ■

Soit $h \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda > 0$, l'opérateur translation et l'opérateur dilatation sont définis par

$$\tau_h f(x) = f(x+h); \quad \delta_\lambda f(x) = f(\lambda x).$$

Proposition 1.5 *Soient $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $s \in]0,1[$, alors pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda > 0$ on a*

$$(-\Delta)^s(\tau_h u) = \tau_h((-\Delta)^s u),$$

et

$$(-\Delta)^s(\delta_\lambda u) = \lambda^{2s}\delta_\lambda((-\Delta)^s u).$$

En particulier, $(-\Delta)^s$ est un opérateur homogène d'ordre $2s$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^s(\tau_h u)(x) &= C(d,s)\,\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(x+h)-u(y+h)}{|x-y|^{d+2s}}\,dy \\
&= C(d,s)\,\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(x+h)-u(y')}{|x-(y'-h)|^{d+2s}}\,dy' \\
&= C(d,s)\,\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(x+h)-u(y')}{|x+h-y'|^{d+2s}}\,dy' \\
&= (\tau_h((-\Delta)^s u))(x). \\
(-\Delta)^s(\delta_\lambda u)(x) &= C(d,s)\,\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(\lambda x)-u(\lambda y)}{|x-y|^{d+2s}}\,dy \\
&= C(d,s)\,\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(\lambda x)-u(y')}{|x-(y'/\lambda)|^{d+2s}}\lambda^{-d}\,dy' \\
&= \lambda^{2s}C(d,s)\,\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(\lambda x)-u(y')}{|\lambda x-y'|^{d+2s}}\,dy' \\
&= (\lambda^{2s}\delta_\lambda((-\Delta)^s u))(x).
\end{aligned}$$

■

1.3.1 Propriétés de la constante $C(d,s)$

Lemme 1.1 *[13, 14] Soient $s \in]0,1[$ et $C(d,s)$ la constante définie en (1.12), et soit $A(d,s)$ et $B(s)$:*

$$A(d,s) := \begin{cases} 1 & \text{si } d = 1 \\ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{(1+|\eta'|^2)^{\frac{d+2s}{2}}}\,d\eta' & \text{si } d \geq 2, \end{cases} \tag{1.18}$$

et

$$B(s) := s(1-s)\int_{\mathbb{R}}\frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}}\,dt. \tag{1.19}$$

Alors

$$C(d,s) = \frac{s(1-s)}{A(d,s)B(s)}. \tag{1.20}$$

Preuve. Soit $d \geq 2$ et $\zeta = (\zeta_1, \zeta')$, avec $\zeta' \in \mathbb{R}^{d-1}$. En utilisant le changement de variable $\eta' = \zeta'/|\zeta_1|$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1-\cos\zeta_1}{|\zeta|^{d+2s}}\,d\zeta &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{1-\cos\zeta_1}{|\zeta_1|^{d+2s}}\frac{1}{(1+|\zeta'|^2/|\zeta_1|^2)^{\frac{d+2s}{2}}}\,d\zeta'\right)d\zeta_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{1-\cos\zeta_1}{|\zeta_1|^{1+2s}}\frac{1}{(1+|\eta'|^2)^{\frac{d+2s}{2}}}\,d\eta'\right)d\zeta_1 \\
&= \frac{A(d,s)B(s)}{s(1-s)}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.6 *[13, 14] Soient* $s \in]0,1[$ *et* $C(d,s)$ *la constante définie en* (1.12). *Alors, pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^d$*, on a l'égalité suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1-\cos(\xi\cdot y)}{|y|^{d+2s}}\,dy = C(d,s)^{-1}|\xi|^{2s} \tag{1.21}$$

Preuve. Définissons l'application $J : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ comme suit :

$$J(\xi) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1-\cos(\xi\cdot y)}{|y|^{d+2s}}\,dy,$$

alors on a

$$J(\xi) = J(|\xi|e_1) \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{1.22}$$

où e_1 représente le premier vecteur de direction dans l'espace $\mathbb{R}^d$.
En effet, pour $d = 1$, l'égalité (1.22) est triviale car J est une fonction paire. Lorsque $d \geq 2$, on considère la rotation $\mathscr{R}$ pour laquelle $\mathscr{R}(|\xi|e_1) = \xi$, et on note $\mathscr{R}^T$ sa transposée. Ainsi, en substituant $\tilde{y} = \mathscr{R}^T y$, on obtient

$$\begin{aligned}
J(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1-\cos((\mathscr{R}(|\xi|e_1))\cdot y)}{|y|^{d+2s}}\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1-\cos((|\xi|e_1)\cdot(\mathscr{R}^T\cdot y))}{|y|^{d+2s}}\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1-\cos((|\xi|e_1)\cdot\tilde{y})}{|\tilde{y}|^{d+2s}}\,d\tilde{y} \\
&= J(|\xi|e_1),
\end{aligned}$$

ce qui prouve (1.22).
Maintenant, en utilisant (1.22), on a

$$\begin{aligned}
J(\xi) &= J(|\xi|e_1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1-\cos(|\xi|y_1)}{|y|^{d+2s}}\,dy,
\end{aligned}$$

et le changement de variable $\zeta = |\xi|y$ donne

$$\begin{aligned}
J(\xi) &= \frac{1}{|\xi|^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1-\cos\zeta_1}{|\zeta/|\xi||^{d+2s}}\,d\zeta \\
&= |\xi|^{2s}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1-\cos\zeta_1}{|\zeta|^{d+2s}}\,d\zeta.
\end{aligned}$$

Notez que cette dernière intégrale est finie. En effet, observons que, pour $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_d)$ à l'intérieur de la boule B_1, en utilisant le développement de Taylor de la fonction cosinus, nous avons

$$\frac{1-\cos\zeta_1}{|\zeta|^{d+2s}} \leq \frac{|\zeta_1|^2}{|\zeta|^{d+2s}} \leq \frac{1}{|\zeta|^{d-2+2s}}.$$

et à l'extérieur de la boule B_1 nous avons

$$\frac{1-\cos\zeta_1}{|\zeta|^{d+2s}} \leq \frac{2}{|\zeta|^{d+2s}}.$$

En conséquence, l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1-\cos\zeta_1}{|\zeta|^{d+2s}}\,d\zeta$$
est finie (et positive), puisque $s \in]0,1[$.
Finalement, en vertu de (1.12) on obtient
$$J(\xi) = C(d,s)^{-1}|\xi|^{2s}.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 1.1 *[13, 14] Soients $s \in]0,1[$ et $C(d,s)$ la constante définie en* (1.12)*. Alors, pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$,*
$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 2C(d,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s}|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi. \tag{1.23}$$
De plus, $H^s(\mathbb{R}^d) = \widehat{H}^s(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Fixons $y \in \mathbb{R}^d$. En utilisant le changement de variable $z = x-y$, et en appliquant la formule de Parseval-Plancherel, il s'ensuit que
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}}\,dx\right)dy &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(z+y)-u(y)|^2}{|z|^{d+2s}}\,dz\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|\frac{u(z+y)-u(y)}{|z|^{d/2+s}}\right|^2 dy\right)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left\|\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{d/2+s}}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left\|\mathscr{F}\left(\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{d/2+s}}\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dz
\end{aligned} \tag{1.24}$$

En utilisant (1.21) on obtient
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \left\|\mathscr{F}\left(\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{d/2+s}}\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dz &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{i\xi\cdot z}-1|^2}{|z|^{d+2s}}|\mathscr{F}u(\xi)|^2\,d\xi\right)dz \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{1-\cos(\xi\cdot z)}{|z|^{d+2s}}|\mathscr{F}u(\xi)|^2\,dzd\xi \\
&= 2C(d,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s}|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Finalement, l'équivalence entre les espaces fractionnaires $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^d)$. découle de (1.3) et (1.23). ■

Proposition 1.7 *[14] Pour tout $d > 1$, soient A et B définis respectivement par* (1.18) *et* (1.19)*. Les affirmations suivantes sont valables :*

(i) $\displaystyle\lim_{s\to 1^-} A(d,s) = \omega_{d-2}\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{d-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{d}{2}+1}}\,d\rho < +\infty;$

(ii) $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} A(d,s) = \omega_{d-2}\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{d-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{d}{2}}}\,d\rho < +\infty;$

(iii) $\lim_{s\to 1^-} B(s) = \frac{1}{2}$;

(iv) $\lim_{s\to 0^+} B(s) = 1$,

où ω_{d-2} désigne la mesure de la sphère unité S^{d-2}.

PREUVE. Tout d'abord, par les coordonnées polaires, pour tout $s \in]0,1[$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{(1+|\eta'|^2)^{\frac{d+2s}{2}}}\, d\eta' = \omega_{d-2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{d-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{d+2s}{2}}}\, d\rho.$$

Observons que pour tout $s \in]0,1[$ et tout $\rho \geq 0$, nous avons

$$\frac{\rho^{d-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{d+2s}{2}}} \leq \frac{\rho^{d-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{d}{2}}}$$

et

$$\rho \mapsto \frac{\rho^{d-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{d}{2}}} \in L^1(]0,+\infty[)$$

pour tout $d > 1$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{s\to 1^-} A(d,s) = \omega_{d-2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{d-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{d}{2}+1}}\, d\rho$$

et

$$\lim_{s\to 0^+} A(d,s) = \omega_{d-2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{d-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{d}{2}}}\, d\rho$$

Cela prouve (i) et (ii).
Maintenant, pour prouver (iii), commençons d'abord par couper l'intégrale dans (1.19) comme suit

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}}\, dt = \int_{|t|<1} \frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}}\, dt + \int_{|t|\geq 1} \frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}}\, dt.$$

De plus, on a

$$0 \leq \int_{|t|\geq 1} \frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}}\, dt \leq 4 \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1+2s}}\, dt = \frac{2}{s}$$

donc

$$\lim_{s\to 1^-} s(1-s) \int_{|t|\geq 1} \frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}}\, dt = 0$$

d'une part et d'autre part on a

$$\int_{|t|<1} \frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}}\, dt - \int_{|t|<1} \frac{t^2}{2|t|^{1+2s}}\, dt \leq C \int_{|t|<1} \frac{|t|^3}{|t|^{1+2s}}\, dt = \frac{2C}{3-2s},$$

où C est une constante positive appropriée. Ainsi

$$\lim_{s\to 1^-} s(1-s) \int_{|t|<1} \frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}}\, dt = \lim_{s\to 1^-} s(1-s) \int_{|t|<1} \frac{t^2}{2|t|^{1+2s}}\, dt.$$

Ce qui permet de conclure que

$$\lim_{s\to 1^-} B(s) = \lim_{s\to 1^-} s(1-s) \left(\int_0^1 t^{1-2s}\, dt \right) = \lim_{s\to 1^-} \frac{s(1-s)}{2(1-s)} = \frac{1}{2}.$$

De même, pour prouver (iv) remarquons que

$$0 \leq \int_{|t|<1} \frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}}\, dt \leq C \int_0^1 t^{1-2s}\, dt,$$

ce qui donne

$$\lim_{s\to 0^+} s(1-s) \int_{|t|<1} \frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}}\, dt = 0.$$

Ceci d'une part. D'autre part on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{|t|\geq 1} \frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}}\, dt - \int_{|t|\geq 1} \frac{1}{|t|^{1+2s}}\, dt \right| &= \left| \int_{|t|\geq 1} \frac{\cos t}{|t|^{1+2s}}\, dt \right| \\ &= 2 \left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{1+2s}}\, dt \right|. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Or

$$\begin{aligned} \left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{1+2s}} \right| &= \left| \int_1^{2\pi} \frac{\cos t}{t^{1+2s}}\, dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^{1+2s}}\, dt \right| \\ &\leq \int_1^{2\pi} \frac{1}{t}\, dt + \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^{1+2s}}\, dt \right|. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Observons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^{1+2s}}\, dt \right| &= \left| \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\cos t}{t^{1+2s}}\, dt + \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\cos(\tau+\pi)}{(\tau+\pi)^{1+2s}}\, d\tau \right| \\ &= \left| \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \cos t \left(\frac{1}{t^{1+2s}} - \frac{1}{(t+\pi)^{1+2s}} \right) dt \right| \\ &\leq \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \left| \frac{1}{t^{1+2s}} - \frac{1}{(t+\pi)^{1+2s}} \right| dt \\ &= \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{(t+\pi)^{1+2s} - t^{1+2s}}{t^{1+2s}(t+\pi)^{1+2s}}\, dt \\ &= \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{1}{t^{1+2s}(t+\pi)^{1+2s}} \left(\int_0^\pi (1+2s)(t+\vartheta)^{2s}\, d\vartheta \right) dt \\ &\leq \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{3\pi(t+\pi)^{2s}}{t^{1+2s}(t+\pi)^{1+2s}}\, dt \\ &\leq \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{3\pi}{t(t+\pi)}\, dt \\ &\leq \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{3\pi}{t^2}\, dt \leq \frac{C}{k^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en vertu de (1.26), on conclu que

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{1+2s}} \right| \leq \ln(2\pi) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C}{k^2} \leq C'.$$

Il s'ensuit, en utilisant (1.25), que

$$\left| \int_{|t|\geq 1} \frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}}\, dt - \int_{|t|\geq 1} \frac{1}{|t|^{1+2s}}\, dt \right| = 2 \left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{1+2s}}\, dt \right| \leq C'',$$

ainsi

$$\lim_{s\to 0^+} s(1-s)\int_{|t|\geq 1}\frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}}\,dt = \lim_{s\to 0^+} s(1-s)\int_{|t|\geq 1}\frac{1}{|t|^{1+2s}}\,dt.$$

Par conséquent, nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0^+} B(s) &= \lim_{s\to 0^+} s(1-s)\int_{|t|\geq 1}\frac{1}{|t|^{1+2s}}\,dt\\ &= \lim_{s\to 0^+} 2s(1-s)\int_1^{\infty} t^{-1-2s}\,dt\\ &= \lim_{s\to 0^+}\frac{2s(1-s)}{2s} = 1.\end{aligned}$$

■

Corollaire 1.2 *On a*

$$\lim_{s\to 1^-}\frac{C(d,s)}{s(1-s)} = \left(\frac{\omega_{d-2}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{d-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{d}{2}+1}}\,d\rho\right)^{-1} \tag{1.27}$$

et

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{C(d,s)}{s(1-s)} = \left(\omega_{d-2}\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{d-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{d}{2}}}\,d\rho\right)^{-1}. \tag{1.28}$$

Preuve. Les relations (1.27) et (1.28) découlent facilement de la proposition précédente en tenant compte de

$$C(d,s) = \frac{s(1-s)}{A(d,s)B(s)}.$$

■

Corollaire 1.3 *[14] Pour tout $d > 1$, soit $C(d,s)$ défini par (1.12). Les énoncés suivants sont vrais :*

(i) $\displaystyle\lim_{s\to 1^-}\frac{C(d,s)}{s(1-s)} = \frac{4d}{\omega_{d-1}}$;

(ii) $\displaystyle\lim_{s\to 0^+}\frac{C(d,s)}{s(1-s)} = \frac{2}{\omega_{d-1}}$;

où ω_{d-1} désigne la mesure de la sphère unité S^{d-1}.

Preuve. D'abord rappelons que la mesure de la sphère S^{d-1} est

$$\omega_{d-1} = |S^{d-1}| = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \tag{1.29}$$

où Γ est la fonction de gamma donnée par (voir chapitre 3 section 1)

$$\Gamma(r) := \int_0^{\infty} t^{r-1}e^{-t}\,dt,\quad r > 0.$$

Maintenant, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta > d-1$, nous définissons

$$E_d(\theta) := \int_0^{+\infty}\frac{\rho^{d-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{\theta}{2}}}\,d\rho.$$

Notons que $E_d(\theta)$ est bien définie car l'intégrale est convergente pour $\theta > d-1$. De plus, en intégrant par parties on obtient

$$\begin{aligned} E_d(\theta) &= \frac{1}{d-1}\int_0^{+\infty} \frac{(\rho^{d-1})'}{(1+\rho^2)^{\frac{\theta}{2}}}\,d\rho \\ &= \frac{\theta}{d-1}\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{d}}{(1+\rho^2)^{\frac{\theta+2}{2}}}\,d\rho \\ &= \frac{\theta}{d-1}E_{d+2}(\theta+2). \end{aligned} \tag{1.30}$$

Si on pose

$$I_d^{(1)} := E_d(d+2) = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{d-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{d}{2}+1}}\,d\rho.$$

et

$$I_d^{(0)} := E_d(d) = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{d-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{d}{2}}}\,d\rho,$$

alors on a pour $d=2$ et $d=3$

$$I_2^{(1)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho = \frac{\pi}{4}, \quad I_3^{(1)} = \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{5}{2}}}\,d\rho = \frac{1}{3},$$

et

$$I_2^{(0)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\rho^2)}\,d\rho = \frac{\pi}{2}, \quad I_3^{(0)} = \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\rho = 1.$$

et en utilisant (1.30), nous constatons que $I_d^{(1)}$ et $I_d^{(0)}$ vérifient, respectivement, les relations récurrentes suivantes

$$\begin{cases} I_{d+2}^{(1)} = E_{d+2}(d+4) = \frac{d-1}{d+2}E_d(d+2) = \frac{d-1}{d+2}I_d^{(1)}, \ d \geq 2 \\ I_2^{(1)} = \frac{\pi}{4}, \quad I_3^{(1)} = \frac{1}{3}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} I_{d+2}^{(0)} = E_{d+2}(d+2) = \frac{d-1}{d}E_d(d) = \frac{d-1}{d}I_d^{(0)}, \ d \geq 2 \\ I_2^{(0)} = \frac{\pi}{2}, \quad I_3^{(0)} = 1. \end{cases}$$

Nous montrons par récurrence que

$$I_d^{(1)} = \frac{\omega_{d-1}}{2d\omega_{d-2}} \tag{1.31}$$

et

$$I_d^{(0)} = \frac{\omega_{d-1}}{2\omega_{d-2}}. \tag{1.32}$$

En effet, on a pour $d=2$ et $d=3$

$$I_2^{(1)} = \frac{\pi}{4} = \frac{\omega_1}{4\omega_0}, \quad I_3^{(1)} = \frac{1}{3} = \frac{\omega_2}{6\omega_1}$$

et

$$I_2^{(0)} = \frac{\pi}{2} = \frac{\omega_1}{2\omega_0}, \quad I_3^{(0)} = 1 = \frac{\omega_2}{2\omega_1}.$$

Maintenant, supposons que les relations (1.31) et (1.32) sont vraies pour un certain rang $d > 2$ fixé et montrons qu'elles demeurent vraies pour le rang $d+1$. Pour cela, remarquons qu'on a d'après (1.29)

$$\omega_d = \frac{2\pi}{d-1}\omega_{d-2}, \tag{1.33}$$

et donc
$$\frac{\omega_d}{\omega_{d-1}} = \frac{d-2}{d-1}\frac{\omega_{d-2}}{\omega_{d-3}}. \tag{1.34}$$
Ainsi
$$I_{d+1}^{(1)} = \frac{d-2}{d+1} I_{d-1}^{(1)} = \frac{d-2}{d+1}\frac{1}{2(d-1)}\frac{\omega_{d-2}}{\omega_{d-3}} = \frac{1}{2(d+1)}\frac{\omega_d}{\omega_{d-1}}$$
et
$$I_{d+1}^{(0)} = \frac{d-2}{d-1} I_{d-1}^{(0)} = \frac{d-2}{d+1}\frac{1}{2}\frac{\omega_{d-2}}{\omega_{d-3}} = \frac{1}{2}\frac{\omega_d}{\omega_{d-1}}.$$
Ainsi les relations (1.31), (1.32) sont vraies pour tout $d > 1$.
Enfin, en utilisant (1.31), (1.32) et le corollaire 1.2, nous pouvons conclure que
$$\lim_{s\to 1^-} \frac{C(d,s)}{s(1-s)} = \frac{2}{\omega_{d-2} I_d^{(1)}} = \frac{4d}{\omega_{d-1}},$$
et
$$\lim_{s\to 0^+} \frac{C(d,s)}{s(1-s)} = \frac{1}{\omega_{d-2} I_d^{(0)}} = \frac{2}{\omega_{d-1}}.$$
■

Proposition 1.8 *[14] Soit $d > 1$. Pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ les énoncés suivants sont vrais :*

(i) $\lim_{s\to 0^+} (-\Delta)^s u = u$;

(ii) $\lim_{s\to 1^-} (-\Delta)^s u = -\Delta u$.

où $-\Delta$ est l'opérateur laplacien classique.

Preuve. Fixons $x \in \mathbb{R}^d$ et $R_0 > 0$ tels que supp $u \subseteq B_{R_0}$ et posons $R = R_0 + |x| + 1$.
Tout d'abord,
$$\begin{aligned}\left|\int_{B_R} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\,dy\right| &\le \|u\|_{C^2(\mathbb{R}^d)} \int_{B_R} \frac{|y|^2}{|y|^{d+2s}}\,dy \\ &= \omega_{d-1}\|u\|_{C^2(\mathbb{R}^d)} \int_0^R \frac{1}{\rho^{2s-1}}\,d\rho \\ &= \frac{\omega_{d-1}\|u\|_{C^2(\mathbb{R}^d)} R^{2-2s}}{2(1-s)}.\end{aligned} \tag{1.35}$$
Or, d'après (1.35) et le corollaire 1.3, on a
$$\lim_{s\to 0^+} -\frac{C(d,s)}{2}\frac{\omega_{d-1}\|u\|_{C^2(\mathbb{R}^d)}R^{2-2s}}{2(1-s)} = -\frac{\omega_{d-1}\|u\|_{C^2(\mathbb{R}^d)}R^2}{2}\lim_{s\to 0^+}\frac{C(d,s)}{2s(1-s)}s = 0, \tag{1.36}$$
donc
$$\lim_{s\to 0^+} -\frac{C(d,s)}{2}\int_{B_R} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\,dy = 0.$$
De plus, on remarque que $|y| \ge R$ donne $|x \pm y| \ge |y| - |x| \ge R - |x| > R_0$ et par conséquent $u(x \pm y) = 0$. Donc,
$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_R} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\,dy &= u(x)\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_R} \frac{1}{|y|^{d+2s}}\,dy \\ &= \omega_{d-1}u(x)\int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2s+1}}\,d\rho \\ &= \frac{\omega_{d-1}R^{-2s}}{2s}u(x)\end{aligned} \tag{1.37}$$

et on obtient donc, en rappelant la proposition 1.3,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0^+}(-\Delta)^s u &= \lim_{s\to 0^+} -\frac{C(d,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_R}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\,dy\\ &= \lim_{s\to 0^+}\frac{C(d,s)\omega_{d-1}R^{-2s}}{2s}u(x) = u(x),\end{aligned}$$

où les dernières identités découlent de (1.37) et encore du corollaire 1.3. Cela prouve (i). De même, nous pouvons prouver (ii). Dans ce cas, on a d'une part,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_1}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\,dy\right| &\le 4\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_1}\frac{1}{|y|^{d+2s}}\,dy\\ &= 4\omega_{d-1}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\rho^{2s+1}}\,d\rho\\ &= \frac{2\omega_{d-1}}{s}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Donc on a d'après le corollaire 1.3

$$\lim_{s\to 1^-} -\frac{C(d,s)}{2}\frac{2\omega_{d-1}}{s}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = -\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\omega_{d-1}\lim_{s\to 1^-}\frac{C(d,s)}{s(1-s)}(1-s) = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{s\to 1^-} -\frac{C(d,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_1}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\,dy = 0. \tag{1.38}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_1}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)-D^2u(x)y\cdot y}{|y|^{d+2s}}\,dy\right| &\le \|u\|_{C^3(\mathbb{R}^d)}\int_{B_1}\frac{|y|^3}{|y|^{d+2s}}\,dy\\ &\le \omega_{d-1}\|u\|_{C^3(\mathbb{R}^d)}\int_0^1\frac{1}{\rho^{2s-1}}\,d\rho\\ &= \frac{\omega_{d-1}\|u\|_{C^3(\mathbb{R}^d)}}{3-2s},\end{aligned}$$

et

$$\lim_{s\to 1^-} -\frac{C(d,s)}{2}\frac{\omega_{d-1}\|u\|_{C^3(\mathbb{R}^d)}}{3-2s} = \omega_{d-1}\|u\|_{C^3(\mathbb{R}^d)}\lim_{s\to 1^-} -\frac{C(d,s)}{s(1-s)}\frac{s(1-s)}{2(3-2s)} = 0,$$

et cela implique que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 1^-} -\frac{C(d,s)}{2}\int_{B_1}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\,dy&\\ = \lim_{s\to 1^-} -\frac{C(d,s)}{2}\int_{B_1}\frac{D^2u(x)y\cdot y}{|y|^{d+2s}}\,dy.&\end{aligned} \tag{1.39}$$

Par ailleurs, remarquons que si $i\neq j$, alors

$$\int_{B_1}\partial^2_{ij}u(x)y_i\cdot y_j\,dy = -\int_{B_1}\partial^2_{ij}u(x)\tilde{y}_i\cdot\tilde{y}_j\,d\tilde{y},$$

où $\tilde{y}_k = y_k$ pour tout $k\neq j$ et $\tilde{y}_j = -y_j$, et donc

$$\int_{B_1}\partial^2_{ij}u(x)y_i\cdot y_j\,dy = 0. \tag{1.40}$$

De plus, pour tout i fixé, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} \frac{\partial^2_{ii}u(x)y_i^2}{|y|^{d+2s}}\,dy &= \partial^2_{ii}u(x)\int_{B_1}\frac{y_i^2}{|y|^{d+2s}}\,dy = \partial^2_{ii}u(x)\int_{B_1}\frac{y_1^2}{|y|^{d+2s}}\,dy \\
&= \frac{\partial^2_{ii}u(x)}{d}\sum_{j=1}^{d}\int_{B_1}\frac{y_j^2}{|y|^{d+2s}}\,dy = \frac{\partial^2_{ii}u(x)}{d}\int_{B_1}\frac{|y|^2}{|y|^{d+2s}}\,dy \\
&= \frac{\partial^2_{ii}u(x)\omega_{d-1}}{2d(1-s)}.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Finalement, en combinant (1.38), (1.39), (1.40), (1.41), la proposition 1.3 et le corollaire 1.3, on peut conclure

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 1^-}(-\Delta)^s u &= \lim_{s\to 1^-} -\frac{C(d,s)}{2}\int_{B_1}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\,dy \\
&= \lim_{s\to 1^-} -\frac{C(d,s)}{2}\int_{B_1}\frac{D^2u(x)y\cdot y}{|y|^{d+2s}}\,dy \\
&= \lim_{s\to 1^-} -\frac{C(d,s)}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_{B_1}\frac{\partial^2_{ii}u(x)y_i^2}{|y|^{d+2s}}\,dy \\
&= \lim_{s\to 1^-} -\frac{C(d,s)\omega_{d-1}}{4d(1-s)}\sum_{i=1}^{d}\partial^2_{ii}u(x) = -\Delta u(x).
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.5 *La constante $C(d,s)$ définie par* (1.12)*, peut être écrite en terme de la fonction Gamma de la manière suivante*

$$C(d,s) = \frac{s4^s\Gamma\left(\frac{d+2s}{2}\right)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(1-s)}.$$

Nous renvoyons le lecteur aux [8, Propositions 5.6] et au [2, Lemme 2.3], où sont effectués les calculs.

1.3.2 Le laplacien fractionnaire via la transformée de Fourier

Nous prouvons que le laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ peut être considéré comme un opérateur pseudo-différentiel de symbole $|\xi|^{2s}$. La preuve est standard et peut être trouvée dans de nombreux articles (voir, par exemple, [19, Chapitre 16], [14, section 3.1], [13, Chapitre 1]).

Proposition 1.9 *Si $s\in]0,1[$ alors pour tout $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,*

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathscr{F}^{-1}(|\xi|^{2s}(\mathscr{F}u)(\xi))(x), \quad x\in\mathbb{R}^d \tag{1.42}$$

où $\mathscr{F}^{-1}$ est la transformée de Fourier inverse définie en (1.2)*.*

Preuve. On note par

$$\mathscr{L}u(x) := -\frac{1}{2}C(d,s)\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(x+y)-u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2s}}\,dy \quad x\in\mathbb{R}^d,$$

où $C(d,s)$ est la constante définie en (1.12). On cherche une fonction $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathscr{L}u = \mathscr{F}^{-1}(S(\mathscr{F}u)). \tag{1.43}$$

On va prouver que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$S(\xi) = |\xi|^{2s}. \tag{1.44}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
&\frac{|u(x+y) - u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{d+2s}} \\
&\qquad \le 4\left(\chi_{B_1}(y)|y|^{2-d-2s}\sup_{B_1(x)}|D^2u| + \chi_{\mathbb{R}^d\setminus B_1}(y)|y|^{-d-2s}\sup_{\mathbb{R}^d}|u|\right) \\
&\qquad\qquad \le C\left(\chi_{B_1}(y)|y|^{2-d-2s}(1+|x|^{d+1})^{-1} + \chi_{\mathbb{R}^d\setminus B_1}(y)|y|^{-d-2s}\right) \in L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d),
\end{aligned}$$

il est possible, en utilisant le théorème de Fubini, de permuter l'intégrale par rapport à y avec la transformée de Fourier par rapport à x. En appliquant cette transformée de Fourier à la variable x dans (1.43), on obtient

$$\begin{aligned}
S(\xi)(\mathscr{F}u)(\xi) &= \mathscr{F}(\mathscr{L}u) \\
&= -\frac{1}{2}C(d,s)\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mathscr{F}(u(x+y) - u(x-y) - 2u(x))}{|y|^{d+2s}}\,dy \\
&= -\frac{1}{2}C(d,s)\int_{\mathbb{R}^d}\frac{e^{i\xi\cdot y} + e^{-i\xi\cdot y} - 2}{|y|^{d+2s}}\,dy(\mathscr{F}u)(\xi) \\
&= C(d,s)\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1-\cos(\xi\cdot y)}{|y|^{d+2s}}\,dy(\mathscr{F}u)(\xi).
\end{aligned} \tag{1.45}$$

En substituant (1.21) dans (1.45), nécessairement la fonction S prend la forme donnée dans (1.44), ce qui conclut la démonstration. ■

En fin, Puisque l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, nous pouvons établir le lien entre l'opérateur laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ et l'espace de Sobolev fractionnaire $H^s(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément, on a la relation suivante (voir [14]).

Proposition 1.10 *Soit $s \in]0,1[$ et soit $C(d,s)$ la constante définie en* (1.12). *Alors, pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$,*

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 2C(d,s)^{-1}\|(-\Delta)^{s/2}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.46}$$

Preuve. L'égalité dans (1.46) découle clairement de la Proposition 1.9 et du Corollaire 1.1. En effet,

$$\|(-\Delta)^{s/2}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathscr{F}(-\Delta)^{s/2}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \||\xi|^s\mathscr{F}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{2}C(d,s)[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

■

Proposition 1.11 *Si $u \in \mathcal{S}$, $s,t \in]0,1[$ et $s+t \le 1$, alors*

$$(-\Delta)^{s+t}u = (-\Delta)^s(-\Delta)^t u = (-\Delta)^t(-\Delta)^s u.$$

Preuve. Cela découle directement de (1.42). En effet,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left((-\Delta)^{s+t}u\right) &= |\xi|^{2(s+t)}\mathcal{F}(u) = |\xi|^{2s}|\xi|^{2t}\mathcal{F}(u)\\ &= \mathcal{F}\left((-\Delta)^{s}(-\Delta)^{t}u\right)\\ &= \mathcal{F}\left((-\Delta)^{t}(-\Delta)^{s}u\right).\end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'appliquer la transformée de Fourier inverse. ■

Une autre définition du Laplacien fractionnaire peut être donnée en utilisant le célèbre problème d'extension de Caffarelli-Silvestre [3].

1.3.3 Le problème d'extension

Caffarelli et Silvestre [3] ont introduit une méthode qui permet de transformer des problèmes non locaux dans $\mathbb{R}^d$ en d'autres dans lesquels un opérateur différentiel dans $\mathbb{R}^{d+1}_{+} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{+}$ apparaît. La méthode est décrite comme suit : étant donné $0 < s < 1$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on veut étudier la solution du système

$$\begin{cases} L_{1-2s}U(x,y) := \operatorname{div}_{x,y}\left(y^{1-2s}\nabla_{x,y}U\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, y > 0\\ U(x,0) = u(x)\\ U(x,y) \to 0 \text{ quand } y \to \infty \end{cases} \tag{1.47}$$

En utilisant la définition de la divergence, le système en (1.47) peut être réécrit comme suit

$$\begin{cases} -\Delta_x U(x,y) = \left(\partial_{yy} + \frac{1-2s}{y}\partial_y\right)U(x,y), \quad x \in \mathbb{R}^d, y > 0,\\ U(x,0) = u(x),\\ U(x,y) \to 0 \text{ quand } y \to \infty \end{cases} \tag{1.48}$$

et la solution de (1.48) est donnée par le résultat suivant.

Théorème 1.2 (Théorème d'extension) *[8, 15] La solution U du problème d'extension* (1.48) *est donnée par la convolution*

$$U(x,y) = \left(P_s(\cdot,y) * u\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P_s(x-z,y)u(z)\,dz, \tag{1.49}$$

où

$$P_s(x,y) = \frac{\Gamma(d/2+s)}{\pi^{d/2}\Gamma(s)}\frac{y^{2s}}{\left(y^2+|x|^2\right)^{(d+2s)/2}}$$

est le noyau de Poisson généralisé pour le problème d'extension dans le demi-espace $\mathbb{R}^{d+1}_{+}$. De plus, pour U défini comme dans (1.49)*, on a*

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{2^{s-1}\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\lim_{y\to 0^+} y^{1-2s}\partial_y U(x,y) \tag{1.50}$$

c'est ce que l'on appelle la relation de trace.

Preuve. Notons par $\hat{U}(.,y)$ la transformée de Fourier partielle par rapport à la variable x de $U(.,y)$ et par $\hat{u}$ la transformée de Fourier de u. En prenant la transformée de Fourier partielle par rapport à la variable x dans (1.48), on obtient le système

$$\begin{cases} \partial_{yy}\hat{U}(\xi,y) + \frac{1-2s}{y}\partial_y\hat{U}(\xi,y) - |\xi|^2\hat{U}(\xi,y) = 0, & (\xi,y) \in \mathbb{R}^{d+1}_+ \\ \hat{U}(\xi,0) = \hat{u}(\xi), \quad \hat{U}(\xi,y) \to 0 \text{ quand } y \to \infty, & \xi \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{1.51}$$

Maintenant, si nous fixons $\xi \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ et posons $Y(y) = Y_\xi(y) := \hat{U}(\xi,y)$, le problème précédent peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} y^2Y''(y) + (1-2s)yY'(y) - |\xi|^2y^2Y(y) = 0, & y \in \mathbb{R}_+, \\ Y(0) = \hat{u}(\xi), \quad Y(y) \to 0 \text{ quand } y \to \infty \end{cases} \tag{1.52}$$

L'équation dans le problème ci-dessus, n'est autre que l'équation de Bessel modifiée généralisée (voir par exemple le livre de Lebedev [11]), qui est donnée par

$$y^2Y''(y) + (1-2\alpha)yY'(y) + \left[\left(\alpha^2 - \nu^2\gamma^2\right) - \beta^2\gamma^2y^{2\gamma}\right]Y(y) = 0 \tag{1.53}$$

où

$$\alpha = s, \quad \gamma = 1, \quad \nu = s, \quad \beta = |\xi|.$$

Ainsi, pour chaque $\xi \neq 0$, la solution de (1.52) est (voir le livre de Lebedev [11])

$$\hat{U}(\xi,y) = Ay^sI_s(|\xi|y) + By^sK_s(|\xi|y), \quad (\xi,y) \in \mathbb{R}^{d+1}_+ \tag{1.54}$$

où I_s et K_s sont des fonctions de Bessel de deuxième et troisième espèce, respectivement :

$$\begin{aligned} I_r(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+s+1)}, & |z| < \infty, |\arg(z)| < \pi; \\ K_r(z) &= \frac{\pi}{2}\frac{I_{-r}(z) - I_r(z)}{\sin \pi r}, & |\arg(z)| < \pi. \end{aligned} \tag{1.55}$$

À partir des expressions de (1.55), on peut obtenir (voir [11, formules (5.11.9) et (5.11.10), p. 123]) les asymptotiques suivantes pour $z \to \infty$:

$$I_s(z) \approx \mathrm{e}^z(2\pi z)^{-1/2}, \quad K_s(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-z}, \tag{1.56}$$

D'autre part, on peut prouver que, lorsque $z \to 0^+$ dans (1.55), (voir [11, formule (5.7.1), p. 108])

$$I_s(z) \approx \frac{1}{\Gamma(s+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^s \quad \text{and} \quad I_{-s}(z) \approx \frac{1}{\Gamma(1-s)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-s} \tag{1.57}$$

où le symbole $A \approx B$ signifie qu'il existe des constantes $c, C > 0$ telles que $cA \leq B \leq CA$. Ainsi, la fonction $I_s(z)$ diverge, tandis que $K_s(z)$ prend des valeurs finies pour z suffisamment grand. On en déduit que la condition selon laquelle $\hat{U}(\xi,y) \to 0$ lorsque $y \to \infty$ implique que, dans (1.54), on doit avoir $A = 0$. Par conséquent,

$$\hat{U}(\xi,y) = By^sK_s(|\xi|y), \quad (\xi,y) \in \mathbb{R}^{d+1}_+. \tag{1.58}$$

En imposant la condition $\hat{U}(\xi,0)=\hat{u}(\xi)$, on peut fixer B de la manière suivante :

$$By^sK_s(|\xi|y) = B\frac{\pi}{2}\frac{y^sI_{-s}(|\xi|y)-y^sI_s(|\xi|y)}{\sin\pi s} \xrightarrow{y\to 0} \frac{B\pi 2^{s-1}}{\Gamma(1-s)\sin\pi s}|\xi|^{-s}, \tag{1.59}$$

En utilisant la relation (voir chapitre 3 section 1)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}, \quad z\notin\mathbb{Z} \tag{1.60}$$

on obtient

$$By^sK_s(|\xi|y) = B2^{s-1}\Gamma(s)|\xi|^{-s}, \tag{1.61}$$

Puisque $\hat{U}(\xi,0)=\hat{u}(\xi)$, on a

$$\hat{U}(\xi,y) = \frac{|\xi|^s\hat{u}(\xi)}{2^{s-1}\Gamma(s)}y^sK_s(|\xi|y). \tag{1.62}$$

Supposons que U est donné par la convolution de u avec un noyau $P_s(x,y)$ et examinons l'expression explicite de ce noyau. On déduit que

$$\hat{U}(\xi,y) = \hat{P}_s(\xi,y)\hat{u}(\xi),$$

donc

$$P_s(x,y) = \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\hat{U}(\cdot,y)}{\hat{u}(\cdot)}\right)(x) = \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{|\cdot|^s}{2^{s-1}\Gamma(s)}y^sK_s(|\cdot|y)\right)(x).$$

Maintenant, comme la fonction $\frac{|\cdot|^s}{2^{s-1}\Gamma(s)}y^sK_s(|\cdot|y)$ est une fonction radiale, nous savons que sa transformée de Fourier coïncide avec sa transformée de Fourier inverse. Ainsi, trouver une expression pour le noyau $P_s(x,y)$ revient à calculer

$$P_s(x,y) = \mathscr{F}\left(\frac{|\cdot|^s}{2^{s-1}\Gamma(s)}y^sK_s(|\cdot|y)\right)(x).$$

Rappelons que dans le cas où la transformée de Fourier est appliquée à des fonctions radiales, elle est appelée transformée de Hankel, et que la transformée de Hankel d'une fonction radiale $f(\cdot)=f_0(|\cdot|)$ est donnée par (voir le livre de Stein et Weiss [18, Ch. IV, Th. 3.3])

$$\mathscr{F}(f_0)(r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}r^{\frac{d-2}{2}}}\int_0^\infty f_0(s)J_{\frac{d-2}{2}}(rs)s^{\frac{d}{2}}\,ds.$$

Ici, $J_{\frac{d-2}{2}}$ désigne la fonction de Bessel, définie pour k un nombre réel supérieur à 1/2 par (représentation intégrale)

$$J_k(t) := \frac{(t/2)^k}{\Gamma[(2k+1)/2]\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{its}\left(1-s^2\right)^{(2k-1)/2}\,ds.$$

Ainsi, en utilisant [9, formule 3 en 6.576, p. 684], on obtient

$$\begin{aligned}
P_s(x,y) &= \mathscr{F}\left(\frac{|\cdot|^s}{2^{s-1}\Gamma(s)}y^sK_s(|\cdot|y)\right)(x)\\
&= \mathscr{F}\left(\frac{|\cdot|^s}{2^{s-1}\Gamma(s)}y^sK_s(|\cdot|y)\right)(|x|)\\
&= \frac{y^s}{2^{s-1}\Gamma(s)(2\pi)^{\frac{d}{2}}|x|^{\frac{d-2}{2}}}\int_0^\infty |\xi|^{\frac{d}{2}+s}K_s(|\xi|y)J_{\frac{d-2}{2}}(|x||\xi|)\,d|\xi|\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+s\right)}{\pi^{d/2}}\frac{y^{2s}}{(y^2+|x|^2)^{(d+2s)/2}}.
\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à démontrer (1.50), c'est-à-dire, on doit simplement vérifier l'égalité

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{2^{2s-1}\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)} \lim_{y\to 0^+} y^{1-2s}\partial_y U(x,y)$$

Rappelons que

$$\mathscr{F}\left((-\Delta)^s u\right)(\xi) = |\xi|^{2s}\hat{u}(\xi).$$

Alors, (1.50) est équivalente à

$$|\xi|^{2s}\hat{u}(\xi) = -\frac{2^{2s-1}\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)} \lim_{y\to 0^+} y^{1-2s}\frac{\partial \hat{U}}{\partial y}(\xi,y) \tag{1.63}$$

En utilisant les identités suivantes pour la fonction de Bessel de troisième espèce (voir [11, formule (5.7.9), p. 110]),

$$K_s'(z) = \frac{s}{z}K_s(z) - K_{s+1}(z) \tag{1.64}$$

et

$$\frac{2s}{z}K_s(z) - K_{s+1}(z) = -K_{s-1}(z) = -K_{1-s}(z) \tag{1.65}$$

avec (1.60), on obtient

$$\begin{aligned} y^{1-2s}\partial_y \hat{U}(\xi,y) &= \frac{|\xi|^{s+1}\hat{u}(\xi)}{2^{s-1}\Gamma(s)} y^{1-s}\left(\frac{2s}{y|\xi|}K_s(|\xi|y) - K_{s+1}(|\xi|y)\right) \\ &= -\frac{|\xi|^{s+1}\hat{u}(\xi)}{2^{s-1}\Gamma(s)} y^{1-s}K_{1-s}(|\xi|y). \end{aligned}$$

Compte tenu du comportement de la fonction de Bessel de troisième espèce K_s, on a

$$\lim_{y\to 0^+} y^{1-s}K_{1-s}(|\xi|y) = \frac{\Gamma(1-s)|\xi|^{s-1}}{2^s}$$

donc on obtient

$$\lim_{y\to 0^+} y^{1-2s}\partial_y \hat{U}(\xi,y) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2^{2s-1}\Gamma(s)}|\xi|^{2s}\hat{u}(\xi)$$

Cela prouve (1.50), ce qui achève ainsi la preuve. ■

Remarque 1.6 *En utilisant la propriété suivante du noyau de Poisson généralisé,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} P_s(x,y)\, dx = 1, \quad y > 0, \tag{1.66}$$

on peut obtenir une autre preuve de (1.50) *où on n'aura pas besoin d'utiliser* (1.64) *et* (1.65). *Soit* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *et considérons une solution*

$$U(x,y) = \left(P_s(\cdot,y) * u\right)(x)$$

du problème d'extension (1.49). *Remarquons qu'en utilisant* (1.66), *on peut écrire*

$$U(x,y) = \frac{\Gamma(d/2+s)}{\pi^{d/2}\Gamma(s)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(u(z)-u(x))y^{2s}}{(y^2+|x-z|^2)^{(d+2s)/2}}\, dz + u(x). \tag{1.67}$$

On dérive les deux membres de l'égalité (1.67) *par rapport à y, on obtient*

$$y^{1-2s}\partial_y U(x,y) = 2s\frac{\Gamma(d/2+s)}{\pi^{d/2}\Gamma(s)}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(z)-u(x)}{(y^2+|z-x|^2)^{(d+2s)/2}}\,dz + O\left(y^2\right).$$

Si on fait tendre y vers 0^+ *et qu'on utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient*

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0^+} y^{1-2s}\partial_y U(x,y) &= 2s\frac{\Gamma(d/2+s)}{\pi^{d/2}\Gamma(s)}P.V.\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(z)-u(x)}{(|z-x|^2)^{(d+2s)/2}}\,dz \\ &= -2s\frac{\Gamma(d/2+s)}{\pi^{d/2}\Gamma(s)}C(d,s)^{-1}(-\Delta)^s u(x), \qquad (1.68)\end{aligned}$$

où dans la deuxième égalité, on a utilisé la définition du Laplacien fractionnaire (1.11)*.*
Enfin, rappelons que (Remarque 1.5)

$$C(d,s) = \frac{s2^{2s}\Gamma(d/2+s)}{\pi^{d/2}\Gamma(1-s)}, \qquad (1.69)$$

ainsi, en substituant l'expression de (1.69) *dans* (1.68)*, on obtient*

$$\lim_{y\to 0^+} y^{1-2s}\partial_y U(x,y) = -2s\frac{\Gamma(d/2+s)}{\pi^{d/2}\Gamma(s)}C(d,s)^{-1}(-\Delta)^s u(x) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2^{2s-1}\Gamma(s)}(-\Delta)^s u(x),$$

Par conséquent, le Laplacien fractionnaire peut également être considéré comme un opérateur local dans un espace étendu.

1.3.4 Le laplacien fractionnaire spectral

Un autre opérateur (différent de $(-\Delta)^s$), parfois noté A_s, est défini comme la puissance de l'opérateur Laplacien "classique" $-\Delta$, obtenue en utilisant la décomposition spectrale du Laplacien [4, 13, 16]. À savoir, soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, et soit $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$, les valeurs propres et les fonctions propres correspondantes de l'opérateur laplacien $-\Delta$ dans Ω avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur $\partial\Omega$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} -\Delta e_k = \mu_k e_k & dans\,\Omega \\ e_k = 0 & sur\ \partial\Omega, \end{cases} \qquad (1.70)$$

normalisé de sorte que $\|e_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$.
Alors $\{e_k,\ \mu_k^s\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont les fonctions propres et les valeurs propres du problème fractionnaire correspondant

$$\begin{cases} A_s u = \lambda u & dans\,\Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \end{cases} \qquad (1.71)$$

où, pour $u = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k e_k \in L^2(\Omega)$, A_s est défini par

$$A_s u = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k^s u_k e_k \qquad (1.72)$$

L'opérateur A_s (le Laplacien fractionnaire spectral) est bien défini sur l'espace de Sobolev donné par

$$\tilde{H}^s(\Omega) := \left\{ u = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k e_k \in L^2(\Omega);\ \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k^s u_k^2 < +\infty \right\}. \qquad (1.73)$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\tilde{H}^s(\Omega)} := \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k^s u_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut facilement vérifier que $(\tilde{H}^s(\Omega), \langle ., . \rangle_{\tilde{H}^s(\Omega)})$ est un espace de Hilbert, où

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{H}^s(\Omega)} := \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k^s u_k v_k,$$

pour $u = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k e_k$ et $v = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k e_k$ appartenant à $\tilde{H}^s(\Omega)$.

Remarque 1.7 *Les opérateurs $(-\Delta)^s$ et A_s ne sont pas les mêmes, car ils ont des valeurs propres et des fonctions propres différentes. En particuliers la première valeur propre de $(-\Delta)^s$ est strictement inférieure à celle de A_s (voir [13], [16]).*

Exemple 1.1
- *Soit $\Omega =]0, 1[$ et $u(x) = \sin(\pi x)$. Alors*

$$A_s u(x) = \pi^{2s} \sin(\pi x).$$

- *Soit $\Omega =]-1, 1[$ et $u(x) = \sin\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)$. Alors*

$$A_s u(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2s} \sin\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right).$$

Chapitre 2

Le spectre du Laplacien fractionnaire : caractérisation variationnelle

Ce chapitre se concentre sur le problème aux valeurs propres avec les conditions de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda u & dans\ \Omega \\ u = 0 & dans\ \mathbb{R}^d \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $s \in]0, 1[$, $d > 2s$, et Ω est un sous-ensemble ouvert, borné de $\mathbb{R}^d$ avec frontière Lipschitzienne. Afin d'étudier des problèmes non locaux régis par des Laplaciens fractionnaires, nous avons besoin d'espaces de Sobolev fractionnaires appropriés. A cet effet, nous introduisons l'espace suivant

$$\mathbb{X}_0^s(\Omega) := \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^d);\ u = 0\, p.\,p.\, dans\, \mathbb{R}^d \setminus \Omega \right\} \tag{2.2}$$

muni de la norme induite par $\|.\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$.
Soit $u \in \mathbb{X}_0^s(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} &= \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} dxdy. \end{aligned}$$

Comme $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$, alors

$$\|u\|^2_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} dxdy. \tag{2.3}$$

On déduit de (2.3) que les normes $\|.\|_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)}$ et $\|.\|_{H^s(\Omega)}$ ne sont pas identiques. De plus, la norme $\|.\|_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)}$ prend en compte l'interaction entre Ω et $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Donc l'espace $\mathbb{X}_0^s(\Omega)$ est l'espace approprié pour traiter des E.D.P. elliptiques données par des opérateurs laplaciens fractionnaires. Maintenant, pour $u \in \mathbb{X}_0^s(\Omega)$, nous définissons

$$|||u|||_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Nous avons les résultats suivants :

Proposition 2.1 *[13, Lemme 1.29] L'espace $(\mathbb{X}_0^s(\Omega), \langle .,. \rangle_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{d+2s}} dxdy \quad \forall u, v \in \mathbb{X}_0^s(\Omega). \tag{2.5}$$

De plus, les normes $|||.|||_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)}$ et $\|.\|_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)}$ sont équivalentes.

Proposition 2.2 *[13, Lemme 1.30] Soit $s \in]0,1[$, $d > 2s$ et Ω un sous-ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^d$ avec un bord continue. Soit $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbb{X}_0^s(\Omega)$. Alors il existe $u_\infty \in L^\nu(\mathbb{R}^d)$ et une sous-suite $\{u_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, telle que*

$$\lim_{k\to+\infty} u_{j_k} = u_\infty \in L^\nu(\mathbb{R}^d)$$

pour tout $\nu \in [1, 2_s^*[$, avec $2_s^* = \frac{2d}{d-2s}$.

Définition 2.1 *On dit que u est une solution faible de (2.1) si $u \in \mathbb{X}_0^s(\Omega) \setminus \{0\}$ telle que*

$$\frac{C(d,s)}{2}\langle u, v\rangle_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} = \lambda \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in \mathbb{X}_0^s(\Omega). \tag{2.6}$$

Définition 2.2 *On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $(-\Delta)^s$ s'il existe une solution non triviale $u \in \mathbb{X}_0^s(\Omega)$ du problème (2.1) (en fait de sa formulation faible (2.6)) et, dans ce cas, toute solution sera appelée fonction propre correspondante à la valeur propre λ.*

Dans ce chapitre, on donne la caractérisation variationnelle des valeurs et vecteurs propres pour l'opérateur laplacien fractionnaire [13, 17].

2.1 Caractérisation variationnelle de la première valeur propre

Proposition 2.3 *[13, 17] Soit $s \in]0,1[$, $d > 2s$, et Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Alors le problème (2.6) admet une valeur propre λ_1 qui est strictement positive et qu'elle peut être caractérisée par*

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u\in\mathbb{X}_0^s(\Omega)\\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \frac{C(d,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+d}}dxdy \tag{2.7}$$

ou d'une manière équivalente

$$\lambda_1 = \min_{u\in\mathbb{X}_0^s(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{C(d,s)}{2}\frac{\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+d}}dxdy}{\int_\Omega |u(x)|^2dx}. \tag{2.8}$$

Preuve. Nous utilisons la méthode directe de minimisation.
Soit $\mathcal{J} : \mathbb{X}_0^s(\Omega) \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par

$$\mathcal{J}(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+d}}dxdy = \frac{1}{2}|||u|||^2_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)}, \tag{2.9}$$

pour tout $u \in \mathbb{X}_0^s(\Omega)$. On remarque que $\mathcal{J}$ est Fréchet dérivable en $u \in \mathbb{X}_0^s(\Omega)$, et pour tout $v \in \mathbb{X}_0^s(\Omega)$

$$\langle \mathcal{J}'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{2s+d}}dxdy. \tag{2.10}$$

Soit

$$\mathscr{M}_* := \left\{ u \in \mathbb{X}_0^s(\Omega) : \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\},$$

Montrons qu'il existe $u_* \in \mathscr{M}_*$ tel que

$$\min_{u \in \mathscr{M}_*} \mathcal{J}(u) = \mathcal{J}(u_*) \tag{2.11}$$

et que

$$\frac{C(d,s)}{2} \langle u_*, v \rangle_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} = \lambda_1 \int_\Omega u_*(x) v(x) dx, \tag{2.12}$$

pour tout $v \in \mathbb{X}_0^s(\Omega)$, où $\lambda_1 = C(d,s)\mathcal{J}(u_*) > 0$.
Prenons une suite minimisante $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ pour $\mathcal{J}$ sur $\mathscr{M}_*$, c'est-à-dire une suite $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{M}_*$ telle que

$$\lim_{j \to +\infty} \mathcal{J}(u_j) = \inf_{u \in \mathscr{M}_*} \mathcal{J}(u) \geq 0 > -\infty. \tag{2.13}$$

Alors la suite $\{\mathcal{J}(u_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, donc, par définition de $\mathcal{J}$, on a $\{|||u_j|||_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ est également bornée. Puisque $\mathbb{X}_0^s(\Omega)$ est un espace réflexif (étant un espace de Hilbert, d'après la proposition 2.1), il existe une sous-suite de $\{u_j\}$, notée toujours $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, qui converge faiblement dans $\mathbb{X}_0^s(\Omega)$ vers une certaine fonction $u_* \in \mathbb{X}_0^s(\Omega)$. La convergence faible implique que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(u_j(x) - u_j(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{d+2s}} dxdy \to \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(u_*(x) - u_*(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{d+2s}} dxdy$$

quand $j \to +\infty$. De plus, d'après la proposition 2.2 et du fait que $\{|||u_j|||_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée, il existe une sous-suite de $\{u_j\}$ telle que

$$\lim_{j \to +\infty} u_j \to u_* \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^d), \tag{2.14}$$

donc $\|u_*\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$, i.e., $u_* \in \mathscr{M}_*$. En utilisant le lemme de Fatou, on déduit que

$$\begin{aligned}
\lim_{j \to +\infty} \mathcal{J}(u_j) &= \frac{1}{2} \lim_{j \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|u_j(x) - u_j(y)|^2}{|x-y|^{2s+d}} dxdy \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|u_*(x) - u_*(y)|^2}{|x-y|^{2s+d}} dxdy \\
&= \mathcal{J}(u_*) \\
&\geq \inf_{u \in \mathscr{M}_*} \mathcal{J}(u),
\end{aligned}$$

ainsi, par (2.13), on obtient

$$\mathcal{J}(u_*) = \inf_{u \in \mathscr{M}_*} \mathcal{J}(u).$$

Ce qui prouve (2.11).
Maintenant, on prouve (2.12). Soit $\varepsilon \in]-1,1[$, $v \in \mathbb{X}_0^s(\Omega)$, $c_\varepsilon := \|u_* + \varepsilon v\|_{L^2(\Omega)}$, et $u_\varepsilon := (u_* + \varepsilon v)/c_\varepsilon$. On observe que $u_\varepsilon \in \mathscr{M}_*$,

$$c_\varepsilon^2 = \|u_*\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\varepsilon \int_\Omega u_*(x) v(x) dx + o(\varepsilon),$$

et

$$|||u_* + \varepsilon v|||_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)}^2 = |||u_*|||_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)}^2 + 2\varepsilon \langle u_*, v \rangle_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} + o(\varepsilon).$$

par conséquent, puisque $\|u_*\|_{L^2(\Omega)} = 1$,

$$\begin{aligned}
2\mathcal{J}(u_\varepsilon) &= \frac{\||u_*\||^2_{\mathbb{X}^s_0(\Omega)} + 2\varepsilon\langle u_*, v\rangle_{\mathbb{X}^s_0(\Omega)} + o(\varepsilon)}{1 + 2\varepsilon\int_\Omega u_*(x)v(x)dx + o(\varepsilon)} \\
&= (2\mathcal{J}(u_*) + 2\varepsilon\langle u_*, v\rangle_{\mathbb{X}^s_0(\Omega)} + o(\varepsilon))\left(1 - 2\varepsilon\int_\Omega u_*(x)v(x)dx + o(\varepsilon)\right) \\
&= 2\mathcal{J}(u_*) + 2\varepsilon\left(\langle u_*, v\rangle_{\mathbb{X}^s_0(\Omega)} - 2\mathcal{J}(u_*)\int_\Omega u_*(x)v(x)dx\right) + o(\varepsilon),
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\mathcal{J}(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u_*)}{\varepsilon} = \langle u_*, v\rangle_{\mathbb{X}^s_0(\Omega)} - 2\mathcal{J}(u_*)\int_\Omega u_*(x)v(x)dx + o(1). \tag{2.15}$$

Cette dernière relation et la minimalité de u_* impliquent la relation (2.12) (pour cela, notons que $\mathcal{J}(u_*) > 0$, parce que sinon on aura $u_* \equiv 0$, et $0 \notin \mathscr{M}_*$). Ce qui achève la preuve de la proposition. ∎

2.2 Caractérisation variationnelle de la première fonction propre

Lemme 2.1 *[13, 17] Si e est une fonction propre du problème* (2.6) *associée à une valeur propre* λ, *alors*

$$\frac{C(d,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{|e(x) - e(y)|^2}{|x-y|^{2s+d}}dxdy = \lambda\|e\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.16}$$

Preuve. Par (2.6), on a

$$\frac{C(d,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{(e(x) - e(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{2s+d}}dxdy = \lambda\int_\Omega e(x)v(x)dx,\ \forall v \in \mathbb{X}^s_0(\Omega). \tag{2.17}$$

En choisissant ici $v := e$, on obtient le résultat désiré. ∎

Proposition 2.4 *[13, 17] Soit* $s \in]0,1[$, $d > 2s$, *et* Ω *un sous-ensemble ouvert borné de* $\mathbb{R}^d$. *Alors il existe une fonction* e_1 *qui est une fonction propre relative à* λ_1, *atteignant le minimum en* (2.5) *i.e.* $\|e_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$ *et*

$$\lambda_1 = \frac{C(d,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{|e_1(x) - e_1(y)|^2}{|x-y|^{2s+d}}dxdy \tag{2.18}$$

Preuve. D'après (2.11), le minimum définissant λ_1 est atteint en une certaine fonction $e_1 \in \mathbb{X}^s_0(\Omega)$, avec $\|e_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Le fait que e_1 est une fonction propre associée à λ_1 alors la formule (2.18) découle du lemme 2.1.∎

Lemme 2.2 *[13, 17] Si e est une fonction propre relative à* λ_1, *avec* $\|e\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$, *alors le minimum en* (2.11) *est atteint en e et* $|e|$. *De plus, on a soit* $e \geq 0$ *soit* $e \leq 0$ *p.p. dans* Ω.

Preuve. En utilisant le lemme 2.1 et la relation (2.18) on obtient

$$\mathcal{J}(e) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{|e(x)-e(y)|^2}{|x-y|^{2s+d}}dxdy = \frac{\lambda_1}{C(d,s)} = \mathcal{J}(e_1). \tag{2.19}$$

De plus, par l'inégalité triangulaire, pour p.p. x, $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\big|\,|e(x)| - |e(y)|\,\big| \leq |e(x) - e(y)|.$$

Mais, si $x \in \{e > 0\}$ et $y \in \{e < 0\}$, on a

$$\begin{aligned} \big|\,|e(x)| - |e(y)|\,\big| &= |e(x) + e(y)| \\ &= \max\{e(x) + e(y), -e(x) - e(y)\} \\ &< e(x) - e(y) \\ &= |e(x) - e(y)|. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{cases} \mathcal{J}(|e|) \leq \mathcal{J}(e), \\ \text{ et} \\ \mathcal{J}(|e|) < \mathcal{J}(e) \text{ si } \{e > 0\} \text{ et } \{e < 0\} \text{ ont tous deux une mesure non nulle.} \end{cases} \tag{2.20}$$

De plus, $|e| \in \mathbb{X}^s_0(\Omega)$, et $\|\,|e|\,\|_{L^2(\Omega)} = \|e\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Ainsi, les relations (2.19) et (2.20) et la minimalité de e_1 impliquent que

$$\mathcal{J}(|e|) = \mathcal{J}(e) = \mathcal{J}(e_1)$$

et que soit $\{e > 0\}$ soit $\{e < 0\}$ a une mesure nulle. ■

Proposition 2.5 *[13, 17] La fonction propre e_1 associée à la valeur propre λ_1 est positive.*

Preuve. Par le lemme 2.2, on peut remplacer e_1 par $|e_1|$, et donc on peut supposer que $e_1 \geq 0$ dans $\mathbb{R}^d$. ■

2.3 Simplicité de la première valeur propre

Proposition 2.6 *[13, 17] Si $u \in \mathbb{X}^s_0(\Omega)$ est une solution de l'équation*

$$\frac{C(d,s)}{2}\langle u, v\rangle_{\mathbb{X}^s_0(\Omega)} = \lambda_1 \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in \mathbb{X}^s_0(\Omega). \tag{2.21}$$

alors $u = \xi e_1$ avec $\xi \in \mathbb{R}$, autrement dit, la première valeur propre λ_1 est simple.

Preuve. Supposons que λ_1 correspond également à une autre fonction propre $f_1 \in \mathbb{X}^s_0(\Omega)$ avec $f_1 \not\equiv e_1$. On peut supposer que $f_1 \not\equiv 0$ sinon, on a rien à démontrer. Par le lemme 2.2, nous savons que soit $f_1 \geq 0$, soit $f_1 \leq 0$ p.p. dans Ω. Considérons le cas $f_1 \geq 0$ p.p. dans Ω, l'autre étant analogue. Nous posons

$$\tilde{f}_1 := \frac{f_1}{\|f_1\|_{L^2(\Omega)}} \text{ et } g_1 := e_1 - \tilde{f}_1.$$

On montre que

$$g_1(x) = 0 \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.22}$$

Il convient également de noter que g_1 est aussi une fonction propre relative à λ_1, donc, selon le lemme 2.2, nous obtenons que soit $g_1 \geq 0$, soit $g_1 \leq 0$ p.p. dans Ω. Donc, soit $e_1 \geq \tilde{f}_1$, soit $e_1 \leq \tilde{f}_1$, et donc, en raison de la positivité de e_1 et f_1, on obtient

$$\text{soit } e_1^2 \geq \tilde{f}_1^2 \text{ ou } e_1^2 \leq \tilde{f}_1^2 \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{2.23}$$

Aussi on a,

$$\int_\Omega (e_1^2(x) - \tilde{f}_1^2(x))dx = \|e_1\|^2_{L^2(\omega)} - \|f_1\|^2_{L^2(\omega)} = 1 - 1 = 0.$$

La relation précédente et la relation (2.23) impliquent que $e_1^2 - \tilde{f}_1^2 = 0$, ce qui signifie que $e_1 = \tilde{f}_1$ p.p. dans Ω. Comme $e_1 = \tilde{f}_1 = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$, nous pouvons conclure que $e_1 = \tilde{f}_1$ p.p. dans $\mathbb{R}^d$. Ainsi, on constate que f_1 est proportionnelle à e_1, ce qui achève la démonstration. ∎

2.4 Caractérisation variationnelle des autres valeurs propres et fonctions propres

Lemme 2.3 *[13, 17] Si $\lambda \neq \tilde{\lambda}$ sont deux valeurs propres distinctes du problème* (2.6)*, avec les fonctions propres e et $\tilde{e} \in X_0^s(\Omega)$, respectivement, alors*

$$\langle e, \tilde{e} \rangle_{X_0^s(\Omega)} = 0 = \int_\Omega e(x)\tilde{e}(x)dx$$

Preuve. On peut supposer que $e \not\equiv 0$ et $\tilde{e} \not\equiv 0$. On définit $f := e/\|e\|_{L^2(\Omega)}$ et $\tilde{f} := \tilde{e}/\|\tilde{e}\|_{L^2(\Omega)}$, qui sont aussi des fonctions propres, et on calcule la valeur de (2.6) pour f avec la fonction test $\tilde{f}$ et vice versa. On obtient

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega f(x)\tilde{f}(x)dx &= \frac{C(d,s)}{2} \langle f, \tilde{f} \rangle_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} \\ &= \frac{C(d,s)}{2} \langle \tilde{f}, f \rangle_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} \\ &= \tilde{\lambda} \int_\Omega f(x)\tilde{f}(x)dx \end{aligned} \tag{2.24}$$

donc

$$(\lambda - \tilde{\lambda}) \int_\Omega f(x)\tilde{f}(x)dx = 0.$$

Ainsi, puisque $\lambda \neq \tilde{\lambda}$,

$$\int_\Omega f(x)\tilde{f}(x)dx = 0. \tag{2.25}$$

En substituant (2.25) dans (2.24), on obtient

$$\langle f, \tilde{f} \rangle_{X_0^s(\Omega)} = 0.$$

Ceci qui achève la preuve. ∎

Proposition 2.7 *[13, 17] Le problème* (2.6) *admet une suite de valeurs propres*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \ldots \tag{2.26}$$

comptées avec leurs multiplicité.
De plus, les valeurs propres sont caractérisées par

$$\lambda_{k+1} = \min_{\substack{u \in \mathbb{P}_{k+1} \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \frac{C(d,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+d}} dx\, dy, \tag{2.27}$$

ou d'une manière équivalente

$$\lambda_{k+1} = \min_{u \in \mathbb{P}_{k+1} \setminus \{0\}} \frac{C(d,s)}{2} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+d}} dx\, dy}{\displaystyle\int_\Omega u(x)^2 dx}, \tag{2.28}$$

où

$$\mathbb{P}_{k+1} := \left\{ u \in \mathbb{X}_0^s(\Omega) : \langle u, e_j \rangle_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, k \right\}. \tag{2.29}$$

Preuve. Par analogie aux (2.11) et (2.12), appliqués ici avec

$$\mathscr{M}_* := \left\{ u \in \mathbb{P}_{k+1} : \ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\},$$

on montre qu'il existe $u_* \in \mathscr{M}_*$ tel que

$$\min_{u \in \mathscr{M}_*} \mathcal{J}(u) = \mathcal{J}(u_*) \tag{2.30}$$

et que

$$\frac{C(d,s)}{2} \langle u_*, v \rangle_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} = \lambda_{k+1} \int_\Omega u_*(x) v(x) dx, \tag{2.31}$$

pour tout $v \in \mathbb{P}_{k+1}$, où $\lambda_{k+1} = C(d,s)\mathcal{J}(u_*)$.
Notons que $\mathbb{P}_{k+1}$ est, par construction, faiblement fermé.
On remarque en effet que le minimum dans (2.27) existe, et qu'il est atteint à une certaine fonction $e_{k+1} \in \mathbb{P}_{k+1}$.
De plus, puisque $\mathbb{P}_{k+1} \subseteq \mathbb{P}_k \subseteq X_0^s(\Omega)$, on a

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \cdots \tag{2.32}$$

On montre que

$$\lambda_1 \neq \lambda_2. \tag{2.33}$$

En effet, sinon, $e_2 \in \mathbb{P}_2$ serait aussi une fonction propre relative à λ_1, et donc, d'après la proposition 2.6, $e_2 = \xi e_1$, avec $\xi \in \mathbb{R}$, et $\xi \neq 0$ car $e_2 \not\equiv 0$. Puisque $e_2 \in \mathbb{P}_2$, on obtient

$$0 = \langle e_1, e_2 \rangle_{X_0^s(\Omega)} = \zeta \| |e_1| \|^2_{X_0^s(\Omega)}$$

Cela signifié que $e_1 \equiv 0$, ce qui est une contradiction, prouvant ainsi (2.33). De (2.32) et (2.33), on obtient (2.26).
De même, par analogie avec (2.12) on a

$$\frac{C(d,s)}{2} \langle e_{k+1}, v \rangle_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} = \lambda_{k+1} \int_\Omega e_{k+1}(x) v(x) dx, \quad \forall v \in \mathbb{P}_{k+1} \tag{2.34}$$

Pour montrer que λ_{k+1} est une valeur propre associée à la fonction propre e_{k+1}, il faut montrer que la formule (2.34) est valable pour tout $v \in X_0^s(\Omega)$, et non seulement dans $\mathbb{P}_{k+1}$.
Pour cela, on fait un raisonnement par récurrence, le raisonnement est initialisé par le fait que λ_1 est une valeur propre, comme le montre la proposition 2.3. En supposant que λ_i est une valeur propre associée à la fonction propre e_i, pour $i = 1, \dots, k$ et en la prouvant pour $k+1$. On utilise la décomposition en somme directe

$$X_0^s(\Omega) = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k\} \oplus (\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k\})^{\perp} = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k\} \oplus \mathbb{P}_{k+1}$$

où l'orthogonal $\perp$ est défini par rapport au produit scalaire de $X_0^s(\Omega)$, à savoir, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_0^s(\Omega)}$ (voir (2.5)). Ainsi, pour tout $v \in X_0^s(\Omega)$, on écrit $v = v_1 + v_2$, avec $v_2 \in \mathbb{P}_{k+1}$ et

$$v_1 = \sum_{i=1}^{k} c_i e_i$$

pour certains $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Alors, d'après (2.34) en prenant comme fonction test la fonction $v_2 = v - v_1$, on a

$$\begin{aligned} &\frac{C(d,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{2s+d}} \, dx \, dy \\ &\quad - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) v(x) \, dx, \\ &= \frac{C(d,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(v_1(x) - v_1(y))}{|x-y|^{2s+d}} \, dx \, dy \\ &\quad - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) v_1(x) \, dx, \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i \left[\frac{C(d,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(e_i(x) - e_i(y))}{|x-y|^{2s+d}} \, dx \, dy \right. \\ &\quad \left. - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) e_i(x) dx \right]. \end{aligned} \tag{2.35}$$

De plus, en testant l'équation des valeurs propres (2.6) pour e_i par rapport à e_{k+1} pour $i = 1, \dots, k$ et en rappelant que $e_{k+1} \in \mathbb{P}_{k+1}$, on voit que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{C(d,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(e_i(x) - e_i(y))}{|x-y|^{2s+d}} \, dx \, dy \\ &= \lambda_i \int_{\Omega} e_{k+1}(x) e_i(x) dx \end{aligned}$$

donc, d'après (2.32),

$$\frac{C(d,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(e_i(x) - e_i(y))}{|x-y|^{2s+d}} \, dx \, dy = 0 = \int_{\Omega} e_{k+1}(x) e_i(x) dx$$

pour tout $i = 1, \dots, k$. En insérant cela dans (2.35), on conclut que (2.34) est vraie pour tout $v \in X_0^s(\Omega)$; c'est-à-dire, λ_{k+1} est une valeur propre avec une fonction propre e_{k+1}.
Maintenant, pour achever la preuve de la proposition 2.7, nous devons montrer que toute valeur

propre du problème (2.6) peut être écrite sous la forme (2.27). Pour montrer cela, supposons par l'absurde qu'il existe une valeur propre λ telle que

$$\lambda \neq \lambda_k, \ \forall k \in \mathbb{N}^*, \tag{2.36}$$

et soit $e \in X_0^s(\Omega)$ une fonction propre correspondante à λ, normalisée de sorte que $\|e\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Alors, d'après le lemme 2.1, on a

$$C(d,s)\mathcal{J}(e) = \frac{C(d,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|e(x) - e(y)|^2}{|x-y|^{2s+d}} dxdy = \lambda. \tag{2.37}$$

Ainsi, par la minimalité de λ_1 donnée par (2.7) et (2.18), on a

$$\lambda = C(d,s)\mathcal{J}(e) \geq C(d,s)\mathcal{J}(e_1) = \lambda_1 \tag{2.38}$$

En utilisant (2.38), (2.36) et le fait que $\lim_{k \to +\infty} \lambda_k = +\infty$ (Proposition 2.8) nous affirmons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}. \tag{2.39}$$

Nous avons

$$e \notin \mathbb{P}_{k+1}. \tag{2.40}$$

En effet, si $e \in \mathbb{P}_{k+1}$, on déduit de (2.37) et (2.27) que

$$\lambda = C(d,s)\mathcal{J}(e) \geq \lambda_{k+1}.$$

Cela contredit (2.39).
Comme conséquence de (2.40), il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\langle e, e_i \rangle_{X_0^s(\Omega)} \neq 0$. Mais ceci est en contradiction avec le lemme 2.3, et par conséquent, cela prouve que (2.36) n'est pas vraie, i.e. toutes les valeurs propres appartiennent à la suite $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$. Ceci achève la preuve de la proposition (2.7) . ■

Proposition 2.8 *[13, 17] On a*

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda_k = +\infty. \tag{2.41}$$

Preuve. D'abord montrons que si $k, h \in \mathbb{N}^*$, $k \neq h$, alors

$$\langle e_k, e_h \rangle_{X_0^s(\Omega)} = 0 = \int_\Omega e_k(x) e_h(x) dx. \tag{2.42}$$

En effet, soit $k > h$, donc $k - 1 \geq h$. Ainsi,

$$e_k \in \mathbb{P}_k = (\text{span}\,\{e_1, \dots, e_{k-1}\})^\perp \subseteq (\text{span}\,\{e_h\})^\perp$$

et donc,

$$\langle e_k, e_h \rangle_{X_0^s(\Omega)} = 0. \tag{2.43}$$

Mais e_k est une fonction propre, donc, en utilisant l'équation (2.6) pour e_k et en prenant comme fonction test $v = e_h$, on obtient

$$\frac{C(d,s)}{2} \langle e_k, e_h \rangle_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} = \lambda_k \int_\Omega e_k(x) e_h(x) dx.$$

Ainsi en vertu de (2.43) on obtient (2.42).
Maintenant pour prouver (2.41), on résonne par l'absurde. Supposons que $\lambda_k \to c$ où $c \in \mathbb{R}$. Donc $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Puisque, d'après le lemme 2.1, on a $|||e_k|||^2_{X_0^s(\Omega)} = \lambda_k$, on en déduit d'après le lemme 2.2 qu'il existe une sous-suite $\left\{e_{k_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ pour laquelle

$$\lim_{j\to+\infty} e_{k_j} \to e_\infty \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

pour une certaine fonction $e_\infty \in L^2(\Omega)$. En particulier, $\left\{e_{k_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Mais, d'après (2.42), e_{k_j} et e_{k_i} sont orthogonaux dans $L^2(\Omega)$, donc

$$\left\|e_{k_j} - e_{k_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \left\|e_{k_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e_{k_i}\|^2_{L^2(\Omega)} = 2$$

ce qui contredit le fait que $\left\{e_{k_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, ainsi la proposition est prouvée. ■

Proposition 2.9 *[13, 17] Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction propre $e_{k+1} \in \mathbb{P}_{k+1}$ correspondant à λ_{k+1}, atteignant le minimum en (2.27), i.e. $\|e_{k+1}\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et*

$$\lambda_{k+1} = \frac{C(d,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{|e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y)|^2}{|x-y|^{2s+d}} dxdy. \tag{2.44}$$

Preuve. Par analogie à la Proposition 2.4 en utilisant (2.30) on peut montrer que le minimum définissant λ_{k+1} est atteint en une certaine fonction $e_{k+1} \in \mathbb{P}_{k+1}$. ■

2.5 Orthogonalité des fonctions propres

Proposition 2.10 *[13, 17] Les fonctions propres e_k, $k \in \mathbb{N}^*$, correspondant à λ_k, $k \in \mathbb{N}^*$, forment une base orthonormée de $L^2(\Omega)$ et une base orthogonale de $\mathbb{X}_0^s(\Omega)$.*

Preuve. L'orthogonalité des e_k, $k \in \mathbb{N}^*$, découle de (2.42).
• Montrons que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une base de $X_0^s(\Omega)$. Pour cela, nous montrons que si $v \in X_0^s(\Omega)$ tel que

$$\langle v, e_k\rangle_{X_0^s(\Omega)} = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ alors } v \equiv 0. \tag{2.45}$$

Pour cela, résonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un $v \in X_0^s(\Omega) \setminus \{0\}$ tel que

$$\langle v, e_k\rangle_{X_0^s(\Omega)} = 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*. \tag{2.46}$$

Aussi, après normalisation, on peut supposer que $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Ainsi, puisque $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$C(d,s)\mathcal{J}(v) < \lambda_{k+1} = \min_{\substack{u\in\mathbb{P}_{k+1} \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \frac{C(d,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+d}} dx\, dy$$

Par conséquent, $v \notin \mathbb{P}_{k+1}$, donc il existe $j \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $\langle v, e_j\rangle_{X_0^s(\Omega)} \neq 0$. Ce qui contredit (2.46), ainsi $v = 0$.
Posons

$$\tilde{e}_i := \frac{e_i}{|||e_i|||_{X_0^s(\Omega)}}$$

et

$$f_j := \sum_{i=1}^{j} \langle f, \tilde{e}_i \rangle_{X_0^s(\Omega)} \tilde{e}_i$$

pour $f \in X_0^s(\Omega)$ donnée. Notons que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$f_j \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_j\}. \tag{2.47}$$

Soit $v_j := f - f_j$. Par l'orthogonalité de $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ dans $X_0^s(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq |||v_j|||^2_{X_0^s(\Omega)} \\
&= \langle v_j, v_j \rangle_{X_0^s(\Omega)} \\
&= |||f|||^2_{X_0^s(\Omega)} + |||f_j|||^2_{X_0^s(\Omega)} - 2\langle f, f_j \rangle_{X_0^s(\Omega)} \\
&= |||f|||^2_{X_0^s(\Omega)} + \langle f_j, f_j \rangle_{X_0^s(\Omega)} - 2\sum_{i=1}^{j} \langle f, \tilde{e}_i \rangle^2_{X_0^s(\Omega)} \\
&= |||f|||^2_{X_0^s(\Omega)} - \sum_{i=1}^{j} \langle f, \tilde{e}_i \rangle^2_{X_0^s(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{j} \langle f, \tilde{e}_i \rangle^2_{X_0^s(\Omega)} \leq |||f|||^2_{X_0^s(\Omega)}$$

donc

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \langle f, \tilde{e}_i \rangle^2_{X_0^s(\Omega)}$$

est une série convergente. Ainsi, si on pose

$$A_j := \sum_{i=1}^{j} \langle f, \tilde{e}_i \rangle^2_{X_0^s(\Omega)}$$

alors $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
De plus, en utilisant à nouveau l'orthogonalité de $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ dans $X_0^s(\Omega)$, on voit que si $J > j$,

$$|||v_J - v_j|||^2_{X_0^s(\Omega)} = ||| \sum_{i=j+1}^{J} \langle f, \tilde{e}_i \rangle_{X_0^s(\Omega)} \tilde{e}_i |||^2_{X_0^s(\Omega)} = \sum_{i=j+1}^{J} \langle f, \tilde{e}_i \rangle^2_{X_0^s(\Omega)} = A_J - A_j$$

alors $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $X_0^s(\Omega)$ puisque la suite $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Par la complétude de $X_0^s(\Omega)$ (voir Lemme 2.1), il s'ensuit qu'il existe $v \in X_0^s(\Omega)$ tel que

$$\lim_{j\to+\infty} v_j = v \text{ dans } X_0^s(\Omega), \tag{2.48}$$

On observe maintenant que si $j \geq k$,

$$\langle v_j, \tilde{e}_k \rangle_{X_0^s(\Omega)} = \langle f, \tilde{e}_k \rangle_{X_0^s(\Omega)} - \langle f_j, \tilde{e}_k \rangle_{X_0^s(\Omega)} = \langle f, \tilde{e}_k \rangle_{X_0^s(\Omega)} - \langle f, \tilde{e}_k \rangle_{X_0^s(\Omega)} = 0.$$

Ainsi, par (2.48), il s'ensuit que $\langle v, \tilde{e}_k \rangle_{X_0^s(\Omega)} = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc, par (2.45), nous avons $v = 0$. En définitive, on a

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \langle f, \tilde{e}_i \rangle_{X_0^s(\Omega)} \tilde{e}_i = \lim_{j \to +\infty} f_j = \lim_{j \to +\infty} (f - v_j) = f - v = f \text{ dans } X_0^s(\Omega).$$

Ceci et (2.47) permettent de conclure que $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une base dans $X_0^s(\Omega)$.

• Montrons que $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une base pour $L^2(\Omega)$.

Soient $v \in L^2(\Omega)$ et $v_j \in C_0^2(\Omega)$ tels que $\|v_j - v\|_{L^2(\Omega)} \leq 1/j$. Remarquons, d'après [13, Corollaire 1.27], que $v_j \in X_0^s(\Omega)$. Par conséquent, puisque $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une base pour $X_0^s(\Omega)$, il existe $k_j \in \mathbb{N}^*$ et une fonction w_j appartenant à span $\{e_1, \ldots, e_{k_j}\}$ telle que

$$|||v_j - w_j|||_{X_0^s(\Omega)} \leq 1/j.$$

Ainsi, par (2.3),

$$\|u\|^2_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + |||u|||^2_{X_0^s(\Omega)}$$

et du fait que $\|.\|_{\mathbb{X}_0^s(\Omega)}$ et $|||.|||_{X_0^s(\Omega)}$ sont équivalentes, on conclu que

$$\|v_j - w_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_j - w_j\|_{X_0^s(\Omega)} \leq C|||v_j - w_j|||_{X_0^s(\Omega)} \leq C/j.$$

En conséquence,

$$\|v - w_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v - v_j\|_{L^2(\Omega)} + \|v_j - w_j\|_{L^2(\Omega)} \leq (C+1)/j.$$

Ceci montre que la suite $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ des fonctions propres de (2.6) est une base dans $L^2(\Omega)$. ■

2.6 Multiplicité des valeurs propres

Proposition 2.11 *[13, 17] La multiplicité de chaque valeur propre λ_k est finie, en d'autres termes, si λ_k est tel que*

$$\lambda_{k-1} < \lambda_k = \ldots = \lambda_{k+h} < \lambda_{k+h+1}, \tag{2.49}$$

pour un $h \in \mathbb{N}$, alors l'ensemble de toutes les fonctions propres associées à λ_k est span$\{e_k, ..., e_{k+h}\}$.

Preuve. Si λ_k est tel que $\lambda_{k-1} < \lambda_k = \ldots = \lambda_{k+h} < \lambda_{k+h+1}$, pour un $h \in \mathbb{N}$, alors on sait, d'après la proposition 2.9, que chaque élément de span $\{e_k, \ldots, e_{k+h}\}$ est une fonction propre du problème (2.6) correspondant à $\lambda_k = \cdots = \lambda_{k+h}$.

Inversement, soit $\phi \not\equiv 0$ une fonction propre correspondant à λ_k montrons qu'elle appartient à span $\{e_k, \ldots, e_{k+h}\}$. Pour cela on écrit

$$X_0^s(\Omega) = \text{span}\,\{e_k, \ldots, e_{k+h}\} \oplus (\text{span}\,\{e_k, \ldots, e_{k+h}\})^\perp$$

donc $\phi = \phi_1 + \phi_2$, avec

$$\phi_1 \in \text{span}\,\{e_k, \ldots, e_{k+h}\} \quad \text{ et } \quad \phi_2 \in (\text{span}\,\{e_k, \ldots, e_{k+h}\})^\perp. \tag{2.50}$$

En particulier,

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{X_0^s(\Omega)} = 0 \tag{2.51}$$

Vu que ϕ est une fonction propre correspondant à λ_k, nous pouvons écrire (2.6) pour ϕ et la tester par rapport à ϕ elle-même. En vertu de (2.51), on obtient

$$\lambda_k \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} = |||\phi|||^2_{X_0^s(\Omega)} = |||\phi_1|||^2_{X_0^s(\Omega)} + |||\phi_2|||^2_{X_0^s(\Omega)}. \tag{2.52}$$

De plus, d'après la proposition 2.9, nous savons que $e_k, \dots, e_{k+h}$ sont des fonctions propres associées à $\lambda_k = \cdots = \lambda_{k+h}$, donc ϕ_1 est aussi une fonction propre associée à λ_k.
Par conséquent, nous pouvons écrire (2.6) pour ϕ_1 et la tester par rapport à ϕ_2. Ainsi, en vertu de (2.51), on obtient

$$\lambda_k \int_\Omega \phi_1(x)\phi_2(x)dx = \frac{C(d,s)}{2} \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{X_0^s(\Omega)} = 0$$

c'est-à-dire

$$\int_\Omega \phi_1(x)\phi_2(x)dx = 0$$

et donc,

$$\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\phi_1 + \phi_2\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_2\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.53}$$

On écrit maintenant

$$\phi_1 = \sum_{i=k}^{k+h} c_i e_i$$

avec $c_i \in \mathbb{R}$. On utilise l'orthogonalité de la proposition 2.10 et (2.44) pour obtenir

$$|||\phi_1|||^2_{X_0^s(\Omega)} = \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 |||e_i|||^2_{X_0^s(\Omega)} = \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 \lambda_i = \lambda_k \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 = \lambda_k \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.54}$$

Maintenant, nous utilisons le fait que ϕ_1 et ϕ sont des fonctions propres associées à λ_k, nous déduisons que ϕ_2 est également une fonction propre correspondant à λ_k. Par conséquent, en utilisant (2.49) et le lemme 2.3, on conclut que

$$\langle \phi_2, e_1 \rangle_{X_0^s(\Omega)} = \cdots = \langle \phi_2, e_{k-1} \rangle_{X_0^s(\Omega)} = 0.$$

Ce résultat et la relation (2.50) impliquent que

$$\phi_2 \in (\text{span}\,\{e_1, \dots, e_{k+h}\})^\perp = \mathbb{P}_{k+h+1}. \tag{2.55}$$

Nous montrons que

$$\phi_2 \equiv 0. \tag{2.56}$$

Supposons par l'absurde que $\phi_2 \not\equiv 0$, d'après (2.28) et (2.55),

$$\begin{aligned}
\lambda_k < \lambda_{k+h+1} &= \min_{u \in \mathbb{P}_{k+h+1} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} dxdy}{\int_\Omega |u(x)|^2 dx} \\
&\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|\phi_2(x)-\phi_2(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} dxdy}{\int_\Omega |\phi_2(x)|^2 dx} \\
&= \frac{|||\phi_2|||^2_{X_0^s(\Omega)}}{\|\phi_2\|^2_{L^2(\Omega)}}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

On utilise donc (2.52), (2.53), (2.54) et (2.57) pour calculer

$$\begin{aligned}\lambda_k\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} &= |||\phi_1|||^2_{X^s_0(\Omega)} + |||\phi_2|||^2_{X^s_0(\Omega)}\\ &> \lambda_k \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda_k \|\phi_2\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &= \lambda_k\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

C'est une contradiction, donc $\phi_2 \equiv 0$.
De (2.50) et (2.56), on obtient que

$$\phi = \phi_1 \in \operatorname{span}\{e_k, \dots, e_{k+h}\}.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition 2.11. ■

Chapitre 3

Estimation des premières valeurs propres du Laplacien fractionnaire et applications

Dans ce chapitre, on calcule le Laplacien fractionnaire $-(-\Delta)^s$ pour les fonctions de la forme $u(x) = (1-|x|^2)_+^p$ et $v(x) = x_d u(x)$. Comme application, on estime les premières valeurs propres du Laplacien fractionnaire dans une boule de $\mathbb{R}^d$. Ce chapitre est basé sur les résultats de [5].

3.1 Définitions de base

Pour commencer, nous rappelons quelques concepts de base que nous utiliserons dans ce chapitre, notamment la fonction gamma, la fonction bêta et la fonction hypergéométrique de Gauss.

3.1.1 Fonction Gamma

Définition 3.1 *La fonction gamma, notée par* $\Gamma(z)$*, est définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \qquad Re(z) > 0. \tag{3.1}$$

L'intégrale converge absolument pour $Re(z) > 0$.
Propriétés : (voir par exemple [7])
La fonction gamma vérifie les propriétés suivantes :
1. $\Gamma(z)$ est définie et analytique dans la région $Re(z) > 0$.
2. $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (equation fonctionnelle)
4. $\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)\Gamma(z)$.
5. La fonction gamma peut être prolongée analytiquement à être une fonction méromorphe [1] sur tout le plan complexe avec des pôles simples en $0, -1, -2, \dots$. Les résidus sont

$$Res(\Gamma(z), -m) = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

1. holomorphe dans tout le plan complexe, sauf sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour la fonction.

6. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
7. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1.3.5.7...(2n-1)}{2^n}\Gamma(\frac{1}{2}), \quad n \in \mathbb{N}$.
8. $\Gamma(n+\frac{1}{3}) = \frac{1.4.7.10...(3n-2)}{3^n}\Gamma(\frac{1}{3}), \quad n \in \mathbb{N}$.
9. $\Gamma(n+\frac{1}{4}) = \frac{1.5.9.13...(4n-3)}{4^n}\Gamma(\frac{1}{4}), \quad n \in \mathbb{N}$.
10. $\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\Gamma(z)\sin(\pi z)}, \quad z \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$.
11. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$, (la formule de réflexion).
12. $\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$ (la formule de duplication).
13. La fonction $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ est une fonction entière possédant des zéros simples aux points $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3.1.2 Symbole de Pocchammer

Le symbole de Pochhammer est défini par

$$\begin{aligned}
&(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) = \prod_{j=0}^{n-1}(a+i), \quad n = 1, 2, \ldots \\
&(a)_0 = 1.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Propriétés : (voir par exemple [7])
Le symbole de Pochhammer vérifie les propriétés suivantes :

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \tag{3.3}$$

$$(1)_n = n!, \tag{3.4}$$

$$(-a)_n = (-1)^n(a-n+1)_n, \tag{3.5}$$

$$(2a)_n = \begin{cases} 2^n(a)_{\frac{n}{2}}\left(a+\frac{1}{2}\right)_{\frac{n}{2}} & n = 0, 2, 4, \ldots \\ 2^n(a)_{\frac{n+1}{2}}\left(a+\frac{1}{2}\right)_{\frac{n-1}{2}} & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases} \tag{3.6}$$

$$(a)_{2n} = 4^n\left(\frac{a}{2}\right)_n\left(\frac{a+1}{2}\right)_n, \tag{3.7}$$

$$(a)_{2n+1} = 4^n a\left(\frac{a+1}{2}\right)_n\left(1+\frac{a}{2}\right)_n = 2^{2n+1}\left(\frac{a}{2}\right)_{n+1}\left(\frac{a+1}{2}\right)_n, \tag{3.8}$$

$$(a+1)_n = \left(1+\frac{n}{a}\right)(a)_n, \tag{3.9}$$

$$(a)_{n+1} = (n+a)(a)_n = a(a+1)_n, \tag{3.10}$$

$$(a)_{n+m} = (a)_n(a+n)_m, \tag{3.11}$$

$$\frac{(a)_n}{(a)_m} = \begin{cases} (a+m)_{n-m} & n \geq m \\ \frac{1}{(a+n)_{m-n}} & n \leq m. \end{cases} \tag{3.12}$$

3.1.3 Fonction Bêta

Définition 3.2 *La fonction bêta, notée par $B(p,q)$, est définie par*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad Re(p) > 0,\ Re(q) > 0. \tag{3.13}$$

où p et q sont des nombres complexes.

Deux autres formes importantes de la fonction bêta peuvent être obtenues par changement de variable. En substituant $x = \frac{t}{1+t}$ dans (3.13), nous obtenons la première forme

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt \qquad Re(p) > 0,\ Re(q) > 0. \tag{3.14}$$

En substituant $x = \sin^2\theta$ dans (3.13), nous obtenons la deuxième forme

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta d\theta \qquad Re(p) > 0,\ Re(q) > 0. \tag{3.15}$$

Propriétés : (voir par exemple [7])
La fonction bêta vérifie les propriétés suivantes :

$$B(p,q) = B(q,p), \tag{3.16}$$
$$B(p+1,q) = \frac{p}{p+q} B(p,q), \tag{3.17}$$
$$B(p+k,q) = \frac{(p)_k}{(q+p)_k} B(p,q), \tag{3.18}$$
$$B(p+1,q+1) = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)} B(p,q), \tag{3.19}$$
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \tag{3.20}$$
$$\frac{(a)_n}{(b)_n} = \frac{B(a+n,b-a)}{B(a,b-a)}. \tag{3.21}$$

La relation (3.20) permet de prolonger B à tous les couples (p,q) de $\mathbb{C}^2$ dont l'un des deux n'est pas un entier négatif.
Pour $p \notin \mathbb{Z}$ on a

$$B(p,-p) = 0. \tag{3.22}$$

3.1.4 Fonction hypergéométrique de Gauss

Pour a, b, c et z nombres complexes avec $c \neq -1, -2, ...$ et $|z| < 1$, on définit la fonction hypergéométrique de Gauss par

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}. \tag{3.23}$$

Le rayon de convergence de (3.23) est 1 sauf si a ou b est un entier négatif, auquel cas nous avons un polynôme.

Exemple 3.1

$$(1-z)^{-a} = {}_2F_1(a,1;1;z), \tag{3.24}$$
$$\frac{1}{2z} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right), \tag{3.25}$$
$$\frac{1}{z} \ln(1+z) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z\right), \tag{3.26}$$
$$\frac{1}{z} \arcsin z = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right). \tag{3.27}$$

On vérifie facilement que (3.23) satisfait l'équation différentielle linéaire

$$z(z-1)y'' + ((a+b+1)z-c)y' + aby = 0. \tag{3.28}$$

La série (3.23) converge absolument lorsque $|z| < 1$ et définit ainsi une fonction ${}_2F_1(a,b;c;z)$, qui est analytique, quand $|z| < 1$, à condition que c ne soit ni zéro ni un entier négatif. En effet, c'est la seule solution de l'équation différentielle (3.28) qui soit analytique au point $z = 0$ et prend la valeur 1 à ce point.
La fonction hypergéométrique ${}_2F_1(a,b;c;z)$ peut être prolongée analytiquement de plusieurs manières équivalentes, dont une manière consiste à utiliser la représentation intégrale d'Euler :

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}dt \tag{3.29}$$

$$(Re(c) > Re(a) > 0;\ |\arg(1-z)| \leq \pi - \epsilon\ (0 < \epsilon < \pi)),$$

ou d'une manière équivalente

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt \tag{3.30}$$

$$(Re(c) > Re(b) > 0;\ |\arg(1-z)| \leq \pi - \epsilon\ (0 < \epsilon < \pi)),$$

puisque, par la série (3.23) on a l'égalité

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = {}_2F_1(b,a;c;z).$$

Nous terminons cette section par citer quelques relations vérifiées par la fonction hypergéométrique de Gauss (voir par exemple [7]), qui seront d'une grande utilité dans les calculs de la section suivante, notamment

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,c-b;c;z), \tag{3.31}$$

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-b}{}_2F_1\left(c-a,b;c;\frac{z}{z-1}\right), \tag{3.32}$$

$$(c-a-1){}_2F_1(a,b;c;z) + a{}_2F_1(a+1,b;c;z) - (c-1){}_2F_1(a,b;c-1;z) = 0. \tag{3.33}$$

3.2 Le Laplacien fractionnaire des fonctions $u(x) = (1-|x|^2)_+^p$ et $v(x) = x_d u(x)$

On considère l'opérateur laplacien fractionnaire donnée par

$$\Delta^s u := -(-\Delta)^s u = C(d,s) \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d \cap \{|y-x|>\varepsilon\}} \frac{u(y)-u(x)}{|x-y|^{d+2s}}\, dy. \tag{3.34}$$

où

$$C(d,s) := \frac{s4^s\Gamma\left(\frac{2s+d}{2}\right)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(1-s)}.$$

Dans cette section on essaye de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Soit $d \geq 1$, $0 < s < 1$ et $p > -1$. On définit*

$$u_p^{(d)}(x) = (1-|x|^2)_+^p, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.35}$$

$$v_p^{(d)}(x) = (1-|x|^2)_+^p x_d, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.36}$$

$$\Phi_{p,s}^{(d)}(x) = \frac{C(d,s)B(-s,p+1)\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \ {}_2F_1\Big(s+\frac{d}{2}, -p+s; \frac{d}{2}; x\Big). \tag{3.37}$$

Si $x \in \mathbb{R}^d$ et $|x| < 1$, alors

$$\Delta^s u_p^{(d)}(x) = \Phi_{p,s}^{(d)}(|x|^2), \tag{3.38}$$

$$\Delta^s v_p^{(d)}(x) = x_d \Phi_{p,s}^{(d+2)}(|x|^2). \tag{3.39}$$

3.2.1 Cas unidimensionnel $d = 1$:

Pour démontrer le théorème 3.1, pour $d = 1$, nous avons besoin de démontrer les trois lemmes suivants :

Lemme 3.1 *Si $p > -1$, $0 < s < 1$ et $x \in]-1, 1[$, alors*

$$\begin{aligned} I_m(p) &:= P.V. \int_{-1}^{1} \frac{(1-tx)^{2s-m-2p} - 1}{|t|^{1+2s}} (1-t^2)^p \, dt \\ &= B\Big(-s, p+1\Big)\left({}_2F_1\Big(-s, p+m-\frac{1}{2}-s; \frac{1}{2}; x^2\Big) - 1\right), \end{aligned} \tag{3.40}$$

où $m = 1$ ou $m = 2$.

Preuve. Si $p = s-1$, d'après (3.22), la fonction bêta du membre de droite de (3.40) est nulle et le résultat est évident. On suppose que $p \neq s-1$, nous avons

$$I_m(p) = \text{ P.V.} \int_{-1}^{1} \frac{(1-tx)^{2s-m-2p} - 1}{|t|^{1+2s}} (1-t^2)^p \, dt$$

On sait d'après (3.24) que $(1-tx)^{2s-m-2p} = \sum_{k=0}^{\infty} (2p+m-2s)_k \frac{(tx)^k}{k!}$ donc :

$$\begin{aligned} I_m(p) &= \text{ P.V.} \int_{-1}^{1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2p+m-2s)_k (tx)^k}{k!|t|^{1+2s}} (1-t^2)^p \, dt \\ &= \text{ P.V.} \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2p+m-2s)_{2k+1} (tx)^{2k+1}}{(2k+1)!|t|^{1+2s}} (1-t^2)^p \, dt \\ &+ \text{P.V.} \int_{-1}^{1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2p+m-2s)_{2k} (tx)^{2k}}{(2k)!|t|^{1+2s}} (1-t^2)^p \, dt \\ &= 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2p+m-2s)_{2k} (tx)^{2k}}{(2k)! \ t^{1+2s}} (1-t^2)^p \, dt \\ &= 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2p+m-2s)_{2k} (tx)^{2k}}{(2k)! \ t^{1+2s}} (1-t^2)^p \, dt - 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} t^{-1-2s} (1-t^2)^p \, dt \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2p+m-2s)_{2k} B\Big(k-s, p+1\Big)}{(2k)!} x^{2k} \right) - B\Big(-s, p+1\Big) \\ &=: S_m - B\Big(-s, p+1\Big). \end{aligned}$$

Ici $(a)_n$ est le symbole de Pochhammer. En vertu de (3.6) on observe que

$$(2p+m-2s)_{2k} = 2^{2k}\left(p+\frac{m}{2}-s\right)_k\left(p+\frac{m+1}{2}-s\right)_k, \tag{3.41}$$

et, par la formule de duplication,

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(1/2)}, \tag{3.42}$$

appliquée à $2x = 2k+1$, on a

$$(2k)! = 2^{2k}\left(\tfrac{1}{2}\right)_k k!. \tag{3.43}$$

On a aussi, en vertu de (3.18)

$$B\Big(k-s,p+1\Big) = \frac{(-s)_k}{(p+1-s)_k}B\Big(-s,p+1\Big). \tag{3.44}$$

Ainsi, en utilisant (3.41), (3.43) et (3.44), on obtient

$$S_m = B\Big(-s,p+1\Big)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-s)_k\left(p+\frac{m}{2}-s\right)_k\left(p+\frac{m+1}{2}-s\right)_k}{(p+1-s)_k\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}x^{2k}.$$

Pour $m=1$ ou $m=2$, le facteur $(p+1-s)_k$ dans le dénominateur se simplifie avec l'un des termes du numérateur, et le résultat s'ensuit. ■

Lemme 3.2 *Si $p>-1$, $0<s<1$, on a*

$$P.V.\int_{-1}^{1}\frac{(1-w^2)^p-1}{|w|^{1+2s}}\,dw = \frac{1}{s}[1-(p+1-s)B(p+1,1-s)],$$

et

$$P.V.\int_{-1}^{1}\frac{(1-wx)^{2s-1}-1}{|w|^{1+2s}}\,dw = \frac{1}{s}-\frac{1}{2s}\Big(1-x\Big)^{2s}-\frac{1}{2s}\Big(1+x\Big)^{2s}.$$

Preuve. On a, en changeant la variable $t=w^2$ puis en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
I &:= \text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-w^2)^p-1}{|w|^{1+2s}}\,dw\\
&= 2\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{(1-w^2)^p-1}{w^{1+2s}}\,dw\\
&= 2\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{2}\int_{\varepsilon^2}^{1}(1-t)^p t^{-1-s}[(1-t)+t]\,dt-\int_{\varepsilon}^{1}w^{-1-2s}\,dw\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\to0^+}\Bigg(\frac{1}{s}(1-\varepsilon^2)^{p+1}\varepsilon^{-2s}-\frac{p+1}{s}\int_{\varepsilon^2}^{1}(1-t)^p t^{-s}\,dt\\
&\qquad+\int_{\varepsilon^2}^{1}(1-t)^p t^{-s}\,dt+\frac{1}{s}-\frac{\varepsilon^{-2s}}{s}\Bigg).
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{s}(1-\varepsilon^2)^{p+1}\varepsilon^{-2s}-\frac{\varepsilon^{-2s}}{s}\right) = \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\varepsilon^{2-2s}}{s}\,\frac{(1-\varepsilon^2)^{p+1}-1}{\varepsilon^2} = 0.$$

Ainsi

$$I = \frac{1}{s}[1 - (p+1-s)B(p+1, 1-s)].$$

Maintenant pour la deuxième intégrale

$$J := \text{P.V.} \int_{-1}^{1} \frac{(1-wx)^{2s-1} - 1}{|w|^{1+2s}}\, dw = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (J_\varepsilon(x) + J_\varepsilon(-x)),$$

où

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(x) &= \int_\varepsilon^1 \frac{(1-wx)^{2s-1} - 1}{w^{1+2s}}\, dw \\ &= \int_\varepsilon^1 \Big(\frac{1}{w} - x\Big)^{2s-1} \frac{dw}{w^2} - \frac{\varepsilon^{-2s} - 1}{2s} \\ &= \frac{1}{2s}\Big(\frac{1}{\varepsilon} - x\Big)^{2s} - \frac{1}{2s}\Big(1 - x\Big)^{2s} - \frac{\varepsilon^{-2s} - 1}{2s} \\ &= \frac{1}{2s} - \frac{1}{2s}\Big(1 - x\Big)^{2s} + \frac{(1-\varepsilon x)^{2s} - 1}{2s\varepsilon^{2s}}. \end{aligned}$$

Par la règle de l'Hôpital, nous constatons que

$$J = \frac{1}{s} - \frac{1}{2s}\Big(1 - x\Big)^{2s} - \frac{1}{2s}\Big(1 + x\Big)^{2s}.$$

■

Posons

$$Lu(x) := \text{P.V.} \int_{-1}^{1} \frac{u(y) - u(x)}{|y - x|^{1+2s}}\, dy.$$

Lemme 3.3 *[6] Soit $p > -1$ et $u_p(x) = (1-x^2)_+^p$. Pour $0 < s < 1$ on a*

$$Lu_p(x) = \frac{(1-x^2)^{p-2s}}{2s}\Bigg((1-x)^{2s} + (1+x)^{2s} - 2(p+1-s)B(p+1, 1-s) + 2sI_1(p)\Bigg),$$

où $I_1(p)$ est donné par (3.40).

Preuve. On a, pour $x \in]-1, 1[$,

$$Lu_p(x) = \text{P.V.} \int_{-1}^{1} \frac{(1-y^2)^p - (1-x^2)^p}{|y-x|^{1+2s}}\, dy.$$

Nous changeons la variable de la manière suivante

$$\begin{aligned} w = \varphi(y) &:= \frac{x - y}{1 - xy}; \qquad y = \varphi(w); \\ \varphi'(w) &= \frac{x^2 - 1}{(1 - xw)^2}; \\ y - x &= \frac{w(1 - x^2)}{wx - 1}; \\ 1 - y^2 &= \frac{(1 - x^2)(1 - w^2)}{(wx - 1)^2}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
Lu_p(x) &= (1-x^2)^{p-2s}\text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-w^2)^p-(1-wx)^{2p}}{|w|^{1+2s}}\,(1-wx)^{2s-1-2p}\,dw \\
&= (1-x^2)^{p-2s}\Bigg[\text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-w^2)^p-1}{|w|^{1+2s}}\,dw-\text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-wx)^{2s-1}-1}{|w|^{1+2s}}\,dw \qquad (3.45)\\
&+\text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-wx)^{2s-1-2p}-1}{|w|^{1+2s}}\,(1-w^2)^p\,dw\Bigg].\\
&= (1-x^2)^{p-2s}\Bigg[I-J+I_1(p)\Bigg].
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
I &:= \text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-w^2)^p-1}{|w|^{1+2s}}\,dw\\
J &:= \text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-wx)^{2s-1}-1}{|w|^{1+2s}}\,dw,
\end{aligned}$$

et le lemme est prouvé en utilisant le lemme 3.2. ■

Dans le théorème suivant, nous prouvons le théorème 3.1 pour $d=1$.

Théorème 3.2 *Soit $p>-1$, $u_p(x)=(1-x^2)_+^p$, et $v_p(x)=x(1-x^2)_+^p$ pour $x\in\mathbb{R}$. Pour $0<s<1$ et $x\in]-1,1[$ on a*

1. $$\begin{aligned}\Delta^s u_p(x) &= C(1,s)B\Big(-s,p+1\Big){}_2F_1\Big(-s,p+\frac{1}{2}-s;\frac{1}{2};x^2\Big)(1-x^2)^{p-2s} \qquad (3.46)\\
&= C(1,s)B\Big(-s,p+1\Big){}_2F_1\Big(s+\frac{1}{2},-p+s;\frac{1}{2};x^2\Big). \qquad (3.47)\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\Delta^s v_p(x) &= C(1,s)B\Big(-s,p+1\Big)(2s+1) \qquad (3.48)\\
&\times {}_2F_1\Big(-s,p+\frac{3}{2}-s;\frac{3}{2};x^2\Big)x(1-x^2)^{p-2s}\\
&= C(1,s)B\Big(-s,p+1\Big)(2s+1)\;{}_2F_1\Big(s+\frac{3}{2},-p+s;\frac{3}{2};x^2\Big)x. \qquad (3.49)\end{aligned}$$

Preuve. 1. Nous prouvons 3.38 pour $d=1$.

$$\begin{aligned}
C(1,s)^{-1}\Delta^s u_p(x) &= \text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^p-(1-x^2)^p}{|y-x|^{1+2s}}\,dy-u_p(x)\int_{\mathbb{R}\setminus]-1,1[}\frac{dy}{|y-x|^{1+2s}}\\
&= Lu_p(x)-\frac{(1-x^2)^p}{2s}\left(\frac{1}{(x+1)^{2s}}+\frac{1}{(1-x)^{2s}}\right)\\
&= Lu_p(x)-\frac{(1-x^2)^{p-2s}}{2s}\Bigg((1-x)^{2s}+(1+x)^{2s}\Bigg).
\end{aligned}$$

On rappelle, du lemme 3.3, la formule suivante

$$\begin{aligned}
Lu_p(x) = \frac{(1-x^2)^{p-2s}}{2s}\Bigg(&(1-x)^{2s}+(1+x)^{2s}\\
&-2(p+1-s)B(p+1,1-s)+2sI_1(p)\Bigg), \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

où $I_1(p)$ est donné par (3.40).
Par $(p+1-s)B(p+1,1-s) = -sB(p+1,-s)$ et le Lemme 3.1,

$$\begin{aligned} &sI_1(p) - (p+1-s)B(p+1,1-s) \\ &\qquad\qquad = sB\Big(-s,p+1\Big){}_2F_1\Big(-s,p+\frac{1}{2}-s;\frac{1}{2};x^2\Big). \end{aligned}$$

Cela prouve (3.46). La formule (3.47) découle de (3.31).

2. Maintenant, nous prouvons (3.39) pour $d=1$. On écrit

$$\begin{aligned} &C(1,s)^{-1}\Delta^s v_p(x) \\ &\quad = \text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{y(1-y^2)^p - x(1-x^2)^p}{|y-x|^{1+2s}}\,dy - v_p(x)\int_{\mathbb{R}\setminus]-1,1[}\frac{dy}{|y-x|^{1+2s}} \\ &\quad = \text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{y(1-y^2)^p - x(1-x^2)^p}{|y-x|^{1+2s}}\,dy - \frac{v_p(x)}{2s}\left(\frac{1}{(x+1)^{2s}}+\frac{1}{(1-x)^{2s}}\right) \\ &\quad =: \mathbb{I} - \frac{v_p(x)}{2s}\left(\frac{1}{(x+1)^{2s}}+\frac{1}{(1-x)^{2s}}\right). \end{aligned}$$

Pour évaluer $\mathbb{I}$, on change la variable en $t = \frac{x-y}{1-xy}$, (voir la preuve du lemme 3.3). On obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= (1-x^2)^{p-2s}\text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^p(x-t) - x(1-tx)^{2p+1}}{|t|^{1+2s}}\,(1-tx)^{2s-2-2p}\,dt \\ &= (1-x^2)^{p-2s}\Bigg[x\text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-tx)^{2s-2p-2}-1}{|t|^{1+2s}}(1-t^2)^p\,dt \\ &+ x\text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^p-1}{|t|^{1+2s}}\,dt + x\text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{1-(1-tx)^{2s-1}}{|t|^{1+2s}}\,dt \\ &- \text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^p t(1-tx)^{2s-2p-2}}{|t|^{1+2s}}\,dt\Bigg]. \end{aligned}$$

On a d'après le lemme 3.2

$$\begin{aligned} \text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^p-1}{|t|^{1+2s}}\,dt &= \frac{1}{s}\left[1-(p+1-s)B(p+1,1-s)\right], \\ \text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{1-(1-tx)^{2s-1}}{|t|^{1+2s}}\,dt &= \frac{1}{2s}\Big(1-x\Big)^{2s} + \frac{1}{2s}\Big(1+x\Big)^{2s} - \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.1 on obtient

$$\begin{aligned} &\text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-tx)^{2s-2p-2}-1}{|t|^{1+2s}}(1-t^2)^p\,dt = I_2(p) \\ &\qquad = B\Big(-s,p+1\Big)\left({}_2F_1\Big(-s,p+\frac{3}{2}-s;\frac{1}{2};x^2\Big)-1\right). \end{aligned}$$

Pour $p \neq s-1$ on a

$$\begin{aligned}
K &:= \text{P.V.} \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^p t(1-tx)^{2s-2p-2}}{|t|^{1+2s}}\, dt \\
&= \text{P.V.} \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^p t}{|t|^{1+2s}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2p+2-2s)_k}{k!}(tx)^k\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{(1-t^2)^p t}{|t|^{1+2s}} \frac{(2p+2-2s)_{2k+1}}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1}\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} B(p+1, k+1-s)\frac{(2p+2-2s)_{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de duplication (3.42) pour $x = k+1$, on obtient

$$(2k+1)! = 2^{2k+1}\left(\tfrac{1}{2}\right)_{k+1} k!.$$

On a aussi, par (3.8),

$$(2p+2-2s)_{2k+1} = 2^{2k+1}(p+1-s)_{k+1}(p+\frac{3}{2}-s)_k\ ,$$

et, par (3.18),

$$B(p+1, k+1-s) = B(-s, p+1)\frac{(-s)_{k+1}}{(p+1-s)_{k+1}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
K &= B(-s, p+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)_{k+1}(p+\frac{3}{2}-s)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_{k+1} k!} x^{2k+1}. \\
&= -2sB(-s, p+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-s)_k(p+\frac{3}{2}-s)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k k!} x^{2k+1} \\
&= -2sB\Big(-s, p+1\Big) x \cdot {}_2F_1\Big(1-s, p+\frac{3}{2}-s; \frac{3}{2}; x^2\Big).
\end{aligned}$$

Ceci est également valable pour $p = s-1$, puisque dans ce cas on a $K = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Delta^s v_p(x) = C(1,s)B\Big(-s, p+1\Big)(1-x^2)^{p-2s} x \\
\times \left({}_2F_1\Big(-s, p+\frac{3}{2}-s; \frac{1}{2}; x^2\Big) + 2s\ {}_2F_1\Big(1-s, p+\frac{3}{2}-s; \frac{3}{2}; x^2\Big)\right).
\end{aligned}$$

La formule (3.48) découle de (3.33), et (3.49) est alors une conséquence de (3.31). ■

Exemple 3.2 *Le calcul de $\Delta^s u_p$ et $\Delta^s v_p$ pour $p = s$ et $p = s+1$.*

- *Pour* $p = s$ *on a*

$$\begin{aligned}
\Delta^s u_s(x) &= \Delta^s (1-x^2)^s_+ \\
&= C(1,s) B\Big(-s, s+1\Big)\, {}_2F_1\Big(s+\frac{1}{2}, 0; \frac{1}{2}; x^2\Big) \\
&= \frac{s 4^s \Gamma\left(\frac{2s+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1-s)} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+1)}{\Gamma(1)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(s+\frac{1}{2})_k (0)_k}{(\frac{1}{2})_k} \frac{x^{2k}}{k!} \\
&= \frac{-4^s \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(2s)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(-s) 2^{2s-1}\Gamma(s)} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+1)}{\Gamma(1)} \quad \textit{(car : } (0)_k = 0 \textit{ si } k \geq 1\textit{)} \\
&= \frac{-4^s \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(2s)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(-s) 2^{2s-1}\Gamma(s)} \frac{\Gamma(-s) s\Gamma(s)}{\Gamma(1)} \\
&= -\Gamma(2s+1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^s v_s(x) &= \Delta^s x(1-x^2)^s_+ \\
&= C(1,s) B\Big(-s, s+1\Big)(2s+1)\ \ {}_2F_1\Big(s+\frac{3}{2}, 0; \frac{3}{2}; x^2\Big) x \\
&= \frac{s 4^s \Gamma\left(\frac{2s+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1-s)} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+1)}{\Gamma(1)} (2s+1) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(s+\frac{3}{2})_k (0)_k}{(\frac{3}{2})_k} \frac{x^{2k}}{k!}\ x \\
&= \frac{-4^s \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(2s)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(-s) 2^{2s-1}\Gamma(s)} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+1)}{\Gamma(1)} (2s+1)\ x \quad \textit{(car : } (0)_k = 0 \textit{ si } k \geq 1\textit{)} \\
&= \frac{-4^s \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(2s)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(-s) 2^{2s-1}\Gamma(s)} \frac{\Gamma(-s) s\Gamma(s)}{\Gamma(1)} (2s+1)\ x \\
&= -\Gamma(2s+2) x.
\end{aligned}$$

- *Pour* $p = s+1$ *on a*

$$\begin{aligned}
\Delta^s u_{s+1}(x) &= \Delta^s (1-x^2)^{s+1}_+ \\
&= C(1,s) B\Big(-s, s+2\Big)(2s+1)\ \ {}_2F_1\Big(s+\frac{3}{2}, -1; \frac{3}{2}; x^2\Big) x \\
&= \frac{s 4^s \Gamma\left(\frac{2s+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1-s)} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+2)}{\Gamma(2)} (2s+1) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(s+\frac{3}{2})_k (-1)_k}{(\frac{3}{2})_k} \frac{x^{2k}}{k!}\ x \\
&= \frac{-4^s \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(2s)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(-s) 2^{2s-1}\Gamma(s)} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+2)}{\Gamma(2)} (1-(1+2s)x^2) \\
&\qquad \textit{(car : } (-1)_k = 0 \textit{ si } k \geq 2\textit{)} \\
&= -\Gamma(2s+1)(s+1)(1-(1+2s)x^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^s v_{s+1}(x) &= \Delta^s x(1-x^2)_+^{s+1} \\
&= C(1,s)B\Big(-s,s+2\Big)(2s+1)_2F_1\Big(s+\frac{3}{2},-1;\frac{3}{2};x^2\Big)x \\
&= \frac{s4^s\Gamma\left(\frac{2s+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1-s)}\frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+2)}{\Gamma(2)}(2s+1)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(s+\frac{3}{2})_k(-1)_k}{(\frac{3}{2})_k}\frac{x^{2k}}{k!}\,x \\
&= \frac{-4^s\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2s)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(-s)2^{2s-1}\Gamma(s)}\frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+2)}{\Gamma(2)}(2s+1)(1-(\frac{2}{3}s+1)x^2)x \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{(car : } (-1)_k = 0 \textit{ si } k\geq 2\textit{)} \\
&= -\frac{\Gamma(2s+3)}{6}(3-(3+2s)x^2)x.
\end{aligned}$$

3.2.2 Cas multidimensionnel $d > 1$:

Rappelons que $u_p^{(d)}(x) = u_p(|x|)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, avec $u_p(t) = (1-t^2)_+^p$, $t \in \mathbb{R}$. Soit $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$, la sphère unité dans $\mathbb{R}^d$.

Lemme 3.4 *Soit $d \geq 2$, $0 < s < 1$ et $p > -1$. Si $x \in \mathbb{R}^d$ et $|x| < 1$, alors*

$$\Delta^s u_p^{(d)}(x) = \frac{C(d,s)}{2C(1,s)}\int_{S^{d-1}}(1-|x|^2+|h_d x|^2)^{p-s}\Delta^s u_p\left(\frac{|x|h_d}{\sqrt{1-|x|^2+|h_d x|^2}}\right)dh. \tag{3.51}$$

(h_d dans l'intégrale désigne la dernière composante de $h \in S^{d-1}$.)

Preuve. Puisque la fonction $u_p^{(d)}$ est radiale, donc le membre gauche de (3.51) l'est aussi, ainsi sans perte de généralité on peut supposer que $x = (0,0,\ldots,0,|x|)$.
Pour $|x| < 1$ on a, en utilisant les coordonnées polaires $y = x + t\omega,\ t > 0,\ \omega \in S^{d-1}$,

$$\begin{aligned}
\Delta^s u_p^{(d)}(x) &= C(d,s)\text{P.V.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u_p^{(d)}(y)-(1-|x|^2)^p}{|x-y|^{d+2s}}dy \\
&= C(d,s)\int_{S^{d-1}}d\omega\text{P.V.}\int_0^{+\infty}\frac{u_p^{(d)}(x+t\omega)-u_p^{(d)}(x)}{t^{d+2s}}t^{d-1}dt \\
&= C(d,s)\int_{S^{d-1}}d\omega\text{P.V.}\int_0^{+\infty}\frac{u_p^{(d)}(x+t\omega)-u_p^{(d)}(x)}{t^{1+2s}}dt \\
&= \frac{C(d,s)}{2}\Bigg[\int_{S^{d-1}}d\omega\text{P.V.}\int_0^{+\infty}\frac{u_p^{(d)}(x+t\omega)-u_p^{(d)}(x)}{t^{1+2s}}dt \\
&\qquad + \int_{S^{d-1}}d\omega\text{P.V.}\int_0^{+\infty}\frac{u_p^{(d)}(x+t\omega)-u_p^{(d)}(x)}{t^{1+2s}}dt\Bigg]
\end{aligned}$$

Dans la deuxième intégrale on effectue le changement de variable $\omega = -h$ et en utilisant le fait que $d\omega$ est invariante par symétrie sur S^{d-1}, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta^s u_p^{(d)}(x) &= \frac{C(d,s)}{2}\left[\int_{S^{d-1}} d\omega \text{P.V.} \int_0^{+\infty} \frac{u_p^{(d)}(x+t\omega) - u_p^{(d)}(x)}{t^{1+2s}} dt \right.\\
&\qquad \left. + \int_{S^{d-1}} dh \text{P.V.} \int_0^{+\infty} \frac{u_p^{(d)}(x-th) - u_p^{(d)}(x)}{t^{1+2s}} dt \right]\\
&= \frac{C(d,s)}{2}\left[\int_{S^{d-1}} dh \text{P.V.} \int_0^{+\infty} \frac{u_p^{(d)}(x+th) - u_p^{(d)}(x)}{t^{1+2s}} dt \right.\\
&\qquad \left. + \int_{S^{d-1}} dh \text{P.V.} \int_{-\infty}^{0} \frac{u_p^{(d)}(x+th) - u_p^{(d)}(x)}{(-t)^{1+2s}} dt \right]\\
&= \frac{C(d,s)}{2} \int_{S^{d-1}} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{u_p^{(d)}(x+ht) - (1-|x|^2)^p}{|t|^{1+2s}}\, dt\, dh.
\end{aligned}$$

On calcule l'intégrale de la valeur principale (intérieure) en changeant la variable $t = -|x|h_d + r\sqrt{|h_d x|^2 - |x|^2 + 1}$. On obtient

$$\begin{aligned}
g(x,h) &:= \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{u_p^{(d)}(x+ht) - (1-|x|^2)^p}{|t|^{1+2s}}\, dt\\
&= \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-r^2)^p(1-|x|^2+|h_d x|^2)^p - (1-|x|^2)^p}{|-|x|h_d + r\sqrt{|h_d x|^2 - |x|^2+1}|^{1+2s}} \sqrt{|h_d x|^2 - |x|^2 + 1}\, dr\\
&= (1-|x|^2+|h_d x|^2)^{p-s} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{u_p(r) - (1 - \frac{|h_d x|^2}{1-|x|^2+|h_d x|^2})^p}{|r - \frac{|x|h_d}{\sqrt{1-|x|^2+|h_d x|^2}}|^{1+2s}}\, dr\\
&= (1-|x|^2+|h_d x|^2)^{p-s} C(1,s)^{-1} \Delta^s u_p\Big(\frac{|x|h_d}{\sqrt{1-|x|^2+|h_d x|^2}}\Big).
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.5 *On a*

$$\int_{S^{d-1}} f(\alpha h_d^2)\, dh = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} f(\alpha h^2)(1-h^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dh \tag{3.52}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* f *est une fonction quelconque pour laquelle les intégrales sont absolument convergentes.*

PREUVE.
Soit $S_+^{d-1} := \{h \in S^{d-1}, h_d > 0\}$ alors le membre gauche de (3.52) peut s'écrire sous la forme

$$\int_{S^{d-1}} f(\alpha h_d^2)\, dh = 2\int_{S_+^{d-1}} f(\alpha h_d^2)\, dh.$$

Posons $h = (\tilde{h}, h_d) \in S^{d-1}$, où $\tilde{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_{d-1})$. Alors pour $h \in S_+^{d-1}$ on a

$$h_d = \sqrt{1 - (h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_{d-1}^2)} = \sqrt{1 - |\tilde{h}|^2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{S^{d-1}} f(\alpha h_d^2)\, dh &= 2\int_{|\tilde{h}|<1} f(\alpha h_d^2)\sqrt{1+\left(\frac{\partial h_d}{\partial h_1}\right)^2+\left(\frac{\partial h_d}{\partial h_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial h_d}{\partial h_{d-1}}\right)^2}\, d\tilde{h} \\
&= 2\int_{|\tilde{h}|<1} f(\alpha(1-|\tilde{h}|^2))\frac{1}{\sqrt{1-|\tilde{h}|^2}}\, d\tilde{h} \\
&= 2\int_{S^{d-2}}\left(\int_0^1 f(\alpha(1-r^2))\frac{r^{d-2}}{\sqrt{1-r^2}}\, dr\right) d\sigma \text{ (en passant} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{en coordonnées polaires.)} \\
&= 2\frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}\int_0^1 f(\alpha(1-r^2))\frac{r^{d-3}}{\sqrt{1-r^2}}\, rdr \\
&= 2\frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}\int_0^1 f(\alpha h^2)(1-h^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dh \\
&= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}\int_{-1}^1 f(\alpha h^2)(1-h^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dh.
\end{aligned}$$

■

Preuve de la formule (3.38) **du Théorème 3.1 pour** $d > 1$**.**
On a, selon le Théorème 3.2 et le Lemme 3.4,

$$\begin{aligned}
\Delta^s u_p^{(d)}(x) &= \frac{C(d,s)B(-s,p+1)}{2}\int_{S^{d-1}} \frac{{}_2F_1\left(s+\frac{1}{2},-p+s;\frac{1}{2};\frac{|x|^2h_d^2}{1-|x|^2+|h_dx|^2}\right)}{(1-|x|^2+|h_dx|^2)^{-p+s}}\, dh \\
&=: \frac{C(d,s)B(-s,p+1)}{2} I_{S^{d-1}}.
\end{aligned}$$

On transforme la fonction de l'intégrande en utilisant (3.32),

$$\frac{{}_2F_1\left(s+\frac{1}{2},-p+s;\frac{1}{2};\frac{|x|^2h_d^2}{1-|x|^2+|h_dx|^2}\right)}{(1-|x|^2+|h_dx|^2)^{-p+s}} = \frac{{}_2F_1\left(-s,-p+s;\frac{1}{2};\frac{|x|^2h_d^2}{|x|^2-1}\right)}{(1-|x|^2)^{-p+s}}.$$

D'après le lemme 3.5, on a

$$\begin{aligned}
I_{S^{d-1}} &= \int_{S^{d-1}} \frac{{}_2F_1\left(-s,-p+s;\frac{1}{2};\frac{|x|^2h_d^2}{|x|^2-1}\right)}{(1-|x|^2)^{-p+s}}\, dh \\
&= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}(1-|x|^2)^{p-s}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}\int_{-1}^1 {}_2F_1\left(-s,-p+s;\frac{1}{2};\frac{|x|^2h^2}{|x|^2-1}\right)(1-h^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dh.
\end{aligned}$$

Soit

$$\phi(z) = \int_{-1}^1 {}_2F_1\left(-s,-p+s;\frac{1}{2};\frac{zh^2}{z-1}\right)(1-h^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dh, \quad z\in\mathbb{C}, |z|<1.$$

Puisque $Re\frac{zh^2}{z-1} < \frac{1}{2}$ pour $|z| < 1$, la fonction ϕ est analytique dans le disque unité $\{z : |z| < 1\}$.

Pour $|z| < \frac{1}{2}$, on calcule l'intégrale définissant ϕ en utilisant le développement en série entière,

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-s+k)}{\Gamma(-s)} \frac{\Gamma(-p+s+k)}{\Gamma(-p+s)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+k)k!} \left(\frac{z}{z-1}\right)^k \int_{-1}^{1} h^{2k}(1-h^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dh \\
&= \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-s+k)}{\Gamma(-s)} \frac{\Gamma(-p+s+k)}{\Gamma(-p+s)} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+k)k!} \left(\frac{z}{z-1}\right)^k \\
&= \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} {}_2F_1\Big(-s, -p+s; \frac{d}{2}; \frac{z}{z-1}\Big) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} {}_2F_1\Big(s+\frac{d}{2}, -p+s; \frac{d}{2}; z\Big)(1-z)^{-p+s} =: \psi(z).
\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a utilisé (3.32). Les fonctions ϕ et ψ sont toutes deux analytiques dans le disque unité, donc $\phi(z) = \psi(z)$ pour tout $|z| < 1$. On pose $z = |x|^2$ et la preuve est terminée.

Lemme 3.6 *Soit $d \geq 2$, $0 < s < 1$ et $p > -1$. Si $x \in \mathbb{R}^d$ et $|x| < 1$, alors*

$$\begin{aligned}
\Delta^s v_p^{(d)}(x) &= x_d \Delta^s u_p^{(d)}(x) \\
&\quad + \frac{C(d,s)}{2C(1,s)} \int_{S^{d-1}} T^{p-s} h_d \left(T^{1/2}\Delta^s v_p - \langle h, x\rangle \Delta^s u_p\right) \left(\frac{\langle h, x\rangle}{\sqrt{T}}\right) dh,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

où $T = T(x,h) = 1 - |x|^2 + \langle h, x\rangle^2$.

Preuve. On a pour $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}
\Delta^s v_p^{(d)}(x) &= C(d,s)\text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{v_p^{(d)}(y) - v_p^{(d)}(x)}{|x-y|^{d+2s}}\, dy \\
&= \frac{C(d,s)}{2} \int_{S^{d-1}} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{v_p^{(d)}(x+ht) - v_p^{(d)}(x)}{|t|^{1+2s}}\, dt\, dh.
\end{aligned}$$

On calcule l'intégrale de la valeur principale en changeant la variable $t = -\langle h, x\rangle + r\sqrt{T}$. On obtient

$$\begin{aligned}
g(x,h) &:= \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{v_p^{(d)}(x+ht) - v_p^{(d)}(x)}{|t|^{1+2s}}\, dt \\
&= \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-r^2)_+^p T^p (x_d - h_d\langle h, x\rangle + h_d r\sqrt{T}) - (1-|x|^2)^p x_d}{|-\langle h, x\rangle + r\sqrt{T}|^{1+2s}} \sqrt{T}\, dr \\
&= T^{p-s}\text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-r^2)_+^p (x_d - h_d\langle h, x\rangle + h_d r\sqrt{T}) - (1-\frac{\langle h,x\rangle^2}{T})^p x_d}{|r - \frac{\langle h,x\rangle}{\sqrt{T}}|^{1+2s}}\, dr \\
&= T^{p-s}(x_d - h_d\langle h, x\rangle)\text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-r^2)_+^p - (1-\frac{\langle h,x\rangle^2}{T})^p}{|r - \frac{\langle h,x\rangle}{\sqrt{T}}|^{1+2s}}\, dr \\
&\quad + T^{p+1/2-s} h_d \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-r^2)_+^p r - (1-\frac{\langle h,x\rangle^2}{T})^p \frac{\langle h,x\rangle}{\sqrt{T}}}{|s - \frac{\langle h,x\rangle}{\sqrt{T}}|^{1+2s}}\, ds \\
&= T^{p-s} \frac{x_d - h_d\langle h, x\rangle}{C(1,s)} \Delta^s u_p\Big(\frac{\langle h, x\rangle}{\sqrt{T}}\Big) \quad + T^{p+1/2-s} \frac{h_d}{C(1,s)} \Delta^s v_p\Big(\frac{\langle h, x\rangle}{\sqrt{T}}\Big).
\end{aligned}$$

Le résultat découle du lemme 3.4 ■

Preuve de la formule (3.39) **du théorème 3.1 pour** $d > 1$**.**
On peut supposer que $x \neq 0$, puisque pour $x = 0$ on a $v_p^{(d)}(x) = x_d(1-|x|^2)_+^p = 0$ et donc

$$\Delta^s v_p^{(d)}(x) = C(d,s) \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d \cap \{|y| > \varepsilon\}} \frac{y_d(1-|y|^2)_+^p}{|y|^{d+2s}}\, dy = 0,$$

et la formule (3.39) est vérifiée.
On note $T = T(x,h) = 1 - |x|^2 + \langle h, x\rangle^2$. D'après le Théorème 3.2 et le Lemme 3.6,

$$\begin{aligned} \Delta^s v_p^{(d)}(x) = x_d \Delta^s u_p^{(d)}(x) + \frac{C(d,s)B(-s,p+1)}{2} \times \\ \times \int_{S^{d-1}} h_d \langle h, x\rangle T^{p-s} F(x,h)\, dh, \end{aligned}$$

où

$$F(x,h) = (2s+1)\,{}_2F_1\Big(s+\frac{3}{2}, -p+s; \frac{3}{2}; \frac{\langle h,x\rangle^2}{T}\Big) - {}_2F_1\Big(s+\frac{1}{2}, -p+s; \frac{1}{2}; \frac{\langle h,x\rangle^2}{T}\Big).$$

On transforme $F(x,h)$ en utilisant (3.33) et (3.32),

$$\begin{aligned} F(x,h) &= 2s \cdot {}_2F_1\Big(s+\frac{1}{2}, -p+s; \frac{3}{2}; \frac{\langle h,x\rangle^2}{T}\Big) \\ &= 2s\Big(\frac{1-|x|^2}{T}\Big)^{p-s} {}_2F_1\Big(1-s, -p+s; \frac{3}{2}; \frac{\langle h,x\rangle^2}{|x|^2-1}\Big). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\int_{S^{d-1}} h_d \langle h,x\rangle T^{p-s} F(x,h)\, dh \\ &\quad = 2s(1-|x|^2)^{p-s} \int_{S^{d-1}} {}_2F_1 \Big(1-s, -p+s; \frac{3}{2}; \frac{\langle h,x\rangle^2}{|x|^2-1}\Big) h_d \langle h,x\rangle\, dh \\ &\quad =: 2s(1-|x|^2)^{p-s} I_{S^{d-1}}. \end{aligned}$$

Observons que

$$\int_{S^{d-1}} f_1(\langle h, e_1\rangle) f_2(\langle h, e_2\rangle)\, dh = \int_{S^{d-1}} f_1(\langle h, e_2\rangle) f_2(\langle h, e_1\rangle)\, dh,$$

où f_1 et f_1 sont des fonctions quelconques pour lesquelles les intégrales ont un sens. En utilisant cette observation pour $e_1 = \frac{x}{|x|}$ et $e_2 = (0,\dots,0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_{S^{d-1}} &= \int_{S^{d-1}} {}_2F_1\Big(1-s, -p+s; \frac{3}{2}; \frac{h_d^2|x|^2}{|x|^2-1}\Big) \langle h,x\rangle h_d\, dh \\ &= \int_{S^{d-1}} {}_2F_1\Big(1-s, -p+s; \frac{3}{2}; \frac{h_d^2|x|^2}{|x|^2-1}\Big) h_d^2 x_d\, dh. \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.5, on a

$$I_{S^{d-1}} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}} x_d}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_{-1}^{1} {}_2F_1\Big(1-s, -p+s; \frac{3}{2}; \frac{h^2|x|^2}{|x|^2-1}\Big) h^2 (1-h^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dh.$$

Soit

$$\phi(z) = \int_{-1}^{1} {}_2F_1\Big(1-s, -p+s; \frac{3}{2}; \frac{h^2 z}{z-1}\Big) h^2 (1-h^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dh, \quad z \in \mathbb{C}, |z| < 1.$$

Comme dans la preuve de la formule (3.38), on observe que ϕ est analytique dans le disque unité, et on calcule $\phi(z)$ pour $|z| < \frac{1}{2}$ en utilisant le développement en série entière,

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-s)_k(-p+s)_k \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(k+\frac{3}{2})k!} \Big(\frac{z}{z-1}\Big)^k h^{2k+2}(1-h^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dh \\
&= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-s)_k(-p+s)_k \Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\Gamma(k+\frac{d}{2}+1)k!} \Big(\frac{z}{z-1}\Big)^k dh \\
&= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} {}_2F_1\Big(1-s, -p+s; 1+\frac{d}{2}; \frac{z}{z-1}\Big).
\end{aligned}$$

Puisque la fonction de la dernière ligne est analytique dans le disque unité (notez que $Re\frac{z}{z-1} < \frac{1}{2}$ si $|z| < 1$), on conclut que

$$\begin{aligned}
I_{S^{d-1}} &= \frac{\pi^{\frac{d}{2}} x_d}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\, {}_2F_1\Big(1-s, -p+s; 1+\frac{d}{2}; \frac{|x|^2}{|x|^2-1}\Big) \\
&= \frac{\pi^{d/2} x_d}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}\, {}_2F_1\Big(s+\frac{d}{2}, -p+s; 1+\frac{d}{2}; |x|^2\Big)(1-|x|^2)^{-p+s}.
\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a utilisé (3.32). Par (3.33) on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta^s v_p^{(d)}(x) &= x_d \frac{C(d,s)\pi^{d/2}B(-s,p+1)}{\Gamma(d/2)} \Bigg({}_2F_1\Big(s+\frac{d}{2}, -p+s; \frac{d}{2}; |x|^2\Big) \\
&\qquad + \frac{2s}{d}\, {}_2F_1\Big(s+\frac{d}{2}, -p+s; 1+\frac{d}{2}; |x|^2\Big)\Bigg) \\
&= x_d \frac{C(d,s)\pi^{d/2}B(-s,p+1)(2s+d)}{d\Gamma(d/2)} \times \\
&\qquad \times\ {}_2F_1\Big(\frac{2s+d+2}{2}, -p+s; 1+\frac{d}{2}; |x|^2\Big).
\end{aligned}$$

Exemple 3.3 *Le calcul de* $\Delta^s u_p^{(d)}$ *et* $\Delta^s v_p^{(d)}$ *pour* $p = s$ *et* $p = s+1$.

- *Pour* $p = s$ *on a*

$$\begin{aligned}
\Delta^s u_s^{(d)}(x) &= \Delta^s (1-|x|^2)_+^s \\
&= \frac{C(d,s)B(-s,s+1)\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} {}_2F_1\Big(s+\frac{d}{2}, 0; \frac{d}{2}; |x|^2\Big) \\
&= \frac{s4^s\Gamma\left(\frac{2s+d}{2}\right)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(1-s)} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+1)\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(1)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(s+\frac{d}{2})_k(0)_k}{(\frac{d}{2})_k} \frac{|x|^{2k}}{k!} \\
&= \frac{-4^s\Gamma\left(\frac{2s+d}{2}\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\frac{d}{2})} \qquad \textit{(car : } (0)_k = 0 \textit{ si } k \geq 1) \\
&= -2^{2s}\Gamma(s+1)\Gamma\left(\frac{d}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)^{-1},
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^s v_s^{(d)}(x) &= \Delta^s (1-|x|^2)_+^s x_d \\
&= x_d \frac{C(d,s)\pi^{d/2} B(-s,s+1)(2s+d)}{d\Gamma(d/2)}\, {}_2F_1\Big(\frac{2s+d+2}{2}, 0; 1+\frac{d}{2}; |x|^2\Big) \\
&= x_d \frac{s4^s\Gamma\left(\frac{2s+d}{2}\right)\pi^{d/2}\Gamma(-s)\Gamma(s+1)(2s+d)}{d\Gamma(d/2)\pi^{d/2}\Gamma(1-s)\Gamma(1)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\frac{2s+d+2}{2})_k (0)_k}{(1+\frac{d}{2})_k} \frac{|x|^{2k}}{k!} \\
&= x_d \frac{-4^s\Gamma\left(\frac{2s+d}{2}\right)\Gamma(s+1)\frac{2s+d}{2}}{\frac{d}{2}\Gamma(\frac{d}{2})} \quad \textit{(car : } (0)_k = 0 \textit{ si } k \geq 1\textit{)} \\
&= -2^{2s}\Gamma(s+1)\Gamma\left(\frac{d}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)^{-1} x_d.
\end{aligned}$$

- *Pour* $p = s+1$ *on a*

$$\begin{aligned}
\Delta^s u_{s+1}^{(d)}(x) &= \Delta^s (1-|x|^2)_+^{s+1} \\
&= \frac{C(d,s)B(-s,s+2)\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} {}_2F_1\Big(s+\frac{d}{2}, -1; \frac{d}{2}; |x|^2\Big) \\
&= \frac{s4^s\Gamma\left(\frac{2s+d}{2}\right)}{\pi^{d/2}\Gamma(1-s)} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+2)\pi^{d/2}}{\Gamma(2)\Gamma(\frac{d}{2})} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(s+\frac{d}{2})_k(-1)_k}{(\frac{d}{2})_k} \frac{|x|^{2k}}{k!} \\
&= \frac{-4^s\Gamma\left(\frac{2s+d}{2}\right)\Gamma(s+2)}{\Gamma(\frac{d}{2})} (1-(1+\frac{2s}{d})|x|^2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{(car : } (-1)_k = 0 \textit{ si } k \geq 2\textit{)} \\
&= -2^{2s}\Gamma(s+2)\Gamma\left(\frac{d}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)^{-1} (1-(1+\frac{2s}{d})|x|^2),
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^s v_{s+1}^{(d)}(x) &= \Delta^s (1-|x|^2)_+^{s+1} x_d \\
&= x_d \frac{C(d,s)\pi^{d/2}B(-s,s+2)(2s+d)}{d\Gamma(d/2)} {}_2F_1\Big(\frac{2s+d+2}{2}, -1; 1+\frac{d}{2}; |x|^2\Big) \\
&= x_d \frac{s4^s\Gamma\left(\frac{2s+d}{2}\right)}{\pi^{d/2}\Gamma(1-s)} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+2)\pi^{d/2}(2s+d)}{\Gamma(2)\ d\Gamma(\frac{d}{2})} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\frac{2s+d+2}{2})_k(-1)_k}{(1+\frac{d}{2})_k} \frac{|x|^{2k}}{k!} \\
&= x_d \frac{-4^s\Gamma\left(\frac{2s+d}{2}\right)\Gamma(s+2)\frac{2s+d}{2}}{\frac{d}{2}\Gamma(\frac{d}{2})} \left(1-(1+\frac{2s}{d+2})|x|^2\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{(car : } (-1)_k = 0 \textit{ si } k \geq 2\textit{)} \\
&= -2^{2s}\Gamma(s+2)\Gamma\left(\frac{d}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)^{-1} \left(1-(1+\frac{2s}{d+2})|x|^2\right) x_d.
\end{aligned}$$

3.3 Estimation des premières valeurs propres du Laplacien fractionnaire

Soit $B = B_1^{(d)} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$ la boule unité dans $\mathbb{R}^d$. Rappelons que l'espace de Sobolev $\mathbb{X}_0^s(B)$ est donné par

$$\mathbb{X}_0^s(B) := \left\{u \in H^s(\mathbb{R}^d);\ u = 0\, p.\, p.\, dans\, \mathbb{R}^d \setminus B\right\} \tag{3.56}$$

muni de la norme

$$|||u|||_{\mathbb{X}_0^s(B)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.57}$$

Posons

$$\mathcal{E}(u) := \frac{C(d,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{d+2s}}\, dx\, dy = \frac{C(d,s)}{2} |||u|||^2_{\mathbb{X}_0^s(B)},$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u,v) &:= \frac{C(d,s)}{2} \langle u, v\rangle_{\mathbb{X}_0^s(B)} \\ &= \frac{C(d,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{d+2s}}\, dx\, dy, \qquad u, v \in \mathbb{X}_0^s(B). \end{aligned}$$

Remarque 3.1 *On remarque que pour les fonctions u dans $\mathbb{X}_0^s(B)$ on a*

$$\mathcal{E}(u) = -\int_B u \Delta^s u\, dx, \tag{3.58}$$

en effet, $\forall u \in \mathbb{X}_0^s(B)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) &= \frac{C(d,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(u(x)-u(y))(u(x)-u(y))}{|x-y|^{d+2s}} dxdy \\ &= \frac{C(d,s)}{2} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(u(x)-u(y))u(x)}{|x-y|^{d+2s}} dxdy - \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(u(x)-u(y))u(y)}{|x-y|^{d+2s}} dxdy \right]. \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) &= \frac{C(d,s)}{2} \left[\int_{\mathbb{R}^d} u(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+2s}} dy \right) dx \right. \\ &\qquad \left. - \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+2s}} dx \right) dy \right] \\ &= \frac{C(d,s)}{2} \left[\int_{\mathbb{R}^d} u(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x)-u(x-Y)}{|Y|^{d+2s}} dY \right) dx \right. \\ &\qquad \left. - \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(X+y)-u(y)}{|X|^{d+2s}} dX \right) dy \right]. \end{aligned}$$

En changeant le rôle entre x et y dans la seconde intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) &= \frac{C(d,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{2u(x)-u(x-Y)-u(Y+y)}{|Y|^{d+2s}} dY \right) dx \\ &= -\int_B u \Delta^s u\, dx. \end{aligned}$$

En particulier (3.58) est valable pour $u(x) = (1-|x|^2)_+^p$ avec $p \geq s$.

Pour mettre en évidence les applications du Théorème 3.1, on considère le problème spectral de trouver les fonctions e dans $\mathbb{X}_0^s(B)$ tel que

$$\mathcal{E}(e,g) = \lambda \int_B e(x) g(x)\, dx, \quad g \in \mathbb{X}_0^s(B). \tag{3.59}$$

i.e. la formulation faible du problème aux valeurs propres $\Delta^s e = -\lambda e$. On sait, d'après la proposition 2.10, qu'il existe une base orthonormée de $L^2(B) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, constituée des fonctions

propres e_1, e_2, e_3, ... avec les valeurs propres correspondantes $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$. Cela signifie que $e = e_n$ et $\lambda = \lambda_n$ satisfont (3.59). Notons que ces fonctions propres sont dans $\mathbb{X}_0^s(B)$, et qu'on a $\Delta^s e_n = -\lambda_n e_n$ sur B au sens de la définition (3.34). Lorsqu'il y a un risque de confusion, on écrit la dimension de l'espace sous-jacent en exposant, c'est-à-dire qu'on écrit $\lambda_n^{(d)}$ pour λ_n et $e_n^{(d)}$ pour e_n.
Le calcul des fonctions puissance donné par le Théorème 3.1 peut être utilisé pour étudier les fonctions propres du laplacien fractionnaire dans la boule unité.

Remarque 3.2 *Les valeurs propres λ_1, λ_2, ...ne sont pas connues explicitement même dans le cas où $d = 1$ et $B =]-1, 1[$ (elles sont connues uniquement dans le cas $d = 1$ et $s = 1$).*

Soit λ_* le plus petit nombre tel qu'il existe une fonction propre e_* qui est antisymétrique, $e_*(-x) = -e_*(x)$, et dont la valeur propre est λ_*. Il est conjecturé, mais cela n'a pas encore été prouvé pour tout s dans $]0, 1[$ et d, que $\lambda_* = \lambda_2$. Dans le cas classique ($s = 1$), et aussi dans le cas unidimensionnel pour $s \geq \frac{1}{2}$, on a bien $\lambda_* = \lambda_2$.

Remarque 3.3 *Notons qu'il existe toujours une fonction propre antisymétrique. En effet, il existe une fonction propre non symétrique e, et on peut mettre $\tilde{e}(x) = e(x) - e(-x)$, qui est une fonction propre antisymétrique ayant la même valeur propre que e*

$$\begin{aligned}\Delta^s \tilde{e}(x) &= \Delta^s e(x) - \Delta^s e(-x)\\ &= -\lambda e(x) + \lambda e(-x)\\ &= -\lambda \tilde{e}(x), \qquad \forall x \in B.\end{aligned}$$

La similarité entre (3.38) et (3.39) nous amène à conjecturer que $\lambda_*^{(d)} = \lambda_1^{(d+2)}$, pour la prouver nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.7 *On a*

$$\int_{B_1^{(d)}} x_d^2 \phi(|x|)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{B_1^{(d+2)}} \phi(|x|)\, dx, \tag{3.60}$$

pour toute fonction ϕ pour laquelle les intégrales sont absolument convergentes.

PREUVE. On rappelle la notation $S^{(d-1)} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ pour la sphère unité dans $\mathbb{R}^d$, et la formule pour son aire, $\omega_{d-1} = |S^{(d-1)}| = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$. On a

$$\begin{aligned}\int_{B_1^{(d)}} x_d^2 \phi(|x|)\, dx &= \frac{1}{d} \int_{B_1^{(d)}} |x|^2 \phi(|x|)\, dx = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} \int_0^1 r^{d+1} \phi(r)\, dr\\ &= \frac{|S^{(d+1)}|}{2\pi} \int_0^1 r^{d+1} \phi(r)\, dr = \frac{1}{2\pi} \int_{B_1^{(d+2)}} \phi(|x|)\, dx.\end{aligned}$$

■

Proposition 3.1 $\lambda_*^{(d)} = \lambda_1^{(d+2)}$.

Preuve. On considère un sous-espace vectoriel $R_{d+2} \subset L^2(B_1^{(d+2)})$ composé de toutes les fonctions radiales, et un sous-espace vectoriel $A_d = \{f : f(x) = x_d g(x)$ pour certaine fonction radiale $g \in L^2(B_1^{(d)})\}$ de $L^2(B_1^{(d)})$. Soit T un opérateur défini par

$$(Tf)(x_1, \dots, x_d) = \sqrt{2\pi} x_d f(x_1, \dots, x_d, 0, 0), \quad f \in R_{d+2} \cap C(B_1^{(d+2)}).$$

Par le lemme 3.7 on obtient que $\|Tf\|_{L^2(B_1^{(d)})} = \|f\|_{L^2(B_1^{(d+2)})}$, donc T peut être étendu à une isométrie de R_{d+2} dans A_d. Soit G l'opérateur de Green, c'est-à-dire un opérateur borné sur $\{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : f = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus B_1^{(d)}\}$ défini par $G_d e_n = \frac{1}{\lambda_n} e_n$. Cet opérateur est l'inverse de Δ^s. On observe que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
R_{d+2} \ni f \arrow[r, "T"] \arrow[d, "G_{d+2}"'] & Tf \in A_d \arrow[d, "G_d"] \\
G_{d+2} f \arrow[r, "T"] & G_d T f
\end{tikzcd}$$

En effet, par (3.38) et (3.39), il commute pour les fonctions $f(x) = (1 - |x|^2)_+^n$, où $x \in B_1^{(d+2)}$ et $n = 0, 1, 2, \dots$. Le sous-espace vectoriel qui est constitué de cet ensemble de fonctions est dense dans R_{d+2}. En effet, pour démontrer la densité, il faut prouver que si une fonction continue sur $[0, 1]$ est orthogonale à la famille $h_n(r) = (1 - r^2)^n$ dans $L^2([0, 1[, r^{d+1})$, alors elle est complètement nulle. Si on considère le changement de variable $(1 - r^2) = t \in]0, 1]$, alors

$$\int_0^1 f(r) h_n(r) r^{d+1} dr = \frac{1}{2} \int_0^1 f((1-t)^{\frac{1}{2}}) t^n (1-t)^{\frac{d+1}{2}} dt = 0 \ \forall n.$$

Par la densité des monômes on déduit que $f((1-t)^{\frac{1}{2}}) = 0 \ \forall t \in]0, 1]$ donc $f = 0$ sur $[0, 1[$. Ainsi, grâce à la bornitude de G_d, G_{d+2}, T et T^{-1}, le diagramme commute pour tout $f \in R_{d+2}$. Donc, on obtient une correspondance bijective entre les fonctions propres radiales de G_{d+2} (ou Δ^s) dans $B_1^{(d+2)}$ et les fonctions propres x_d-antisymétriques de G_d, de plus, les valeurs propres correspondantes sont les mêmes. En particulier, $\lambda_1^{(d+2)} = \lambda_*^{(d)}$. ■

3.3.1 Bornes inférieures pour les valeurs propres

Pour estimer la première valeur propre nous commençons par prouver les deux lemmes suivants :

Lemme 3.8 *Soit*

$$\eta_{d,s} = \frac{3d - 2 + (4-d)s - 2s^2}{2(s+1)^2}$$

et

$$\psi(x) = (1 - |x|^2)_+^s + \eta_{d,s}(1 - |x|^2)_+^{s+1}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Alors

$$\frac{-\Delta^s \psi(x)}{\psi(x)} \geq \mu_{d,s}, \quad |x| < 1,$$

où

$$\mu_{d,s} = \frac{2^{2s}\Gamma(s+1)\Gamma(\frac{2s+d}{2})(s+1)(2s+d)(3-s)}{\Gamma(\frac{d}{2})(3d + (8-d)s)}. \tag{3.61}$$

Preuve. On a, d'après (3.54) et (3.55)

$$\frac{-\Delta^s\psi(x)}{\psi(x)} = \frac{2^{2s}\Gamma(s+1)\Gamma(\frac{2s+d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})(1-|x|^2)^s}\frac{1+\eta(s+1)(1-(1+\frac{2s}{d})|x|^2)}{1+\eta(1-|x|^2)} =: f(|x|^2).$$

Après des calculs élémentaires, on obtient

$$f'(t) = \frac{2^{2s}\Gamma(s+1)\Gamma(\frac{2s+d}{2})s(2s+d)(s+1)\eta^2}{d\Gamma(\frac{d}{2})(1-t)^{s+1}(1+\eta(1-t))^2}\left(t - \frac{(4-d)s+3d-4}{3d-2+(4-d)s-2s^2}\right)^2 \geq 0$$

pour $t \in [0,1[$ donc la fonction f est croissante . Par conséquent,

$$\frac{-\Delta^s\psi(x)}{\psi(x)} \geq \frac{-\Delta^s\psi(0)}{\psi(0)} = \frac{2^{2s}\Gamma(s+1)\Gamma(\frac{2s+d}{2})(s+1)(2s+d)(3-s)}{\Gamma(\frac{d}{2})(3d+(8-d)s)}.$$

■

Lemme 3.9 (Inégalité de Picone) *[12] Soit ψ une fonction strictement positive dans $\mathbb{X}_0^s(B)$. Alors pour tout $u \in \mathbb{X}_0^s(B)$, on a*

$$\mathcal{E}(u) \geq \int_B u^2(x)\frac{-\Delta^s\psi(x)}{\psi(x)}\,dx.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}(u(x)-u(y))^2 \quad &+ \quad u^2(x)\frac{\psi(y)-\psi(x)}{\psi(x)} + u^2(y)\frac{\psi(x)-\psi(y)}{\psi(y)} \\ &= \quad \psi(x)\psi(y)[u(x)/\psi(x)-u(y)/\psi(y)]^2 \geq 0\,. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Nous intégrons (3.62) par rapport à la mesure symétrique $1_{|y-x|>\varepsilon}|x-y|^{-d-2s}\,dx\,dy$, et on laisse $\varepsilon \to 0^+$. D'après les calculs ci-dessus,

$$\frac{1}{2}\int_B\int_B \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{d+2s}}\,dx\,dy \quad \geq \quad \int_B u^2(x)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\{y\in B:\,|y-x|>\varepsilon\}}\frac{\psi(x)-\psi(y)}{|y-x|^{d+2s}}\,dy\,\frac{dx}{\psi(x)}.$$

■

Nous sommes maintenant prêt à prouver les estimations de λ_1 et λ_*.

Proposition 3.2 *On a*

$$\lambda_1 \geq \mu_{d,s} \tag{3.63}$$

et

$$\lambda_* \geq \mu_{d+2,s}, \tag{3.64}$$

où $\mu_{d,s}$ est défini dans (3.61).

Preuve. Soit ψ comme dans le lemme 3.8. De ce lemme et le lemme 3.9 on obtient

$$\mathcal{E}(u) \geq \int_B u^2(x)\frac{-\Delta^s\psi(x)}{\psi(x)}\,dx \geq \mu_{d,s}\int_B u^2(x)\,dx,$$

et donc $\lambda_1 \geq \mu_{d,s}$. La deuxième partie (3.64) découle de la Proposition 3.1. ■

3.3.2 Bornes supérieures pour les valeurs propres

D'après la formule variationnelle (voir Proposition 2.3), on a pour toute fonction $u \in \mathbb{X}_0^s(B)$

$$\lambda_1 \leq \frac{\mathcal{E}(u)}{\int_B u^2 dx}. \tag{3.65}$$

Pour u étant une combinaison linéaire de fonctions $u_{j+s}^{(d)}$, il est facile de calculer le membre droit de (3.65) en utilisant (3.58), le Théorème 3.1 et la formule

$$\int_B |x|^a (1-|x|^2)^b \, dx = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} B\left(\frac{a+d}{2}, b+1\right), \quad a > -d, \ \ b > -1.$$

En particulier, pour les fonctions de la forme

$$u(x) = (1-|x|^2)_+^s + \eta(1-|x|^2)_+^{s+1}, \tag{3.66}$$

on peut trouver explicitement η qui minimise le membre droit de (3.65). Un calcul donne,

$$\eta_{min} = \frac{\sqrt{w} + d^2 + 2d - 8s^2 - 12s - 4}{16s^2 + 24s + 8}, \tag{3.67}$$

où

$$\begin{aligned} w = {} & d^4 + 8sd^3 + 8d^3 + 32s^2d^2 + 64sd^2 + 28d^2 + 64s^3d + 192s^2d \\ & + 176sd + 48d + 64s^4 + 192s^3 + 208s^2 + 96s + 16. \end{aligned}$$

et on a les majorations suivantes :

Proposition 3.3 *On a*

$$\lambda_1 \leq \nu_{d,s} \tag{3.68}$$

et

$$\lambda_* \leq \nu_{d+2,s}, \tag{3.69}$$

où $\nu_{d,s}$ *est donné par*

$$\nu_{d,s} := \frac{\Gamma\left(2s+3+\frac{d}{2}\right) s(\Gamma(s))^2}{(2s+2+d)(2s+4+d)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(2s)} \beta_{d,s}, \tag{3.70}$$

avec

$$\beta_{d,s} := \frac{2^{2s+2}[8(s+1)^2\eta_{min}^2 + 4(s+1)(2(s+2)+d)\eta_{min} + (d^2+6d+12s+8) + 4s(d+s)]}{(d+2s)[8(s+1)(2s+1)\eta_{min}^2 + (4s+4+d)[4(2s+1)\eta_{min} + (4s+2+d)]]}. \tag{3.71}$$

Remarque 3.4 *Les estimations peuvent être encore améliorées en utilisant davantage de fonctions* $u_{j+s}^{(d)}$ *pour définir* u. *Toutefois, le rapport* (3.65) *doit alors être minimisé numériquement.*

s	λ_1 pour $d=1$	λ_1 pour $d=2$	λ_1 pour $d=3$ λ_* pour $d=1$	λ_1 pour $d=4$ λ_* pour $d=2$	λ_1 pour $d=5$ λ_* pour $d=3$
	0.9676	1.04874	1.08633	1.1102	1.12756
0.05	0.97273	1.05103	1.09225	1.12093	1.14327
	0.94993	1.10549	1.18391	1.23565	1.27419
0.1	0.95764	1.11001	1.19663	1.25927	1.30934
	0.96202	1.3313	1.56035	1.72814	1.86169
0.25	0.97029	1.3438	1.60173	1.8092	1.98766
	1.15384	1.96349	2.60869	3.15561	3.63636
0.5	1.1578	2.00618	2.75548	3.45616	4.12824
	1.58614	3.13569	4.61848	6.03622	7.39626
0.75	1.59751	3.27624	5.06201	6.95522	8.95256
	2.01395	4.28394	6.65946	9.07867	11.51297
0.9	2.04876	4.56781	7.50715	10.83601	14.53414
	2.19524	4.77496	7.54923	10.43088	13.37504
0.95	2.24409	5.1329	8.60059	12.60997	17.13776

TABLE 3.1 – Bornes inférieures et supérieures pour λ_1 et λ_*. Les bornes inférieures du Proposition 3.2 sont dans la ligne supérieure. Dans la ligne du bas, nous donnons les bornes supérieures obtenues par la Proposition 3.3.

Résumé :

Dans ce mémoire, on donne une caractérisation variationnelle des valeurs propres et des vecteurs propres du problème suivant :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda u & dans\ \Omega \\ u = 0 & dans\ \mathbb{R}^d \setminus \Omega, \end{cases}$$

où $s \in]0,1[$ et Ω est un sous-ensemble ouvert, borné de $\mathbb{R}^d$ avec frontière Lipschitzienne.

On discute de certaines de leurs propriétés telles que la positivité de la première fonction propre, la multiplicité des valeurs propres et la L^2-orthonormalité des fonctions propres.

On calcule le Laplacien fractionnaire $-(-\Delta)^s$ pour les fonctions de la forme $u(x) = (1 - |x|^2)_+^p$ et $v(x) = x_d u(x)$. Comme application, on estime les premières valeurs propres du Laplacien fractionnaire dans une boule de $\mathbb{R}^d$.

Abstract :

In this dissertation, we give a variational characterization of the eigenvalues and eigenvectors of the following problem :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda u & in\ \Omega \\ u = 0 & in\ \mathbb{R}^d \setminus \Omega, \end{cases}$$

where $s \in]0,1[$ and Ω is an open, bounded subset of $\mathbb{R}^d$ with Lipschitzian boundary.

We discuss some of their properties, such as the positivity of the first eigenfunction, the multiplicity of eigenvalues and the L^2-orthonormality of the eigenfunctions.

The fractional Laplacian $-(-\Delta)^s$ is calculated for functions of the form $u(x) = (1 - |x|^2)_+^p$ and $v(x) = x_d u(x)$. As an application, we estimate the first eigenvalues of the fractional Laplacian in a $\mathbb{R}^d$ ball.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] C. Bucur and E. Valdinoci, Nonlocal diffusion and applications, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana 20, Bologna, Springer, 2016.

[3] L. Caffarelli and L. Silvestre, An extension problem related to the fractional Laplacian, Comm. Partial Differential Equations 32 (2007), no. 7-9, 1245-1260.

[4] M. Daoud, E. H. Laamri. Fractional Laplacians : A short survey. Discrete and Continuous Dynamical Systems - S, 2022, 15(1) : 95-116.

[5] B. Dyda, Fractional calculus for power functions and eigenvalues of the fractional Laplacean, Fract. Calc. Appl. Anal. 15 (2012), no. 4, 536-555.

[6] B. Dyda. Fractional Hardy inequality with remainder term. *Colloq. Math.*, 122(1) :59–67, 2011.

[7] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi. *Higher transcendental functions. Vols. I, II.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953. Based, in part, on notes left by Harry Bateman.

[8] N. Garofalo, Fractional thoughts, New developments in the analysis of nonlocal operators, 1-135, Contemp. Math. 723, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2019.

[9] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Tables of integrals, series, and products, Academic Press, 1980.

[10] M. Kwaśnicki, Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator, Fractional Calculus and Applied Analysis, vol. 20, no. 1, pp. 7–51, 2017. doi : 10.1515/fca-2017-0002.

[11] N. N. Lebedev, Special functions and their applications, Revised edition, translated from the Russian and edited by R. A. Silverman. Unabridged and corrected republication. Dover Publications, Inc., New York, 1972.

[12] T. Leonori, I. Peral, A. Primo, F. Soria, Basic estimates for solution of elliptic and parabolic equations for a class of nonlocal operators. Discrete Contin. Dyn. Syst. 35 (2015), no. 12, 6031–6068.

[13] G. Molica Bisci, V.D. Radulescu, R. Servadei, Variational Methods for Nonlocal Fractional Problems. Cambridge University Press ; 2016.

[14] E. Di Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci, Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces, Bulletin des Sciences Mathématiques, vol. 136, no. 5, pp. 521–573, 2012.

[15] N. A. Scotti, S. B. Miret, A. B. Tomé, J. M. Perales, A. R. Abella, I. S. Albaladejo, L. Roncal, Four different approaches to the fractional Laplacian. TEMat monográficos, 1, 47-60, 2020.

[16] R. Servadei, E. Valdinoci, On the spectrum of two different fractional operators. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 144A (2014), 831-855.

[17] R. Servadei, E. Valdinoci. Variational methods for non-local operators of elliptic type. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2013, 33(5) : 2105-2137.

[18] E. M. Stein and G. Weiss, Fourier Analysis in Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press 1971.

[19] L. Tartar, An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana **3**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2007.