République Algérienne Démocratique Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE TLEMCEN

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de

Magister en Mathématiques

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET APPLICATIONS

THÈME

PROBLÈME ELLIPTIQUE AVEC EXPOSANT CRITIQUE DE SOBOLEV ET POIDS

Présenté par : *Mr Ali RIMOUCHE*

soutenu le: 17/06/2012

Devant le jury composé de :

Président:	**Mr S. M. Bouguima**	Pr Université de Tlemcen
Examinateurs:	**Mr B. Abdellaoui**	MCA Université de Tlemcen
	Mme Y. Nasri	MCA Université de Tlemcen
Rapporteur:	**Mr M. Bouchekif**	Pr Université de Tlemcen

Année Universitaire: 2011/2012

Dédicaces

Tout d'abord je remercie le DIEU tout clément pour ce qu'il m'a offert.

Je dédie ce travail :

A notre prophète monsieur Mohamed (PSL).

A Sidi Cheikh Ali Boudilmi et ses adeptes, mes frères de la confrérie.

A ceux, que je dois tout, mon PERE qui m'a aidé et pousser à réaliser ce travail, et a ma MERE pour toute la confiance qu'elle m'accorde et tout l'amour dont elle m'entoure.

A mes soeurs Imen et Houda, pour leurs encouragements, leur aide et leur patience.

A ma grande famille Rimouche et Benrahmani, mes cousins et mes cousines.

A tous mes collègues du laboratoire S.D.A.

A tous mes amis surtout Bilal, Ahmed, Hmida, Tariq, Douniazed, Hafidha, Ibtissem, Sihem, Wahida et Zoubida.

Et à tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

Remerciements

Je veux remercier tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

Tout d'abord je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon respectueux professeur et encadrant monsieur M. Bouchekif pour son orientation et ses conseils, ses encouragements et son immense capacité de tenir patience au court de la réalisation de ce travail, ainsi que ses précieuses directions.

Sans oublier Mr A. Bensédik et Mme S. Benmansour, pour leur attention constante et bienveillante sur le projet.

Mes remerciements vont également à monsieur S. M. Bouguima Professeur à l'U.A.B.B, qui a accepté de présider le jury.

Je remercie très respectueusement monsieur B. Abdellaoui M.C.A à l'U.A.B.B, de m'avoir fait l'honneur d'être membre de jury et d'avoir accepté de juger mon travail.

Mes vifs remerciements vont également à madame Y. Nasri M.C.A à l'U.A.B.B, pour sa serviabilité exemplaire et de m'avoir fait l'honneur d'être membre du jury et d'avoir accepté de juger mon travail.

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs qui m'ont beaucoup appris, pour leurs précieux conseils et aimables encouragements durant toute ma trajectoire d'étude surtout monsieur C. Belkhouja et madame Belabid.

Un grand merci aussi à tous mes collègues, sans oublier mes amis Bilal, Ibtissem, Sihem et Wahida pour leur aide précieuse et pour leur présence au cours de mon travail malgré leurs occupations.

Sincères remerciements vont à mes chers parents pour leur patience infinie.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on aborde l'étude de l'existence des solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} -div\,(p(x)\nabla u(x)) = |u(x)|^{2^*-2}\, u(x) + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $f \in H^{-1}$, p est un poids positif donné dans $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev pour l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ et λ est un paramètre réel.

Le cas où le poids p est une fonction constante a fait l'objet d'intences travaux, je cite en particulier celui de G. Tarantello [16].

Sous la condition suivante sur f :

$$\int_\Omega fu \leq C_N \left(\|\nabla u\|_{L^2}\right)^{\frac{N+2}{2}} \text{ pour } u \text{ telle que } \|u\|_{L^{2^*}} = 1,\ C_N \text{ une constante positive,}$$

elle a montré l'existence d'au moins une solution

Lorsque l'inégalité si dessus est stricte, elle a montré l'existence d'une deuxième solution.

En plus, les deux solutions obtenues sont nonnégatives lorsque f est nonnégative.

La question soulevé dans ce mémoire : que se passe t-il lorsque p est une fonction non constante ? Plus précisémment lorsque p s'écrit, dans un voisinage d'un point a, sous la forme

$$p(x) = p(a) + A_k|x-a|^k + |x-a|^k\theta(x),$$

avec k, A_k des constantes positives et θ tend vers 0 lorsque x tend vers a.

S'inspirant des travaux de R. Hadiji et H. Yazidi [11], on a montré l'existence des solutions du problème considéré en utilisant le principe d'Ekeland et le théorème du col sur la variété de Nehari et on a donné une condition suffisante sur λ pour avoir des résultats de non existence.

Le chapitre 1 concerne la partie préliminaire où on donne quelques définitions et résultats préalables. Dans le chapitre 2, on détaille le travail de R. Hadiji et H. Yazidi. Le chapitre 3 est consacré à l'étude du problème elliptique nonhomogène avec poids.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle les principaux résultats utilisés dans ce mémoire.

1.1 Espaces de Sobolev

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.1.1. On note par $C_0^\infty(\Omega)$, l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ définies sur Ω et à support compact dans Ω.

Soit $1 \leq p < \infty$.

Définition 1.1.2. On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) / \ \exists g_1, ..., g_N \text{ tels que } \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \ \forall i = 1, .., N \right\}.$$

On pose $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.
Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{et} \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Théorème 1.1.3. [3]. $W^{1,p}(\Omega)$*, muni de la norme*

$$||u||_{W^{1,p}} := \left(||u||_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach séparable et réflexif pour $1 < p < \infty$*.*

Définition 1.1.4. [3]. On définit $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
On pose $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$.

Remarque 1.1.5. On a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 1.1.6. [3]. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega$.*

Théorème 1.1.7. [3]. *$H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2},$$

est un espace de Hilbert séparable.

Théorème 1.1.8. (Inégalité de Poincaré)[3]. *Soit Ω un ouvert borné. Il existe une constante C telle que*

$$||u||_{L^p} \leq C||\nabla u||_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Lemme 1.1.9. (Inégalité de Hardy)[12]. *Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t + N > 0$, on a pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$*

$$\int_\Omega |x|^t |u|^2 dx \leq \left(\frac{2}{N+t} \right)^2 \int_\Omega |x.\nabla u|^2 |x|^t dx.$$

La constante $\left(\frac{2}{N+t}\right)^2$ est optimale et n'est jamais atteinte.

Théorème 1.1.10. (Immersion de Sobolev)[13]. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \geq 1$.*

(i) Si $p < N$, alors $\begin{cases} \text{pour tout } q \in [1, p^*)\text{, l'injection de } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ dans } L^q(\Omega) \text{ est compacte.} \\ \text{l'injection de } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ dans } L^{p^*}(\Omega) \text{ est continue où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}. \end{cases}$

(ii) Si $p = N$, alors pour tout $q < \infty$, l'injection de $W_0^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.

(iii) Si $p > N$ et $0 < \alpha < 1 - \frac{p}{N}$, alors l'injection de $W_0^{1,N}(\Omega)$ dans $C^{0,\alpha}\left(\bar{\Omega}\right)$ est compacte, avec $C^{0,\alpha}\left(\bar{\Omega}\right) = \left\{ u \in C(\Omega) : \sup\limits_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\}$, où $0 < \alpha < 1$.

Définition 1.1.11. Pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $p \geq 1$, soit

$$||u||^p_{W_0^{1,p}} := \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p},$$

par le théorème d'immersion de Sobolev, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, il existe une constante optimale S_p qui ne dépend que de N et p telle que

$$S_p ||u||^p_{L^{p^*}} \leq ||u||^p_{W_0^{1,p}}, \quad \text{pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

avec

$$S_p := \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{||u||^p_{W_0^{1,p}}}{||u||^p_{L^{p^*}}}.$$

Proposition 1.1.12. [15]. *Soit $S := S_2$ la meilleure constante de Sobolev pour l'injection $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$, alors*

L'infimum S n'est jamais atteint quand Ω est un domaine borné.

Théorème 1.1.13. [2]. *L'infimum S est atteint sur $\mathbb{R}^N$ par une des fonctions*

$$U_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} \qquad \text{avec } \varepsilon > 0.$$

Définition 1.1.14. On dit que Ω est étoilé par rapport à un point a si pour tout $x \in \Omega$, $\{(1-t)\,a + tx : t \in [0,1]\} \subset \Omega$.

Lemme 1.1.15. (Identité de Pohozaev)[14]. *Soit u une solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$.

Alors

$$2N \int_\Omega G(u) - (N-2) \int_\Omega g(u)u = \int_{\partial\Omega} x.\nu \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2,$$

où $G(u) = \int_0^u g(s)ds$ et $\nu = \nu(x)$ est le vecteur normal extérieur unitaire à $\partial\Omega$ en x.

Lemme 1.1.16. (Lemme de Brézis-Lieb)[4]. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(u_n)_n \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Si $(u_n)_n$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ et $u_n \to u$ p.p dans Ω, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|_{L^p}^p - \|u_n - u\|_{L^p}^p\right) = ||u||_{L^p}^p.$$

Théorème 1.1.17. (Principe du maximum fort). *Soit Ω un domaine borné.*

Si $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$ vérifiant $-\Delta u \leq 0$ et si u atteint un maximum positif à l'intérieur de Ω, alors u est constante sur Ω.

Définition 1.1.18. Soient X un espace de Banach, V un ouvert de X et $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $u \in V$, on dit que J est différentiable (ou dérivable) au point u (au sens de Fréchet) s'il existe $L \in X'$, tel que :

$$\forall v \in V \qquad J(v) - J(u) = \langle J, v-u \rangle + o\,(v-u)\,.$$

Si J est différentiable, L est unique et on note $J'(u) := L$. L'ensemble des fonctions différentiables de $V \longrightarrow \mathbb{R}$ sera noté $C^1(V, \mathbb{R})$.

1.2 Multiplicateurs de Lagrange

Définition 1.2.1. Soient X un espace de Banach, $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ et un ensemble de contraintes de la forme

$$F := \{v \in X : I(v) = 0\}.$$

On suppose que pour tout $v \in F$, on a $I'(v) \neq 0$.

Si $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ on dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de J sur F s'il existe $v \in F$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $J(v) = c$ et $J'(v) = \lambda I'(v)$.

Le point v est un point critique de J sur F et l réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange pour la valeur critique c.

De cette définition on a le résultat suivant :

Proposition 1.2.2. [13]. *Sous les hypothèses et notations de la définition 1.2.1, on suppose que $v_0 \in F$ est tel que $J(v_0) = \inf_{v \in F} J(v)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$J'(v_0) = \lambda I'(v_0).$$

1.3 Conditions de Palais-Smale

Définition 1.3.1. Soient X un espace de Banach et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) $(\mathrm{P.S})_c$, si toute suite $(u_n)_n$ de X telle que

$$\begin{cases} J(u_n) \to c & \text{dans } \mathbb{R}, \\ J'(u_n) \to 0 & \text{dans } X', \end{cases}$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Définition 1.3.2. Soit X un ensemble, $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite bornée inférieurement dans X, s'il existe une constante réelle m telle que pour $\forall x \in X,\ J(x) \geq m$

Définition 1.3.3. Soit X un espace topologique. On dit que $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi continue inférieurement (abrégé s.c.i) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $|J \leq \lambda| := \{x \in X : J(x) \leq \lambda\}$ est fermé.

On est prêt maintenant pour énoncer le lemme suivant :

Lemme 1.3.4. (Principe variationnel d'Ekeland)[9]. *Soient (X, d) un espace métrique complet et J une fonction s.c.i de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que J est bornée inférieurement et on pose $c = \inf_{x \in X} J(x)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe u_ε tel que*

$$\begin{cases} c \leq J(u_\varepsilon) \leq c + \varepsilon, \\ \forall x \in X,\ x \neq u_\varepsilon,\ J(x) - J(u_\varepsilon) + \varepsilon d(x, u_\varepsilon) > 0. \end{cases}$$

Corollaire 1.3.5. *Soient X un espace de Banach et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. On suppose que J est bornée inférieurement et vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c. Alors J atteint son minimum c.*

Théorème 1.3.6. (Théorème du col)[1]. *Soient X un espace de Banach, $J \in C^1(X.\mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0) = 0$ telle que*

(i) il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $||u|| = R$, alors $J(u) \geq a$,

(ii) il existe $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| > R$ et $J(u_0) < a$.

Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geq a$, c'est-à-dire, si on pose

$$\mathscr{B} := \{h : [0,1] \longrightarrow X \text{ continue, } h(0) = 0 \text{ et } h(1) = u_0\},$$

et

$$c := \inf_{h \in \mathscr{B}} \max_{t \in [0,1]} J(h(t)),$$

alors c est une valeur critique de J, et $c \geq a$.

1.4 Méthodes directes

Définition 1.4.1. Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réflexif et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$

1) On dit que J est faiblement semi continue inférieurement si pour toute suite $(u_n) \subset X$ qui converge faiblement vers $u \in X$ on a $\liminf J(u_n) \geq J(u)$.

2) On dit que J est coercive s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ telles que pour $\forall x \in X$ on a $J(x) \geq \alpha \|x\|_X + \beta$.

On énnonce maintenant le théorème suivant :

Théorème 1.4.2. [15]. *Soient $(X, \|.\|)$ un espace de Banach réflexif, M un sous-ensemble de X faiblement fermé et $J : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ coercive et faiblement semi continue inférieurement i.e :*

i/ $J(u) \to \infty$ quand $||u|| \to \infty$, $u \in M$.

ii/ Pour tout $u \in M$, toute suite (u_n) dans M tels que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans X on a

$$J(u) \leq \liminf J(u_n).$$

Alors J est bornée inférieurement sur M et atteint son infimum dans M.

Définition 1.4.3. On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

pour $f \in H^{-1}(\Omega)$ (où $H^{-1}(\Omega)$ est le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$) si

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi - f\varphi)\, dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Chapitre 2

Problème elliptique homogène avec exposant critique de Sobolev et poids

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le problème suivant

$$\begin{cases} -div\,(p(x)\nabla u(x)) = u^{2^*-1} + \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega\ , \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev et p est une fonction positive.

Pour p une fonction constante, le problème (2.1.1) a été étudié par H. Brézis et L. Nirenberg [5], ils ont montré :

Lorsque $N \geq 4$ et pour tout $\lambda \in (0, \lambda_1)$ le problème considéré admet au moins une solution non triviale.

Lorsque $N = 3$ et Ω une boule, ils ont prouvé l'existence de solutions non triviales pour tout $\lambda \in \left(\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1\right)$.

Lorsque $\lambda \geq \lambda_1$ le problème considéré n'admet pas de solution non triviale.

Lorsque$\lambda \leq 0$ et Ω est un domaine étoilé, alors le problème considéré n'admet pas de solution non triviale.

On note par λ_1 la première valeur propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Pour p une fonction non constante satisfaisant certaines conditions R. Hadiji et H. Yazidi [11] ont montré l'existence de solutions en s'inspirant de la méthode introduite par H. Brézis, L. Nirenberg [5].

Nous allons détailler les résultats de ce travail.

Les hypothèses sont les suivantes

$p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, on suppose que $p^{-1}(\{p_0\}) \cap \Omega \neq \emptyset$ et soit $a \in p^{-1}(\{p_0\}) \cap \Omega$.

Nous supposons que, dans un voisinage de a, p se comporte comme suit

$$p(x) = p_0 + \beta_k|x-a|^k + |x-a|^k\theta(x), \tag{2.1.2}$$

avec $k > 0$, $\beta_k > 0$, $p_0 := \min\limits_{x\in\bar{\Omega}} p(x)$ et θ tend vers 0 quand x tend vers a, si $0 < k \leq 2$ on a

$$k\beta_k \leq \frac{\nabla p(x).(x-a)}{|x-a|^k}. \tag{2.1.3}$$

Pour $p \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)$ ou $p \in H^1(\Omega) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$ et $\nabla p(x).(x-a) \geq 0$ p.p dans Ω, on considère

$$\alpha(p) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega \nabla p(x).(x-a)|\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega |u(x)|^2\, dx}.$$

On commence par énnoncer les résultats de non existence :

Proposition 2.1.1. *Supposons que $\alpha(p) > -\infty$ ets Ω est un domaine étoilé par rapport au point a. Alors le problème (2.1.1) n'admet aucune solution pour $\lambda < \alpha(p)$.*

Proposition 2.1.2. **1)** *Si $p \in C^1(\Omega)$ et s'il existe $b \in \Omega$ tel que $\nabla p(b)(b-a) < 0$, alors $\alpha(p) = -\infty$.*

2) *Si $p \in H^1(\Omega) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$ satisfaisant (2.1.2) et $\nabla p(x)(x-a) \geq 0$ pour p.p $x \in \Omega$. On a :*

2.a) *Si $k > 2$ et $p \in C^1(\Omega)$, alors $\alpha(p) = 0$ pour tout $N \geq 3$.*

2.b) *Si $0 < k \leq 2$ et p satisfait la condition (2.1.3), alors pour tout $N \geq 3$ on a*

$$\alpha(p) \geq \frac{k}{2}\beta_k \left(\frac{N+k-2}{2}\right)^2 (diam\Omega)^{k-2}.$$

On note par $\lambda_1(p)$ la première valeur propre de $\left(-div\left(p\nabla.\right), H_0^1(\Omega)\right)$.

Le principal résultat est :

Théorème 2.1.3. *Soit $p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisfait (2.1.2), on a*

1) Si $N \geq 4$ et $k > 2$, alors pour tout $\lambda \in]0, \lambda_1(p)[$ le problème (2.1.1) admet au moins une solution non triviale.

2) Si $N \geq 4$ et $k = 2$, alors il existe une constante $\tilde{\gamma}(N) = \frac{(N-2)N(N+2)}{4(N-1)}\beta_2$ telle que pour tout $\lambda \in]\tilde{\gamma}(N), \lambda_1(p)[$ le problème (2.1.1) admet au moins une solution non triviale.

3) Si $N = 3$ et $k \geq 2$, alors il existe une constante $\gamma(k) > 0$ telle que pour tout $\lambda \in]\gamma(k), \lambda_1(p)[$ le problème (2.1.1) admet au moins une solution non triviale.

4) Si $N \geq 3$, $k > 0$ et p satisfait (2.1.3), alors il existe $\lambda^* \in \left[\tilde{\beta}_k \frac{N^2}{4}, \lambda_1(p)\right[$ où $\tilde{\beta}_k = \beta_k \min\left[(\mathrm{diam}\Omega)^{k-2}, 1\right]$, telles que pour tout $\lambda \in]\lambda^*, \lambda_1(p)[$ le problème (2.1.1) admet au moins une solution non triviale.

5) Si $N \geq 3$ et $k > 0$, alors pour tout $\lambda \leq 0$ le problème (2.1.1) n'admet aucune solution non triviale.

6) Si $N \geq 3$ et $k > 0$, alors le problème (2.1.1) n'admet aucune solution non triviale pour tout $\lambda \geq \lambda_1(p)$.

On commence par un résultat de non existence

2.2 Preuve des résultats de non existence

2.2.1 Preuve de la proposition 2.1.1

Démonstration. La démonstration de la proposition 2.1.1 est basée sur l'identité de Pohozaev.

On raisonne par l'absurde. On suppose que u est solution de (2.1.1).

On multiplie (2.1.1) par $\nabla u(x).(x-a)$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega u^{2^*-1}\nabla u(x).(x-a)dx = -\frac{N-2}{2}\int_\Omega |u(x)|^{2^*}dx, \tag{2.2.1}$$

$$\lambda\int_\Omega u(x)\nabla u(x).(x-a)dx = -\frac{N}{2}\lambda\int_\Omega |u(x)|^2 dx, \tag{2.2.2}$$

$$\begin{aligned} -\int_\Omega div\left(p(x)\nabla u(x)\right)\nabla u(x).(x-a)dx &= -\frac{N-2}{2}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla p(x).(x-a)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx \\ &- \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} p(x)(x-a).\nu\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 dx, \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

où ν est la normale extérieure à $\partial\Omega$.

En combinant (2.2.1), (2.2.2) et (2.2.3), on trouve

$$\begin{aligned} -\tfrac{N-2}{2}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \tfrac{1}{2}\int_\Omega \nabla p(x).(x-a)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \tfrac{1}{2}\int_{\partial\Omega} p(x)(x-a).\nu\left|\tfrac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 dx \\ = \\ -\tfrac{N-2}{2}\int_\Omega |u(x)|^{2^*}dx - \lambda\tfrac{N}{2}\int_\Omega |u(x)|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

D'autre part, on multiplie (2.1.1) par $\frac{N-2}{2}u$ et on intègre par parties, on a

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx = \frac{N-2}{2}\int_\Omega |u(x)|^{2^*}dx + \frac{N-2}{2}\lambda\int_\Omega |u(x)|^2 dx. \tag{2.2.5}$$

En combinant (2.2.4) et (2.2.5), on obtient

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\nabla p(x).(x-a)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}p(x)(x-a).\nu\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 dx$$
$$+\lambda\int_{\Omega}\left|u(x)\right|^2 dx=0.$$

Comme Ω est étoilé par rapport au point a, alors $(x-a).\nu>0$ sur $\partial\Omega$, et $-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\nabla p(x).(x-a)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx+\lambda\int_{\Omega}\left|u(x)\right|^2 dx>0$.
i.e

$$\lambda>\frac{1}{2}\frac{\int_{\Omega}\nabla p(x).(x-a)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx}{\int_{\Omega}\left|u(x)\right|^2 dx}\geq\alpha(p).$$

D'où la contradiction. □

2.2.2 Preuve de la proposition 2.1.2

Démonstration. On commence par **1).**

Soient $q(x)=\nabla p(x).(x-a)$, $\forall x\in\Omega$ et $\xi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\begin{cases}\xi=1 & \text{si} \quad x\in B(0;r)\\ \xi=0 & \text{si} \quad x\notin B(0;2r)\ ,\\ 0\leq\xi\leq1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}^N\end{cases}\tag{2.2.6}$$

où $0<r<1$.

Soit $\xi_j(x)=\xi(j(x-b))$ pour $j\in\mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned}\alpha(p) &\leq \frac{1}{2}\frac{\int_{\Omega}q(x).|\nabla\xi_j(x)|^2dx}{\int_{\Omega}\left|\xi_j(x)\right|^2 dx}\\ &\leq \frac{1}{2}\frac{\int_{B(b,\frac{2r}{j})}q(x)|\nabla\xi_j(x)|^2dx}{\int_{B(b,\frac{2r}{j})}\left|\xi_j(x)\right|^2 dx}.\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $y=j(x-b)$, on obtient

$$\alpha(p)\leq\frac{j^2}{2}\frac{\int_{B(0,2r)}q(\frac{y}{j}+b)|\nabla\xi(y)|^2dy}{\int_{B(0,2r)}\left|\xi(y)\right|^2 dy}.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, on aura

$$\alpha(p)\leq\frac{j^2}{2}\left[\frac{q(b)\int_{B(0,2r)}|\nabla\xi(y)|^2dy}{\int_{B(0,2r)}\left|\xi(y)\right|^2 dy}+o(1)\right].$$

En faisant tendre j vers ∞ on obtient le résultat.

Maintenant on démontre **2.a).**

En utilisant (2.1.2) et comme $p \in C^1(\Omega)$ dans un voisinage V de a, on a

$$p(x) = p_0 + \beta_k |x-a|^k + \theta_1(x), \tag{2.2.7}$$

où $\theta_1 \in C^1(\Omega)$ telle que

$$\lim_{x \to a} \frac{\theta_1(x)}{|x-a|^k} = 0. \tag{2.2.8}$$

D'après (2.2.8), il existe $0 < r < 1$, tel que

$$\theta_1(x) \leq |x-a|^k \quad \forall x \in B(a, 2r). \tag{2.2.9}$$

Soit $\xi_j(x) = \xi(j(x-a))$, $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ définie dans (2.2.6), on a

$$0 \leq \alpha(p) \leq \frac{1}{2} \frac{\int_\Omega \nabla p(x).(x-a)|\nabla \xi_j(x)|^2 dx}{\int_\Omega |\xi_j(x)|^2 \, dx}.$$

En utilisant (2.2.7), on a

$$0 \leq \alpha(p) \leq \frac{k\beta_k}{2} \frac{\int_{B(a,\frac{2r}{j})} |x-a|^k |\nabla \xi_j(x)|^2 dx}{\int_{B(a,\frac{2r}{j})} |\xi_j(x)|^2 \, dx} + \frac{1}{2} \frac{\int_{B(a,\frac{2r}{j})} \nabla \theta_1(x).(x-a)|\nabla \xi_j(x)|^2 dx}{\int_{B(a,\frac{2r}{j})} |\xi_j(x)|^2 \, dx}.$$

Considérons le changement de variable $y = j(x-a)$, et intégrons par parties le second terme, alors

$$\begin{aligned}
\alpha(p) \quad &\leq \quad \frac{k\beta_k}{2j^{k-2}} \frac{\int_{B(0,2r)} |y|^k |\nabla \xi(y)|^2 dx}{\int_{B(0,2r)} |\xi(y)|^2 \, dy} + \frac{j}{2} \left| \frac{\int_{B(0,2r)} \theta_1(\frac{y}{j}+a) \nabla \left(y |\nabla \xi(y)|^2 \right) dy}{\int_{B(0,2r)} |\xi(y)|^2 \, dy} \right| \\
&\leq \quad \frac{k\beta_k}{2j^{k-2}} \frac{\int_{B(0,2r)} |y|^k |\nabla \xi(y)|^2 dx}{\int_{B(0,2r)} |\xi(y)|^2 \, dy} + \frac{j}{2} \frac{\int_{B(0,2r)} \left| \theta_1(\frac{y}{j}+a) \right| \left| \nabla \left(y |\nabla \xi(y)|^2 \right) \right| dy}{\int_{B(0,2r)} |\xi(y)|^2 \, dy}
\end{aligned}$$

Par (2.2.9), on a

$$0 \leq \alpha(p) \leq \frac{k\beta_k}{2j^{k-2}} \frac{\int_{B(0,2r)} |y|^k |\nabla \xi(y)|^2 dx}{\int_{B(0,2r)} |\xi(y)|^2 \, dy} + \frac{1}{2j^{k-1}} \frac{\int_{B0,2r)} |y|^k \left| \nabla \left(y |\nabla \xi(y)|^2 \right) \right| dy}{\int_{B(0,2r)} |\xi(y)|^2 \, dy}.$$

Pour $k > 2$, on déduit que $\alpha(p) = 0$.

Démontrons maintenant **2.b)**, comme p satisfait (2.1.3) on a

$$\frac{\int_\Omega \nabla p(x).(x-a)|\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx} \geq k\beta_k \frac{\int_\Omega |x-a|^k |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx}.$$

En appliquant le lemme 1.1.9 pour $0 < k = 2+t \leq 2$, on trouve

$$k\beta_k \frac{\int_\Omega |x-a|^k |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx} \geq k\beta_k \left(\frac{N+k-2}{2}\right) \frac{\int_\Omega |x-a|^{k-2} |u(x)|^2 dx}{\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx}.$$

Ce qui implique

$$\alpha(p) \geq \frac{k}{2}\beta_k \left(\frac{N+k-2}{2}\right) (diam\Omega)^{k-2}.$$

□

2.3 Preuve des résultats d'existence

Pour tout $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, on définit la fonctionnelle I_λ par

$$I_\lambda(u) = \frac{\int_\Omega p(x) |\nabla u(x)|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx}{\|u\|_{L^{2^*}}^2},$$

dont les points critiques vérifient l'équation $-div\,(p(x)\nabla u) - \lambda u = \mu u^{2^*-1}$, où $\mu \in \mathbb{R}$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\|u\|_{L^{2^*}}^2 = 1$.

On définit

$$Q_\lambda(p) = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} I_\lambda(u).$$

On remarque que

$$Q_\lambda(p) = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{L^{2^*}}=1}} \left[\int_\Omega p(x) |\nabla u(x)|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx\right]. \tag{2.3.1}$$

Posons

$$S := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{L^{2^*}}=1}} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx,$$

S est la meilleure constante de Sobolev pour l'injection $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$

Maintenant évaluons $Q_\lambda(p)$ par rapport à S.

Lemme 2.3.1. *S'il existe $\lambda > 0$, tel que $Q_\lambda(p) < p_0 S$, alors l'infimum dans (2.3.1) est atteint.*

Démonstration. Soit $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ une suite minimisante pour (2.3.1) alors

$$\|u_n\|_{L^{2^*}} = 1. \tag{2.3.2}$$

Pour $n \to \infty$, on a

$$\int_\Omega p(x)\,|\nabla u_n(x)|^2\,dx - \lambda\int_\Omega |u_n(x)|^2\,dx = Q_\lambda(p) + o(1). \tag{2.3.3}$$

La suite $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, de (2.3.3) on a

$$\int_\Omega p(x)\,|\nabla u_n(x)|^2\,dx = \lambda\int_\Omega |u_n(x)|^2\,dx + Q_\lambda(p) + o(1).$$

Comme l'injection de $L^{2^*}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est continue, il existe une constante positive C_1 telle que

$$\int_\Omega p(x)\,|\nabla u_n(x)|^2\,dx \leq \lambda C_1\,\|u_n\|^2_{L^{2^*}} + Q_\lambda(p) + o(1).$$

D'après (2.3.2), on obtient

$$\int_\Omega p(x)\,|\nabla u_n(x)|^2\,dx \leq \lambda C_1 + Q_\lambda(p) + o(1).$$

Comme $0 < p_0 \leq p(x)$ pour tout $x \in \Omega$, on déduit

$$\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2\,dx \leq \frac{\lambda C_1\,\|u_n\|^2_{L^{2^*}} + Q_\lambda(p)}{p_0} + o(1).$$

D'où le résultat.

Donc on peut extraire de $\{u_n\}$ une sous-suite, telle que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } \mathrm{H}_0^1(\Omega),$$

$$u_n \to u \text{ fortement dans } L^2(\Omega),$$

$$u_n \to u \text{ p.p dans } \Omega,$$

avec $\|u\|_{L^{2^*}} \leq 1$.

Posons $v_n = u_n - u$, alors

$$v_n \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } \mathrm{H}_0^1(\Omega),$$

$$v_n \to 0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega),$$

$$v_n \to 0 \text{ p.p dans } \Omega.$$

En utilisant (2.3.2), la définition de S et le fait que $p_0 = \min_{x\in\bar{\Omega}} p(x) > 0$, on a

$$\int_\Omega p(x)\,|\nabla u_n(x)|^2\,dx \geq p_0 S.$$

De (2.3.3) on déduit $\lambda\,\|u\|_2^2 \geq p_0 S - Q_\lambda(p) > 0$ et donc $u \neq 0$. En utilisant une deuxième fois (2.3.3), on obtient

$$\int_\Omega p(x)\,|\nabla u(x)|^2\,dx + \int_\Omega p(x)\,|\nabla v_n(x)|^2\,dx - \lambda\int_\Omega |u(x)|^2\,dx = Q_\lambda(p) + o(1). \qquad (2.3.4)$$

D'autre part, comme $\{v_n\}$ est bornée dans $L^{2^*}(\Omega)$ et $v_n \to 0$ p.p dans Ω, alors on peut utiliser le lemme de Brézis-Lieb et nous obtenons

$$\|u+v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} = \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*} + \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1).$$

En utilisant (2.3.2), on trouve

$$1 = \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*} + \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1),$$

et donc

$$1 \leq \|u\|_{L^{2^*}}^{2} + \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2} + o(1),$$

cela implique

$$1 \leq \|u\|_{L^{2^*}}^{2} + \frac{1}{p_0 S}\int_\Omega p(x)\,|\nabla v_n(x)|^2\,dx + o(1). \qquad (2.3.5)$$

On distingue deux cas :

(a) $Q_\lambda(p) > 0$, qui corresponds à $0 < \lambda < \lambda_1(p)$.

(b) $Q_\lambda(p) \leq 0$, qui corresponds à $\lambda \geq \lambda_1(p)$.

Dans le cas (a), d'aprés (2.3.5), on déduit

$$Q_\lambda(p) \leq Q_\lambda(p)\,\|u\|_{L^{2^*}}^{2} + \frac{Q_\lambda(p)}{p_0 S}\int_\Omega p(x)\,|\nabla v_n(x)|^2\,dx + o(1).$$

En combinant (2.3.4) et (2.3.5), on obtient

$$\int_\Omega p(x)\,|\nabla u(x)|^2\,dx + \int_\Omega p(x)\,|\nabla v_n(x)|^2\,dx - \lambda\int_\Omega |u(x)|^2\,dx \leq Q_\lambda(p)\,\|u\|_{L^{2^*}}^{2} + \frac{Q_\lambda(p)}{p_0 S}\int_\Omega p(x)\,|\nabla v_n(x)|^2\,dx + o(1).$$

Donc

$$\int_\Omega p(x)\,|\nabla u(x)|^2\,dx - \lambda\int_\Omega |u(x)|^2\,dx \leq Q_\lambda(p)\,\|u\|_{L^{2^*}}^{2} + \left[\frac{Q_\lambda(p)}{p_0 S} - 1\right]\int_\Omega p(x)\,|\nabla v_n(x)|^2\,dx + o(1).$$

Puisque $Q_\lambda(p) < p_0 S$, on déduit

$$\int_\Omega p(x) \left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx \leq Q_\lambda(p) \left\|u\right\|_{L^{2^*}}^2 .$$

Donc u est un minimum de $Q_\lambda(p)$.

Pour le cas (b), comme $\left\|u\right\|_{L^{2^*}}^2 \leq 1$, alors $Q_\lambda(p) \leq Q_\lambda(p) \left\|u\right\|_{L^{2^*}}^2$, donc de (2.3.4), on obtient

$$\int_\Omega p(x) \left|\nabla u(x)\right|^2 dx + \int_\Omega p(x) \left|\nabla v_n(x)\right|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx \leq Q_\lambda(p) \left\|u\right\|_{L^{2^*}}^2 + o(1).$$

Puisque $\int_\Omega p(x) \left|\nabla v_n(x)\right|^2 dx \geq 0$, on déduit

$$\int_\Omega p(x) \left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx \leq Q_\lambda(p) \left\|u\right\|_{L^{2^*}}^2 .$$

$\square$

Soit

$$U_\varepsilon(x) = \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} \qquad \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.3.6}$$

une fonction extrémale pour l'inégalité de Sobolev dans $\mathbb{R}^N$.

On pose $U_{\varepsilon,a}(x) = U_\varepsilon\left(x - a\right)$, et

$$u_{\varepsilon,a}(x) = \xi_a(x) U_{\varepsilon,a}(x) \tag{2.3.7}$$

où

$$\xi_a \in C_0^\infty(\Omega) \qquad \text{avec} \quad \xi_a \geq 0 \quad \text{et} \quad \xi_a = 1 \text{ au voisinage de } a. \tag{2.3.8}$$

D'après H. Brézis, L. Nirenberg [5], on a :

$$\left\|\nabla u_{\varepsilon,a}\right\|_{L^2}^2 = \frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O\left(1\right), \ \left\|u_{\varepsilon,a}\right\|_{L^{2^*}}^2 = \frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O\left(\varepsilon\right), \tag{2.3.9}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes positives telles que

$$S = \frac{K_1}{K_2}, \tag{2.3.10}$$

et

$$\left\|u_{\varepsilon,a}\right\|_{L^2}^2 = \begin{cases} \frac{K_3}{\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O\left(1\right) & \text{si } N \geq 5 \\ \frac{\omega_4}{2} \left|\log \varepsilon\right| + O\left(1\right) & \text{si } N = 4 \end{cases} \tag{2.3.11}$$

où ω_4 est la surface de S^3 et $K_3 = \int_\Omega \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^{N-2}}$.

On pose

$$A_k = (N-2)^2 \beta_k \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^{k+2}}{\left(1+|x|^2\right)^N} dx.$$

Lemme 2.3.2. *Soient $p \in H_0^1(\Omega) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$ vérifiant (2.1.2) et $u_{\varepsilon,a}$ définie dans (2.3.7). Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right| dx \leq \begin{cases} p_0 K_1 + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) & \text{si} \quad N \geq 4 \text{ et } N-2 < k, \\ p_0 K_1 + A_k \varepsilon^{\frac{k}{2}} + o\left(\varepsilon^{\frac{k}{2}}\right) & \text{si} \quad N \geq 4 \text{ et } N-2 > k, \\ p_0 K_1 + \frac{(N-2)^2(\beta_{N-2}+M)\omega_N}{2} \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \left|\ln \varepsilon\right| + & \\ o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \left|\ln \varepsilon\right|\right) & \text{si} \quad N > 4 \text{ et } N-2 = k, \\ p_0 K_1 + 2\beta_2 \omega_4 \varepsilon \left|\ln \varepsilon\right| + o\left(\varepsilon \left|\ln \varepsilon\right|\right) & \text{si} \quad N = 4 \text{ et } k = 2, \end{cases}$$

avec $K_1 = (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(1+|x|)^N} dx$ et M une constante positive.

Démonstration. **1) Cas $N \geq 4$ et $k > 0$, avec $k \neq 2$ si $N = 4$**

$$\begin{aligned} \int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= \int_\Omega \frac{p(x) \left|\nabla \xi_a(x)\right|^2}{\left(\varepsilon + |x-a|^2\right)^{N-2}} dx \\ &+ (N-2)^2 \int_\Omega \frac{p(x) \left|\nabla \xi_a(x)\right|^2 |x-a|^2}{\left(\varepsilon + |x-a|^2\right)^N} dx \\ &- 2(N-2) \int_\Omega \frac{p(x) \xi_a(x) \nabla \xi_a(x) (x-a)}{\left(\varepsilon + |x-a|^2\right)^{N-1}} dx. \end{aligned}$$

Comme, $\xi_a \equiv 1$ dans un voisinage V_a de a , on suppose que $\xi_a \equiv 1$ dans $B(a,r)$ avec $r > 0$ assez petit .

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= \int_{\Omega \setminus B(a,r)} \frac{p(x) \left|\nabla \xi_a(x)\right|^2}{\left(\varepsilon + |x-a|^2\right)^{N-2}} dx \\ &- 2(N-2) \int_{\Omega \setminus B(a,r)} \frac{p(x) \xi_a(x) \nabla \xi_a(x) (x-a)}{\left(\varepsilon + |x-a|^2\right)^{N-1}} dx \\ &+ (N-2)^2 \int_\Omega \frac{p(x) \left|\nabla \xi_a(x)\right|^2 |x-a|^2}{\left(\varepsilon + |x-a|^2\right)^N} dx. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, (2.3.12) devient

$$\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^{2}dx=(N-2)^{2}\int_{\Omega}\frac{p(x)\left|\nabla\xi_{a}(x)\right|^{2}|x-a|^{2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx+O\left(1\right).$$

En utilisant, (3.1.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^{2}dx &= \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(N-2)^{2}p_{0}\int_{V_a}\frac{|x-a|^{2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx\\
&+ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(N-2)^{2}\beta_{k}\int_{V_a}\frac{|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx\\
&+ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(N-2)^{2}\int_{V_a}\frac{\theta(x)\left|x-a\right|^{k+2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx\\
&+ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(N-2)^{2}\int_{V_a}\frac{|x-a|^{k+2}\left(\beta_{k}+\theta(x)\right)\left(\left|\xi_{a}(x)\right|^{2}-1\right)}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx\\
&+ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(N-2)^{2}\int_{\Omega\setminus V_a}\frac{p(x)\left|\nabla\xi_{a}(x)\right|^{2}|x-a|^{2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx\\
&+ O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant de nouveau la définition de ξ_a, et en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^{2}dx &= \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(N-2)^{2}p_{0}\int_{V_a}\frac{|x-a|^{2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx\\
&+ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(N-2)^{2}\beta_{k}\int_{V_a}\frac{|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx\\
&+ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(N-2)^{2}\int_{V_a}\frac{\theta(x)\left|x-a\right|^{k+2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx+O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Nous distinguons trois cas :

1. **Si** $N-2>k$,

$$\begin{gathered}
\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^{2}dx=\\
\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(N-2)^{2}p_{0}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x-a|^{2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx-\int_{\mathbb{R}^N\setminus V_a}\frac{|x-a|^{2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx\right]+\\
\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(N-2)^{2}p_{0}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\beta_k|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx-\int_{\mathbb{R}^N\setminus V_a}\frac{\beta_k|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx\right]+\\
\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(N-2)^{2}\int_{V_a}\frac{\theta(x)|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^{2}\right)^{N}}dx+O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right).
\end{gathered}$$

En utilisant le changement de variable $y = \frac{x-a}{\sqrt{\varepsilon}}$ et en appliquant le théorème de convergence dominée, on trouve

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{\Omega} p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 p_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon \left|y\right|^2}{\varepsilon^N \left(1+\left|y\right|^2\right)^N} \varepsilon^{\frac{N}{2}} dy \\ &+ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon^{\frac{k+2}{2}} \beta_k \left|y\right|^{k+2}}{\varepsilon^N \left(1+\left|y\right|^2\right)^N} \varepsilon^{\frac{N}{2}} dy \\ &+ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon^{\frac{k+2}{2}} \theta(a+\sqrt{\varepsilon} y) \left|y\right|^{k+2}}{\varepsilon^N \left(1+\left|y\right|^2\right)^N} \chi_{\tilde{V}_0^{\varepsilon}} dy + o\left(\varepsilon^{\frac{k}{2}}\right). \end{aligned}$$

Comme $\theta(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a, alors

$$\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{\Omega} p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx = p_0 K_1 + A_k \varepsilon^{\frac{k}{2}} + o\left(\varepsilon^{\frac{k}{2}}\right).$$

2. **Si** $N-2<k$,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{\Omega} p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= p_0 K_1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \beta_k \int_{V_a} \frac{\left|x-a\right|^{k+2}}{\left(\varepsilon+\left|x-a\right|^2\right)^N} dx \\ &+ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \int_{V_a} \frac{\theta(x) \left|x-a\right|^{k+2}}{\left(\varepsilon+\left|x-a\right|^2\right)^N} dx + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right). \end{aligned}$$

Soit τ une constante positive telle que $B(a,\tau) \subset V_a$, ainsi

$$\begin{gathered} \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{\Omega} p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx = \\ p_0 K_1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \\ \left[\int_{B(a,\tau)} \frac{\beta_k \left|x-a\right|^{k+2}}{\left(\varepsilon+\left|x-a\right|^2\right)^N} dx - \int_{V_a \setminus B(a,\tau)} \frac{\beta_k \left|x-a\right|^{k+2}}{\left(\varepsilon+\left|x-a\right|^2\right)^N} dx\right] + \\ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \int_{V_a} \frac{\theta(x) \left|x-a\right|^{k+2}}{\left(\varepsilon+\left|x-a\right|^2\right)^N} dx + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right). \end{gathered}$$

Par le changement de variable $y = x-a$, on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{\Omega} p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= p_0 K_1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \int_{B(0,\tau)} \frac{\beta_k \left|y\right|^{k+2}}{\left(\varepsilon+\left|y\right|^2\right)^N} dy \\ &+ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \int_{V_a} \frac{\theta(a+y) \left|y\right|^{k+2}}{\left(\varepsilon+\left|y\right|^2\right)^N} dy \\ &+ O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right). \end{aligned}$$

En utilisant (3.1.3), il existe une constante positive M telle que

$$\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{\Omega} p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx \leq p_0 K_1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 (\beta_k + M) \int_{B(0,\tau)} \frac{|y|^{k+2}}{\left(\varepsilon + |y|^2\right)^N} dy + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right).$$

En appliquant le théorème de convergence dominée on déduit

$$\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{\Omega} p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx \leq p_0 K_1 + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right).$$

3. **Si** $N-2=k$,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{\Omega} p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= p_0 K_1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \int_{\Omega} \frac{\beta_k |x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon + |x-a|^2\right)^N} dx \\ &+ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \int_{V_a} \frac{\theta(x) |x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon + |x-a|^2\right)^N} dx + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right). \end{aligned}$$

En utilisant les précédentes étapes , on obtient

$$\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{\Omega} p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx =$$
$$p_0 K_1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \left[\int_{B(a,\tau)} \frac{\beta_{N-2}|x-a|^N}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^N} dx - \int_{V_a \setminus B(a,\tau)} \frac{\beta_{N-2}|x-a|^N}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^N} dx\right] +$$
$$\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \int_{V_a} \frac{\theta(x)|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^N} dx + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right).$$

D'où

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{\Omega} p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= p_0 K_1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \int_{B(a,\tau)} \frac{\beta_{N-2} |x-a|^N}{\left(\varepsilon + |x-a|^2\right)^N} dx \\ &+ \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 \int_{V_a} \frac{\theta(x) |x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon + |x-a|^2\right)^N} dx + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right). \end{aligned}$$

D'aprés (3.1.3), il existe une constante positive M telle que

$$\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{\Omega} p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx \leq p_0 K_1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} (N-2)^2 (\beta_{N-2} + M) \int_{B(a,\tau)} \frac{|x-a|^N}{\left(\varepsilon + |x-a|^2\right)^N} dx + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right). \tag{2.3.13}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{B(a,\tau)} \frac{|x-a|^N}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^N} dx &= \omega_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_0^\tau \frac{r^{2N-1}}{(\varepsilon+r^2)^N} dr + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) \\
&= \frac{\omega_N}{2N} \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_0^\tau \frac{\left((\varepsilon+r^2)^N\right)'}{(\varepsilon+r^2)^N} dr + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right),
\end{aligned}$$

et

$$\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{B(a,\tau)} \frac{|x-a|^N}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^N} dx = \frac{\omega_N}{2} \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} |\ln \varepsilon| + o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} |\ln \varepsilon|\right). \tag{2.3.14}$$

Remplaçons (2.3.14) dans (2.3.13), nous obtenons

$$\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx \leq p_0 K_1 + \frac{(N-2)^2 \left(\beta_{N-2}+M\right) \omega_N}{2} \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} |\ln \varepsilon| + o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} |\ln \varepsilon|\right).$$

2) Cas $n=4$ **et** $k=2$

On suppose

$$\int_{V_a} \frac{\theta(x)}{|x-a|^4} < \infty.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= \int_\Omega \frac{p(x) \left|\nabla \xi_a(x)\right|^2}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^2} dx + 4 \int_\Omega \frac{p(x) \left|\xi_a(x)\right|^2 |x-a|^2}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4} dx \\
&\quad -4 \int_\Omega \frac{p(x) \xi_a(x) \nabla \xi_a(x) (x-a)}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^3} dx.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.2.7) et le fait que $\xi_a = 1$ au voisinage de a, on déduit

$$\begin{aligned}
\int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= 4p_0 \int_\Omega \frac{\left|\xi_a(x)\right|^2 |x-a|^2}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4} dx + 4\beta_2 \int_\Omega \frac{\left|\xi_a(x)\right|^2 |x-a|^4}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4} dx + \\
&\quad 4 \int_{V_a} \frac{\theta(x) \left|\xi_a(x)\right|^2 |x-a|^4}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4} dx + O(1). \\
&= \frac{4p_0}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^2}{\left(1+|y|^2\right)^4} dy + 4 \int_\Omega \frac{|x-a|^4 \beta_2}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4} dx + \\
&\quad 4 \int_{V_a} \frac{\theta(x) |x-a|^4}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4} dx + O(1).
\end{aligned}$$

Comme $\int_{V_a} \frac{\theta(x)}{|x-a|^4} < \infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{V_a} \frac{\theta(x)\,|x-a|^4}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4}dx &= \int_{\Omega} \frac{|x-a|^8}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4}\frac{\theta(x)}{|x-a|^4}dx + \int_{\Omega\smallsetminus V_a} \frac{\theta(x)\,|x-a|^4}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4}dx \\
&\leq \int_{V_a} \frac{\theta(x)}{|x-a|^4}dx + O(1) \\
&= O(1).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_{\Omega} p(x)\,|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)|^2\,dx = \frac{4p_0}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^2}{\left(1+|y|^2\right)^4}dy + 4\beta_2\int_{\Omega} \frac{|x-a|^4}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4}dx + O(1).$$

Soit $R_i > 0,\ i = 1,\ 2$ tels que

$$\int_{|x-a|\leq R_1} \frac{|x-a|^4}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4}dx \leq \int_{\Omega} \frac{(|x-a|)^4}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4}dx \leq \int_{|x-a|\leq R_2} \frac{|x-a|^4}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4}dx.$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
\int_{|x-a|\leq R} \frac{|x-a|^4}{\left(\varepsilon+|x-a|^2\right)^4}dx &= \omega_4\int_0^R \frac{r^7}{(\varepsilon+r^2)^4}dr \\
&= \frac{1}{8}\omega_4\int_0^R \frac{\left((\varepsilon+r^2)^4\right)'}{(\varepsilon+r^2)^4}dr - \omega_4\int_0^R \frac{r\varepsilon^3+3r^3\varepsilon^2+3\varepsilon r^4}{(\varepsilon+r^2)^4}dr \\
&= \frac{1}{2}\omega_4\,|\ln\varepsilon| - \omega_4\int_0^{\frac{R}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}} \frac{t+3t^3+3t^5}{(1+t^2)^4}dt + O(1) \\
&= \frac{1}{2}\omega_4\,|\ln\varepsilon| + O(1).
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Omega} p(x)\,|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)|^2\,dx = \frac{p_0K_1}{\varepsilon} + 2\beta_2\omega_4\,|\ln\varepsilon| + O(1).$$

On conclut

$$\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \int_{\Omega} p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right| dx \leq \begin{cases} p_0 K_1 + o\left(\varepsilon\right) & \text{si} \quad N \geq 5 \text{ et } k > 2, \\ p_0 K_1 + A_2 \varepsilon + o\left(\varepsilon\right) & \text{si} \quad N \geq 5 \text{ et } k = 2, \\ p_0 K_1 + A_k \varepsilon^{\frac{k}{2}} + o\left(\varepsilon^{\frac{k}{2}}\right) & \text{si} \quad N \geq 4 \text{ et } k < 2, \\ p_0 K_1 + o\left(\varepsilon\right) & \text{si} \quad N = 4 \text{ et } k > 2, \\ p_0 K_1 + 2\beta_2 \omega_4 \varepsilon \left|\ln \varepsilon\right| + o\left(\varepsilon \left|\ln \varepsilon\right|\right) & \text{si} \quad N = 4 \text{ et } k = 2, \end{cases} \tag{2.3.15}$$

□

Lemme 2.3.3. *a) Pour $N \geq 4$, on a*

$$Q_\lambda(p) < p_0 S \textit{ pour tout } \lambda > 0 \textit{ et pour tout } k > 2.$$

b) Pour $N = 4$ et $k = 2$, on a

$$Q_\lambda(p) < p_0 S \textit{ pour tout } \lambda > \beta_2.$$

c) Pour $N \geq 5$ et $k = 2$, on a

$$Q_\lambda(p) < p_0 S \textit{ pour tout } \lambda > \frac{(N-2)\, N\, (N+2)}{4\,(N-1)} \beta_2.$$

d) Pour $N = 3$ et $k \geq 2$, on a

$$Q_\lambda(p) < p_0 S \textit{ pour tout } \lambda > \gamma(k) \textit{ où } \gamma(k) \textit{ est une constante positive.}$$

Démonstration. En combinant (2.3.9), (2.3.11) et (2.3.15), on obtient

$$Q_\lambda(p) \leq I_\lambda\left(u_{a,\varepsilon}\right) \leq \begin{cases} p_0 S - \lambda \frac{K_3}{K_2} + o\left(\varepsilon\right) & \text{si} \quad N \geq 5 \text{ et } k > 2, \\ p_0 S - \left(\lambda - C\right) \frac{K_3}{K_2} + o\left(\varepsilon\right) & \text{si} \quad N \geq 5 \text{ et } k = 2, \\ p_0 S + A_k \varepsilon^{\frac{k}{2}} + o\left(\varepsilon^{\frac{k}{2}}\right) & \text{si} \quad N \geq 4 \text{ et } k < 2, \\ p_0 S - \lambda \frac{\omega_4}{2K_2} \left|\ln \varepsilon\right| + o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \left|\ln \varepsilon\right|\right) & \text{si} \quad N = 4 \text{ et } k > 2, \\ p_0 K_1 + \frac{\omega_4}{2K_2} \left(\lambda - 4\beta_2\right) \varepsilon \left|\ln \varepsilon\right| + o\left(\varepsilon \left|\ln \varepsilon\right|\right) & \text{si} \quad N = 4 \text{ et } k = 2, \end{cases} \tag{2.3.16}$$

avec $C = \frac{A_2}{K_3} = \frac{\beta_2 (N-2) N (N+2)}{4(N-1)}$.

a), *b*) et *c*) se déduisent directement pour ε assez petit.

Démontrons l'assertion *d*).

On estime le quotient

$$I_\lambda(u) = \frac{\int_\Omega p(x) \left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx}{\|u\|_{L^{2^*}}^2},$$

avec

$$u(x) = u_{\varepsilon,a}(r) = \frac{\xi_a(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad r = |x|\,,\ \varepsilon > 0,$$

où $\xi_a \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \xi_a \leq 1$, $\xi_a = 1$ dans $\left\{x,\ |x-a| < \frac{R}{2}\right\}$ et $\xi_a = 0$ dans $\{x,\ |x-a| > R\}$, où R est une constante positive telle que $B(a,R) \subset \Omega$.

De H. Brézis, L. Nirenberg [5], on a

$$\|\nabla u_{\varepsilon,a}\|_{L^2}^2 = \frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \omega_3 \int_0^R \left|\xi_a'(r)\right|^2 dr + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \tag{2.3.17}$$

$$\|u_{\varepsilon,a}\|_{L^6}^2 = \frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \tag{2.3.18}$$

$$\|u_{\varepsilon,a}\|_{L^2}^2 = \omega_3 \int_0^R \xi_a^2(r) dr + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right). \tag{2.3.19}$$

Ainsi

$$\int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right| dx = \frac{p_0 K_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \omega_3 \int_0^R \left(p_0 + \beta_k r^k\right) \left|\xi_a'(r)\right|^2 dr + \omega_3 k \int_0^R \left|\xi_a\right|^2 r^{k-2} dr + o(1). \tag{2.3.20}$$

En effet, en utilisant (2.2.7), (2.3.17) et le fait que $\xi_a = 0$ dans $\{x,\ |x-a| > R\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega p(x) \left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right| dx &= \frac{p_0 K_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \omega_3 p_0 \int_0^R \left|\xi_a'(r)\right|^2 dr \\
&+ \omega_3 \beta_k \int_0^R \left[\frac{\left|\xi_a'(r)\right|^2}{\varepsilon + r^2} - \frac{2r\xi_a(r)\xi_a'(r)}{\left(\varepsilon + r^2\right)^2} + \frac{r^2 \xi_a^2(r)}{\left(\varepsilon + r^2\right)^3}\right] r^{k+2} dr \\
&+ O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de ξ_a, on obtient

$$-2 \int_0^R \frac{r^{k+3} \xi_a(r) \xi_a'(r)}{\left(\varepsilon + r^2\right)^2} dr = (k+3) \int_0^R \frac{\left|\xi_a(r)\right|^2 r^{k+2}}{\left(\varepsilon + r^2\right)^2} dr - 4 \int_0^R \frac{\left|\xi_a(r)\right|^2 r^{k+4}}{\left(\varepsilon + r^2\right)^3} dr.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right| dx &= \frac{p_0 K_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \omega_3 p_0 \int_0^R \left|\xi_a'(r)\right|^2 dr + \omega_3 \beta_k \int_0^R \frac{r^{k+2}\left|\xi_a'(r)\right|^2}{\varepsilon + r^2} dr \\ &- 3\omega_3 \beta_k \int_0^R \frac{\left|\xi_a(r)\right|^2 r^{k+4}}{\left(\varepsilon + r^2\right)^3} dr + \omega_3 \beta_k (k+3) \int_0^R \frac{\left|\xi_a(r)\right|^2 r^{k+2}}{\left(\varepsilon + r^2\right)^2} dr \\ &+ O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient le résultat.

Combinant (2.3.18), (2.3.19) et (2.3.20), on obtient

$$I_\lambda\left(u_{a,\varepsilon}\right) = p_0 S + \omega_3 \left[\int_0^R \left(p_0 + \beta_k r^k\right)\left|\xi_a'(r)\right|^2 dr + \beta_k k \int_0^R \left|\xi_a\right|^2 r^{k-2} dr - \lambda \int_0^R \left|\xi_a\right|^2 dr\right] \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{K_2} + O(\varepsilon).$$

Donc

$$I_\lambda\left(u_{a,\epsilon}\right) = p_0 S + \frac{\omega_3 \int_0^R \left|\xi_a\right|^2 dr}{K_2}\left[\frac{\int_0^R \left(p_0 + \beta_k r^k\right)\left|\xi_a'(r)\right|^2 dr + k\int_0^R \left|\xi_a\right|^2 r^{k-2} dr}{\int_0^R \left|\xi_a\right|^2 dr} - \lambda\right]\varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon).$$

Posons $D\left(k,\xi_a\right) = \frac{\int_0^R\left(p_0+\beta_k r^k\right)\left|\xi_a'(r)\right|^2 dr + k\int_0^R\left|\xi_a\right|^2 r^{k-2} dr}{\int_0^R \left|\xi_a\right|^2 dr}$ et $\gamma(k) = \inf\limits_{\mathcal{H}} D\left(k,\xi_a\right)$ où $\mathcal{H}$ est définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{H} : &= \left\{\xi_a \in C_0^\infty(\Omega) \text{ telle que } 0 \le \xi_a \le 1, \xi_a = 1 \text{ dans } \left\{x,\ |x-a| < \frac{R}{2}\right\}\right. \\ &\left.\text{et } \xi_a = 0 \text{ dans } \left\{x,\ |x-a| > R\right\}\right\}.\end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration. □

Lemme 2.3.4. *Soit* $0 < k \le 2$*. Alors il existe une constante* $\tilde{\beta}_k = \beta_k \min\left[(\mathrm{diam}\Omega)^{k-2}, 1\right]$ *telle que*

$$Q_\lambda(p) = p_0 S \text{ pour tout } \lambda \in \left]-\infty, \tilde{\beta}_k \frac{N^2}{4}\right]. \tag{2.3.21}$$

En plus, $Q_\lambda(p)$ *n'est pas atteint pour tout* $\lambda \in \left]-\infty, \tilde{\beta}_k \frac{N^2}{4}\right[$.

Démonstration. D'après (2.3.16), on a

$$Q_\lambda(p) \le I_\lambda\left(u_{a,\varepsilon}\right) \le p_0 S + A_k \varepsilon^{\frac{k}{2}} + o\left(\varepsilon^{\frac{k}{2}}\right).$$

Ainsi $Q_\lambda(p) \le p_0 S$

On sait d'après les propositions 2.1.1 et 2.1.2, que pour $0 < k \le 2$ et pour tout $\lambda \le \frac{k}{2}\beta_k\left(\frac{N+k-2}{2}\right)(diam\Omega)^{k-2}$, le problème 2.1.1 n'admet aucune solution, donc on exclut le cas $Q_\lambda(p) < p_0 S$, sinon on obtient une contradiction avec le lemme 2.3.1.

On conclut que pour $0 < k \leq 2$, on a

$$Q_\lambda(p) = p_0 S \quad \text{pour tout } \lambda \leq \frac{k}{2}\beta_k \left(\frac{N+k-2}{2}\right) (diam\Omega)^{k-2}. \tag{2.3.22}$$

Maintenant, on considère $\tilde{p}$ définie par

$$\begin{cases} \tilde{p}(x) = p(x) & \forall x \in \Omega \setminus B(a,r) \\ \tilde{p}(x) = p_0 + \beta_k |x-a|^2 & \forall x \in B\left(a, \frac{r}{2}\right) \\ p(x) \geq \tilde{p}(x) & \forall x \in B(a,r) \setminus B\left(a, \frac{r}{2}\right) \end{cases} \tag{2.3.23}$$

avec $0 < r < 1$.

Comme $0 < k \leq 2$, on a $|x-a|^2 \leq |x-a|^k$ pour tout $x \in B(a,r)$ et $p(x) \geq \tilde{p}(x)$ dans Ω.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|u\|_{L^{2^*}} = 1$, alors

$$\int_\Omega p(x) |\nabla u(x)|^2 dx - \lambda \int_\Omega |u(x)|^2 dx \geq \int_\Omega \tilde{p}(x) |\nabla u(x)|^2 dx - \lambda \int_\Omega |u(x)|^2 dx,$$

donc

$$\begin{aligned} \int_\Omega p(x) |\nabla u(x)|^2 dx - \lambda \int_\Omega |u(x)|^2 dx \;\; &\geq \;\; \int_\Omega \left(p_0 + \frac{1}{2}(\tilde{p}(x) - p_0)\right) |\nabla u(x)|^2 dx \\ &- \;\; \lambda \int_\Omega |u(x)|^2 dx \qquad (2.3.24) \\ &+ \;\; \frac{1}{2}\int_\Omega (\tilde{p}(x) - p_0) |\nabla u(x)|^2 dx. \qquad (2.3.25) \end{aligned}$$

On pose $\hat{p}(x) = p_0 + \frac{1}{2}(\tilde{p}(x) - p_0)$.

De (2.1.3), on déduit

$$p(x) - p_0 \geq \beta_k |x-a|^k \text{ p.p dans } \Omega. \tag{2.3.26}$$

En utilisant (2.3.23) et (2.3.26), on obtient $\tilde{p}(x) - p_0 \geq \tilde{\beta}_k |x-a|^2$ p.p dans Ω.

En appliquant le lemme 1.1.9, on trouve

$$\int_\Omega (\tilde{p}(x) - p_0) |\nabla u(x)|^2 dx \geq \tilde{\beta}_k \frac{N^2}{4} \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

L'inégalité (2.3.24)madevient :

Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega p(x)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx-\lambda\int_\Omega |u(x)|^2\,dx \geq \int_\Omega \hat{p}(x)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx-\left(\lambda-\tilde{\beta}_k\frac{N^2}{8}\right)\int_\Omega |u(x)|^2\,dx.$$

Donc

$$Q_\lambda(p)\geq \inf_{\|u\|_{L^{2^*}}=1}\left[\int_\Omega \hat{p}(x)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx-\left(\lambda-\tilde{\beta}_k\frac{N^2}{8}\right)\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\right].$$

Comme $\lambda\leq\tilde{\beta}_k\frac{N^2}{4}$, on a $\lambda-\tilde{\beta}_k\frac{N^2}{8}\leq\frac{1}{2}\tilde{\beta}_k\frac{N^2}{4}$, alors par (2.3.22), on conclut

$$\inf_{\|u\|_{L^{2^*}}=1}\left[\int_\Omega \hat{p}(x)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx-\left(\lambda-\tilde{\beta}_k\frac{N^2}{8}\right)\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\right]=p_0S,$$

d'où on a (2.3.21).

Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'infimum dans (2.3.21) est atteint par u_0.

On pose δ tel que $\lambda<\delta\leq\tilde{\beta}_k\frac{N^2}{4}$.

Alors

$$Q_\delta(p)\leq\frac{\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_0(x)\right|^2 dx-\delta\int_\Omega |u_0(x)|^2\,dx}{\|u_0\|^2_{L^{2^*}}}<\frac{\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_0(x)\right|^2 dx-\lambda\int |u_0(x)|^2\,dx}{\|u_0\|^2_{L^{2^*}}},$$

et $Q_\delta(p)<Q_\lambda(p)<p_0S$. Qui contredit $Q_\delta(p)=p_0S$ pour $\delta\leq\tilde{\beta}_k\frac{N^2}{4}$. □

Lemme 2.3.5. *Il existe* $\lambda^*\in\left[\tilde{\beta}_k\frac{N^2}{4},\lambda_1(p)\right[$, *tel que pour tout* $\lambda\in[\lambda^*,\lambda_1(p)[$, *on a*

$$Q_\lambda(p)<p_0S.$$

Démonstration. On a $Q_{\lambda_1(p)}(p)=0$. En effet soit ϕ_1 la fonction propre de $-div(p\nabla.)$ associé à la valeur propre $\lambda_1(p)$, on a

$$Q_{\lambda_1(p)}(p)\leq\frac{\int_\Omega p(x)\left|\nabla\phi_1\right|^2 dx-\delta\int_\Omega|\phi_1|^2\,dx}{\|\phi_1\|^2_{L^{2^*}}}=0.$$

De plus, $\lambda\mapsto Q_\lambda(p)$ est continue et $Q_{\tilde{\beta}_k\frac{N^2}{4}}(p)=p_0S$. Alors en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient l'existence d'un $\beta\in\left]\tilde{\beta}_k\frac{N^2}{4},\lambda_1(p)\right[$ tel que $0<Q_\beta(p)<p_0S$. Comme la fonction $\lambda\mapsto Q_\lambda(p)$ est décroissante, par conséquent $\forall\lambda\in[\beta,\lambda_1(p)[$ on a $Q_\lambda(p)<p_0S$. □

2.4 Preuve du théorème 2.1.3

Concernant la preuve de 1), 2), 3) et 4), soit $u\in H^1_0(\Omega)$ donnée par le lemme 2.3.1, tel que

$$\|u\|_{L^{2^*}} = 1 \text{ et } Q_\lambda(p) = \int_\Omega p(x) |\nabla u(x)|^2 \, dx - \delta \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx.$$

On suppose que $u \geq 0$. Comme u est un minimum de (2.3.1), alors d'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$-div\,(p\nabla u) - \lambda u = \mu u^{2^*-1} \text{ dans } \Omega.$$

En fait, $\mu = Q_\lambda(p)$, et comme $\lambda < \lambda_1(p)$, on a $Q_\lambda(p) > 0$. Il s'en suit γu satisfait (2.1.1) pour $\gamma = [Q_\lambda(p)]^{\frac{1}{2^*-2}}$, et en utilisant le principe du maximum fort sur Ω on conclut que $u > 0$.

Démontrons le point 5) du théorème 2.1.3.

De (2.3.16) et comme $\lambda \leq 0$, on a

$$p_0 S \leq Q_\lambda(p) \leq I_\lambda\left(u_{\varepsilon,a}\right) \leq p_0 S + o(1).$$

Donc $p_0 S = Q_\lambda(p)$ et l'infimum n'est pas atteint. En effet on suppose que $Q_\lambda(p)$ est atteint par une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$, i.e

$$Q_\lambda(p) = \int_\Omega p(x) |\nabla u(x)|^2 \, dx - \delta \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \text{ avec } \|u\|_{L^{2^*}} = 1.$$

On utilise le fait que S n'est pas atteint, comme $\lambda \leq 0$ on déduit

$$p_0 S < p_0 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \leq Q_\lambda(p) = p_0 S,$$

ce qui est absurde.

Finalement on prouve le point 6).

Soit ϕ_1 la fonction propre associé à la valeur propre $\lambda_1(p)$ avec $\phi_1 > 0$ dans Ω. On suppose que u est une solution de (2.1.1), on a

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega div\,(p(x)u(x))\,\phi_1(x)dx &= \lambda_1(p) \int_\Omega u(x)\phi_1(x)dx \\
&= \int_\Omega u^{2^*-1}(x)\phi_1(x)dx + \lambda \int_\Omega u(x)\phi_1(x)dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\lambda_1(p) \int_\Omega u(x)\phi_1(x)dx > \lambda \int_\Omega u(x)\phi_1(x)dx,$$

et

$$\lambda_1(p) > \lambda.$$

D'où le preuve du théorème.

Chapitre 3

Problème elliptique non homogène avec exposant critique de Sobolev et poids

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence des solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} -div\,(p(x)\nabla u(x)) = |u(x)|^{2^*-2}\,u(x) + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $f \in H^{-1}$, $p : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive donnée, telle que $p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, λ est un paramètre réel et $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev pour l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$. On note par H^{-1} le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$.

Pour p une fonction constante, le problème (3.1.1) a été traité par Q. Dai, Y. Gu [8] et G. Tarantello [16]... .Cette dernière a montré l'existence d'au moins une solution lorsque $f \in H^{-1}$ et satisfaisant

$$\int_\Omega fu \leq K\left(\|\nabla u\|_{L^2}\right)^{\frac{N+2}{2}} \quad \text{avec } \|u\|_{L^{2^*}} = 1,$$

où $K = (2^*-2)\left(\frac{1}{2^*-1}\right)^{\frac{N+2}{4}}$.

Si de plus cette dernière inégalité est stricte, elle a montré l'existence d'une deuxième solution. Ces deux solutions sont non négatives lorsque f est non négative.

Dans son raisonnement, elle a utilisé le principe variationnel d'Ekeland et le théorème du col dans la variété de Nehari.

Q. Dai, Y. Gu ont utilisé la méthode topologique des sous et sur solutions pour montrer que si $f \in C\left(\bar{\Omega}\right)$, alors le problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = |u(x)|^{q-2}\, u(x) + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet au moins deux solutions positives pour $\lambda \in (0, \lambda_*)$ et deux solutions non positives pour $\lambda > \lambda^*$, si et seulement si le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

admet une solution non négative. λ_* et λ^* sont deux nombres positives tels que $\lambda_* \leq \lambda^*$ et $1 < q \leq 2^*$.

Si $q > 2^*$ et Ω est un domaine étoilé et f vérifie (3.1.2), alors problème considéré admet au moins une solution positive pour $\lambda \in (0, \lambda_0)$, où λ_0 est un nombre positive

Le cas homogène i.e

$$\begin{cases} -div\left(p(x)\nabla u(x)\right) = |u(x)|^{2^*-2}\, u(x) + \lambda u(x) & \text{dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

a été considéré par plusieurs auteurs, je cite en particulier H. Brézis, L. Nirenberg [5] A. Capozzi, D. Fortunato, G. Palmieri [7], F. Gazzola, B. Ruf [10] et R. Hadiji, H. Yazidi [11]...

Lorsque p est une fonction constante, ce problème a été traité en particulier par H. Brézis et L. Nirenberg [5], ils ont obtenue les résultats suivants :

Si $N \geq 4$ et $\lambda \in (0, \lambda_1)$, le problème considéré admet une solution positive.

Si $N = 3$ et Ω est une boule, ils ont prouvé l'existence d'une solution positive pour tout $\lambda \in \left(\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1\right)$.

Si $\lambda \geq \lambda_1$ le problème considéré n'admet pas de solution non triviale.

Si $\lambda \leq 0$ et Ω est un domaine étoilé alors le problème considéré n'admet pas de solution positive.

On note par λ_1 la première valeur propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Lorsque p est une fonction non constante, ce problème a été traité par R. Hadiji et H. Yazidi [11], ils ont obtenu les résultats suivants :

1) Si $N \geq 4$ et $k > 2$, alors pour tout $\lambda \in]0, \lambda_1(p)[$, le problème considéré admet au moins une solution positive.

2) Si $N \geq 4$ et $k = 2$, alors il existe une constante $\tilde{\gamma}(N) = \frac{(N-2)N(N+2)}{4(N-1)}\beta_2$ telle que pour tout $\lambda \in]\tilde{\gamma}(N), \lambda_1(p)[$, le problème considéré admet au moins une solution positive.

3) Si $N = 3$ et $k \geq 2$, alors il existe une constante $\gamma(k) > 0$ telle que pour tout $\lambda \in]\gamma(k), \lambda_1(p)[$, le problème considéré admet au moins une solution positive.

4) Si $N \geq 3$, $k > 0$ et p satisfait (2.1.3), alors il existe $\lambda^* \in \left[\tilde{\beta}_k \frac{N^2}{4}, \lambda_1(p)\right[$ où $\tilde{\beta}_k = \beta_k \min\left[(\mathrm{diam}\Omega)^{k-2}, 1\right]$, telle que pour tout $\lambda \in]\lambda^*, \lambda_1(p)[$ le problème considéré admet au moins une solution positive.

5) Si $N \geq 3$ et $k > 0$, alors pour tout $\lambda \leq 0$ le problème considéré n'admet aucune solution positive.

6) Si $N \geq 3$ et $k > 0$, alors le problème considéré n'admet aucune solution positive pour tout $\lambda \geq \lambda_1(p)$.

On désigne par $\lambda_1(p)$ la première valeur propre de $(-div\,(p\nabla.)\,, H_0^1(\Omega))$.

L'objet de ce chapitre est l'étude du problème (3.1.1) lorsque p est une fonction non constante dans $H^1(\Omega) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$, et se comporte au voisinage de a, comme suit

$$p(x) = p_0 + \beta_k |x-a|^k + |x-a|^k \theta(x), \tag{3.1.3}$$

où $a \in p^{-1}(\{p_0\}) \cap \Omega$, $p_0 = \min\limits_{x\in\bar{\Omega}} p(x)$, $k > 0$, $\beta_k > 0$ et θ tend vers 0 quand x tend vers a.

Remarque. Si u est une solution du problème (3.1.1) pour λ alors $-u$ est une solution du problème (3.1.1) pour $-\lambda$.

Sans perte de généralité, on restreint notre étude à $\lambda \geq 0$.

Nos principaux résultats sont :

Théorème 3.1.1. *Soient $p \in H^1(\Omega) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$ une fonction positve telle que $0 < p_0 = \min\limits_{x\in\bar{\Omega}} p(x)$ et $\Lambda_0 = \left(\frac{1}{2^*-1}\right)^{\frac{N+2}{4}} (2^*-2) \frac{\sqrt{p_0}}{\|f\|_{H^{-1}}} \left[S\,(p)\right]^{\frac{2^*}{2(2^*-2)}}$.*

Alors le problème (3.1.1) admet au moins une solution pour tout $0 < \lambda < \Lambda_0$.

Théorème 3.1.2. *En plus de l'hypothèse du théorème 3.1.1, si p vérifie (3.1.3).*

Alors le problème (3.1.1) admet au moins deux solutions distinctes pour tout $0 < \lambda < \frac{\Lambda_0}{2}$ et $k > \frac{N-2}{2}$.

Théorème 3.1.3. *Supposons que Ω est un domaine étoilé par rapport au point a, p satisfait (3.1.3) et soit $E = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \tilde{f}(x)u(x)dx > 0\right\}$ avec $\tilde{f}(x) = \nabla f(x).(x-a) + \frac{N+2}{2} f(x)$.*

Posons

$$\alpha(p) := \frac{1}{2} \inf_{u\in E} \frac{\int_\Omega \nabla p(x).(x-a)|\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega \tilde{f}(x)u(x)dx}.$$

Alors le problème (3.1.1) n'admet pas de solution pour tout $\lambda \leq \alpha(p)$.

3.2 Résultats de non existence

Soit $E = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \tilde{f}(x)u(x)dx > 0\right\}$.

Posons

$$\alpha(p) := \frac{1}{2} \inf_{u\in E} \frac{\int_\Omega \nabla p(x).(x-a)|\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega \tilde{f}(x)u(x)dx},$$

où

$$\tilde{f}(x) := \nabla f(x).(x-a) + \frac{N+2}{2} f(x).$$

Preuve du théorème 3.1.3

Démonstration. Supposons que u est une solution de (3.1.1).

Multiplions (3.1.1) par $\nabla u(x).(x-a)$ puis intègrons sur Ω, on obtient alors

$$\int_\Omega u^{2^*-1} \nabla u(x).(x-a)dx = -\frac{N-2}{2} \int_\Omega |u(x)|^{2^*} dx, \tag{3.2.1}$$

$$\lambda \int_\Omega f(x) \nabla u(x).(x-a)dx = -\lambda \int_\Omega \tilde{f}(x) u(x) dx, \tag{3.2.2}$$

$$\begin{aligned} -\int_\Omega div\,(p(x)\nabla u(x))\, \nabla u(x).(x-a)dx &= -\frac{N-2}{2} \int_\Omega p(x) |\nabla u(x)|^2 dx \\ &- \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla p(x).(x-a) |\nabla u(x)|^2 dx \\ &- \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} p(x)(x-a).\nu \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Combinant (3.2.1), (3.2.2) et (3.2.3), on trouve

$$\begin{gathered} -\tfrac{N-2}{2} \int_\Omega p(x) |\nabla u(x)|^2 dx - \tfrac{1}{2} \int_\Omega \nabla p(x).(x-a) |\nabla u(x)|^2 dx - \tfrac{1}{2} \int_{\partial\Omega} p(x)(x-a).\nu \left|\tfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 dx \\ = \\ -\tfrac{N-2}{2} \int_\Omega |u(x)|^{2^*} dx - \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x) u(x) dx. \end{gathered} \tag{3.2.4}$$

D'autre part, on multiplie (3.1.1) par $\frac{N-2}{2}u$ et on intègre par parties, on aura

$$\frac{N-2}{2} \int_\Omega p(x) |\nabla u(x)|^2 dx = \frac{N-2}{2} \int_\Omega |u(x)|^{2^*} dx + \lambda \frac{N-2}{2} \int_\Omega f(x) u(x) dx. \tag{3.2.5}$$

Combinant (3.2.4) et (3.2.5), on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_\Omega \nabla p(x).(x-a) |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} p(x)(x-a).\nu \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 dx \\ + \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x) u(x) dx = 0. \end{aligned}$$

On a, $(x-a).\nu > 0$ sur $\partial\Omega$, car Ω est étoilé par rapport au point a, alors

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\nabla p(x).(x-a)\left|\nabla u(x)\right|^{2}dx+\lambda\int_{\Omega}\tilde{f}(x)u(x)dx>0. \tag{3.2.6}$$

Ainsi pour u solution d problème (3.1.1) avec $u\in E$, on a

$$\lambda>\frac{1}{2}\frac{\int_{\Omega}\nabla p(x).(x-a)\left|\nabla u(x)\right|^{2}dx}{\int_{\Omega}\tilde{f}(x)u(x)dx}\geq\alpha(p).$$

Pour u solution d problème (3.1.1) avec $u\notin E$ i.e $\int_{\Omega}\tilde{f}(x)u(x)dx<0$ ou $\int_{\Omega}\tilde{f}(x)u(x)dx=0$, alors on obtient une contradiction avec (3.2.6).

D'où le résultat.

Dans ce qui suit, on suppose que $\alpha(p)=0$. □

3.3 Quelques résultats préliminaires

Avant de commencer notre travail, on donne quelques notations :

On pose

$$S\left(p\right):=\inf_{u\in H_{0}^{1}(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\Omega}p\left(x\right)\left|\nabla u\right|^{2}}{\left(\int_{\Omega}\left|u\right|^{2^{*}}\right)^{\frac{2}{2^{*}}}},$$

$$p_{0}=\min_{x\in\bar{\Omega}}p(x)$$

$$\Lambda_{0}:=K\frac{\sqrt{p_{0}}}{\left\|f\right\|_{H^{-1}}}\left[S\left(p\right)\right]^{\frac{2^{*}}{2(2^{*}-2)}},$$

et soit $I_{\lambda}:\mathcal{N}_{\lambda}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que

$$I_{\lambda}\left(u\right)=K\left[\frac{\left(\int_{\Omega}p\left|\nabla u\right|^{2}\right)^{\frac{N+2}{N-2}}}{\int_{\Omega}\left|u\right|^{2^{*}}}\right]^{\frac{N-2}{4}}-\lambda\int_{\Omega}fu,$$

avec $K=\left(\frac{1}{2^{*}-1}\right)^{\frac{N+2}{4}}\left(2^{*}-2\right)$.

Pour tout $u\in H_{0}^{1}(\Omega)$, on définit la fonctionnelle d'énergie J_{λ}, associée au problème (3.1.1), par

$$J_{\lambda}\left(u\right)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}p\left|\nabla u\right|^{2}-\frac{1}{2^{*}}\int_{\Omega}\left|u\right|^{2^{*}}-\lambda\int_{\Omega}fu. \tag{3.3.1}$$

J_{λ} est de classe C^{1} sur $H_{0}^{1}(\Omega)$. Les solutions de (3.1.1) sont des points critiques de la fonctionnelle d'énergie J_{λ}.

On sait que la fonctionnelle d'énergie J_{λ} n'est pas bornée inférieurement sur $H_{0}^{1}(\Omega)$, par contre elle l'est sur une variété particulière dite de Nehari, cette méthode a été introduite par K. J. Brown, Y. Zhang [6] et utilisée par G. Tarantello [16] et T. F. Wu [17].

La variété de Nehari, est définie par

$$\mathcal{N}_\lambda = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \langle J'_\lambda (u), u \rangle = 0 \right\}.$$

Ainsi, $u \in \mathcal{N}_\lambda$ si et seulement si

$$\langle J'_\lambda(u), u\rangle = \int_\Omega p|\nabla u|^2 - \int_\Omega |u|^{2^*} - \lambda \int_\Omega fu = 0. \tag{3.3.2}$$

Donc pour $u \in \mathcal{N}_\lambda$, on obtient

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega p\,|\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} - \lambda \int_\Omega fu \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega p|\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}\left[\int_\Omega p|\nabla u|^2 - \lambda\int_\Omega fu\right] - \lambda\int_\Omega fu \\ &= \frac{1}{N}\int_\Omega p|\nabla u|^2 - \lambda\left(1 - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega fu, \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

ou

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega p\,|\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} - \left[\int_\Omega p\,|\nabla u|^2 - \int_\Omega |u|^{2^*}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega p\,|\nabla u|^2 + \left(1 - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega |u|^{2^*}. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Nous établissons les résultats suivants.

Lemme 3.3.1. *La fonctionnelle J_λ est coercive et bornée inférieurement sur $\mathcal{N}_\lambda$.*

Démonstration. On a

$$\int_\Omega p\,|\nabla u|^2 \geq p_0 \int_\Omega |\nabla u|^2,$$

donc

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 := \|u\|^2 \leq \frac{\int_\Omega p\,|\nabla u|^2}{p_0}. \tag{3.3.5}$$

Soit $u \in \mathcal{N}_\lambda$, en utilisant (3.3.2), (3.3.3), (3.3.5) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{N}\int_\Omega p|\nabla u|^2 - \lambda\left(1 - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega fu \\ &\geq \frac{1}{N}\int_\Omega p|\nabla u|^2 - \lambda\frac{N+2}{2\sqrt{p_0}N}\|f\|_{H^{-1}}\left(\int_\Omega p|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.3.6) \\ &\geq -\frac{\lambda^2 (N+2)^2}{16Np_0}\|f\|^2_{H^{-1}}. \qquad (3.3.7) \end{aligned}$$

Ainsi, J_λ est coercive et bornée inférieurement sur $\mathcal{N}_\lambda$. $\square$

Posons

$$\Psi_\lambda(u) = \langle J'(u), u \rangle . \tag{3.3.8}$$

Pour $u \in \mathcal{N}_\lambda$, on a

$$\begin{aligned} \langle \Psi'_\lambda(u), u \rangle &= 2\int_\Omega p|\nabla u|^2 - 2^*\int_\Omega |u|^{2^*} - \lambda \int_\Omega fu \\ &= \int_\Omega p|\nabla u|^2 - (2^*-1)\int_\Omega |u|^{2^*} \qquad (3.3.9) \\ &= (2-2^*)\int_\Omega p|\nabla u|^2 - \lambda(1-2^*)\int_\Omega fu. \qquad (3.3.10) \end{aligned}$$

On considère la répartition suivante

$$\mathcal{N}_\lambda^+ = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : \langle \Psi'_\lambda(u), u \rangle > 0\}$$

$$\mathcal{N}_\lambda^- = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : \langle \Psi'_\lambda(u), u \rangle < 0\}$$

$$\mathcal{N}_\lambda^0 = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : \langle \Psi'_\lambda(u), u \rangle = 0\}.$$

On a le résultat suivant.

Lemme 3.3.2. *Supposons que u_0 est un minimum local de J_λ sur $\mathcal{N}_\lambda$. Alors si $u_0 \notin \mathcal{N}_\lambda^0$, on a $J'_\lambda(u_0) = 0$ dans H^{-1}.*

Démonstration. Si u_0 est un minimum local de J_λ sur $\mathcal{N}_\lambda$, c'est-à-dire

$$J_\lambda(u_0) = \min_{u \in \mathcal{N}_\lambda} J_\lambda(u),$$

avec $\mathcal{N}_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \Psi_\lambda(u) = 0\}$.

Par la théorie des multiplicateurs de Lagrange, il existe un $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $J'_\lambda(u_0) = \mu \Psi'_\lambda(u_0)$. Par conséquent

$$\langle J'_\lambda(u_0), u_0 \rangle = \mu \langle \Psi'_\lambda(u_0), u_0 \rangle . \tag{3.3.11}$$

Puisque $u_0 \in N_\lambda$, alors $\int_\Omega p|\nabla u_0|^2 - \int_\Omega |u_0|^{2^*} = \lambda \int_\Omega f u_0$.

Donc

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi_\lambda'\left(u_0\right), u_0\right\rangle &= 2\int_\Omega p|\nabla u_0|^2 - 2^*\int_\Omega |u_0|^{2^*} - \lambda\int_\Omega f u_0 \\ &= \int_\Omega p|\nabla u_0|^2 - (2^*-1)\int_\Omega |u_0|^{2^*}.\end{aligned}$$

Ainsi, comme $u_0 \notin \mathcal{N}_\lambda^0$, alors $\left\langle \Psi_\lambda\left(u_0\right), u_0\right\rangle \neq 0$ donc par (3.3.11), $\mu = 0$. Par conséquent la preuve est terminée i.e $J_\lambda'\left(u_0\right) = 0$. □

On a le lemme suivant :

Lemme 3.3.3. *Pour tout* $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ *on a* $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\mathcal{N}_\lambda^0 \neq \emptyset$ pour tout $\lambda > 0$. En utilisant (3.3.10), on a

Pour $u \in \mathcal{N}_\lambda^0$

$$\int_\Omega p|\nabla u|^2 = \lambda\frac{2^*-1}{2^*-2}\int_\Omega f u.$$

En utilisant (3.3.5), on obtient

$$\int_\Omega p|\nabla u|^2 \leq \lambda\frac{2^*-1}{\sqrt{p_0}\left(2^*-2\right)}\left\|f\right\|_{H^{-1}}\left(\int_\Omega p|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il s'en suit que

$$\left(\int_\Omega p|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda\frac{2^*-1}{\sqrt{p_0}\left(2^*-2\right)}\left\|f\right\|_{H^{-1}}. \tag{3.3.12}$$

Par définition de $S\left(p\right)$, on a

$$\left(\int_\Omega |u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\int_\Omega p|\nabla u|^2}{S\left(p\right)}. \tag{3.3.13}$$

En utilisant (3.3.9), on obtient

$$\frac{1}{2^*-1}\int_\Omega p|\nabla u|^2 \leq \left[S\left(p\right)\right]^{-\frac{2^*}{2}}\left[\int_\Omega p|\nabla u|^2\right]^{2^*}.$$

Par conséquent

$$\left(\int_\Omega p|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\left[S\left(p\right)\right]^{\frac{2^*}{2(2^*-2)}}}{\left(2^*-1\right)^{\frac{1}{(2^*-2)}}}. \tag{3.3.14}$$

(3.3.12) et (3.3.14), donnent

$$\lambda \frac{2^*-1}{\sqrt{p_0}\,(2^*-2)} \|f\|_{H^{-1}} \geq \frac{[S\,(p)]^{\frac{2^*}{2(2^*-2)}}}{(2^*-1)^{\frac{1}{(2^*-2)}}}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \frac{\sqrt{p_0}\,(2^*-2)}{\|f\|_{H^{-1}}\,(2^*-1)} \frac{[S\,(p)]^{\frac{2^*}{2(2^*-2)}}}{(2^*-1)^{\frac{1}{(2^*-2)}}} \\ &\geq \frac{\sqrt{p_0}\,(2^*-2)}{(2^*-1)^{\frac{2^*-1}{2^*-2}}\,\|f\|_{H^{-1}}} [S\,(p)]^{\frac{2^*}{2(2^*-2)}} := \Lambda_0. \end{aligned}$$

Alors pour $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ on a $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$. $\square$

D'après le lemme 3.3.3, on a $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^-$.
Pour tout $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, on définit

$$t_{max} := \left[\frac{\int_\Omega p|\nabla u|^2}{(2^*-1)\int_\Omega |u|^{2^*}} \right]^{\frac{1}{2^*-2}}.$$

Lemme 3.3.4. *Supposons que $\lambda \in (0, \Lambda_0)$. Alors pour tout $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, on a*
(i) Si $\int_\Omega fu \leq 0$, alors il existe un unique $t^+ > t_{max}$ tel que $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ et

$$J_\lambda\left(t^+u\right) = \underset{t \geq t_{max}}{sup}\; J_\lambda\,(tu)\,.$$

(ii) Si $\int_\Omega fu > 0$, alors il existe t^-, t^+ uniques tels que $0 < t^- < t_{max} < t^+$, $t^-u \in \mathcal{N}_\lambda^+$, $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ et

$$J_\lambda\left(t^+u\right) = \sup_{t \geq t_{max}} J_\lambda\,(tu)\,; \qquad J_\lambda\left(t^-u\right) = \inf_{0 \leq t \leq t_{max}} J_\lambda\,(tu)\,.$$

Démonstration. Considérons

$$\Phi(t) \;=\; J_\lambda\,(tu)\,, \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}^+,$$

alors

$$\Phi'(t) = t\int_\Omega p|\nabla u|^2 - t^{2^*-1}\int_\Omega |u|^{2^*} - \lambda \int_\Omega fu.$$

On pose

$$\phi(t) = t\int_\Omega p|\nabla u|^2 - t^{2^*-1}\int_\Omega |u|^{2^*}.$$

ϕ est concave et atteint son maximum au point t_{max}.

$$\begin{aligned}\phi\left(t_{max}\right) &= \left[\frac{N-2}{N+2}\right]^{\frac{N-2}{4}}\left(1-\frac{N-2}{N+2}\right)\frac{\left(\int_\Omega p|\nabla u|^2\right)^{\frac{N+2}{4}}}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{4}}} \\ &= K\frac{\left(\int_\Omega p|\nabla u|^2\right)^{\frac{N+2}{4}}}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{4}}}.\end{aligned}$$

Par conséquent, si $\int_\Omega fu \leq 0$ alors $\Phi'\left(t_{max}\right) = \phi\left(t_{max}\right) - \lambda\int_\Omega fu > 0$.

Comme $\phi'(t) < 0$ pour $t > t_{max}$ et $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi'\left(t\right) = -\infty$, alors il existe un unique $t^+ > t_{max}$ tel que :

$\Phi'\left(t^+\right) = 0$ i.e $\phi\left(t^+\right) = \lambda\int_\Omega fu$ et $\phi'\left(t^+\right) < 0$.

Montrons maintenant que $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ et que $J_\lambda\left(t^+u\right) = \sup\limits_{t\geq t_{max}} J_\lambda\left(tu\right)$.

On a

$$t^+\int_\Omega p|\nabla u|^2 - \left(t^+\right)^{2^*-1}\int_\Omega |u|^{2^*} = \lambda\int_\Omega fu.$$

On multiplie les deux termes de l'équation par t^+, on obtient

$$\int_\Omega p|\nabla t^+u|^2 - \int_\Omega |t^+u|^{2^*} = \lambda\int_\Omega f\left(t^+u\right).$$

D'où $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda$.

On a

$$\phi'(t^+) < 0,$$

Alors

$$\int_\Omega p|\nabla u|^2 < \left(2^*-1\right)\left(t^+\right)^{2^*-2}\int_\Omega |u|^{2^*}.$$

On multiplie les deux termes de l'inégalité par $\left(t^+\right)^2$, on obtient

$$\int_\Omega p|\nabla t^+u|^2 < \left(2^*-1\right)\int_\Omega |t^+u|^{2^*}.$$

D'où le résultat.

On a $\Phi'\left(t^+\right) = 0$ et $\phi'(t^+) < 0$, alors $J_\lambda\left(t^+u\right) = \sup\limits_{t\geq t_{max}} J_\lambda\left(tu\right)$.

Dans le cas où $\int_\Omega fu > 0$ et par l'hypothèse $\lambda < \Lambda_0$ on a nécessairement

$$\lambda\int_\Omega fu < \phi\left(t_{max}\right).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= \frac{\sqrt{p_0}\,(2^*-2)}{(2^*-1)^{\frac{2^*-1}{2^*-2}}\,\|f\|_{H^{-1}}}\,[S\,(p)]^{\frac{2^*}{2(2^*-2)}} \\
&= K\sqrt{p_0}\frac{[S(p)]^{\frac{N}{4}}}{\|f\|_{H^{-1}}} \\
&\leq \frac{\sqrt{p_0}K}{\|f\|_{H^{-1}}}\frac{\left(\int_\Omega p|\nabla u|^2\right)^{\frac{N}{4}}}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{4}}} \\
&\leq \frac{\sqrt{p_0}\phi\,(t_{max})}{\left(\int_\Omega p|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{H^{-1}}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\phi\,(t_{max}) \geq \left(\int_\Omega p|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\|f\|_{H^{-1}}}{\sqrt{p_0}}\Lambda_0$$

$$\geq \Lambda_0\int_\Omega fu > \lambda\int_\Omega fu.$$

Par conséquent, en procédant de la même manière que dans le premier cas, on obtient deux uniques nombres $t^-,\ t^+$, tels que $0 < t^- < t_{max} < t^+$,

$$\phi\left(t^+\right) = \lambda\int_\Omega fu = \phi\left(t^-\right)$$

et

$$\phi'\left(t^-\right) > 0 > \phi'\left(t^+\right).$$

Ce qui est équivalent à $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ et $t^-u \in \mathcal{N}_\lambda^+$.

Aussi

$$J_\lambda\left(t^+u\right) = \sup_{t\geq t_{max}} J_\lambda\,(tu)\,; \qquad J_\lambda\left(t^-u\right) = \inf_{0\leq t\leq t_{max}} J_\lambda\,(tu)\,.$$

□

On pose

$$c = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda\,(u)\,; \quad c^+ = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda\,(u)\,; \quad c^- = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda\,(u)\,.$$

Lemme 3.3.5. *(i) Si* $\lambda \in (0,\Lambda_0)$, *alors* $c \leq c^+ < 0$.

(ii) Si $\lambda \in \left(0,\frac{\Lambda_0}{2}\right)$, *alors* $c^- > 0$.

Démonstration. (i) Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution de $-\Delta u = f$, alors

$$\int_\Omega fv = \|\nabla v\|_{L^2}^2 > 0.$$

D'aprés le lemme 3.3.4, il existe un unique $t_0 := t^-(v) > 0$, tel que $t_0 v \in \mathcal{N}_\lambda^+$, et parconséquent, d'après (3.3.9), on a

$$\int_\Omega p|\nabla t_0 v|^2 > (2^*-1)\int_\Omega |t_0 v|^{2^*}.$$

En utilisant (3.3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
J_\lambda(t_0 v) &= -\frac{1}{2}\int_\Omega p\,|\nabla t_0 v|^2 + \frac{2^*-1}{2^*}\int_\Omega |t_0 v|^{2^*} \\
&< -\frac{1}{2}\int_\Omega p\,|\nabla t_0 v|^2 + \frac{1}{2^*}\int_\Omega p\,|\nabla t_0 v|^2 \\
&\leq -\frac{p_0 t_0^2}{N}\,\|v\|^2 \\
&= -\frac{p_0 t_0^2}{N}\,\|f\|_{H^{-1}}^2 . \qquad (3.3.15)
\end{aligned}$$

Donc, d'aprés les définitions de c et c^+, on déduit que $c \leq c^+ < 0$.
(ii) Soit $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$. D'après (3.3.9), on a

$$\int_\Omega p|\nabla u|^2 < (2^*-1)\int_\Omega |u|^{2^*}.$$

En utilisant (3.3.13), on obtient

$$\frac{1}{2^*-1}\int_\Omega p|\nabla u|^2 < \left[\frac{\int_\Omega p|\nabla u|^2}{S(p)}\right]^{\frac{2^*}{2}}.$$

Cela implique

$$\left(\int_\Omega p|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} > \frac{[S(p)]^{\frac{2^*}{2(2^*-2)}}}{(2^*-1)^{\frac{1}{2^*-2}}}. \qquad (3.3.16)$$

Posons

$$C_\lambda := \frac{1}{N}\left[\frac{[S(p)]^{\frac{2^*}{2(2^*-2)}}}{(2^*-1)^{\frac{1}{2^*-2}}}\right] - \frac{\lambda}{\sqrt{p_0}}\left(1-\frac{1}{2^*}\right)\|f\|_{H^{-1}}.$$

Alors, $C_\lambda > 0$ si et seulement si

$$\frac{1}{N}\frac{[S(p)]^{\frac{2^*}{2(2^*-2)}}}{(2^*-1)^{\frac{1}{2^*-2}}} > \frac{\lambda}{\sqrt{p_0}}\left(1-\frac{1}{2^*}\right)\|f\|_{H^{-1}}.$$

Alors

$$\lambda < \frac{\sqrt{p_0}}{N}\frac{2^*\,[S(p)]^{\frac{2^*}{(2^*-2)}}}{(2^*-1)^{\frac{2^*-1}{2^*-2}}\,\|f\|_{H^{-1}}}.$$

Puisque $\frac{1}{N} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}$, alors

$$\lambda < \frac{1}{2}\Lambda_0.$$

En utilisant (3.3.6), (3.3.16) et $\lambda < \frac{1}{2}\Lambda_0$, on obtient

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &> \left(\int_\Omega p|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{N}\left[\frac{[S(p)]^{\frac{2^*}{2(2^*-2)}}}{(2^*-1)^{\frac{1}{2^*-2}}}\right] - \frac{\lambda}{\sqrt{p_0}}\left(1-\frac{1}{2^*}\right)\|f\|_{H^{-1}}\right\} \\ &> C_\lambda \frac{[S(p)]^{\frac{2^*}{2(2^*-2)}}}{(2^*-1)^{\frac{1}{2^*-2}}} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\lambda \in \left(0, \frac{\Lambda_0}{2}\right)$, alors $J(u) > C_\lambda \frac{[S(p)]^{\frac{2^*}{2(2^*-2)}}}{(2^*-1)^{\frac{1}{2^*-2}}} > 0$ pour tout $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$. $\square$

Lemme 3.3.6. *Supposons que $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ et $u \in \mathcal{N}_\lambda$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction différentiable $\xi : B(0,\varepsilon) \subset H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :*

$$\xi(0) = 1, \qquad \xi(w)\,(u-w) \in \mathcal{N}_\lambda$$

et

$$\langle \xi'(0), w\rangle = \frac{2\int_\Omega \nabla u \nabla w - 2^* \int_\Omega |u|^{2^*-2}uw - \lambda\int_\Omega fw}{\int_\Omega p|\nabla u|^2 - (2^*-1)\,\|u\|_{L^{2^*}}^{2^*}}. \tag{3.3.17}$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{N}_\lambda$. Définissons $F : \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$\begin{aligned} F\left(t,w\right) &= \left\langle J_\lambda'\left(t\left(u-w\right)\right), t\left(u-w\right)\right\rangle \\ &= t\int_\Omega p|\nabla\left(u-w\right)|^2 - t^{2^*-1}\int_\Omega |u-w|^{2^*} - \lambda\int_\Omega f\left(u-w\right). \end{aligned}$$

Alors $F\left(1,0\right) = 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,w) = \int_\Omega p|\nabla\left(u-w\right)|^2 - \left(2^*-1\right)t^{2^*-2}\int_\Omega |u-w|^{2^*}.$$

Donc $\frac{\partial F}{\partial t}\left(1,0\right) = \int_\Omega p|\nabla u|^2 - \left(2^*-1\right)\int_\Omega |u|^{2^*} \neq 0$, par conséquent on peut appliquer le théorème des fonctions implicites au point $(1,0)$.

D'où il existe une boule $B(0,\varepsilon) \subset H_0^1(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ et une fonction différentiable ξ : $B(0,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telles que $\xi(0) = 1$,

$$\begin{aligned} \langle \xi'(0), v\rangle &= -\frac{\left\langle \frac{\partial F}{\partial w}(1,0), v\right\rangle}{\frac{\partial F}{\partial t}(1,0)} \\ &= \frac{2\int_\Omega \nabla u\nabla v - 2^*\int_\Omega |u|^{2^*-2}uv - \lambda\int_\Omega fv}{\int_\Omega p|\nabla u|^2 - (2^*-1)\,\|u\|_{L^{2^*}}^{2^*}} \end{aligned}$$

et

$$F(\xi(w),w)=0 \quad \text{pour tout } w\in B(0,\varepsilon),$$

ce qui est équivalent à $\langle J'_\lambda\left(\xi(w)\,(u-w)\right),\xi(w)\,(u-w)\rangle=0$ pour tout $w\in B(0,\varepsilon)$. D'où $\xi(w)\,(u-w)\in B(0,\varepsilon)\subset\mathcal{N}_\lambda$. □

Lemme 3.3.7. *Supposons que $\lambda\in(0,\Lambda_0)$ et $u\in\mathcal{N}_\lambda^-$. Alors il existe $\varepsilon>0$ et une fonction différentiable $\xi:B(0,\varepsilon)\subset H_0^1(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}^+$ telle que :*

$$\xi(0)=1,\qquad \xi(w)\,(u-w)\in\mathcal{N}_\lambda^-$$

et

$$\langle\xi'(0),w\rangle=\frac{2\int_\Omega\nabla u\nabla w-2^*\int_\Omega|u|^{2^*-2}uw-\lambda\int_\Omega fw}{\int_\Omega p|\nabla u|^2-(2^*-1)\left\|u\right\|_{L^{2^*}}^{2^*}}. \tag{3.3.18}$$

Démonstration. Soit $u\in\mathcal{N}_\lambda^-$. En procédant de la même manière comme dans le lemme 3.3.6, il existe une boule $B(0,\varepsilon)\subset H_0^1(\Omega)$, $\varepsilon>0$ et une fonction différentiable ξ : $B(0,\varepsilon)\longrightarrow\mathbb{R}^+$ telles que

$$\xi(0)=1,\qquad \xi(w)\,(u-w)\in\mathcal{N}_\lambda,\qquad \text{pour } \|w\|<\varepsilon$$

et

$$\langle\xi'(0),v\rangle=\frac{2\int_\Omega\nabla u\nabla v-2^*\int_\Omega|u|^{2^*-2}uv-\lambda\int_\Omega fv}{\int_\Omega p|\nabla u|^2-(2^*-1)\left\|u\right\|_{L^{2^*}}^{2^*}}.$$

Comme $\langle J'_\lambda(u),u\rangle=\int_\Omega p|\nabla u|^2-(2^*-1)\int_\Omega|u|^{2^*}<0$, alors par la continuité de J'_λ et ξ, on a

$$\langle J'_\lambda\left(\xi(w)\,(u-w)\right),\xi(w)\,(u-w)\rangle<0,$$

pour $\varepsilon>0$ suffisamment petit, cela implique que $\xi(w)\,(u-w)\in\mathcal{N}_\lambda^-$. □

Lemme 3.3.8. *Pour tout $\lambda\in(0,\Lambda_0)$, il existe une suite $\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda$ telle que :*
(i) $J_\lambda(u_n)=c+o(1)$.
(ii) $J'(u_n)\to0$ dans H^{-1}.

Démonstration. Il est claire qu'on peut appliquer le principe variationnel d'Ekeland au problème de minimisation $\inf\limits_{\mathcal{N}_\lambda}J_\lambda=c$. On a l'existence d'une suite minimisante $\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda$ possédant les propriétés suivantes :
(i) $J_\lambda(u_n)<c+\frac{1}{n}$.
(ii) $J_\lambda(u_n)\le J(w)+\frac{1}{n}\|w-u_n\|,\qquad\forall w\in\mathcal{N}_\lambda$.

Pour n assez grand, d'après (3.3.15) on a :

$$J_\lambda(u_n)=\frac{1}{N}\int_\Omega p|\nabla u_n|^2-\lambda\left(1-\frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega fu_n<c+\frac{1}{n}<-\frac{p_0t_0^2}{N}\|f\|_{H^{-1}}^2. \tag{3.3.19}$$

Il s'en suit que

$$\lambda \int_{\Omega} f u_n \geq \frac{2p_0 t_0^2}{N+2} \|f\|_{H^{-1}}^2 .$$

Donc

$$\|u_n\| \geq \frac{2p_0 t_0^2 \|f\|_{H^{-1}}}{\lambda (N+2)}. \tag{3.3.20}$$

Par conséquence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, et en utilisant (3.3.5), on obtient

$$\frac{2p_0\sqrt{p_0}\, \|f\|_{H^{-1}}\, t_0^2}{(N+2)\,\lambda} \leq \left(\int_{\Omega} p\, |\nabla u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De (3.3.19), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} p|\nabla u_n|^2 &< -p_0 t_0^2 \|f\|_{H^{-1}}^2 + \lambda \frac{N+2}{2} \int_{\Omega} f u_n \\
&< \lambda \frac{N+2}{2} \int_{\Omega} f u_n \\
&\leq \lambda \frac{N+2}{2} \|u\| \, \|f\|_{H^{-1}} \\
&\leq \lambda \frac{N+2}{2\sqrt{p_0}} \|f\|_{H^{-1}} \left(\int_{\Omega} p|\nabla u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_{\Omega} p|\nabla u_n|^2 \leq \lambda \frac{N+2}{2\sqrt{p_0}} \|f\|_{H^{-1}} .$$

D'où

$$\frac{2p_0\sqrt{p_0}\, \|f\|_{H^{-1}}\, t_0^2}{(N+2)\,\lambda} \leq \left(\int_{\Omega} p\, |\nabla u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda \frac{N+2}{2\sqrt{p_0}} \|f\|_{H^{-1}} . \tag{3.3.21}$$

Montrons que $\|J'_\lambda (u_n)\|_{H^{-1}} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que$\|J'_\lambda (u_n)\|_{H^{-1}} > 0$ pour n assez grand.

En appliquent le lemme 3.3.6, considérons les fonctions $\xi_n : B(0, \varepsilon_n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telles que, pour un certain $\varepsilon_n > 0$ on a $\xi_n(w)(u_n - w) \in \mathcal{N}_\lambda$. Choisissons $0 < \delta < \varepsilon_n$ et posons $w_\delta = \frac{\delta u}{\|u\|}$ avec $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$. Définissons, $\eta_\delta := \xi_n(w_\delta)(u_n - w_\delta)$. Comme $\eta_\delta \in \mathcal{N}_\lambda$, et en utilisant (ii) on déduit

$$J_\lambda(\eta_\delta) - J_\lambda(u_n) \geq -\frac{1}{n} \|\eta_\delta - u_n\| ,$$

par le théorème des accroissements finis, on obtient

$$\langle J'_\lambda(u_n), \eta_\delta - u_n\rangle + o(\|\eta_\delta - u_n\|) \geq -\frac{1}{n} \|\eta_\delta - u_n\| .$$

Ainsi

$$\langle J'_\lambda(u_n), -w_\delta\rangle + (\xi_n(w_\delta)-1)\langle J'_\lambda(u_n), \eta_\delta - u_n\rangle \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\delta - u_n\| + o(\|\eta_\delta - u_n\|). \tag{3.3.22}$$

Comme $\eta_\delta = \xi_n(w_\delta)(u_n - w_\delta) \in \mathcal{N}_\lambda$ et de (3.3.22), on a

$$-\delta\left\langle J'_\delta(u_n), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle + (\xi_n(w_\delta)-1)\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\delta), \eta_\delta - u_n\rangle \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\delta - u_n\| + o(\|\eta_\delta - u_n\|).$$

Ainsi

$$\left\langle J'_\delta(u_n), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle \leq \frac{\|\eta_\delta - u_n\|}{n\delta} + \frac{o(\|\eta_\delta - u_n\|)}{\delta} + \frac{(\xi_n(w_\delta)-1)}{\delta}\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\delta), \eta_\delta - u_n\rangle. \tag{3.3.23}$$

Puisque

$$\|\eta_\delta - u_n\| \leq \delta|\xi_n(w_\delta)| + |\xi_n(w_\delta)-1|\left(\int_\Omega p|\nabla u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{|\xi_n(w_\delta)-1|}{\delta} \leq |\xi'_n(0)|.$$

si on fait tendre δ vers 0 dans (3.3.23) pour n fixé, alors par (3.3.21) on conclut :

$$\|J'_\lambda(u_n)\|_{H^{-1}} \leq \frac{C}{n}(1 + |\xi'_n(0)|),$$

pour une constante positive convenable C.

Il reste à montrer que $|\xi'_n(0)|$ est bornée uniformément en n.

De (3.3.17) et l'estimation (3.3.21) on obtient :

$$|\xi'_n(0)| \leq \frac{C_1}{\left|\int_\Omega p|\nabla u_n|^2 - (2^*-1)\|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*}\right|},$$

où $C_1 > 0$ une constante convenable.

Par conséquent, nous devons montrer que$\left|\int_\Omega p|\nabla u|^2 - (2^*-1)\|u\|_{L^{2^*}}^{2^*}\right|$ est bornée loin de zéro.

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe une suite $\{u_n\}$, telle que

$$\int_\Omega p|\nabla u_n|^2 - (2^*-1)\|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} = o(1). \tag{3.3.24}$$

De plus, (3.3.24) et le fait que $u_n \in \mathcal{N}_\lambda$ nous donnent

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega f u_n &= \int_\Omega p|\nabla u_n|^2 - \int_\Omega |u_n|^{2^*}\\ &= (2^*-2)\int_\Omega |u_n|^{2^*} + o(1).\end{aligned}$$

En combinant (3.3.24) et (3.3.21), on peut trouver une constante convenable $\rho > 0$ telle que

$$\int_{\Omega} |u_n|^{2^*} > \rho \quad \text{pour } n \text{ suffisamment grand.} \tag{3.3.25}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &= K\left[\frac{\left(\int_\Omega p\,|\nabla u_n|^2\right)^{\frac{N+2}{N-2}}}{\int_\Omega |u_n|^{2^*}}\right]^{\frac{N-2}{4}} - \lambda\int_\Omega fu \\ &= K\left[\frac{\left[(2^*-1)\int_\Omega |u_n|^{2^*}\right]^{\frac{N+2}{N-2}}}{\int_\Omega |u_n|^{2^*}}\right]^{\frac{N-2}{4}} - (2^*-2)\int_\Omega |u_n|^{2^*} + o(1) \\ &= o(1). \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

D'autre part, par (3.3.21), (3.3.25) et $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, on a

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &= K\left[\frac{\left(\int_\Omega p\,|\nabla u_n|^2\right)^{\frac{N+2}{N-2}}}{\int_\Omega |u_n|^{2^*}}\right]^{\frac{N-2}{4}} - \lambda\int_\Omega fu \\ &\geq K\left[\frac{\left(\int_\Omega p\,|\nabla u_n|^2\right)^{\frac{N+2}{N-2}}}{\int_\Omega |u_n|^{2^*}}\right]^{\frac{N-2}{4}} - \frac{\lambda}{\sqrt{p_0}}\left(\int_\Omega p\,|\nabla u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^{-1}} \\ &= K\left(\int_\Omega p\,|\nabla u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\int_\Omega p\,|\nabla u_n|^2}{\left(\int_\Omega |u_n|^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{N}}}\right]^{\frac{N}{4}} - \frac{\lambda}{\sqrt{p_0}}\left(\int_\Omega p\,|\nabla u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^{-1}} \\ &\geq \left(\int_\Omega p\,|\nabla u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[K\,[S(p)]^{\frac{N}{4}} - \frac{\lambda}{\sqrt{p_0}}\|f\|_{H^{-1}}\right] \\ &> d_0, \end{aligned}$$

pour un $d_0 > 0$ et n suffisamment grand, ce qui est clairement impossible.

On conclut que :

$$\|J'_\lambda(u_n)\|_{H^{-1}} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

□

3.4 Preuve du théorème 3.1.1

Proposition 3.4.1. *Soit $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ une suite minimisante telle que* *(i)* $J_\lambda(u_n) = c + o(1)$.

(ii) $J'(u_n) \to 0$ *dans* H^{-1}.

Alors, pour tout $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, $\{u_n\}$ *admet une sous-suite qui converge fortement vers un point* w_0 *dans* $H_0^1(\Omega)$, *en plus* $w_0 \in \mathcal{N}_\lambda^+$ *et* $J_\lambda(w_0) = c$.

Démonstration. D'après (3.3.19), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_n|^2 &< \frac{-p_0 t_0^2 \|f\|_{H^{-1}}^2 + \lambda \frac{N+2}{2} \int_\Omega f u_n}{p_0} \\
&< \lambda \frac{N+2}{2p_0} \int_\Omega f u_n \\
&\leq \lambda \frac{N+2}{2p_0} \|u_n\| \|f\|_{H^{-1}} .
\end{aligned}$$

En utilisant (3.3.20), on obtient

$$\frac{2p_0 t_0^2 \|f\|_{H^{-1}}}{\lambda (N+2)} \leq \|u_n\| \leq \lambda \frac{N+2}{2p_0} \|f\|_{H^{-1}} . \tag{3.4.1}$$

D'où $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, donc d'après le théorème des injections compactes de Sobolev, elle admet une sous-suite $\{u_n\}$ telle que

$$u_n \rightharpoonup w_0 \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega),$$

$$u_n \to w_0 \text{ p.p dans } \Omega,$$

avec $w_0 \in H_0^1(\Omega)$.

De l'hypothèse (ii), on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle J'_\lambda(u_n), w \rangle = \langle J'_\lambda(w_0), w \rangle = 0, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

i.e w_0 est une solution faible de (3.1.1).

En particulier, $w_0 \in \mathcal{N}_\lambda$.

Montrons que $u_n \to w_0$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

Supposons le contraire, c'est-à-dire $\|u\| < \liminf \|u_n\|$, alors $\int_\Omega p|\nabla u|^2 < \liminf \int_\Omega p|\nabla u_n|^2$.

En effet :

Montrons que $\|u_n - u\| \to 0 \Leftrightarrow \int_\Omega p \, |\nabla (u_n - u)|^2 \to 0$.

" $\Rightarrow$ "

Supposons qu'on a $\|u_n - u\| \to 0$, c'est-à-dire $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta_\epsilon \in \mathbb{N}$, tel que $\|u_n - u\| < \epsilon$ pour $n < \eta_\epsilon$.

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega p\left|\nabla\left(u_n-u\right)\right|^2 &\leq \|p\|_{L^\infty}\left\|u_n-u\right\|^2\\ &< \epsilon \qquad \text{pour } n \text{ assez grand.}\end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ "

Supposons maintenant qu'on a $\int_\Omega p\left|\nabla\left(u_n-u\right)\right|^2 \to 0$, c'est-à-dire $\forall\epsilon>0,\ \exists\eta_\epsilon\in\mathbb{N}$, tel que $\|u_n-u\| < \epsilon$ pour $n<\eta_\epsilon$.

Sachant que pour tout $x\in\Omega$, on a $p(x)>0$ et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|u_n-u\right\|^2 &= \int_\Omega \frac{p}{p}\left|\nabla\left(u_n-u\right)\right|^2\\ &\leq \left\|\frac{1}{p}\right\|_{L^\infty}\int_\Omega p\left|\nabla\left(u_n-u\right)\right|^2\\ &< \epsilon \qquad \text{pour } n \text{ assez grand.}\end{aligned}$$

D'où le résultat, et ainsi

$$c\leq J_\lambda(w_0)=\frac{1}{N}\int_\Omega p|\nabla w_0|^2-\lambda\frac{N+2}{2N}\int_\Omega fw_0<\liminf J_\lambda\left(u_n\right)=c.$$

Par conséquent $u_n\to w_0$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$ et $J_\lambda(w_0)=c$.

Par ailleurs, on a $w_0\in\mathcal{N}_\lambda^+$. Sinon, par le lemme 3.3.4, il existe deux nombres t_0^+ et t_0^-, définies de manière unique tels que $t_0^-w_0\in\mathcal{N}_\lambda^+$ et $t_0^+w_0\in\mathcal{N}_\lambda^-$.

En particulier, on a $t_0^-<t_0^+=1$. De

$$J_\lambda'\left(t^-w_0\right)=0 \text{ et } \Psi_\lambda'\left(t^-w_0\right)>0.$$

Il existe $t_0^-<t^-\leq t_0^+$ tel que $J_\lambda(t_0^-w_0)<J_\lambda(t^-w_0)$. Du lemme 3.3.4, on obtient

$$J_\lambda(t_0^-w_0)<J_\lambda(t^-w_0)<J_\lambda(t_0^+w_0)=J_\lambda(w_0),$$

d'où la contradiction . □

3.5 Preuve du théorème 3.1.2

On commence par montrer que

$$\inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u)=c^-<c+\frac{1}{N}\left[p_0S\right]^{\frac{N}{2}}. \tag{3.5.1}$$

Pour cela, on a besoin de quelques notations.

Posons

$$U_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{\left(\varepsilon^2+|x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}}\qquad \varepsilon>0,\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{3.5.2}$$

On pose $U_{\varepsilon,a}(x)=U_\varepsilon\left(x-a\right)$, et

$$u_{\varepsilon,a}(x)=\xi_a(x)U_{\varepsilon,a}(x) \tag{3.5.3}$$

où

$$\xi_a\in C_0^\infty(\Omega)\qquad \text{avec}\quad \xi_a\geq 0\quad \text{et}\quad \xi_a=1 \text{ au voisinage de } a. \tag{3.5.4}$$

D'aprés les estimations faites par H. Brézis, L. Nirenberg [5], on a :

$$\begin{aligned}\|w_0+Ru_{\varepsilon,a}\|_{L^{2^*}}^{2^*} &= \|w_0\|_{L^{2^*}}^{2^*}+R^{2^*}\|u_{\varepsilon,a}\|_{L^{2^*}}^{2^*}+2^*R\int_\Omega |w_0|^{2^*-2}w_0u_{\varepsilon,a}\\ &+ 2^*R^{2^*-1}\int_\Omega u_{\varepsilon,a}^{2^*-1}w_0+o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right),\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

et

$$\|\nabla u_{\varepsilon,a}\|_{L^2}^2=B+O\left(\varepsilon^{N-2}\right),\ \|u_{\varepsilon,a}\|_{L^{2^*}}^{2^*}=A+O\left(\varepsilon^N\right), \tag{3.5.6}$$

où

$$B=(N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^2}{\left(1+|x|\right)^N}dx,\ A=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^N}, \tag{3.5.7}$$

et

$$S=\frac{B}{A^{\frac{2}{2^*}}}. \tag{3.5.8}$$

On pose

$$A_k=(N-2)^2\beta_k\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^{k+2}}{\left(1+|x|^2\right)^N}dx.$$

Lemme 3.5.1. *Soit $p\in H^1(\Omega)\cap C\left(\bar{\Omega}\right)$, vérifiant (3.1.3) et $u_{\varepsilon,a}$ est définie comme dans (3.5.3).*

Alors on a l'estimation suivante :

Lemme 3.5.2. $\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|dx\leq \begin{cases} p_0B+O\left(\varepsilon^{N-2}\right) & \text{si} \quad N-2\\ p_0B+A_k\varepsilon^k+o\left(\varepsilon^k\right) & \text{si} \quad N-2\\ p_0B+\frac{(N-2)^2(\beta_{N-2}+M)\omega_N}{2}\varepsilon^{N-2}\left|\ln\varepsilon\right|+o\left(\varepsilon^{N-2}\left|\ln\varepsilon\right|\right) & \text{si} \quad N-2\end{cases}$

Démonstration. Calculons

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= \varepsilon^{N-2}\int_{\Omega}\frac{p(x)\left|\nabla\xi_a(x)\right|^2}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^{N-2}}dx\\ &+ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2\int_{\Omega}\frac{p(x)\left|\nabla\xi_a(x)\right|^2|x-a|^2}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^{N}}dx\\ &- 2\varepsilon^{N-2}(N-2)\int_{\Omega}\frac{p(x)\xi_a(x)\nabla\xi_a(x)\,(x-a)}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^{N-1}}dx.\end{aligned}$$

Puisque, $\xi_a \equiv 1$ dans un voisinage de a, on suppose que $\xi_a \equiv 1$ dans $B(a,r)$ avec $r>0$ assez petit .

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= \varepsilon^{N-2}\int_{\Omega\backslash B(a,r)}\frac{p(x)\left|\nabla\xi_a(x)\right|^2}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^{N-2}}dx\\ &- 2\varepsilon^{N-2}(N-2)\int_{\Omega\backslash B(a,r)}\frac{p(x)\xi_a(x)\nabla\xi_a(x)\,(x-a)}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^{N-1}}dx\\ &+ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2\int_{\Omega}\frac{p(x)\left|\nabla\xi_a(x)\right|^2|x-a|^2}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^{N}}dx. \qquad (3.5.9)\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, (3.5.9) devient

$$\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx = \varepsilon^{N-2}(N-2)^2\int_{\Omega}\frac{p(x)\left|\nabla\xi_a(x)\right|^2|x-a|^2}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^{N}}dx + O\left(\varepsilon^{N-2}\right).$$

En utilisant, (3.1.3), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= \varepsilon^{N-2}(N-2)^2 p_0\int_{V_a}\frac{|x-a|^2}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^{N}}dx\\ &+ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2\beta_k\int_{V_a}\frac{|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^{N}}dx\\ &+ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2\int_{V_a}\frac{\theta(x)|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^{N}}dx\\ &+ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2\int_{V_a}\frac{|x-a|^{k+2}\left(\beta_k+\theta(x)\right)\left(\left|\xi_a(x)\right|^2-1\right)}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^{N}}dx\\ &+ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2\int_{\Omega\setminus V_a}\frac{p(x)\left|\nabla\xi_a(x)\right|^2|x-a|^2}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^{N}}dx\\ &+ O\left(\varepsilon^{N-2}\right).\end{aligned}$$

En utilisant de nouveau la définition de ξ_a, et en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= \varepsilon^{N-2}(N-2)^2 p_0 \int_{V_a} \frac{|x-a|^2}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^N} dx \\ &+ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2 \beta_k \int_{V_a} \frac{|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^N} dx \\ &+ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2 \int_{V_a} \frac{\theta(x)\,|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^N} dx + O\left(\varepsilon^{N-2}\right).\end{aligned}$$

Nous distinguons trois cas :

1. **Si** $N-2>k$,

$$\begin{gathered}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx = \\ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2 p_0\left[\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x-a|^2}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^N} dx - \int_{\mathbb{R}^N\setminus V_a} \frac{|x-a|^2}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^N} dx\right] + \\ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2 p_0\left[\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\beta_k|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^N} dx - \int_{\mathbb{R}^N\setminus V_a} \frac{\beta_k|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^N} dx\right] + \\ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2 \int_{V_a} \frac{\theta(x)|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^N} dx + O\left(\varepsilon^{N-2}\right).\end{gathered}$$

En utilisant le changement de variable $y=\frac{x-a}{\varepsilon}$ et en appliquant le théorème de convergence dominée, on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= (N-2)^2 p_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^2}{\left(1+|y|^2\right)^N} dy \\ &+ \varepsilon^k (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\beta_k\,|y|^{k+2}}{\left(1+|y|^2\right)^N} dy \\ &+ \varepsilon^k (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\theta(a+\varepsilon y)\,|y|^{k+2}}{\left(1+|y|^2\right)^N} \chi_{\tilde{V}_0^\varepsilon} dy \\ &+ o\left(\varepsilon^k\right).\end{aligned}$$

Comme $\theta(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a, ceci nous donne

$$\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx = p_0 B + A_k \varepsilon^k + o\left(\varepsilon^k\right).$$

2. **Si** $N-2<k$,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^{2} dx &= p_0 B+\varepsilon^{N-2}(N-2)^{2}\beta_k \int_{V_a} \frac{|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon^{2}+|x-a|^{2}\right)^{N}} dx \\ &+ \varepsilon^{N-2}(N-2)^{2}\int_{V_a} \frac{\theta(x)\,|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon^{2}+|x-a|^{2}\right)^{N}} dx+O\left(\varepsilon^{N-2}\right).\end{aligned}$$

Comme V_a est un domaine borné, il existe une constante positive τ telle que $V_a \subset B(a,\tau)$, ainsi

$$\begin{gathered}\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^{2} dx = \\ p_0 B+O\left(\varepsilon^{N-2}\right)+\varepsilon^{N-2}(N-2)^{2} \\ \left[\int_{B(a,\tau)} \frac{(\beta_k+\theta(x))|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon^{2}+|x-a|^{2}\right)^{N}} dx-\int_{B(a,\tau)\backslash\Omega} \frac{(\beta_k+\theta(x))|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon^{2}+|x-a|^{2}\right)^{N}} dx\right]. \\ +\varepsilon^{N-2}(N-2)^{2}\int_{V_a} \frac{\theta(x)|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon^{2}+|x-a|^{2}\right)^{N}} dx+O\left(\varepsilon^{N-2}\right).\end{gathered}$$

Par le changement de variable $y=x-a$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^{2} dx &= p_0 B+\varepsilon^{N-2}(N-2)^{2}\int_{B(0,\tau)} \frac{(\beta_k+\theta(a+y))\,|y|^{k+2}}{\left(\varepsilon^{2}+|y|^{2}\right)^{N}} dy \\ &+ \varepsilon^{N-2}(N-2)^{2}\int_{V_a} \frac{\theta(a+y)\,|y|^{k+2}}{\left(\varepsilon+|y|^{2}\right)^{N}} dy \\ &+ O\left(\varepsilon^{N-2}\right).\end{aligned}$$

En utilisant la définition de θ donnée dans (3.1.3), il existe une constante positive M telle que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^{2} dx &= p_0 B+\varepsilon^{N-2}(N-2)^{2}(\beta_k+M)\int_{B(0,\tau)} \frac{|y|^{k+2}}{\left(\varepsilon^{2}+|y|^{2}\right)^{N}} dy \\ &\quad +O\left(\varepsilon^{N-2}\right).\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée on déduit

$$\int_{\Omega} p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^{2} dx=p_0 B+O\left(\varepsilon^{N-2}\right).$$

3. **Si** $N-2=k$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= p_0 B+\varepsilon^{N-2}(N-2)^2\int_\Omega \frac{\beta_k\left|x-a\right|^{k+2}}{\left(\varepsilon^2+\left|x-a\right|^2\right)^N}dx.\\ &+ \ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2\int_{V_a}\frac{\theta(x)\left|x-a\right|^{k+2}}{\left(\varepsilon^2+\left|x-a\right|^2\right)^N}dx+O\left(\varepsilon^{N-2}\right).\end{aligned}$$

En suivant les mêmes étapes précédentes, on obtient

$$\begin{gathered}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx =\\ p_0 B\\ + \ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2\left[\int_{B(a,\tau)}\frac{\beta_{N-2}|x-a|^N}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^N}dx-\int_{B(a,\tau)\setminus\Omega}\frac{\beta_{N-2}|x-a|^N}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^N}dx\right]\\ +\varepsilon^{N-2}(N-2)^2\int_{V_a}\frac{\theta(x)|x-a|^{k+2}}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^N}dx+O\left(\varepsilon^{N-2}\right).\end{gathered}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &= p_0 B+\varepsilon^{N-2}(N-2)^2\int_{B(a,\tau)} T\frac{\left(\beta_{N-2}+\theta(x)\right)\left|x-a\right|^{N}}{\left(\varepsilon^2+\left|x-a\right|^2\right)^N}dx\\ &+ \ \varepsilon^{N-2}(N-2)^2\int_{V_a}\frac{\theta(x)\left|x-a\right|^{k+2}}{\left(\varepsilon^2+\left|x-a\right|^2\right)^N}dx+O\left(\varepsilon^{N-2}\right).\end{aligned}$$

En utilisant la définition de θ donnée dans (3.1.3), il existe une constante positive M telle que

$$\begin{aligned}\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2 dx &\leq p_0 B+\varepsilon^{N-2}(N-2)^2\left(\beta_{N-2}+M\right)\int_{B(a,\tau)}\frac{\left|x-a\right|^{N}}{\left(\varepsilon^2+\left|x-a\right|^2\right)^N}dx\\ &\quad +O\left(\varepsilon^{N-2}\right). \qquad (3.5.10)\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\varepsilon^{N-2}\int_{B(a,\tau)}\frac{\left|x-a\right|^{N}}{\left(\varepsilon^2+\left|x-a\right|^2\right)^N}dx &= \omega_N\varepsilon^{N-2}\int_0^\tau\frac{r^{2N-1}}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^N}dr+O\left(\varepsilon^{N-2}\right)\\ &= \frac{\omega_N}{2N}\varepsilon^{N-2}\int_0^\tau\frac{\left(\left(\varepsilon^2+r^2\right)^N\right)'}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^N}dr+O\left(\varepsilon^{N-2}\right),\end{aligned}$$

et

$$\varepsilon^{N-2}\int_{B(a,\tau)}\frac{|x-a|^N}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^N}dx=\frac{\omega_N}{2}\varepsilon^{N-2}|\ln\varepsilon|+o\left(\varepsilon^{N-2}|\ln\varepsilon|\right). \tag{3.5.11}$$

En substrictiant (3.5.11) dans (3.5.10), on obtient

$$\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|^2dx\le p_0B+\frac{(N-2)^2\left(\beta_{N-2}+M\right)\omega_N}{2}\varepsilon^{N-2}|\ln\varepsilon|+o\left(\varepsilon^{N-2}|\ln\varepsilon|\right).$$

On conclut

$$\int_\Omega p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,a}(x)\right|dx\le\begin{cases}p_0B+O\left(\varepsilon^{N-2}\right) & \text{si} \quad N-2<k,\\ p_0B+A_k\varepsilon^k+o\left(\varepsilon^k\right) & \text{si} \quad N-2>k,\\ p_0B+\frac{(N-2)^2(\beta_{N-2}+M)\omega_N}{2}\varepsilon^{N-2}|\ln\varepsilon|+o\left(\varepsilon^{N-2}|\ln\varepsilon|\right) & \text{si} \quad N-2=k.\end{cases} \tag{3.5.12}$$

□

Lemme 3.5.3. *Pour tout $R>0$ et $k>\frac{N-2}{2}$, il existe $\varepsilon_0=\varepsilon_0(R,a)>0$ tel que :*

$$J_\lambda\left(w_0+Ru_{\varepsilon,a}\right)<c+\frac{1}{N}\left[p_0S\right]^{\frac{N}{2}},$$

pour tout $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

Démonstration. on a :

$$\begin{aligned}J_\lambda\left(w_0+Ru_{\varepsilon,a}\right) &= \frac{1}{2}\int_\Omega p|\nabla w_0|^2+R\int_\Omega\nabla w_0\nabla u_{\varepsilon,a}+\frac{R^2}{2}\int_\Omega p|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2\\ &\quad -\frac{1}{2^*}\int_\Omega|w_0+Ru_{\varepsilon,a}|^{2^*}-\lambda\int_\Omega fw_0-\lambda R\int_\Omega fu_{\varepsilon,a}.\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

En utilisant (3.5.5), (3.5.6) et le fait que w_0 satisfasse (3.1.1), on obtient

$$\begin{aligned}J_\lambda\left(w_0+Ru_{\varepsilon,a}\right) &= \frac{1}{2}\int_\Omega p|\nabla w_0|^2+R\int_\Omega\nabla w_0\nabla u_{\varepsilon,a}+\frac{R^2}{2}\int_\Omega p|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2\\ &- \frac{1}{2^*}\|w_0\|_{L^{2^*}}^{2^*}-\frac{R^{2^*}}{2^*}A\\ &- R\int_\Omega|w_0|^{2^*-2}w_0u_{\varepsilon,a}-R^{2^*-1}\int_\Omega u_{\varepsilon,a}^{2^*-1}w_0-\lambda\int_\Omega fw_0\\ &- \lambda R\int_\Omega fu_{\varepsilon,a}+o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right)\\ &= c+\frac{R^2}{2}\int_\Omega p|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2-\frac{R^{2^*}}{2^*}A-R^{2^*-1}\int_\Omega u_{\varepsilon,a}^{2^*-1}w_0+o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right).\end{aligned}$$

Puisque $w_0 = 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, il s'en suit

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_{\varepsilon,a}^{2^*-1} w_0 &= \int_{\mathbb{R}^N} w_0(x)\xi_a(x)\frac{\varepsilon^{\frac{N+2}{2}}}{\left(\varepsilon^2+|x-a|^2\right)^{\frac{N+2}{2}}}dx \\ &= \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} w_0(x)\xi_a(x)\frac{1}{\varepsilon^N}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx\end{aligned}$$

où $\psi(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{N+2}{2}}} \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right).$

Posons $D = \int_{\mathbb{R}^N}\psi(x)dx$ nous en déduisons

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_0(x)\xi_a(x)\frac{1}{\varepsilon^N}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx \to w_0(a)D.$$

Alors

$$\int_\Omega u_{\varepsilon,a}^{2^*-1}w_0 = \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}w_0(a)D + o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right).$$

Par conséquent

$$J_\lambda\left(w_0+Ru_{\varepsilon,a}\right) = c + \frac{R^2}{2}\int_\Omega p|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2 - \frac{R^{2^*}}{2^*}A - R^{2^*-1}\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}w_0(a)D + o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right). \quad (3.5.14)$$

En combinant (3.5.14) et (3.5.12), on a

$$J_\lambda\left(w_0+Ru_{\varepsilon,a}\right) \le \begin{cases} c+\frac{R^2}{2}p_0B-\frac{R^{2^*}}{2^*}A-\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}w_0(a)DR^{2^*-1}+o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) & \text{si} \quad k>\frac{N-2}{2}, \\ c+\frac{R^2}{2}p_0B-\frac{R^{2^*}}{2^*}A+A_k\varepsilon^k+o\left(\varepsilon^k\right) & \text{si} \quad k<\frac{N-2}{2}, \\ c+\frac{R^2}{2}p_0B-\frac{R^{2^*}}{2^*}A-\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\left(\frac{R^2}{2}A_{\frac{N-2}{2}}-w_0(a)DR^{2^*-1}\right)+o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) & \text{si} \quad k=\frac{N-2}{2}. \end{cases}$$

Considérons le cas $k > \frac{N-2}{2}$.

Pour cela, définissons

$$q(s) = \frac{s^2}{2}p_0B - \frac{s^{2^*}}{2^*}A - \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}w_0(a)Ds^{2^*-1} + o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right), \qquad s>0,$$

supposons que q atteigne son maximum au point $t_\varepsilon > 0$.

Posons

$$S_0 = \left(\frac{p_0B}{A}\right)^{\frac{1}{2^*-1}}.$$

Comme t_ε satisfait

$$t_\varepsilon p_0 B - t_\varepsilon^{2^*-1}A = \left(2^*-1\right)w_0(a)D\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}t_\varepsilon^{2^*-2}, \quad (3.5.15)$$

on a $0 < t_\varepsilon < S_0$ et $t_\varepsilon \to S_0$ quand $\varepsilon \to 0$.

On écrit $t_\varepsilon = S_0 (1 - \delta_\varepsilon)$. Nous étudions la vitesse avec laquelle $\delta_\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. De (3.5.15), on trouve

$$\left(\frac{(p_0 B)^{2^*-1}}{A}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} \left(1 - \delta_\varepsilon - (1-\delta_\varepsilon)^{2^*-1}\right) = (2^* - 1)\frac{p_0 B}{A}(1-\delta_\varepsilon)^{2^*-2} w_0(a) D \varepsilon^{\frac{N-2}{2}},$$

et en développant δ_ε nous déduisons

$$(2^*-2)\left(\frac{(p_0 B)^{2^*-1}}{A}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} \delta_\varepsilon = (2^*-1)\frac{p_0 B}{A} u(a) D \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} + o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right).$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} J_\lambda(w_0 + R u_{\varepsilon,a}) &\leq c + \frac{t_\varepsilon^2}{2} p_0 B - \frac{t_\varepsilon^{2^*}}{2^*} A - \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} w_0(a) D t_\varepsilon^{2^*-1} + o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) \\ &= c + \frac{S_0^2}{2} p_0 B - \frac{S_0^{2^*}}{2^*} A - S_0^2 B \delta_\varepsilon + S_0^{2^*} A \delta_\varepsilon - \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} w_0(a) D S_0^{2^*-1} + o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) \\ &= c + \frac{1}{N}(p_0 S)^{\frac{N}{2}} - \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} w_0(a) D S_0^{2^*-1} + o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right). \end{aligned}$$

En procédant de la même manière que dans le cas $k > \frac{N-2}{2}$, on obtient

$$J_\lambda(w_0 + R u_{\varepsilon,a}) \leq \begin{cases} c + \frac{1}{N}(p_0 S)^{\frac{N}{2}} - \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} w_0(a) D S_0^{2^*-1} + o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) & \text{si} \quad k > \frac{N-2}{2}, \\ c + \frac{1}{N}(p_0 S)^{\frac{N}{2}} + A_k \varepsilon^k + o\left(\varepsilon^k\right) & \text{si} \quad k < \frac{N-2}{2}, \\ c + \frac{1}{N}(p_0 S)^{\frac{N}{2}} - \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\left(\frac{S_0^2}{2} A_{\frac{N-2}{2}} - w_0(a) D S_0^{2^*-1}\right) + o\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) & \text{si} \quad k = \frac{N-2}{2}. \end{cases}$$

Donc pour $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(R, a) > 0$ suffisamment petit, et $k > \frac{N-2}{2}$ on conclut

$$J_\lambda(w_0 + R u_{\varepsilon,a}) < c + \frac{1}{N}[p_0 S]^{\frac{N}{2}}, \tag{3.5.16}$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. □

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, tel que $\|u\| = 1$, alors

$$t^+(u) u \in \mathcal{N}_\lambda^- \qquad \text{et} \qquad J_\lambda\left(t^+(u) u\right) = \max_{t \geq t_{max}} J_\lambda(tu).$$

L'unicité de $t^+(u)$ et sa propriété extrémale donnent que $u \mapsto t^+(u)$ est une fonction continue.

Posons

$$U_1 = \left\{u = 0 \text{ ou } u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \|u\| < t^+\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right\},$$

et

$$U_2 = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \|u\| > t^+ \left(\frac{u}{\|u\|} \right) \right\}.$$

Alors $H_0^1(\Omega) \setminus \mathcal{N}_\lambda^- = U_1 \cup U_2$ et $\mathcal{N}_\lambda^+ \subset U_1$.

En particulier $w_0 \in U_1$.

En effet, soit $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$, en prenant $v = \frac{u}{\|u\|}$, et en utilisant le lemme 3.3.4, on a l'existence d'un unique $t^+(v) > 0$ tel que

$t^+(v)v \in \mathcal{N}_\lambda^-$ i.e $t^+ \left(\frac{u}{\|u\|} \right) \frac{u}{\|u\|} \in \mathcal{N}_\lambda^-$.

Comme $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$, on a $t^+ \left(\frac{u}{\|u\|} \right) \frac{1}{\|u\|} = 1$, cela implique

$$\mathcal{N}_\lambda^- = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : t^+ \left(\frac{u}{\|u\|} \right) \frac{1}{\|u\|} = 1 \right\}.$$

Posons

$$\mathcal{F} = \left\{ h : [0,1] \longrightarrow H_0^1(\Omega) \text{ continue, } h(0) = w_0 \text{ et } h(1) = w_0 + R_0 u_{\varepsilon,a} \right\},$$

$R_0 > 0$ fixé.

On a :

Lemme 3.5.4. *Pour un choix convenable de $R_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ la valeur*

$$c_0 = \inf_{h \in \mathcal{F}} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(h(t)),$$

définit une valeur critique de J_λ, avec $c_0 \geq c^-$.

Démonstration. Un calcul facile montre que, pour une constante appropriée $d > 0$ on a :

$$0 < t^+(u) < d, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \|u\| = 1.$$

Posons

$$R_0 = \left(\frac{1}{p_0 B} \left| d^2 - \|w_0\|^2 \right| \right)^{\frac{1}{2}} + 1.$$

Nous affirmons que

$$w_\varepsilon := w_0 + R_0 u_{\varepsilon,a} \in U_2. \tag{3.5.17}$$

En effet

$$\begin{aligned} \|w_\varepsilon\|^2 &= \|w_0 + R_0 u_{\varepsilon,a}\|^2 \\ &= \|w_0\|^2 + R_0^2 p_0 B + o(1) > d^2 \geq \left[t^+ \left(\frac{w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|} \right) \right]^2, \end{aligned}$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Pour un tel choix de R_0, fixons$\varepsilon > 0$ de telle sorte que (3.5.16) et (3.5.17) aient lieu.

Posons

$$\mathcal{F} = \left\{h : [0,1] \longrightarrow H_0^1(\Omega) \text{ continue, } h(0) = w_0 \text{ et } h(1) = w_0 + R_0 u_{\varepsilon,a}\right\}.$$

Il est clair que $h : [0,1] \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ avec $h(t) = w_0 + tR_0 u_{\varepsilon,a}$ appartient à $\mathcal{F}$. Donc par le lemme 3.5.3 on conclut :

$$c_0 = \inf_{h\in\mathcal{F}} \max_{t\in[0,1]} J_\lambda\left(h(t)\right) < c + \frac{1}{N}\left[p_0 S\right]^{\frac{N}{2}}. \tag{3.5.18}$$

De plus, comme $h(0) \in U_1$ et $h(1) \in U_2$, et du fait que h soit continue, alors il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $h(t_0) \in \mathcal{N}_\lambda^-$

D'où

$$c_0 \geq c^- = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u). \tag{3.5.19}$$

$\square$

D'une manière analogue que celle de la démonstration du lemme 3.3.8, on montre qu'il existe une suite minimisante $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$, telle que

(i) $J_\lambda\left(u_n\right) = c^- + o(1)$.

(ii) $J'\left(u_n\right) \to 0$ dans H^{-1}.

Proposition 3.5.5. *Soit $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ une suite minimisante telle que :*

(a) $J_\lambda\left(u_n\right) \to c^-$.

(b) $\left\|J_\lambda'\left(u_n\right)\right\|_{H^{-1}} \to 0$.

Alors, pour tout $\lambda \in \left(0, \frac{\Lambda_0}{2}\right)$, $\{u_n\}$ admet une sous-suite qui converge fortement vers un point w_1 dans $H_0^1(\Omega)$, en plus $w_0 \in \mathcal{N}_\lambda^-$ et $J_\lambda(w_1) = c^-$.

Démonstration. De (3.4.1), on déduit que $\{u_n\}$ est uniformément bornée.

Ainsi, on peut trouver un $w_1 \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$u_n \rightharpoonup w_1 \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Par conséquent de (b), on obtient :

$$\left\langle J_\lambda'\left(w_1\right), w\right\rangle = 0, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega). \tag{3.5.20}$$

Donc w_1 est une solution dans $H_0^1(\Omega)$ de (3.1.1).En particulier $w_1 \neq 0$, $w_1 \in \mathcal{N}_\lambda$ et $J_\lambda\left(w_1\right) \geq c$.

On écrit $u_n = w_1 + v_n$ avec $v_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

Par le lemme de H. Brézis, E. Lieb [4], on a

$$\|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} = \|w_1 + v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} = \|w_1\|_{L^{2^*}}^{2^*} + \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1).$$

D'où, pour n assez grand, on conclut

$$\begin{aligned} c + \frac{1}{N}[p_0 S]^{\frac{N}{2}} &> J_\lambda(w_1 + v_n) \\ &= J_\lambda(w_1) + \frac{1}{2}\int_\Omega p|\nabla v_n|^2 - \frac{1}{2^*}\|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1) \\ &\geq c + \frac{1}{2}\int_\Omega p|\nabla v_n|^2 - \frac{1}{2^*}\|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}\int_\Omega p|\nabla v_n|^2 - \frac{1}{2^*}\|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} < \frac{1}{N}[p_0 S]^{\frac{N}{2}} + o(1). \tag{3.5.21}$$

En utilisant (b), on a

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle = \int_\Omega p|\nabla w_1|^2 - \|w_1\|_{L^{2^*}}^{2^*} - \lambda\int_\Omega f w_1 + \int_\Omega p|\nabla v_n|^2 - \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1) \\ &= \langle J'_\lambda(w_1), w_1\rangle + \int_\Omega p|\nabla v_n|^2 - \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1), \end{aligned}$$

et en tenant compte de (3.5.20), on obtient

$$\int_\Omega p|\nabla v_n|^2 - \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} = o(1). \tag{3.5.22}$$

Nous affirmons que les conditions (3.5.21) et (3.5.22) donnent $\|v_n\| \to 0,\ k \to +\infty$. Raisonnons par l'absurde i.e supposons que $\|v_n\|$ soit bornée loin de zéro.
De (3.5.22), il en résulte

$$\|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*-2} \geq p_0 S + o(1),$$

et par conséquent

$$\|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} \geq [p_0 S]^{\frac{N}{2}} + o(1).$$

D'où la contradiction. De (3.5.21) et (3.5.22) on a :

$$\frac{1}{N}[p_0 S]^{\frac{N}{2}} \leq \frac{1}{N}\|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1) = \frac{1}{2}\int_\Omega p|\nabla v_n|^2 - \frac{1}{2^*}\|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1) < \frac{1}{N}[p_0 S]^{\frac{N}{2}},$$

pour n assez grand.

Conclusion : $u_n \to w_1$ fortement.

Par conséquent w_1 est un point critique de J_λ, $w_1 \in \mathcal{N}_\lambda^-$ (car $\mathcal{N}_\lambda^-$ est un ensemble fermé) et $J_\lambda (w_1) = c^-$. $\square$

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and application, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[2] T. Aubin, Problèmes isoprimétriques et espaces de Sobolev, J. Diff. Geom. 11 (1976), 573-598.

[3] H. Brézis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Dunod, 1999.

[4] H. Brézis, E. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. A.M.S 88 (1983), 486-490.

[5] H. Brézis, L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, Comm. Pure Appl. Math. 36 (4) (1983), 437-477.

[6] K. J. Brown, Y. Zhang, The Nehari manifold for a semilinear elliptic equations with a sign-changing weith function, J. Diff. Equns 193 (2003), 481-499.

[7] A. Capozzi, D. Fortunato, G. Palmieri, An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent, Ann. Inst. H. Poincaré. A.N.L. 2, 6 (1985), 463-470.

[8] Q. Dai, Y. Gu, Positive solutions for non-homogeneous semilinear elliptic equations with data that changes sign, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A133 (2003), 297-306.

[9] I. Ekeland, On the variational principle, J . Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[10] F. Gazzola, B. Ruf, lower order perturbations of critical growth nonlinearities in semilinear elliptic equations, Adv. Differential Equations, 4 (1997), 555-572.

[11] R. Hadiji, H. Yazidi, Problem with critical Sobolev exponent and with weight, Chinese Ann. Math, 3 (2007), 327-352 .

[12] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and . Polya, Inequalities. Cambridge University Press, 1952.

[13] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, 1993.

[14] S. Pohozaev, Eigenfunctions of the equation Δu $+\lambda$f(u) = 0, Soviet Math. Doklady 6 (1965), 1408-1411.

[15] M. Struwe, Variational methods applications to nonlinear partial differential equations and hamiltonian systems, Springer-Verlag 1999.

[16] G. Tarantello, On nonhomegenuous elliptic involving critical Sobolev exponent, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non linéaire 9 (1992), 281-304.

[17] T. F. Wu, On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function, J. Anal. Appl. 318 (2006), 253-270.

Abstract

We show that for $\lambda \in R$ *satisfying a suitable condition the Dirichlet problem:*

$$\begin{cases} -div\left(p(x)\nabla u(x)\right) = |u(x)|^{2^*-2}u(x) + \lambda f(x) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where $2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$ *be the limiting Sobolev exponent,* $\Omega \subset R^N$ *open bounded set and* $p \in H^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, *admits two solutions in* $H_0^1(\Omega)$.

Keywords: *Critical Sobolev exponent, Nehari manifold and Variational methods.*

Résumé

Nous montrons que pour $\lambda \in R$ *satisfaisant certaines conditions le problème de Dirichlet:*

$$\begin{cases} -div\left(p(x)\nabla u(x)\right) = |u(x)|^{2^*-2}u(x) + \lambda f(x) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où $2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$ *est l'exposant critique de Sobolev,* $\Omega \subset R^N$ *un ouvert borné et* $p \in H^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, *admet deux solutions dans* $H_0^1(\Omega)$.

Mots clés : *Exposant critique de Sobolev, Variété de Nehari et Méthodes variationnelles.*

ملخص

نبرهن أنه من أجل. λ *عدد حقيقي يلبي بعض الشروط مشكل ديريكلي*

$$\begin{cases} -div\left(p(x)\nabla u(x)\right) = |u(x)|^{2^*-2}u(x) + \lambda f(x) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

حيث $2^* = \frac{2N}{N-2}$ ، $N \geq 3$ *الأس الحد لسوبوليف،* $\Omega \subset R^N$ *مجال محدود و* $p \in H^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ ،

له حلين في $H_0^1(\Omega)$.

الكلمات المفتاحية: *الأس الحد لسوبوليف، مساحة نهاري ، طرق التغيرات.*