République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences Département de Mathématiques
Mémoire de fin d'études
pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Option : Probabilités-Statistique

Quelques théorèmes limites sous des conditions de dependance positive

Présenté par : **BENSAID Meriem**

Soutenu le 29 Septembre 2021, devant le jury composé de :

M. A. Allam	MCA	Président	Université de Tlemcen
Mme. W. Benyahia	MCB	Examinatrice	Université de Tlemcen
M. F. Boukhari	Professeur	Encadrant	Université de Tlemcen

Année universitaire : $2020 - 2021$

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

A mes premiers supporteurs : mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études. Qu'Allah les protège.

A mes chers frères, Mohamed-El-Amine et Oussama, qui font de mon univers une merveille, je leurs souhaite beaucoup de bonheur et de réussite.

A ma meilleure amie Hanaa que je considère comme une sœur, qui depuis des années m'encourage, me comprend et a toujours été à mes côtés, que dieu lui donne du bonheur, merci pour tout.

A mes cousines, Fatima, Amel, Asema.

A toute ma famille et mes amis.

Remerciements

Louange à **Dieu** tout puissant, qui m'a permis de voir ce jour tant attendu.

Mes remerciements s'adressent particulièrement à **Mr F.Boukhari** professeur à la faculté des sciences, Université Abou Bekr Belkaid pour son encadrement de qualité, sa motivation professionnelle, ses conseils et critiques constructives, ses corrections, et sa patience, ainsi pour le temps qu'il a consacré à la réalisation de ce travail.

Je remercie également **Mr A.Allam** maître de conférence et chef de département à l'Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Mes vifs remerciements s'adresse aussi à **Mme W.Benyahia** maître de conférences à l'Université Abou Bekr Belkaid d'avoir accepter d'examiner ce travail.

De peur d'en avoir oublier, je souhaite remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de ce parcours universitaire.

Table des matières

Introduction

Les deux lois fortes des grands nombres (L.F.G.N) de Kolmogorov ont joué un rôle important dans le développement de la théorie des probabilités et ses applications en statistique mathématique. Ces deux lois sont obtenus sous l'hypothèse forte d'indépendance des accroissements. Comme cette dernière condition est difficilement vérifiables dans de nombreux cas, de nombreux mathématiciens ont proposé des améliorations des résultats de Kolmogorov en affaiblissant l'hypothèse d'indépendance. Au milieu des années soixante plusieurs concepts de dépendance ont été présentés. Dans ce mémoire nous étudions les notions de dépendance positive ainsi que l'association introduites par Lehmann [11] et Esary et al. [8], respectivement.

L'objectif de ce travail est d'obtenir des L.F.G.N pour des variables aléatoires deux à deux positivement dépendantes par quadrant et des variables aléatoires associées. Ces lois limites sont dues à Birkel [3].

Ce manuscrit se compose de trois parties, dans le premier chapitre nous abordons trois notions de dépendance : la dépendance positive par quadrant et l'association, ainsi que la dépendance négative. Nous présentons en particulier les propriétés les plus importantes de ces classes.

Le deuxième chapitre est consacré aux inégalités relatives aux moments ainsi qu'aux inégalités maximales lorsque les variables aléatoires sont supposées associées. Ces inégalités sont très utiles pour établir des théorèmes limites.

Dans le dernier chapitre, nous présentons des lois fortes des grands nombres pour des variables aléatoires qui sont soit deux à deux positivement dépendant par quadrant ou associées.

Chapitre 1

Quelques notions de dépendance

Le concept de dépendance de variables aléatoires a toujours été un sujet d'intérêt pour les probabilistes, dans ce chapitre on présente quelques notions de dépendance positive et négative et on établit des propriétés fondamentales concernant ces notions. Nous commençons par la dépendance positive par quadrant introduite par Lehmann [11], nous nous intérésons aussi aux variables aléatoires associées qui définies par Esary et al. [8]. Ensuite nous rapplons quelques notions de dépendance négative, en utilisant essentiellement le premier chapitre du livre de Oliveira [14].

1.1 Variables aléatoires positivement dépendantes par quadrant

Dans cette section, on s'intéresse aux principales propriétés des variables positivement dépendantes par quadrant.

Définition 1.1.1. *On dit que deux variables aléatoires X et Y sont positivement dépendantes par quadrant (PQD) si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$*

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) \geq \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y). \tag{1.1}$$

et

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \geq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y). \tag{1.2}$$

Remarque 1.1.1. *[1] Les conditions (1.1) et (1.2) sont équivalentes, en effet :*

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ supposons (1.2) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y) &= (1 - \mathbb{P}(X \leq x)(1 - \mathbb{P}(Y \leq y) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) \\
&\leq 1 - \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(Y \leq y) + \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \\
&= 1 - [\mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)] \\
&= 1 - \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cup \{Y \leq y\}) \\
&= \mathbb{P}(X > x, Y > y).
\end{aligned}$$

2. Maintenant supposons (1.1) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) &= (1 - \mathbb{P}(X > x)(1 - \mathbb{P}(Y > y)) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X > x) - \mathbb{P}(Y > y) + \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y) \\
&\leq 1 - \mathbb{P}(X > x) - \mathbb{P}(Y > y) + \mathbb{P}(X > x, Y > y) \\
&= 1 - [\mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(Y > y) - \mathbb{P}(X > x, Y > y)] \\
&= 1 - \mathbb{P}(\{X > x\} \cup \{Y > y\}) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y).
\end{aligned}$$

Notation 1.1.1. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on note :*

$$H(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).$$

Exemples 1.1.1. *Comme exemples des variables aléatoires PQD, on peut citer les suivants :*

1. *Soient X et Y deux variables aléatoires distribuées conjointement telles que :*

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = p_1, \quad \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = p_2,$$

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = p_3, \quad \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = p_4.$$

avec : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.
Donc X et Y sont PQD si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 0, Y \leq 0) - \mathbb{P}(X \leq 0)P(Y \leq 0) &= p_1 - (p_1 + p_2)(p_1 + p_3) \\
&= p_1 p_4 - p_2 p_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

2. *Introduisons quelques notations pour décrire l'exemple suivant :*
   — *soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, on note $a_1 \vee a_2 = \max(a_1, a_2)$*
   — *soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, on note $a_1 \wedge a_2 = \min(a_1, a_2)$*

Soient T_1, T_2, T_3 des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, on définit :

$$X = T_1 \vee T_2 \quad et \quad Y = T_2 \vee T_3 \ .$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) &= \mathbb{P}(T_1 \vee T_2 \leq x, T_2 \vee T_3 \leq y)\\ &= \mathbb{P}(T_1 \leq x, T_2 \leq x \wedge y, T_3 \leq y)\\ &= \mathbb{F}(x)\mathbb{F}(x \wedge y)\mathbb{F}(y).\end{aligned}$$

Et :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(T_1 \vee T_2 \leq x) = \mathbb{P}(T_1 \leq x, T_2 \leq x) = \mathbb{F}(x)^2 = \mathbb{P}(Y \leq x).$$

Ce qui donne : :

$$\begin{aligned}H(x, y) &= \mathbb{F}(x)\mathbb{F}(y)\mathbb{F}(x \wedge y) - \mathbb{F}(x)^2\mathbb{F}(y)^2\\ &= \mathbb{F}(x)\mathbb{F}(y)\mathbb{F}(x \wedge y)(1 - \mathbb{F}(x \vee y)) \geq 0.\end{aligned}$$

Ainsi X et Y sont PQD.

Le résultat suivant exprime la covariance de deux variables aléatoires à l'aide de $H(x, y)$ et fournit un outil qui va nous permettre d'étendre ce concept de dépendance.

Théorème 1.1.1. *[11] (La formule de Hoeffding) Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable alors :*

$$Cov(X, Y) = \int_{\mathbb{R}^2} H(x, y)dxdy.$$

Preuve.

Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux vecteurs aléatoires indépendants avec la même distribution que (X, Y) on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)]\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2}[I(u, X_1) - I(u, X_2)][I(v, Y_1) - I(v, Y_2)]dudv\right],\end{aligned}$$

avec :

$$I(u, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ u \leq x \\ 0 & \text{sinon .}\end{cases}$$

Comme ces variables aléatoires sont supposées de carré intégrable, le théoreme de Fubini nous donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}[I(u,X_1)I(v,Y_1)] - \mathbb{E}[I(u,X_1)I(v,Y_2)] \\
&- \mathbb{E}[I(u,X_2)I(v,Y_1)] + \mathbb{E}[I(u,X_2)I(v,Y_2)] \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}(X > x, Y > y) - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y)\ dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} H(x,y)\ dxdy.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 1.1.1. *Soient X et Y deux variables aléatoires PQD, alors :*

(i) $Cov(X,Y) \geq 0$ *;*

(ii) *X et Y sont indépendantes si et seulement si $Cov(X,Y) = 0$.*

Preuve.

(i) On suppose que X et Y sont PQD :

$$Cov(X,Y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}(X > x, Y > y) - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y)\ dxdy.$$

avec $\mathbb{P}(X > x, Y > y) - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y) \geq 0$, ainsi $Cov(X,Y) \geq 0$.

(ii) "$\Rightarrow$" On suppose que X, Y sont indépendantes alors $Cov(X,Y) = 0$.
"$\Leftarrow$" On suppose que $Cov(X,Y) = 0$:

$$Cov(X,Y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}(X > x, Y > y) - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y)\ dxdy = 0.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y) = 0, \quad \text{(presque partout)}$$

D'où

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y).$$

■

Proposition 1.1.1. *Soient* $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ *des couples de variables aléatoires indépendantes telles que pour chaque* $i = 1, \dots, n$, X_i *et* Y_i *sont PQD, soient* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *deux fonctions croissantes pour chaque coordonnées (respectivement décroissantes), posons :* $X = f(X_1, \dots, X_n)$ *et* $Y = g(Y_1, \dots, Y_n)$ *alors :* $Cov(X, Y) \geq 0$.

Avant de montrer la propostion on va rappler la notion d'inverse généralisée :

Définition 1.1.2. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction monotone, l'inverse généralisée de* f *noté* $f^{\leftarrow}$ *est définie par :*

(a) *si f est croissante* $f^{\leftarrow}(u) = \inf\{x : u \leq f(x)\}$ *;*

(b) *si f est décroissante* $f^{\leftarrow}(u) = \inf\{x : u \geq f(x)\}$.

Si f *est une fonction inversible alors :* $f^{\leftarrow} = f^{-1}$.

Preuve. de la Proposition 1.1.1
On montre par récurrence :

(1). Pour $n = 1$: soient X_1, Y_1 deux variables aléatoires PQD et f, g deux fonctions croissantes telles que $X = f(X_1)$ et $Y = g(Y_1)$, ainsi :

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(f(X_1) \leq x, g(Y_1) \leq y) - \mathbb{P}(f(X_1) \leq x)\mathbb{P}(g(Y_1) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq f^{\leftarrow}(x), Y_1 \leq g^{\leftarrow}(y)) - \mathbb{P}(X_1 \leq f^{\leftarrow}(x))\mathbb{P}(Y_1 \leq g^{\leftarrow}(y)) \geq 0, \end{aligned}$$

donc X et Y sont PQD d'aprés Corollaire 1.1.1, $Cov(X, Y) \geq 0$.

(2). Maintenant on suppose que la proposition est vrai pour $n-1$ et on définie :

$$f^*(x_2, \dots, x_n) = \mathbb{E}[f(X_1, x_2, \dots, x_n)] \quad \text{et} \quad g^*(x_2, \dots, x_n) = \mathbb{E}[g(Y_1, x_2, \dots, x_n)],$$

ces fonctions de $n-1$ variables partagent les propriétés de monotonie dans chacune des variables $x_2, \dots, x_n$ comme les fonctions f et g, ainsi par hypothèse, la covariance par rapport aux distributions de $(X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ est positve :

$$Cov_{(X_2,Y_2)\dots(X_n,Y_n)}\Big(f^*(X_2, \dots, X_n), g^*(Y_2, \dots, Y_n)\Big) \geq 0. \qquad (1.3)$$

De plus (X_1, Y_1) est indépendante à $(X_2, Y_2) \ldots (X_n, Y_n)$, par suite avec $C = Cov_{(X_1,Y_1)\ldots(X_n,Y_n)}(X, Y)$ on a :

$$\begin{aligned}
C &= \mathbb{E}_{(X_1,Y_1)\ldots(X_n,Y_n)}(X, Y) - \mathbb{E}_{(X_1,Y_1)\ldots(X_n,Y_n)}(X)\mathbb{E}_{(X_1,Y_1)\ldots(X_n,Y_n)}(Y) \\
&= \mathbb{E}_{(X_1,Y_1)}\mathbb{E}_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(X, Y) - \mathbb{E}_{(X_1,Y_1)}\Big[\mathbb{E}_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(X)\mathbb{E}_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(Y)\Big] \\
&+ \mathbb{E}_{(X_1,Y_1)}\Big[\mathbb{E}_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(X)\mathbb{E}_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(Y)\Big] \\
&- \mathbb{E}_{(X_1,Y_1)}\Big[\mathbb{E}_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(X)\Big]\mathbb{E}_{(X_1,Y_1)}\Big[\mathbb{E}_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(Y)\Big] \\
&= \mathbb{E}_{(X_1,Y_1)}\Big[Cov_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(X, Y)\Big] \\
&+ Cov_{(X_1,Y_1)}\Big[\mathbb{E}_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(X), \mathbb{E}_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(Y)\Big].
\end{aligned}$$

Or à partir de l'hypothése (1.3) :

$$Cov_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(X, Y) \geq 0,$$

D'où

$$\mathbb{E}_{(X_1,Y_1)}\Big[Cov_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(X, Y)\Big] \geq 0.$$

Pour le deuxième terme $\mathbb{E}_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(X)$ et $\mathbb{E}_{(X_2,Y_2)\ldots(X_n,Y_n)}(Y)$ sont deux fonctions croissantes de (X_1, Y_1) et par le premier cas X_1, Y_1 sont PQD donc leurs covariance est positive, ce qui implique :

$$Cov_{(X_1,Y_1)\ldots(X_n,Y_n)}(X, Y) \geq 0.$$

■

Théorème 1.1.2. *Soient $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ des couples de variables aléatoires indépendantes telles que pour chaque $i = 1, \ldots, n$, X_i et Y_i sont PQD, soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes (respectivement décroissantes) pour chaque coordonnées, posons : $X = f(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = g(Y_1, \ldots, Y_n)$, alors X, Y sont PQD.*

Preuve.
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $U^* = \mathbb{1}_{]-\infty,x]}(X)$ et $V^* = \mathbb{1}_{]-\infty,y]}(Y)$, U^* et V^* ont les mêmes propriétés de monotonie que f et g ainsi par la Proposition 1.1.1 :

$$Cov(\mathbb{1}_{]-\infty,x]}(X), \mathbb{1}_{]-\infty,y]}(Y)) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) \geq 0.$$

Donc X, Y sont PQD. ■

1.2 Variables aléatoires associées

Maintenant nous parlons de variables associées et nous présentons quelques caractérisation concernant ce type de variables.

Définition 1.2.1. *On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires associées si pour $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes croissantes (respectivement décroissantes) pour chaque coordonnées on a :*

$$Cov\Big(f(X_1, \ldots, X_n), g(X_1, \ldots, X_n)\Big) \geq 0. \tag{1.4}$$

Remarque 1.2.1. *Si X et Y sont associées alors elles sont PQD, en effet :*

- Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires associées et f, g deux fonctions croissantes telles que :
  $f(X_1, X_2) = \mathbb{1}_{]x,+\infty[}(X_1)$ et $g(X_1, X_2) = \mathbb{1}_{]y,+\infty[}(X_2)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 0 \leq Cov\Big(f(X_1, X_2), g(X_1, X_2)\Big) &= Cov\Big(\mathbb{1}_{]x,+\infty[}(X_1), \mathbb{1}_{]y,+\infty[}(X_2)\Big) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > y) - \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > y). \end{aligned}$$

  D'où X_1, X_2 sont PQD.

La réciproque est généralement fausse, en effet nous présentons un exemple de Blunski [5] :

- Soient X, Y deux variables aléatoires avec :
  $\mathbb{P}(X = -1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{2}$
  Les variables X, Y sont dépendantes et $Cov(X, Y) = 0$, or pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} Cov(f(X), g(Y)) = &\frac{1}{4} f(1)g(-1) + \frac{1}{2} f(1)g(0) + \frac{1}{4} f(-1)g(1) \\ &- \frac{1}{8}(f(1) + f(-1))(g(-1) + 2g(0) + g(1)). \end{aligned}$$

  Pour $f(-1) = g(-1) = g(0) = 0$ et $f(1) = g(1) = 1$, on a :

$$Cov(f(X), g(Y)) = -\frac{1}{8} < 0.$$

  Ainsi X, Y ne sont pas associées.

Théorème 1.2.1. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires associées et soient $h_1, \ldots, h_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes croissantes pour chaque coordonnées alors les variables : $Y_1 = h_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, Y_k = h_k(X_1, \ldots, X_n)$ sont associées.*

Preuve.
Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $Y_1 = h_1(X_1, \dots, X_n), \dots, Y_k = h_k(X_1, \dots, X_n)$, on a :

$$Cov\Big(f(Y_1, \dots, Y_k), g(Y_1, \dots, Y_k)\Big) = Cov\Big(f(h_1, \dots, h_k), g(h_1, \dots, h_k)\Big),$$

Par hypothèse les fonctions $h_1, \dots, h_k$ sont croissantes, alors :

- Si f, g sont aussi croissantes donc $f(h_1, \dots, h_k), g(h_1, \dots, h_k)$ seront aussi croissantes avec $X_1, \dots, X_n$ associées donc d'aprés la définition d'association :

$$Cov\Big(f(h_1, \dots, h_k), g(h_1, \dots, h_k)\Big) \geq 0,$$

  Donc $Y_1, \dots, Y_k$ sont associées.
- Si f, g sont décroissantes ainsi $f(h_1, \dots, h_k), g(h_1, \dots, h_k)$ seront aussi décroissantes, de même manière par la définition :

$$Cov\Big(f(h_1, \dots, h_k), g(h_1, \dots, h_k)\Big) \geq 0,$$

  Ainsi $Y_1, \dots, Y_k$ sont associées.

■

Théorème 1.2.2. *[8] Soient $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ des variables aléatoires associées, X et Y sont indépendantes alors $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ sont associées.*

Preuve.
Soient $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ des variables aléatoires associées, X et Y sont indépendantes, soit $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes pour chaque coordonnées, on a :

$$\begin{aligned}
Cov\Big(f(X, Y), g(X, Y)\Big) &= \mathbb{E}_{X,Y}(fg) - \mathbb{E}_{X,Y}(f)\mathbb{E}_{X,Y}(g) \\
&= \mathbb{E}_X\mathbb{E}_Y(fg) - \mathbb{E}_X\mathbb{E}_Y(f)E_X\mathbb{E}_Y(g) - \mathbb{E}_X\Big[\mathbb{E}_Y(f)\mathbb{E}_Y(g)\Big] \\
&+ \mathbb{E}_X\Big[\mathbb{E}_Y(f)\mathbb{E}_Y(g)\Big] \\
&= \mathbb{E}_X\Big[Cov_Y(f, g)\Big] + Cov_X\Big[\mathbb{E}_Y(f), \mathbb{E}_Y(g)\Big].
\end{aligned}$$

Puisque $Cov_Y(f, g) \geq 0$, il s'ensuit que : $\mathbb{E}_X\Big[Cov_Y(f, g)\Big] \geq 0$.
Et comme $\mathbb{E}_Y(f), \mathbb{E}_Y(g)$ sont deux fonctions croissantes, on a :

$$Cov_X\Big[\mathbb{E}_Y(f), \mathbb{E}_Y(g)\Big] \geq 0.$$

Ainsi :

$$Cov\Big(f(X,Y),g(X,Y)\Big) \geq 0,$$

Ce qui implique que les variables X et Y sont associées. ■

Théorème 1.2.3. *Les variables $X_1,\dots,X_n$ sont associées si et seulement si pour tout $\gamma_1,\gamma_2:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ deux fonctions croissantes on a :*

$$Cov\Big(\gamma_1(X_1,\dots,X_n),\gamma_2(X_1,\dots,X_n)\Big) \geq 0.$$

Preuve.

1. " $\Rightarrow$" Si les variables sont associées alors d'aprés la définition de l'association pour tout $\gamma_1,\gamma_2:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ deux fonctions croissantes on a :

$$Cov\Big(\gamma_1(X_1,\dots,X_n),\gamma_2(X_1,\dots,X_n)\Big) \geq 0.$$

2. " $\Leftarrow$" Soient $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ deux fonctions croissantes pour chaque coordonnées d'aprés la formule de Hoeffding on a :

$$Cov\Big(f(X_1,\dots,X_n),g(X_1,\dots,X_n)\Big) = \int_{\mathbb{R}^2} Cov(\mathbb{1}_{\{f(X_1,\dots,X_n)>s\}},\mathbb{1}_{\{g(X_1,\dots,X_n)>t\}})dsdt.$$

On définit :

$$\gamma_s(x_1,\dots,x_n) = \mathbb{1}_{\{f(x_1,\dots,x_n)>s\}}$$

et

$$\gamma_t(x_1,\dots,x_n) = \mathbb{1}_{\{g(x_1,\dots,x_n)>t\}}.$$

Comme f est croissante alors γ_s et γ_t sont aussi, ainsi l'intégrale est positive pour tout $s,t\in\mathbb{R}$, ce qui entraîne :

$$Cov\Big(f(X_1,\dots,X_n),g(X_1,\dots,X_n)\Big) \geq 0.$$

■

Remarque 1.2.2. *Notez q'une fonction γ à valeur $\{0,1\}$ croissante définie sur $\mathbb{R}$ est de la forme $\mathbb{1}_{[a,+\infty[}$ pour $a\in\mathbb{R}$.*

Théorème 1.2.4. *Chaque variable aléatoire X est associée à elle-même.*

Preuve.
Compte tenu de la caractérisation précédente de l'association, il suffit de vérifier que pour toutes fonctions γ_1, γ_2 croissantes à valeur $\{0, 1\}$, on a :

$$Cov(\gamma_1, \gamma_2) \geq 0.$$

D'aprés la Remarque 1.2.2, ces fonctions sont nécessairement de la forme : $\gamma = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}$, ainsi nous aurons pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit :

$$\gamma_1(x) \leq \gamma_2(x) \quad \text{ou} \quad \gamma_1(x) \geq \gamma_2(x).$$

supposons que $\gamma_1(x) \leq \gamma_2(x)$ alors : $\gamma_1(x)\gamma_2(x) = \gamma_1(x)$, par suite :

$$\begin{aligned} Cov\Big(\gamma_1(X), \gamma_2(X)\Big) &= \mathbb{E}(\gamma_1(X)\gamma_2(X)) - \mathbb{E}(\gamma_1(X))\mathbb{E}(\gamma_2(X)) \\ &= \mathbb{E}(\gamma_1(X)) - \mathbb{E}(\gamma_1(X))\mathbb{E}(\gamma_2(X)) \\ &= \mathbb{E}(\gamma_1(X))[1 - \mathbb{E}(\gamma_2(X))] \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent X est associée à elle-même. ∎

Corollaire 1.2.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si X_n sont des variables aléatoires independantes alors X_n sont associées.*

Preuve.
Selon le Théorème 1.2.4 : X_1 est associée à elle-même, X_2 est associée à elle-même et X_1, X_2 sont independant ainsi d'aprés le Théorème 1.2.2 : X_1, X_2 sont associée. D'autre part X_3 est associée à elle-même et independant à (X_1, X_2) de même d'aprés Théorème 1.2.2 : X_1, X_2, X_3 sont associées.
Appliquons successivement cet argument, il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont associées. ∎

La famille de fonctions pour laquelle il faut vérifier (1.4) pour prouver l'association peuvent être réduites dans des directions différentes de celles considéré dans le Théorème 1.2.3. Nous avons réduit la famille de fonctions par imposant une certaine restriction sur les valeurs possibles pour ces fonctions.

Lemme 1.2.1. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires, soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées continues, croissantes pour chaque coordonnées :*

$$Cov\Big(f(X_1, \ldots, X_n), g(X_1, \ldots, X_n)\Big) \geq 0,$$

Alors pour tout γ_1, γ_2 deux fonctions bornées continues à droite croissantes pour chaque coordonnées $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$, on a :

$$Cov\Big(\gamma_1(X_1, \dots, X_n), \gamma_2(X_1, \dots, X_n)\Big) \geq 0.$$

Théorème 1.2.5. *Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont associées si et seulement si pour tout f, g deux fonctions bornées, continues et croissantes pour chaque coordonnées on a :*

$$Cov\Big(f(X_1, \dots, X_n), g(X_1, \dots, X_n)\Big) \geq 0.$$

Théorème 1.2.6. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soient $X_{1,k}, \dots, X_{n,k}$ des variables aléatoires associées, si on suppose que : $(X_{1,k}, \dots, X_{n,k})$ converge en loi vers $(X_1, \dots, X_n)$ on écrit :*

$$(X_{1,k}, \dots, X_{n,k}) \xrightarrow[k\to\infty]{Loi} (X_1, \dots, X_n),$$

Alors $X_1, \dots, X_n$ sont associées.

Preuve.
Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées, continues et croissantes pour chaque coordonnées, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$Cov\Big(f(X_{1,k}, \dots, X_{n,k}), g(X_{1,k}, \dots, X_{n,k})\Big) \geq 0.$$

Comme f, g et fg sont continues et bornées, alors :

$$\begin{aligned}
Cov\Big(f(X_1, \dots, X_n), g(X_1, \dots, X_n)\Big) &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\Big[f(X_{1,k}, \dots, X_{n,k})g(X_{1,k}, \dots, X_{n,k})\Big] \\
&\quad - \mathbb{E}\Big[f(X_{1,k}, \dots, X_{n,k})]\mathbb{E}[g(X_{1,k}, \dots, X_{n,k})\Big] \\
&= \lim_{k\to\infty} Cov\Big(f(X_{1,k}, \dots, X_{n,k}), g(X_{1,k}, \dots, X_{n,k})\Big) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

D'où d'aprés Théorème 1.2.5 les variables $X_1, \dots, X_n$ sont associées ■

1.3 Variables aléatoires négativement dépendantes

Dans cette partie on va définir quelques notions de dépendance négative, la dépendance négative par quadrant qui a été introduite par Lehman [11], et l'association négative qui a été dévloppé par Joag-Dev et Proschan [10] en 1983.

Définitions 1.3.1.

1. On dit que X et Y sont négativement dépendantes par quadrant (NQD) si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) \leq \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y).$$

2. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont négativement dépendantes si pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i > x_i\}) \leq \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i > x_i) \tag{1.5}$$

et

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leq x_i\}) \leq \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \leq x_i). \tag{1.6}$$

Remarques 1.3.1.

1. Toute suite de variables négativement dépendantes est deux à deux négativement dépendantes par quadrant, la réciproque est fausse en général [4].
2. Pour $n = 2$, les propriétés (1.5) et (1.6) sont équivalentes nous l'avons prouvé dans la Remarque 1.1.1 pour le cas PQD.
3. Pour $n \geq 3$, les propriétés (1.5) et (1.6) ne sont pas équivalentes en général, voir un exemple de Ebrahimi et Ghosh[7] :
   Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires réelles qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et (X_1, X_2, X_3) prennent les valeurs $(0, 1, 1)$,$(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 0)$ avec une probabilité $\frac{1}{4}$, alors pour tout $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, X_3 > x_3) \leq \mathbb{P}(X_1 > x_1)\mathbb{P}(X_2 > x_2)\mathbb{P}(X_3 > x_3),$$

   mais

$$\mathbb{P}(X_1 \leq 0, X_2 \leq 0, X_3 \leq 0) = \frac{1}{4} > \frac{1}{8} = \mathbb{P}(X_1 \leq 0)\mathbb{P}(X_2 \leq 0)\mathbb{P}(X_3 \leq 0).$$

   Ainsi les propriétés(1.5) et (1.6) ne sont pas équivalentes

Proposition 1.3.1. *Deux variables aléatoires X et Y sont NQD si et seulement si X et $-Y$ sont deux variables aléatoires PQD.*

Preuve.

1. "$\Rightarrow$" Soient X et Y deux variables aléatoires NQD :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x, -Y > y) &= \mathbb{P}(X > x, Y < -y) \\
&= \mathbb{P}(Y < -y) - \mathbb{P}(X < x, Y < -y) \\
&\geq \mathbb{P}(Y < -y) - \mathbb{P}(X < x)\mathbb{P}(Y < -y) \\
&= \mathbb{P}(Y < -y)[1 - \mathbb{P}(X < x)] \\
&= \mathbb{P}(-Y > y)\mathbb{P}(X > x).
\end{aligned}$$

   Ainsi X et $-Y$ sont PQD.

2. "$\Leftarrow$" Soient X et $-Y$ deux variables aléatoires PQD :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x, Y > y) &= \mathbb{P}(X > x) - \mathbb{P}(X > x, Y < y) \\
&= \mathbb{P}(X > x) - \mathbb{P}(X > x, -Y > -y) \\
&\leq \mathbb{P}(X > x) - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(-Y > -y) \\
&= \mathbb{P}(X > x)[1 - \mathbb{P}(Y < y)] \\
&= \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y).
\end{aligned}$$

   D'où X et Y sont NQD.

■

Proposition 1.3.2. *Soient X et Y deux variables aléatoires NQD, alors :*

(i) $Cov(X, Y) \leq 0$.

(ii) *X et Y sont indépendantes si et seulement si $Cov(X, Y) = 0$.*

L'adaptation de la Proposition 1.1.1, du Théorème 1.1.2 nécessite un peu de soin à cause du sens de la monotonie des transformations, c'est ce que la Proposition 1.3.1 explique. Nous allons inclure les données ici sans preuve.

Proposition 1.3.3. *Soient $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ des variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $i = 1, \ldots, n$, X_i et Y_i sont NQD, soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions dont l'une est croissante et l'autre est décroissante pour chaque coordonnées, posons : $X = f(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = g(Y_1, \ldots, Y_n)$, alors $Cov(X, Y) \leq 0$.*

Théorème 1.3.1. *Soient $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ des variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $i = 1, \ldots, n$, X_i et Y_i sont NQD, soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions dont l'une est croissante et l'autre est décroissante pour chaque coordonnées, posons : $X = f(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = f(Y_1, \ldots, Y_n)$, alors X et Y sont NQD.*

Remarque 1.3.1. *[1] Si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes alors $X_1, \ldots, X_n$ sont négativement dépendantes.*

La réciproque est fausse en général. En effet, soit X une variables aléatoires dans $\mathbb{R}$, on pose $Y = -X$ alors X et Y sont négativement dépendantes mais elles sont pas indépendantes, soit $x, y \in \mathbb{R}$

— Si $-y \leq x$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) &= \mathbb{P}(-y \leq X \leq x) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq -y) \\
&\leq \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq -y)\mathbb{P}(X \leq x) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)\left[\frac{1 - \mathbb{P}(X \leq -y)}{\mathbb{P}(Y \leq y)}\right] \\
&\leq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).
\end{aligned}$$

— Si $-y > x$

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = 0 \leq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).$$

Définition 1.3.1. *On dit que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont négativement associées (NA), si pour tout A, B deux sous-ensembles disjoints tels que $A, B \subset \{1, \ldots, n\}$ et pour $f : \mathbb{R}^{|A|} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{|B|} \to \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes croissantes, on a :*

$$Cov\Big(f(X_i, i \in A), g(X_j, j \in B)\Big) \leq 0.$$

Une famille infinie de variables aléatoires est NA (respectivement associées) si tout sous famille finie est NA (respectivement associées).

Théorème 1.3.2. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires NA et soient $h_1, \ldots, h_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes croissantes pour chaque coordonnées alors les variables : $Y_1 = h_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, Y_k = h_k(X_1, \ldots, X_n)$ sont NA.*

Théorème 1.3.3. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires NA, alors les variable $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $i, j = 0, \ldots, n, i \neq j$, on a $Cov(X_i, X_j) = 0$.*

Nous donnons un exemple de variables aléatoires négativement associées :

Exemple 1.3.1. *[5] Soient* $X = (X_1, X_2, X_3)$ *un vecteur aléatoire, dont* X_1, X_2 *et* X_3 *sont des variables aléatoires binaires, et soient* f, g *deux fonctions telles que :* $f(X_1, X_2) = X_1^+ X_2^+$ *et* $g(X_3) = X_3$ *avec* X_1^+, X_2^+ *sont les parties positives des variables aléatoires* X_1, X_2*.*
Le vecteur X *a la distribution de probabilité suivante :*

$$\mathbb{P}(1,0,0) = \mathbb{P}(0,1,0) = \mathbb{P}(0,0,1) = \frac{1}{12},$$

$$\mathbb{P}(1,1,0) = \mathbb{P}(1,0,1) = \mathbb{P}(0,1,1) = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}(1,1,1) = \mathbb{P}(0,0,0) = 0.$$

Les fonctions f *et* g *sont croissantes et* $Cov(f(X_1, X_2), g(X_3)) < 0$ *donc* X *est NA.*
D'autre part, pour la distribution suivante :

$$\mathbb{P}(1,0,0) = \mathbb{P}(0,1,0) = \mathbb{P}(0,0,1) = \frac{3}{10}, \quad \mathbb{P}(1,1,1) = \frac{1}{10},$$

Ce qui implique : $Cov(f(X_1, X_2), g(X_3)) > 0$*, ainsi* X *n'est pas NA.*

Chapitre 2

Quelques inégalités pour des variables aléatoires associées

Les inégalités jouent un rôle important dans la théorie des probabilités, nous nous intéressons dans cette partie aux inégalités relatives aux moments. les premiéres inégalités sont dues à Birkel [2] et ont été améliorées par Shao et Yu [15]. nous présontons ensuite quelques inégalités maximales obtenues éssentiellement par Newman et Wright [13]. Ces inégalités constituent un outil important pour obtenir des L.F.G.N, certaines des inégalités énnoncées sont empreintées du Chapitre 2 de [14].

Notations 2.0.1. *Soit* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de variable aléatoire, on note :*

$$u(n) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j:|j-k| \geq n} Cov(X_j, X_n)$$

2.1 Inégalités relatives aux moments

Dans ce paragraphe, on va définir quelques inégalités des moments qui ont un rôle d'obtenir le contrôle des sommes des transformations des variables associées.

Lemme 2.1.1. *Soient* $2 < p < r \leq +\infty$ *et* f *une fonction absolument continue telle que* $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq C_0$*, on suppose que les variables aléatoires* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *sont associées avec* $\|f(X_n)\|_r < \infty$ *et soit* A, B *deux sous ensembles de* $\mathbb{N}$ *alors :*

$$\Big|Cov\Big(|\sum_{i \in A} f(X_i)|, |\sum_{j \in B} f(X_j)|^{p-1}\Big)\Big| \leq p\Big[\mathbb{E}|\sum_{j \in B} f(X_j)|^p\Big]^{\frac{(r-1)(p-2)}{r_p}} \Big[\sum_{i \in A} \|f(X_i)\|_r\Big]^{\frac{r(p-2)}{r_p}}$$
$$\times \Big[C_0^2 \sum_{i \in A, j \in B} Cov(X_i, X_j)\Big]^{\frac{(r-p)}{r_p}} \textit{avec} \quad r_p = r(p-1) - p.$$

Pour la démonstration du Lemme 2.1.1, on a besoin de l'inégalité de Bulinsky :

Théorème 2.1.1. *(Inégalité de Bulinsky) Soit* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de variables aléatoires associées et soit* $A, B \in \mathbb{N}$ *deux sous ensembles finis, soient* f_1, f_2 *deux fonctions à valeurs réelles dans* $\mathbb{R}^{|A|}, \mathbb{R}^{|B|}$ *(*$|A|$ *cardinal de l'ensemble* A*), avec dérivée partielle du premier ordre bornée alors :*

$$\Big|Cov\Big(f_1(X_i, i \in A), f_2(X_j, j \in B)\Big)\Big| \leq \sum_{i\in A, j\in B} \left\|\frac{\partial f_1}{\partial t_i}\right\|_\infty \left\|\frac{\partial f_2}{\partial t_j}\right\|_\infty Cov(X_i, X_j). \quad (2.1)$$

Preuve. du Lemme 2.1.1
Soient $C_1 > 0$ fixé et f, g et h des fonctions telles que :

$$g(t_1, \ldots, t_{|A|}) = |\sum_{i=1}^{|A|} f(t_i)|$$

et

$$h(t_1, \ldots, t_{|B|}) = |\sum_{j=1}^{|B|} f(t_j)|^{p-1} \mathbb{1}_{\{\sum_j f(t_j) \leq C_1\}} + C_1^{p-1} \mathbb{1}_{\{\sum_j f(t_j) > C_1\}}.$$

Ces deux fonctions vérifient :

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial t_i}\right\|_\infty \leq C_0 \quad et \quad \left\|\frac{\partial h}{\partial t_j}\right\|_\infty \leq (p-1) C_1^{p-2} C_0.$$

En faite, h n'est pas dérivable en tout point, mais comme f a une dérivée bornée, on peut arbitrairement approximer h par une fonction dérivable et ensuite prendre des limites. d'aprés l'inégalité de Bulinsky(2.1) :

$$\Big|Cov\Big(g(X_i, i \in \mathbb{A}), h(X_j, j \in \mathbb{B})\Big)\Big| \leq (p-1) C_1^{p-2} C_0^2 \sum_{i\in\mathbb{A}, j\in\mathbb{B}} Cov(X_i, X_j).$$

Pour conclure, cherchons une borne supérieure pour :

$$\Big|Cov\Big(g(X_i, i \in \mathbb{A}), |\sum_{j\in\mathbb{B}} f(X_j)|^{p-1} - h(X_j, j \in \mathbb{B})\Big)\Big| =$$

$$\Big|Cov\Big(g(X_i, i \in \mathbb{A}), (|\sum_{j\in\mathbb{B}} f(X_j)|^{p-1} - C_1^{p-1}) \mathbb{1}_{\{\sum_{j\in\mathbb{B}} f(X_j) > C_1\}}\Big)\Big|.$$

En réécrivant cette expression en termes d'espérance mathématique, cette covariance est inférieur où égal à :

$$\max\Big[\sum_{i\in\mathbb{A}} \mathbb{E}\Big(|f(X_i)||\sum_{j\in\mathbb{B}} f(X_j)|^{p-1} \mathbb{1}_{\{\sum_{j\in\mathbb{B}} f(X_j) > C_1\}}\Big),$$
$$\sum_{i\in\mathbb{A}} \mathbb{E}|f(X_i)| \mathbb{E}(|\sum_{j\in\mathbb{B}} f(X_j)|^{p-1} \mathbb{1}_{\{|\sum_{j\in\mathbb{B}} f(X_j)| > C_1\}})\Big].$$

En appliquant l'inégalité de Hölder aux deux termes (pour $p = r, q = \frac{r}{r-1}$), ce qui précède est toujours inférieur où égal à :

$$\sum_{i\in\mathbb{A}} \|f(X_i)\|_r \Big(\mathbb{E}(|\sum_{j\in\mathbb{B}} f(X_j)|^{\frac{(p-1)r}{r-1}} \mathbb{1}_{\{|\sum_{j\in\mathbb{B}} f(X_j)|>C_1\}})\Big)^{\frac{r-1}{r}}.$$

Enfin, en utilisant à nouveau l'inégalité de Hölder suivie de l'inégalité de Markov, nous trouvons :

$$\Big|Cov\Big(g(X_i, i\in\mathbb{A}), |\sum_{j\in\mathbb{B}} f(X_j)|^{p-1} - h(X_j, j\in\mathbb{B})\Big)\Big| \leq C_1^{\frac{-(r-p)}{r}} \sum_{i\in\mathbb{A}} \|f(X_i)\|_r \Big(\mathbb{E}|\sum_{j\in\mathbb{B}} f(X_j)|^p\Big)^{\frac{r-1}{r}},$$

En choisissant :

$$C_1 = \left(\frac{\sum_{i\in\mathbb{A}} \|f(X_i)\|_r (\mathbb{E}|\sum_{j\in\mathbb{B}} f(X_j)|^p)^{\frac{r-1}{r}}}{C_0^2 \sum_{i\in\mathbb{A}, j\in\mathbb{B}} Cov(X_i, X_j)}\right)^{\frac{r}{rp}}.$$

■

Théorème 2.1.2. *Soient $2 < p < r \leq +\infty$, et soit f une fonction absolument continue telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq C_0$, on suppose que $\{X_n, n\in\mathbb{N}\}$ sont associées telle que $\mathbb{E}(f(X_n)) = 0$, $\|f(X_n)\|_r < \infty$ et $u(n) \leq C_1 n^{-\theta}$ pour $C_1 > 0$ et $\theta > 0$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K(\varepsilon, r, p, \theta)$ tel que :*

$$\mathbb{E}|\sum_{i=1}^n f(X_i)|^p \leq K\Big[n^{1+\varepsilon} \max_{i\leq n} \mathbb{E}|f(X_i)|^p + \Big(n \max_{i\leq n} \sum_{j=1}^n |Cov(f(X_i), f(X_j))|\Big)^{\frac{p}{2}}$$
$$+ n^{\frac{(r(p-1)-p-\theta(r-p))}{(r-2)\vee(1+\varepsilon)}} \max_{i\leq n} \|f(X_i)\|_r^{\frac{r(p-2)}{r-2}} \times (C_0^2 C_1)^{\frac{r-p}{r-2}}\Big].$$

Corollaire 2.1.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1.2, si $\theta \geq \frac{r(p-2)}{2(r-p)}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $K(\varepsilon, r, p, \theta)$ tel que :*

$$\mathbb{E}|\sum_{i=1}^n f(X_i)|^p \leq K\Big[n^{1+\varepsilon} \max_{i\leq n} \mathbb{E}|f(X_i)|^p + \Big(n \max_{i\leq n} \sum_{j=1}^n |Cov(f(X_i), f(X_j))|\Big)^{\frac{p}{2}}$$
$$+ n^{\frac{p}{2}} \max_{i\leq n} \|f(X_i)\|_r^{\frac{r(p-2)}{r-2}} \times (C_0^2 C_1)^{\frac{r-p}{r-2}}\Big]. \quad (2.2)$$

Le résultat suivant est une conséquence du Corollaire 2.1.1 :

Corollaire 2.1.2. *Soient $2 < p < r \leq +\infty$ et $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléattoires centrées associées qui vérifier $u(n) \leq C_1 n^{-\theta}$, pour tout $C_1 > 0$ avec $\theta \geq \frac{r(p-2)}{2(r-p)}$ et $\|X_n\|_r < \infty$ pour $n \geq 1$, alors il existe $K(r,p)$ tel que :*

$$\mathbb{E}|\sum_{i=1}^{n} X_i|^p \leq K n^{\frac{p}{2}} \Big[\max_{i \leq n} \mathbb{E}|X_i|^p + \Big(\max_{i \leq n} \sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) \Big)^{\frac{p}{2}}$$

$$+ \max_{i \leq n} \|X_i\|_r^{\frac{r(p-2)}{r-2}} \times (C_0^2 C_1)^{\frac{r-p}{r-2}} \Big]. \tag{2.3}$$

Preuve.
D'aprés Corrollaire 2.1.1 et en choisissant f comme une fonction d'identité et $\varepsilon = \frac{p-2}{2}$. dans l'inégalité (2.2). ■

Corollaire 2.1.3. *Soient $2 \leq p < r < +\infty$ et $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires centrées associées telles que $u(n) \leq C_1 n^{-\theta}$, pour tout $C_1 > 0$ et $\theta > 0$ et $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n|^{r+\eta} < \infty$ pour $\eta > 0$ alors il existe K tel que :*

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|S_{m+n} - S_m|^p \leq K n^{\frac{p}{2}},$$

avec $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Preuve.
D'aprés l'inégalité (2.3), K ne depend pas de n et l'expression à l'interieur est bornée par :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n|^p + u(n)^{\frac{p}{2}} + \sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_i\|_r^{\frac{r(p-2)}{r-2}} C^{\frac{r-p}{r-2}},$$

qui est indépendant de n, ainsi :

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|S_{m+n} - S_m|^p \leq K n^{\frac{p}{2}}.$$

■

2.2 Inégalités maximales

Dans cette section nous donnons quelques inégalités maximales pour contrôler les moments des maximums du second ordre. Tout au long de cette section, on introduit la notation suivante :

$$\text{Pour tout } \; n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \max(S_1, \ldots, S_n) \quad \text{et} \quad M_n^* = \max(|S_1|, \ldots, |S_n|).$$

Théorème 2.2.1. *Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite des variables aléatoires centrées de carré intégrable associées alors :*

$$\mathbb{E}(M_n^2) \leq \mathbb{V}ar(S_n) = \mathbb{E}(S_n^2). \tag{2.4}$$

Preuve.
On montre l'inégalité par récurrence :

- Pour $n = 1$:
$$\mathbb{E}(M_1^2) = \mathbb{E}(\max_{n\in\mathbb{N}} S_1^2) = \mathbb{V}ar(S_1).$$
- On va supposer que le résultat soit valable pour $n-1$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$K_n = \min(X_2 + \ldots + X_n, X_3 + \ldots + X_n, \ldots, X_n, 0),$$
$$I_n = \max(X_2, X_2 + X_3, \ldots, X_2 + \ldots + X_n),$$
$$J_n = \max(0, I_n).$$

Notez que toutes ces variables ne dépendent que de $X_2, ..., X_n$ et on a :

$$K_n = X_2 + \ldots + X_n - J_n \quad \text{et} \quad M_n = X_1 + J_n,$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n^2) &= \mathbb{E}\Big[(X_1 + J_n)^2\Big]\\ &= \mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(J_n^2) + 2\mathbb{E}(X_1 J_n)\\ &= \mathbb{V}ar(X_1) + 2Cov(X_1, J_n) + \mathbb{E}(J_n^2)\\ &= \mathbb{V}ar(X_1) + 2Cov(X_1, X_2 + ... + X_n) - 2Cov(X_1, K_n) + \mathbb{E}(J_n^2).\end{aligned}$$

Les variables K_n sont des transformations croissantes, d'aprés Théorème 1.2.1 sont associées et associées avec X_1, ainsi $Cov(X_1, K_n) \geq 0$ de plus $J_n^2 \leq I_n^2$, il s'ensuit que :

$$\mathbb{E}(M_n^2) \leq \mathbb{V}ar(X_1) + 2Cov(X_1, X_2 + ... + X_n) + \mathbb{E}(I_n^2).$$

De plus d'aprés l'hypothèse de récurrence on a :

$$\mathbb{E}(I_n^2) \leq \mathbb{V}ar(X_2 + \ldots + X_n).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n^2) &\leq \mathbb{V}ar(X_1) + 2Cov(X_1, X_2 + ... + X_n) + \mathbb{V}ar(X_2 + \ldots + X_n)\\ &= \mathbb{V}ar(S_n).\end{aligned}$$

■

Pout tout $j, n \in \mathbb{N}$, on définie :

$$T_{j,n} = \begin{cases} \text{j'éme plus grand parmi}(S_1, \ldots, S_n) & \text{si } \ j \leq n \\ \min(S_1, \ldots, S_n) & \text{si } j > n \end{cases}.$$

tel que $T_{n,n} = \min(S_1, \ldots, S_n)$ et $T_{1,n} = \max(S_1, \ldots, S_n)$.

Le lemme suivant a été prouvé par Newman et Wright [13], il donne une inégalité générale :

Lemme 2.2.1. *Soit* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de variables aléatoires associées et* m *une fonction croissante telle que :* $m(0) = 0$ *alors pour tout* $j, n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^{T_{j,n}} um(du)\Big) \leq \mathbb{E}\Big(S_n m(T_{j,n})\Big),$$

ainsi pour tout $c > 0$ *:*

$$\lambda \mathbb{P}(T_{j,n} \geq c) \leq \int_{\{T_{j,n} \geq c\}} S_n dP.$$

Le résultat suivant est une autre version de l'inégalité (2.4).

Théorème 2.2.2. *[13] Soit* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de variables aléatoires associées centrés alors :*

$$\mathbb{E}(T_{j,n}^2) \leq \mathbb{E}(S_n^2). \tag{2.5}$$

Preuve.
Posons $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ et $Z_k = \sum_{i=n-k+2}^{n} X_i$ et $Z_1 = 0$, pour $k = 1, 2, \ldots, n+1$:

Pour $j \leq n$, $Z_{j,n}$ est la j'éme plus grand parmi $(Z_1, \ldots, Z_n)$.
D'aprés le Lemme 2.2.1 avec $m(u) = u$ on a :

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^{Z_{n-j+1,n}} udu\Big) \leq \mathbb{E}(Z_n Z_{n-j+1,n}).$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}(Z_{n-j+1,n}^2) \leq \mathbb{E}(Z_n Z_{n-j+1,n}) \leq \mathbb{E}(Z_{n+1} Z_{n-j+1,n}).$$

Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_{n+1} - Z_{n-j+1,n})^2 &= \mathbb{E}(Z_{n+1}^2) + \mathbb{E}(Z_{n-j+1,n}^2) - 2\mathbb{E}(Z_{n+1}Z_{n-j+1,n}) \\ &\leq \mathbb{E}(Z_{n+1}^2).\end{aligned}$$

C'est la même inégalité (2.5) puisque : $Z_{n+1} = S_n$ et $Z_{n+1} - Z_{n-j+1,n}$ est la j'éme plus grand de $(Z_{n+1} - Z_n, Z_{n+1} - Z_{n-1}, \ldots, Z_{n+1} - Z_1) = T_{n,j}$. ■

Théorème 2.2.3. *Soit* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de variables aléatoires associées centrés de carré intégrable telles que :*

$$\sum_{i=1}^{\infty} u^{\frac{1}{2}}(2^i) < \infty,$$

alors il exist $C > 0$ *tel que :*

$$\mathbb{E}(M_n^2) \leq Cn(\max_{k\leq n} \mathbb{E}(X_k^2) + 1).$$

Théorème 2.2.4. *Soit* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de variables aléatoires associées centré telles que :*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^2) < \infty \quad et \quad K = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k:k-j>1}^{\infty} Cov^{\frac{1}{2}}(X_j, X_k) < \infty.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\mathbb{E}(M_n^2) \leq 2n \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^2) + 4nK(\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^2))^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve.
Pour $j \leq n$, on remarque que :

$$S_j^2 \leq \max\left((\min_{k\leq n} S_k)^2, (\max_{k\leq n} S_k)^2\right) \leq (\min_{k\leq n} S_k)^2 + (\max_{k\leq n} S_k)^2.$$

Il s'ensuit que :

$$M_n^2 \leq (\min_{k\leq n} S_k)^2 + (\max_{k\leq n} S_k)^2 \leq 2(\max_{k\leq n} S_k)^2.$$

En appliquant le Théorème 2.2.2 :

$$\mathbb{E}(\max_{k\leq n} S_k)^2 \leq \mathbb{E}(S_n^2),$$

Par suite :

$$\mathbb{E}(\max_{k\leq n} S_k^2) \leq 2\mathbb{E}(S_n^2) = 2\sum_{j,k=1}^{n} Cov(X_j, X_k).$$

On définit $K_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^2)$ alors :

$$Cov(X_j, X_k) \leq \Big(\mathbb{E}(X_j^2)\mathbb{E}(X_k^2)\Big)^{\frac{1}{2}} \leq K_1$$

et

$$Cov(X_j, X_k) \leq \Big(K_1 Cov(X_j, X_k)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} Cov(X_j, X_k) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j^2) + 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} Cov(X_j, X_k)\\ &\leq nK_1 + 2K_1^{\frac{1}{2}} nK.\end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.5. *Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires associées centrées de carré intégrable alors pour tout $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda s_n) \leq 2\mathbb{P}\Big(|S_n| \geq (\lambda - \sqrt{2})s_n\Big), \tag{2.6}$$

avec : $s_n = \mathbb{E}(S_n^2)$.

Preuve.
Posons $M_n^+ = \max(0, S_1, \ldots, S_n)$ et soit $x < y$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n^+ \geq y) &= \mathbb{P}(M_n^+ \geq y, S_n \geq x) + \mathbb{P}(M_n^+ \geq y, S_n < x)\\ &\leq \mathbb{P}(S_n \geq x) + \mathbb{P}(M_{n-1}^+ \geq y, M_{n-1}^+ - S_n < y - x)\\ &\leq \mathbb{P}(S_n \geq x) + \mathbb{P}(M_{n-1}^+ \geq y)\mathbb{P}(M_{n-1}^+ - S_n < y - x)\\ &\leq \mathbb{P}(S_n \geq x) + \mathbb{P}(M_n^+ \geq y)\frac{\mathbb{E}(M_{n-1}^+ - S_n)^2}{(y-x)^2}.\end{aligned}$$

Les variables M_{n-1}^+ et $S_n - M_{n-1}^+$ sont associées donc d'aprés l'inégalité (2.4) :

$$\mathbb{E}\Big(\max(X_n, X_n + X_{n-1}, \ldots, X_n + \ldots + X_1)^2\Big) \leq \mathbb{E}(S_n^2) = s_n^2.$$

Par suite :

$$\mathbb{P}(M_n^+ \geq y) \leq \mathbb{P}(S_n \geq x) + \mathbb{P}(M_n^+ \geq y)\frac{s_n^2}{(y-x)^2},$$

Maintenant si $(y-x)^2 \geq s_n^2$:

$$\mathbb{P}(M_n^+ \geq y) \leq \frac{(y-x)^2}{(y-x)^2 - s_n^2}\mathbb{P}(S_n \geq x). \tag{2.7}$$

De même pour $M_n^- = \max(0, -S_1, \ldots, -S_n)$, on trouve :

$$\mathbb{P}(M_n^- \geq y) \leq \frac{(y-x)^2}{(y-x)^2 - s_n^2}\mathbb{P}(-S_n \geq x). \tag{2.8}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} M_n^* &= \max(|S_1|, \ldots, |S_n|) = \max(S_1^+ + S_1^-, \ldots, S_n^+ + S_n^-) \\ &\leq \max(0, S_1, \ldots, S_n) + \max(0, -S_1, \ldots, -S_n) \\ &\leq M_n^+ + M_n^-. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq y) \leq \mathbb{P}\Big(M_n^+ \geq \frac{y}{2}\Big) + \mathbb{P}\Big(M_n^- \geq \frac{y}{2}\Big).$$

D'aprés les inégalités (2.7) et (2.8) et pour : $y - x \geq \sqrt{2}s_n$, on a :

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq y) \leq 2\mathbb{P}(|S_n| \geq x),$$

En choisissant : $y = \lambda s_n$ et $x = (\lambda - \sqrt{2})s_n$, on a :

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda s_n) \leq 2\mathbb{P}(|S_n| \geq (\lambda - \sqrt{2})s_n).$$

■

Chapitre 3

Théorèmes limites pour des variables aléatoires dépendantes

L'objectif de ce chapitre est d'établir deux lois fortes des grands nombres pour des familles de variables aléatoires PQD ou associées. Ces théorèmes limites sont dus à Birkel [3]. L'idées principales dans la preuve de ces deux lois étant l'utilisation d'un résultat asymptotique d'Etemadi [9]

3.1 Loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires PQD

Dans cette partie nous commençons par rappeler la loi forte des grands nombres (L.F.G.N) dans le cas indépendant identiquement distribué (i. i. d) et qui a été établie par Kolmogorov en (1929), ensuite on s'intéresse à cette loi pour des variables aléatoires deux à deux PQD.

Théorème 3.1.1. *Soit* $(X_i)_{i\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires réelles i.i.d , avec* $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ *alors :*

$$n^{-1}S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(X), \quad \textit{(presque sûrement)}$$

avec : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Théorème 3.1.2. *Soit* $(X_i)_{i\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant :*

(1) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{V}ar(X_i)}{i^2} < \infty$.

Alors :

$$n^{-1}(S_n - \mathbb{E}(S_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0.$$

Le résultat suivant est dû à Etemadi [9], il joue un rôle trés important dans la preuve du théorème qui le suit.
Avant d'énoncer le théorème, soit $\tilde{w}_n = \{w_n, n \geq 1\}$ une suite de nombres positifs telles que :

$$w_n/W_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} W_n = \infty, \quad \text{avec} \quad W_n = \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

Théorème 3.1.3. *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aéatoires positives avec des moments d'ordre deux finis, telles que :*

(i) $\sup_{i>0} \mathbb{E}(X_i) < \infty$,

(ii) $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j} \Big[w_i w_j Cov^+(X_i, X_j)\Big]/W_j^2 < \infty$.

Alors :

$$\Big(\tilde{S}_n - \mathbb{E}(\tilde{S}_n)\Big)/W_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0, \tag{3.1}$$

avec $\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$.

Preuve.
Soit $a > 1$. Pour tout $k \geq 1$, on définit : $n_k = \inf\{n : W_n \geq a^k\}$. on a : $W_n/W_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, il s'ensuit que $W_{n_k} \sim a^k$, par conséquent pour $c > 0$ et $i = 1, 2, 3, \ldots$,on a :

$$\{k : n_k \geq i\} \subset \{k : W_{n_k} \geq W_i\} \subset \{k : ca^k \geq W_i\},$$

En utilisant l'inégalité de Tchebychev, on a pour $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big\{|\tilde{S}_{n_k} - \mathbb{E}(\tilde{S}_{n_k})|/W_{n_k} > \varepsilon\Big\} &\leq c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{V}ar\tilde{S}_{n_k}/W_{n_k}^2 \\
&\leq c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\sum_{j=1}^{n_k}\sum_{i=1}^{j} w_i w_j Cov^+(X_i, X_j)\Big]/a^{2k} \\
&\leq c_1 \sum_{j=1}^{\infty} \Big[\sum_{i=1}^{j} w_i w_j Cov^+(X_i, X_j)/W_j^2\Big] < \infty,
\end{aligned}$$

Avec c_1 une constante, donc par Borel-Canttelli :

$$(\tilde{S}_{n_k} - \mathbb{E}(\tilde{S}_{n_k}))/W_{n_k} \xrightarrow{p.s} 0 \tag{3.2}$$

Maintenant, étant donné n un entier positif on peut toujours trouver $k \geq 1$: $n_k \leq n \leq n_{k+1}$:

$$W_{n_k} \leq W_n \leq W_{n_{k+1}}.$$

On obtient alors :

$$\frac{\tilde{S}_n - \mathbb{E}(\tilde{S}_n)}{W_n} \leq \frac{\tilde{S}_{n_{k+1}} - \mathbb{E}(\tilde{S}_{n_{k+1}})}{W_{n_{k+1}}} \frac{W_{n_{k+1}}}{W_{n_k}} + \frac{\mathbb{E}(\tilde{S}_{n_{k+1}} - \tilde{S}_{n_k})}{W_{n_k}}.$$

D'aprés la condition (i) et sachant que $W_{n_k} \sim a^k$ et $n_k = [a^k]$:

$$\frac{\mathbb{E}(\tilde{S}_{n_{k+1}} - \tilde{S}_{n_k})}{W_{n_k}} \leq (\sup_{i>0} \mathbb{E}(X_i))(a-1), \tag{3.3}$$

Ainsi d'aprés (3.2) et (3.3) :

$$\limsup_{n\to\infty}(|\tilde{S}_n - \mathbb{E}(\tilde{S}_n)|/W_n) \leq (\sup_{i>0} \mathbb{E}(X_i))(a-1). \tag{3.4}$$

Comme $a > 1$ pourrait être choisi arbitrairement proche de 1, la relation (3.4) entraîne (3.1). ■

Le théorème suivant établie par Birkel [3] donne la L.F.G.N pour les variables aléatoire PQD.

Théorème 3.1.4. *Soit* $\{X_j, j \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires deux à deux PQD avec une variance finie, supposons que :*

(i) $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} Cov(X_j, S_j) < \infty$,

(ii) $\sup_{j\geq 1} \mathbb{E}|X_j - \mathbb{E}(X_j)| < \infty$.

alors :

$$n^{-1}(S_n - \mathbb{E}(S_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0.$$

Preuve.

Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires PQD et soit f, g deux fonctions croissantes (respectivement décroissantes). Nous avons d'aprés la Proposition 1.1.1 :

$$Cov(f(X_1), g(X_2)) \geq 0. \tag{3.5}$$

Par conséquent les variables aléatoires $X_j - \mathbb{E}(X_j)$ sont deux à deux PQD.

On suppose que pour $j \geq 1$, $\mathbb{E}(X_j) = 0$ et nous considérons la suite :
$\{X_j^+ : j \geq 1\}$ avec $S_n^* = \sum_{j=1}^{n} X_j^+$.
Pour t réel soient : $f(t) = \max\{0, t\}$ et $g(t) = t$, les fonctions $f, g - f$ et $g + f$ sont croissantes.
Soit $i, j \geq 1$ selon la propriété (3.5) en remplaçant $1, 2$ par i, j, on a :

$$Cov(f(X_i), g(X_j)) \geq 0$$

et :

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1/2Cov\Big((g-f)(X_i), (g+f)(X_j)\Big) + 1/2Cov\Big((g+f)(X_i), (g-f)(X_j)\Big) \\ &= Cov\Big(g(X_i), g(X_j)\Big) - Cov\Big(f(X_i), f(X_j)\Big). \end{aligned}$$

Cela prouve que :

$$0 \leq Cov(X_i^+, X_j^+) \leq Cov(X_i, X_j).$$

D'aprés les hypothèses (i),(ii) et on appliquons le Théorème 3.1.3 pour $w_n = 1, n \geq 1$:

$$n^{-1}(S_n^* - \mathbb{E}(S_n^*)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0.$$

En raisonnant de la même manière pour les parties négatives : $\{X_j^- : j \geq 1\}$ avec $S_n^{**} = \sum_{j=1}^{n} X_j^-$ on obtient :

$$n^{-1}(S_n^{**} - \mathbb{E}(S_n^{**})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0.$$

D'où :

$$n^{-1}S_n = n^{-1}(S_n^* - S_n^{**}).$$

Et le fait que $\mathbb{E}(S_n^*) - \mathbb{E}(S_n^{**}) = 0$ compléte la preuve :

$$n^{-1}(S_n - \mathbb{E}(S_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0.$$

■

Remarque 3.1.1. *Pour des variables aléatoires indépendantes deux à deux (PQD), la condition* (i) *seule n'implique pas la loi forte des grands nombres. En effet : Voir l'exemple dans la page 320 dans l'article de Csörgő, Tandori et Totik [6] .*

3.2 Loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires associées

Ce paragraphe est fait pour établir la L.F.G.N pour les variables aléatoires associées.

Théorème 3.2.1. *soit $\{X_j, j \geq 1\}$ une suite de variables associées strictement stationnaire alors :*

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_1, X_j) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0. \tag{3.6}$$

en particulier, si (3.6) est vérifiée alors :

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}S_n = \mathbb{E}(X_1)$$

Le théorème précédent établie par Newman [12] donne la L.F.G.N pour des suites de variables aléatoires associées strictement stationnaire. Mais dans nos théorèmes nous intéressons qu'aux variables aléatoires associées.

Remarque 3.2.1. *Si les variables aléatoires sont associées, l'hypothèses (ii) dans Théorème 3.1.4 peut être supprimée.*

Théorème 3.2.2. *Soit $\{X_j, j \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires associées avec une variance finie, supposons que :*

(i) $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}Cov(X_j, S_j) < \infty.$

Alors :

$$n^{-1}(S_n - \mathbb{E}(S_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0.$$

Preuve.

D'aprés Théorème 1.2.1, les variables aléatoires $\{X_j - \mathbb{E}(X_j),\ j \geq 1\}$ sont associées.
On suppose que pour $j \geq 1,\ \mathbb{E}(X_j) = 0$,
Soit $\varepsilon > 0$, d'aprés l'inégalité de Tchebychev :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big\{2^{-n}|S_{2^n}| \geq \varepsilon\Big\} &\leq \varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}\mathbb{V}ar(S_{2^n}) \\ &\leq 2\varepsilon^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{n:2^n\geq j} 4^{-n}\Big)Cov(X_j, S_j) \\ &\leq \frac{8}{3\ \varepsilon^2}\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}Cov(X_j, S_j) < \infty.\end{aligned}$$

Ceci implique via Borel-Cantelli :

$$2^{-n} S_{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0. \tag{3.7}$$

Il suffit maintenant de prouver que :

$$2^{-n} \max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0.$$

Soit $n \geq 1$, d'aprés l'inégalité de Tchebychev et en appliquant Théorème 2.2.1 aux variables aléatoires : $S_{2^n+1} - S_{2^n}, \ldots, S_{2^{n+1}} - S_{2^n}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big\{2^{-n} \max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} (S_k - S_{2^n}) \geq \varepsilon\Big\} &\leq \varepsilon^{-2} 4^{-n} \mathbb{E}\Big(\max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} (S_k - S_{2^n})\Big)^2 \\ &\leq \varepsilon^{-2} 4^{-n} \mathbb{V}ar(S_{2^{n+1}} - S_{2^n}) \\ &\leq \varepsilon^{-2} 4^{-n} \mathbb{V}ar(S_{2^{n+1}}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

En remplaçant les variables aléatoires négatives X_j qui sont associeés selon Théorème 1.2.1 on trouve que :

$$\mathbb{P}\Big\{2^{-n} \max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} -(S_k - S_{2^n}) \geq \varepsilon\Big\} \leq \varepsilon^{-2} 4^{-n} \mathbb{V}ar(S_{2^{n+1}}). \tag{3.9}$$

En combinant (3.8) et (3.9), on déduit que :

$$\mathbb{P}\Big\{2^{-n} \max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}| \geq \varepsilon\Big\} \leq 2\varepsilon^{-2} 4^{-n} \mathbb{V}ar(S_{2^{n+1}}).$$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big\{2^{-n} \max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}| \geq \varepsilon\Big\} \leq 8\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-(n+1)} \mathbb{V}ar(S_{2^{n+1}}) < \infty.$$

qui entraine via le lemme de Borel-Cantelli :

$$2^{-n} \max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0. \tag{3.10}$$

Mais puisque $2^n < k \leq 2^{n+1}$, on a :

$$\frac{|S_k|}{k} \leq \frac{\max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}|}{2^n} + \frac{|S_{2^n}|}{2^n}.$$

En fin par (3.7) et (3.10) on conclue que :

$$k^{-1} S_k \xrightarrow[k\to\infty]{p.s} 0.$$

■

Remarques 3.2.1.

1. L'hypothèse (i) implique une extension au cas positivement dépendant de la condition :
$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}\mathbb{V}ar(X_j) < \infty.$$
supposée dans la loi forte des grands nombres de Kolmogorov pour les variables aléatoires indépendantes non-identiquement distribuées.

2. L'exemple suivant montre que le convergence presque sûre de $\sum_{j=1}^{n} j^{-1}(X_j - \mathbb{E}(X_j))$ ne peut pas être obtenue à partir de (i) :

Exemple 3.2.1. *Soit X une variables aléatoire avec :*

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad et \quad \mathbb{E}(X^2) = 1.$$

Pour $j \leq 1$ posons : $X_j = \log(j+1)^{-1}X$, Selon le Théorème 1.2.1 : $\{X_j, j \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires associées (deux à deux PQD) avec :

$$\mathbb{E}(X_j) = 0 \quad et \quad \mathbb{E}(X_j^2) = \log(j+1)^{-2}.$$

Par conséquent les hypothèses de nos théorèmes sont vérifiés. d'où la loi forte des grands nombres, mais :

$$\sum_{j=1}^{n} j^{-1}(X_j - \mathbb{E}(X_j)) = \Big(\sum_{j=1}^{n} j^{-1}\log(j+1)^{-1}\Big)X.$$

Cette dernière série est divergente.

Résumé

Dans ce mémoire nous nous intéressons aux propriétés des variables aléatoires positivement dépendantes par quadrant et associées. Nous étudions entre autres la loi forte des grands nombres établie par Birkel pour ces deux familles de variables aléatoires. Ces théorèmes limites améliorent les résultats classiques de Kolmogorov, en remplaçant la condition d'indépendance par des contraintes plus faibles.

Abstract

In this Master thesis we are interested in the properties of positively quadrant dependent and associated random variables. We study among other things the strong law of large numbers established by Birkel for these two families of random variables. These limit theorems improve the classical results of Kolmogorov, by replacing the independence requirement with weaker constraints.

Bibliographie

[1] Bernou, Ismahan, 2017. *Convergence des séries de variables aléatoires sous-gaussiennes*, Mémoire de master en mathématique, Université Abou Bakr Belkaid- Tlemcen.

[2] Birkel, Thomas, 1988. *Moment bounds for associated sequences.* The annals of Probability, 1184-1193.

[3] Birkel, Thomas, 1989. *A note on the strong law of large numbers for positively dependent random variable*, Stat. Probab. Lett. 7, 17-20.

[4] Boukhalfa, Asema, 2019. *Quelques lois fortes des grands nombres*, Mémoire de master en mathématique, Université Abou Bakr Belkaid- Tlemcen.

[5] Buluniski, A., and Shashkin, A. 2007 *Limit theorems for associated random fields and relates systems.* World Scientific.

[6] Csörgő, S., Tandori, K., and Totik, V. 1983, *On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables.* Acta Math. Hung, 319-330.

[7] Ebrahimi, N. and Ghosh, M., 1981. *Multivariate negative dependence*, Comm. Statist.Theory Methods, 307-337.

[8] Esary, J.,F. Proschan and D. Walkup, 1967. *Association of random variables with applications*, Ann. Math. Statist, 1466-1474.

[9] Etemadi, N., 1983, *Stability of sums of weighted nonnegative random variables*, J. Multivariate Anal, 361-365.

[10] Joag-Dev, k. and F. Proschan (1983), *Negative association of random variables with applications*, Ann. Statist, 286-295.

[11] Lehmann, E. L., 1966, *Some concepts of dependence*,Ann. Math. Statist. 37, 1137-1153.

[12] Newman, C. M. 1984. *Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables.* Lecture Notes-Monograph Series, 127-140.

[13] Newman, C. M. and A.L. Wright, 1982, *Associated random variables and martingale inequalities*, Z. Wahrsch. Verw. Geb. 59, 361-371.

[14] Oliveira, P. E. 2012, *Asymptotics for associated random variables.* Springer Science & Business Media.

[15] Shao, Q. M., Yu, H. 1996, *Weak convergence for weighted empirical processes of dependent sequences.* Ann. Probab, 2098-2127.