

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Option : Statistiques et Probabilités approfondies

présenté par

BEY Abdellatif

Soutenu le : 30 / 09 / 2021

Introduction aux matrices aléatoires et loi de Marcenko-Pastur

Soutenu devant le jury composé de :

<i>M^{me}</i> M. KORSO FECIANE	MCA Université de Tlemccen	Présidente
<i>M^{me}</i> W. BENYELLES	MCB Université de Tlemccen	Examinatrice
<i>M^{me}</i> Z. KHETTAB	MAA Université de Tlemccen	Encadrante

Année Universitaire : 2020-2021

Dedicace

*Je dédie ce travail à
mon cher père et ma chère mère,
à mes chers frères et soeurs,
ainsi qu'à mes chers amis Yassine, Ayoub,
Mohammed.*

*"Les bienfaits que nous avons reçus de
nos parents sont les plus grands de tous."
Socrate ; Le monde grec - Ve s. av. J.-C.*

Remerciement

Avant tout, je remercie ALLAH de m'avoir donné les forces qui m'ont permis de dépasser toutes les difficultés pour réaliser ce travail.

J'exprime mes sincères remerciements et ma gratitude à mon mentor, Mme Z. Khettab pour avoir accepté ma supervision et pour ses conseils inestimables pendant ce travail.

Mes sincères remerciements vont à Mme M. Korso Feciane, maître de conférences et professeur à la Faculté des sciences, Université d'Abou Bekr Belkaid, pour avoir accepté de présider mon jury de soutenance.

Je remercie également Mme W. Benyelles, maître de conférences à la faculté des Sciences, Université Abou Bekr Belkaid de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'examiner mon mémoire de Master.

Mes remerciements vont aussi à tous mes professeurs qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à l'accomplissement de ce travail.

Plus que quiconque, je dois remercier ma famille qui m'a soutenu pendant mes études et qui m'a donné confiance, courage et sentiment de sécurité.

Mes remerciements vont également à mes chers amis pour les sympathiques moments que nous avons passés ensemble.

Enfin, je remercie gracieusement toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction	2
1 Matrices Aléatoires	3
1.1 Généralités	3
1.1.1 Moments d'une matrice aléatoire	3
1.1.2 Mesure spectrale	4
1.1.3 Traces d'une matrice aléatoire	4
1.1.4 Lemme de Borel-Cantelli	4
1.1.5 Permutation	5
1.2 Quelques exemples de matrices aléatoires	5
1.2.1 Matrice de Wigner	5
1.2.2 Matrice de Wishart	5
1.2.3 Matrice de covariance empirique	6
1.2.4 Ensembles Gaussiens	6
2 Loi de Marcenko-Pastur	8
2.1 Convergence de la distribution spectrale	8
2.1.1 Théorème de Marcenko-Pastur	9
2.1.2 Loi du demi-cercle	9
2.1.3 Preuve du Théorème de Marcenko-Pastur	11
2.1.4 Valeurs propres extrémales	20
2.2 Structure particulière de la matrice de covariance	20
2.2.1 Méthode de la résolvante	21
2.2.2 Résultat du type Marcenko-Pastur	21
3 Représentation de la loi de Marcenko-Pastur	23
3.1 Introduction	23
3.2 Exemples avec différentes valeurs de paramètre	23
3.3 Code des graphes	28
3.3.1 Programme de la loi du demi-cercle	28
3.3.2 Programme de la loi de M.P	28
Conclusion	28
Bibliographie	30

Introduction

La théorie des matrices aléatoires est un outil majeur dans de nombreux domaines, notamment la théorie des nombres, la combinatoire, la physique quantique, le traitement du signal, les communications sans fil, l'analyse statistique multivariée, la finance, etc.

De plus, elle relie plusieurs branches mathématiques en utilisant des outils de différents domaines incluant : analyse classique, théorie des graphes, analyse combinatoire, polynômes, théorie des probabilités libres, etc.

Dans certaines études probabilistes en quelques branches des mathématiques ou physique, il arrive que l'on étudie simultanément plus d'une variable aléatoire. La théorie des matrices aléatoires est née de ses applications. Elle est apparue dans les années 30 à l'initiative des statisticiens comme Wishart et elle a connu un nouvel essor dans les années 50 par les travaux de Wigner en physique nucléaire.

La loi de Marcenko-Pastur s'intéresse à la distribution asymptotique des valeurs propres d'une classe de matrices aléatoires : Le premier résultat sur la distribution de la limite spectrale des matrices de covariance était introduit par Marcenko et Pastur en 1967. Ils ont prouvé la convergence de la mesure spectrale empirique lorsque la dimension de la matrice tend vers l'infini vers une mesure déterministe dite loi Marcenko-Pastur.

L'objectif de cette thèse est de donner dans un premier temps une introduction à la théorie des matrices aléatoires à savoir la structure particulière de certaines matrices fréquemment utilisées dans cette théorie.

Ensuite, mettre la lumière sur le résultat de Marcenko-pastur ainsi que des travaux récents du même type, par différentes méthodes.

Dans le premier chapitre, on donne les définitions de quelques matrices aléatoires, et on étudie les modèles GUE, GOE et GSE.

Au second chapitre, on s'intéresse au comportement asymptotique de grandes matrices de covariances et on établit le théorème de Marcenko-pastur avec une approche qui repose sur la méthode des moments.

On montre que dans le même contexte que la distribution spectrale empirique peut être obtenue pour une autre structure de matrice de covariance, par la méthode de la résolvante.

Enfin, le dernier chapitre est consacré aux représentations graphiques de la loi de Marcenko-Pastur pour des différentes valeurs de paramètre lié à la dimension des matrices étudiées.

Chapitre 1

Matrices Aléatoires

1.1 Généralités

Soit $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices de dimension $(p \times n)$.

Définition :

Une matrice aléatoire dans $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{M}(\mathbb{C})_{p,n}$) est une matrice dont les éléments sont des variables aléatoires réelles (resp. complexe), définie comme suit

$$X = [X_{ij}] = \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_n \end{pmatrix},$$

$$i = 1, \dots, p \quad j = 1, \dots, n.$$

X_i sont des vecteurs aléatoires dans \mathbb{R}^n , où $X'_i = (X_{i1}, \dots, X_{ip})$, et $(.)'$ désigne la transformée du vecteur.

1.1.1 Moments d'une matrice aléatoire

Certains moments, utilisés couramment pour caractériser une matrice aléatoire, sont connus sous un nom particulier.

Moyenne d'une matrice aléatoire

Soit X une matrice aléatoire de dimension $(p \times n)$ sa moyenne est une matrice $(p \times n)$ donnée comme suit

$$\mathbb{E}(X) = [\mu_{ij}] = M,$$

pour tout $(i = 1, \dots, p)$ et $(j = 1, \dots, n)$; $\mu_{ij} = \mathbb{E}(X_{ij})$.

Matrice de variance-covariance

La variance de X est une matrice $(pn \times pn)$ définie par

$$V(X) = [Cov(X_{ij}, X_{kl})],$$

$$k = 1, \dots, p \quad l = 1, \dots, n.$$

1.1.2 Mesure spectrale**Définition :**

Pour une matrice M_n , $(n \times n)$, de valeurs propres λ_i , $1 \leq i \leq n$, on définit la mesure spectrale de M_n par

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i},$$

où δ_{λ_i} est la mesure de Dirac.

1.1.3 Traces d'une matrice aléatoire**Définition :**

Soit $X = [X_{ij}]$ une matrice aléatoire $(n \times n)$, alors la trace de la matrice X est la somme des coefficients aléatoires diagonaux et on écrit

$$tr(X) = \sum_{i=1}^n X_{ii}.$$

Lemme :

Soit $X = [X_{ij}]$ une matrice aléatoire $(n \times n)$, et soient $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ les valeurs propres associées à la matrice X , alors

$$tr(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

1.1.4 Lemme de Borel-Cantelli**Lemme :**

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{M}_n, \mathbb{P})$, considérons une suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathbb{M}_n . Si

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty,$$

alors

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0.$$

1.1.5 Permutation

La combinatoire et en particulier la permutation s'intéresse aux méthodes permettant de compter les éléments dans des ensembles finis.

Définition :

Une permutation P sans répétition d'un ensemble fini E est une bijection de E dans E .

Remarque 1 : Si E est l'ensemble des n premiers entiers $1, \dots, n$, une permutation P sans répétition de E dans E détermine l'ordre total des éléments de E donnée par la suite $p(1), \dots, p(n)$.

Remarque 2 : Le nombre de permutation possible de k éléments parmi n éléments distincts sera notée $P(n, k)$, et on dit que

$$P(n, k) = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

1.2 Quelques exemples de matrices aléatoires

1.2.1 Matrice de Wigner

Rappelons qu'une matrice $M_n = [X_{ij}]$ est dite symétrique si

$$X_{ij} = X_{ji}^T.$$

Elle est dite hermitienne si,

$$X_{ij} = \overline{X_{ji}},$$

où $\overline{X_{ji}}$ désigne le conjugué de l'élément.

Définition : (Cas réel)

Une matrice symétrique aléatoire M_n d'ordre n est une matrice de Wigner si

- Ses coefficients (X_{ij}) sont (iid), ont une moyenne nulle et une variance égale à 1, avec la possibilité que les éléments diagonaux et les éléments non diagonaux ont des distributions différentes.

Définition : (Cas complexe)

Une matrice hermitienne aléatoire M_n d'ordre n est une matrice de Wigner si

- Pour $i < j$, les parties réelles et parties imaginaires des (X_{ij}) sont (iid), ont une moyenne nulle et une variance égale à $\frac{1}{2}$.

- Ses coefficients diagonaux sont (iid), centrés et réduits. Ils sont indépendants des coefficients non diagonaux.

1.2.2 Matrice de Wishart

Les matrices de Wishart constituent une autre classe de matrices aléatoires introduites initialement en statistiques, et représentent les matrices de cova-

riance des données statistiques.

Définition :

Une **matrice de Wishart** est une matrice ($n \times n$) de la forme

$$W = X^\top X,$$

où X est une matrice rectangulaire ($p \times n$) à coefficients X_{ij} réels ou complexes de distribution gaussienne.

Si X est à coefficients complexes, X^\top désigne la matrice conjuguée de X .

Si X est à coefficients réels, X^\top désigne la matrice transposée de X .

1.2.3 Matrice de covariance empirique

Définition :

Une **matrice de covariance empirique** est une matrice ($p \times p$) de la forme,

$$S_n = \frac{1}{p} X X^\top,$$

où X est une matrice rectangulaire ($p \times n$).

1.2.4 Ensembles Gaussiens

Les ensembles gaussiens ont été introduits par Wigner dans les années 1950 où il a commencé avec un modèle simple pour une matrice aléatoire dont les entrées ont une loi uniforme sur $[-1, 1]$. Wigner a également donné la loi conjointe des valeurs propres pour les ensembles Gaussiens.

-Ensemble gaussien orthogonal (GOE)

L'ensemble Gaussien Orthogonal ou Gaussian Orthogonal Ensemble est un sous ensemble de l'ensemble des matrices symétriques réelles \mathbb{S}_n .

Définition :

Soit M_n une matrice aléatoire de Wigner réelle.

On dit que M_n est dans GOE si,

$$M_n = \frac{A_n + A_n^\top}{\sqrt{2}},$$

où $A_n = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ et les a_{ij} sont iid.

-Ensemble gaussien unitaire (GUE)

L'ensemble Gaussien Unitaire ou Gaussian Unitary Ensemble est un sous ensemble de l'ensemble des matrices hermitiennes \mathbb{H}_n

Définition :

Soit M_n une matrice aléatoire de Wigner complexe.
On dit que M_n est dans GUE si,

$$M_n = \frac{A_n + \overline{A_n}}{\sqrt{2}},$$

où $A_n = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ et les a_{ij} sont iid.

-Ensemble gaussien symplectique (GSE)**Définition :**

Les matrices **symplectiques** sont les matrices S de taille $2n \times 2n$ à coefficients complexes telles que

$$S^\top Z S = Z,$$

où $Z = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité.

Chapitre 2

Loi de Marcenko-Pastur

Dans la théorie des matrices aléatoires, la distribution de Marcenko-Pastur, ou la loi de Marcenko-Pastur, décrit le comportement asymptotique des valeurs singulières de grandes matrices aléatoires rectangulaires à entrées indépendantes identiquement distribuées.

Le théorème qui donne la densité limite des valeurs propres de la matrice de covariance empirique, est nommé d'après les mathématiciens Ukrainiens Vladimir Marcenko et Leonid Pastur qui ont prouvé ce résultat en 1967.

2.1 Convergence de la distribution spectrale

Soient $X = (X_1 X_2 \dots X_n)$ une matrice aléatoire dans $\mathbb{R}^{n \times p}$, et $S_n = \frac{1}{p} X X^\top$ la matrice de covariance empirique dans $\mathbb{R}^{p \times p}$, de mesure spectrale μ_n définie dans le paragraphe 1.1.2.

2.1.1 Théorème de Marcenko-Pastur

Théorème 1[2]

On suppose que les éléments X_{ij} de la matrice X sont iid, tels que $\mathbb{E}(X_{ij}) = 0$, $\mathbb{E}(X_{ij}^2) = 1$, et $p = p(n)$ vérifie $y_n = \frac{p}{n} \rightarrow y > 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Alors, la mesure spectrale μ_n converge presque sûrement vers μ ,

$$\mu_n \rightarrow \mu \quad p.s.$$

où μ est une mesure déterministe dont la densité est donnée par

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{2\pi xy} \sqrt{(b-x)(x-a)} I_{(a \leq x \leq b)},$$

où a et b sont des fonctions de y données par

$$\begin{cases} a(y) = (1 - \sqrt{y})^2 \\ b(y) = (1 + \sqrt{y})^2. \end{cases}$$

Remarque 1 :

-Si $y_n > 1$, dans ce cas $p > n$, puisque $\text{rang}(S_n) = p \wedge n$ nous aurons $(p - n)$ valeurs propres nulles et comme $y_n = \frac{p}{n} \rightarrow y > 0$ quand $n \rightarrow \infty$, donc approximativement $n(y - 1)$ valeurs propres nulles. La masse de 0 est $(1 - y^{-1})$ dans la mesure limite.

-Les valeurs propres non nulles de XX^T et $X^T X$ sont les mêmes, on peut dire dans ce cas que la limite de la fonction de répartition est,

$$(1 - y^{-1})\delta_0 + \mu.$$

2.1.2 Loi du demi-cercle

La loi du demi-cercle appelée aussi loi semi-circulaire ou encore loi de Wigner est la loi suivante,

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(4 - x^2)} I_{(-2 \leq x \leq 2)}.$$

Proposition 1[6]

Si n est impair $\frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^n \sqrt{4 - x^2} dx = 0$ (évident).

Si $n = 2k$ avec $k \geq 1$, $\frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^{2k} \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^{2k} \sqrt{4-x^2} dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2k} \sqrt{4-x^2} dx; \text{ posons } (x = 2 \cos(\theta)), \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos(\theta))^{2k} \sqrt{4-4 \cos^2(\theta)} 2 \sin(\theta) d\theta \\
&= \frac{4^{k+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\theta) \sin^2(\theta) d\theta \\
&= \frac{4^{k+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\theta) (1 - \cos^2(\theta)) d\theta \\
&= \frac{4^{k+1}}{\pi} \left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} d\theta}_{L_1} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2}(\theta) d\theta}_{L_2} \right).
\end{aligned}$$

On sait que $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, donc on peut écrire,

$$\begin{aligned}
L_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{it} + e^{-it})^{2k}}{2^{2k}} d\theta \\
&= \frac{1}{4^k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{2k} \binom{2k}{l} e^{il\theta} e^{-i(2k-l)\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{4^k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{2k} \binom{2k}{l} e^{-2i(k-l)\theta} d\theta \text{ (en utilisant le développement binomial)} \\
&= \frac{1}{4^k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{l=1}^k \binom{2k}{k-l} (e^{2il\theta} + e^{-2il\theta}) + \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2^{2k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{l=1}^k \binom{2k}{k-l} \cos(2l\theta) + \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2^{2k-1}} \sum_{l=1}^k \binom{2k}{k-l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2l\theta) d\theta + \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= \frac{1}{2^{2k-1}} \sum_{l=1}^k \binom{2k}{k-l} \left[\frac{\sin(2l\theta)}{2l} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k} \\
&= \frac{\pi}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k}.
\end{aligned}$$

Le même calcul pour L_2 , nous donne $L_2 = \frac{\pi}{2^{2k+3}} \binom{2k+2}{k+1}$.

Donc,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^{2k} \sqrt{4-x^2} dx &= \frac{4^{k+1}}{\pi} [L_1 - L_2] \\
 &= \frac{4^{k+1}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k} - \frac{\pi}{2^{2k+3}} \binom{2k+2}{k+1} \right) \\
 &= 4^{k+1} \left(\frac{1}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k} - \frac{1}{2^{2k+3}} \binom{2k+2}{k+1} \right) \\
 &= 2 \binom{2k}{k} - \frac{1}{2} \binom{2k+2}{k+1} \\
 &= \frac{1}{k} \binom{2k}{k-1} \\
 &= \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}.
 \end{aligned}$$

Remarque 2 :

Si $y = 1$, alors $a = 0, b = 4$, et on a

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(4-x)x} I_{0 \leq x \leq 4},$$

qui est la densité de la distribution de la loi du demi-cercle avec l'application $x \rightarrow x^2$ (voir Figure 1 chapitre 3).

2.1.3 Preuve du Théorème de Marcenko-Pastur

La preuve sera basée sur la méthode des moments, sa stratégie est de montrer que pour chaque entier $k = 1, 2, \dots$ le $k^{\text{ème}}$ moment de la distribution spectrale empirique converge en probabilité vers le $k^{\text{ème}}$ moment de la loi limite correspondante i.e :

$$\int x^k d\mu_n \rightarrow \int x^k d\mu.$$

Pour cela à l'aide du lemme de Borel-Cantelli, on montre les deux points suivants pour aboutir au resultat cherché.

1. $\mathbb{E} \int x^k d\mu_n \rightarrow \int x^k d\mu$ quand $n \rightarrow \infty$.
2. $\sum_{n \geq 1} \text{Var}(\int x^k d\mu_n) < \infty$.

Convergence de l'espérance

On commence par, $\mathbb{E} \int x^k d\mu_n \rightarrow \int x^k d\mu$.

On sait que $a + b = 2(1 + y)$ et $ab = (1 - y)^2$, on a :

$$\sqrt{(b-x)(x-a)} = \sqrt{4y - (x - (1+y))^2},$$

si on pose le changement de variable $z = \frac{x-(1+y)}{\sqrt{y}}$, avec $dx = \sqrt{y}dz$, et $a \leq x \leq b$ devient $-2 \leq z \leq 2$,

on obtient :

$$\begin{aligned} \int x^k d\mu &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b x^{k-1} \frac{\sqrt{4y - (x - (1+y))^2}}{y} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^{k-1} \frac{\sqrt{4y - (x - (1+y))^2}}{y} \sqrt{y} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 (\sqrt{y}z + 1 + y)^{k-1} \sqrt{4 - z^2} dz. \end{aligned}$$

À l'aide de la somme de Riemann associée à une subdivision équirépartie, on trouve

$$\int x^k d\mu = \sum_{k \geq 1} (\sqrt{y}z + 1 + y)^{k-1} \sqrt{4 - z^2}.$$

Rappelons que les moments impaires et paires de la loi du demi-cercle sont donnés par,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 z^{2k+1} \sqrt{4 - z^2} dz = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 z^{2k} \sqrt{4 - z^2} dz = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}.$$

Ce qui nous permet, en utilisant les développements binomiaux et l'identité de Vandermonde d'écrire,

$$\begin{aligned}
 \int x^k d\mu &= \sum_{k \geq 1} (\sqrt{yz} + 1 + y)^{k-1} \sqrt{4 - z^2} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \sum_{2t=0}^{k-1} (\sqrt{yz})^{2t} (1+y)^{k-1-2t} \binom{k-1}{2t} \sqrt{4 - z^2} \\
 &= \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} y^t (1+y)^{k-1-2t} \binom{k-1}{2t} \binom{2t}{t} \frac{1}{1+t} \\
 &= \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} y^t (1+y)^{k-1-2t} \frac{(k-1)!}{(k-1-2t)! t! (t+1)!} \\
 &= \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} y^{t+s} \frac{(k-1)!}{t! (t+1)! (k-1-2t-s)! s!} \\
 &= \sum_{r=0}^{k-1} y^r \sum_{t=0}^{\min(r, k-1-r)} \frac{(k-1)!}{t! (t+1)! (k-1-r-t)! (r-t)!} \\
 &= \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} y^r \binom{k}{r} \sum_{t=0}^{\min(r, k-1-r)} \binom{r}{t} \binom{k-r}{t+1} \\
 &= \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} y^r \binom{k}{r} \binom{k}{r+1} \\
 &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{y^r}{r+1} \binom{k}{r} \binom{k-1}{r}
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\int x^k d\mu = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{y^r}{r+1} \binom{k}{r} \binom{k-1}{r}} \quad (2.1)$$

Remarquons maintenant que,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \int x^k d\mu_n &= \mathbb{E} \int x^k d\left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \delta_{\lambda_i}(x)\right) \\
 &= \frac{1}{p} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i^k \int d\delta_{\lambda_i}(x) \right) \\
 &= \frac{1}{p} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i^k \underbrace{\int \delta_{\lambda_i}(x) dx}_{=1} \right) \\
 &= \frac{1}{p} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i^k \right) \\
 &= \frac{1}{p} \mathbb{E} (Tr(S_n^k)) \\
 &= \frac{1}{p} \mathbb{E} \left(Tr\left(\frac{XX^\top}{n}\right)^k \right), \text{ d'où}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E} \int x^k d\mu_n = \frac{1}{pn^k} \mathbb{E} (Tr(XX^\top)^k)}. \quad (2.2)$$

• Si $k = 1$,

$$Tr(XX^\top) = \sum_{i,j=1}^{p,n} X_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^{p,n} X_{ij} X_{ij}.$$

• Si $k = 2$,

$$\begin{aligned}
 Tr(XX^\top)^2 &= \sum_{j=1}^p X_{1,j}^4 + \sum_{j=1}^n X_{2,j}^4 + 2 \sum_{j=1}^n X_{1,j}^2 X_{2,j}^2 \\
 &= \sum_{1 \leq i_1, i_2 \leq p} \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq n} X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} X_{i_2 j_2} X_{i_1 j_2}.
 \end{aligned}$$

• Alors par récurrence on conclut que,

$$Tr(XX^\top)^k = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq p} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n} X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} \dots X_{i_k j_k} X_{i_1 j_k}.$$

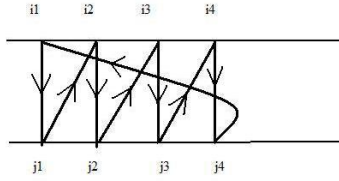
Donc on peut exprimer l'équation (2.2) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int x^k d\mu_n &= \frac{1}{pn^k} \mathbb{E} \left[\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq p} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n} X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} \dots X_{i_k j_k} X_{i_1 j_k} \right] \\ &= \frac{1}{pn^k} \mathbb{E} \left[\sum_{I, J} X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} \dots X_{i_k j_k} X_{i_1 j_k} \right] \\ &= \frac{1}{pn^k} \sum_{I, J} \mathbb{E}(I, J), \end{aligned}$$

avec, $I \in [p]^k$ et $J \in [n]^k$.

Ce qui correspond à une boucle dirigée sur le graphe biparti.

Par exemple si $k = 4$, alors pour i_1, i_2, i_3, i_4 et j_1, j_2, j_3, j_4 typiques nous avons l'image suivante,



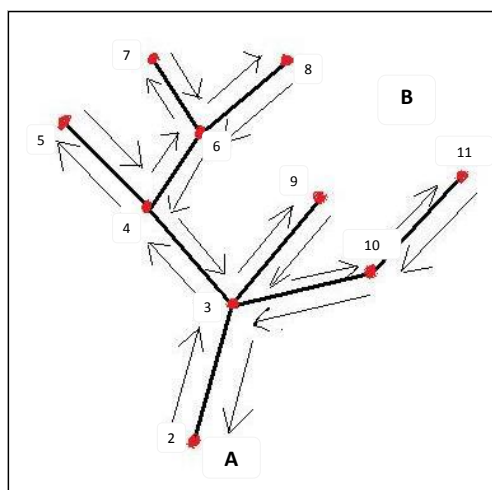
Comme dans le cas de Wigner[6], nous voyons que chaque arête $(i_1, i_2, \dots, i_k; j_1, j_2, \dots, j_k)$ doit apparaître au moins deux fois, par exemple dans le cas $k = 2$ on a,

$$\mathbb{E} \int x^k d\mu_n = \sum_{I,J} X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} X_{i_2 j_2} X_{i_1 j_2},$$

ainsi que dans l'exemple $k = 4$, on remarque que chaque arête est répétée au moins deux fois.

Si un arête n'apparaît pas au moins deux fois alors, $\mathbb{E}(I, J) = 0$.

Donc on a $2k$ étapes dans la boucle dirigée, au plus k arêtes et $k + 1$ sommets dans le schéma suivant.



Les sommets qui peuvent être atteints en étapes paires sont les sommets de I, les autres sont les sommets de J.

Ensuite, nous posons la question : combien y a-t-il d'arbres doubles pour une forme donnée? Ici par la forme d'un arbre, nous entendons les sommets numérotés par ordre d'apparition. Par exemple, si on commence par A

$$(2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 6\ 7\ 6\ 8\ 6\ 4\ 3\ 9\ 3\ 10\ 11\ 10\ 3\ 2)$$

ou, si on commence par B

$$(12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 16\ 18\ 16\ 14\ 13\ 19\ 13\ 6\ 7\ 6\ 13\ 12).$$

les deux formes précédentes donnent une interprétation de la même figure ci-dessus.

Pour cet exemple il existe 10 sommets (*i.e* : $k = 9$),

les sommets qui peuvent être atteints en étapes paires sont les sommets de I suivants,

$$(2\ 4\ 4\ 7\ 8\ 4\ 9\ 10\ 10\ 2)$$

c-à-d sans répétition les sommets de $I = 6$, et les sommets de $J = 4$.

Et en général, on sait que, $0 \leq r \leq k - 1$.

On a $k + 1$ sommets, $r + 1$ sommets de I, et $k - r$ sommets de J.

Dans l'exemple précédent les sommets de $I = r + 1 = 6$, donc $r = 5$, et les sommets de $J = k - r = 4$.

Donc, on peut dire que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int x^k d\mu_n &= \frac{1}{pn^k} \sum_{I,J} \mathbb{E}(I, J) \\ &= \frac{1}{pn^k} \sum_{r=0}^{k-1} P(p, r + 1)P(n, k - r) \cdot \text{card}\{\text{forme d'arbres doubles avec les sommets de I et J}\}. \end{aligned}$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
 P(p, r+1)P(n, k-r) &= p(p-1)\dots(p-r)n(n-1)\dots(n-k+r+1) \\
 &= p^{r+1}n^{k-r} \\
 &= p^{r+1}n^{k-r}\frac{np^k}{np^k} \\
 &= \frac{np^k n^{k-r-1}}{p^{k-r-1}} \\
 &= np^k \left(\frac{n}{p}\right)^{k-r-1} \\
 &= np^k \left(\frac{p}{n}\right)^{r+1-k} \\
 &= np^k \left(\frac{p}{n}\right)^r \left(\frac{p}{n}\right)^{1-k}.
 \end{aligned}$$

De l'autre part, comme pour Wigner[6], on a
 card{forme d'arbres doubles avec les sommets de I et J} = $\frac{1}{r+1} \binom{k}{r} \binom{k-1}{r}$.

Ce qui donne,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \int x^k d\mu_n &= \frac{1}{pn^k} \sum_{r=0}^{k-1} np^k \left(\frac{p}{n}\right)^r \left(\frac{p}{n}\right)^{1-k} \frac{1}{r+1} \binom{k}{r} \binom{k-1}{r} \\
 &= \sum_{r=0}^{k-1} y_n^r \frac{1}{r+1} \binom{k}{r} \binom{k-1}{r}, \quad \text{où } y_n = \frac{p}{n}.
 \end{aligned}$$

Comme $y_n \rightarrow y$ quand $n \rightarrow \infty$, avec (2.1) on conclut que,

$$\boxed{\mathbb{E} \int x^k d\mu_n \rightarrow \sum_{r=0}^{k-1} y^r \frac{1}{r+1} \binom{k}{r} \binom{k-1}{r} = \int x^k d\mu.} \quad (2.3)$$

Majoration de la variance

Dans ce paragraphe, on veut avoir $\sum_{n \geq 1} \text{var}(\int x^k d\mu_n) < \infty$, pour cela, on montre que,

$$\text{Var}(\int x^k d\mu_n) \leq \frac{C_k}{n^2},$$

où C_k est une constante indépendante de n .

On a,

$$\text{Var}(\int x^k d\mu_n) = \mathbb{E} \left(\int x^k d\mu_n \right)^2 - \left(\mathbb{E} \int x^k d\mu_n \right)^2.$$

D'après le calcul de l'espérance développé précédemment,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\int x^k d\mu_n) &= \mathbb{E} \left(\int x^k d\mu_n \right)^2 - \left(\mathbb{E} \int x^k d\mu_n \right)^2 \\
 &= \frac{1}{(pn^k)^2} \mathbb{E}(\text{Tr}(XX^\top)^{2k}) - \left(\frac{1}{pn^k} \mathbb{E}(\text{Tr}(XX^\top)^k) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{(pn^k)^2} \left[\mathbb{E} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq p} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_{2k} \leq n} X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} \dots X_{i_{2k} j_{2k}} X_{i_1 j_{2k}} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\mathbb{E} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq p} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n} X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} \dots X_{i_k j_k} X_{i_1 j_k} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{(pn^k)^2} \left[\sum_{I, J} \mathbb{E}(X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} \dots X_{i_{2k} j_{2k}} X_{i_1 j_{2k}}) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{I, J} \mathbb{E}(X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} \dots X_{i_k j_k} X_{i_1 j_k}) \mathbb{E}(X_{i_{k+1} j_{k+1}} X_{i_{k+2} j_{k+1}} \dots X_{i_{2k} j_{2k}} X_{i_{k+1} j_{2k}}) \right],
 \end{aligned}$$

où $I \in [p]^{2k}$ et $J \in [n]^{2k}$.

Donc, si

$$\mathbb{E}(X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} \dots X_{i_{2k} j_{2k}} X_{i_1 j_{2k}}) = \mathbb{E}(X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} \dots X_{i_k j_k} X_{i_1 j_k}) \mathbb{E}(X_{i_{k+1} j_{k+1}} X_{i_{k+2} j_{k+1}} \dots X_{i_{2k} j_{2k}} X_{i_{k+1} j_{2k}}),$$

ou bien,

$$\mathbb{E}(X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} \dots X_{i_{2k} j_{2k}} X_{i_1 j_{2k}}) = 0 = \mathbb{E}(X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} \dots X_{i_k j_k} X_{i_1 j_k}) \mathbb{E}(X_{i_{k+1} j_{k+1}} X_{i_{k+2} j_{k+1}} \dots X_{i_{2k} j_{2k}} X_{i_{k+1} j_{2k}}),$$

alors, $\text{Var}(\int x^k d\mu_n) = 0$.

Si non, de la même façon que pour l'espérance, il faut que toute arête de $\mathbb{E}(I, J)$ soit traversée au moins deux fois, ce qui permet, en utilisant les mêmes calculs comme avec l'espérance, d'avoir

$$\text{Var}(\int x^k d\mu_n) \leq \frac{C_k}{n^2}.$$

Ceci implique que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[\left| \int x^k d\mu_n - \mathbb{E}(\int x^k d\mu_n) \right|^2 \right] < +\infty,$$

et donc, par le lemme de Borel-Cantelli,

$$\boxed{\left(\int x^k d\mu_n - \mathbb{E}(\int x^k d\mu_n) \right) \longrightarrow 0 \quad p.s} \quad (2.4)$$

D'après (2.3) et (2.4) on en déduit que,

$$\int x^k d\mu_n \longrightarrow \int x^k d\mu \quad p.s.$$

On a donc bien,

$$\mu_n \longrightarrow \mu \quad p.s.$$

Ceci termine la démonstration du théorème .

2.1.4 Valeurs propres extrémales

Soit S_n une matrice de covariance empirique et désignons par

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p,$$

ses valeurs propres ordonnées. Appelons

$$\lambda_{\min}(S_n) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{si } p \leq n \\ \lambda_{p-n+1} & \text{si } p > n. \end{cases}$$

Remarque 3[6]

Si $p > n$ alors, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{p-n} = 0$.
On peut établir le théorème suivant.

Théorème 2[6]

On suppose que les éléments X_{ij} de la matrice X sont iid, tels que $\mathbb{E}(X_{ij}) = 0$, $\mathbb{E}(X_{ij}^2) = 1$, $\mathbb{E}(X_{ij}^4) < \infty$ et $p = p(n)$ vérifie $\frac{p}{n} \longrightarrow y > 0$ quand $p \longrightarrow \infty$.

Alors,

$$\lambda_{\min}(S_n) \longrightarrow (1 - \sqrt{y})^2 \quad , n \longrightarrow +\infty,$$

et

$$\lambda_{\max}(S_n) \longrightarrow (1 + \sqrt{y})^2 \quad , n \longrightarrow +\infty.$$

2.2 Structure particulière de la matrice de covariance

Dans ce paragraphe, on va donner l'idée de la démonstration du théorème de Marcenko-Pastur pour les matrices aléatoires, de colonnes iid et une structure de dépendance générale à l'intérieur des colonnes, par la méthode de la résolvante.

2.2.1 Méthode de la résolvante

Soit A une matrice $(n \times n)$, et $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i}$ sa mesure spectrale, si on note $G_A = (A - zI)^{-1}$ la résolvante de A , alors $\forall z \in \mathbb{C}$, avec $Im(z) > 0$,

$$m_n(z) = \frac{1}{n} Tr(G_A) = \int \frac{1}{\lambda - z} d\mu_n,$$

est la transformée de Cauchy-Stieltjes de la fonction μ_n .

Comme la transformée de Cauchy-Stieltjes caractérise complètement la fonction de répartition empirique, donc pour montrer que

$$\mu_n \longrightarrow \mu \quad p.s.,$$

il suffit de montrer que,

$$m_n(z) \longrightarrow m(z) \quad p.s., \quad \forall z \in \mathbb{C}, \text{ avec } Im(z) > 0,$$

où $m(z) = \int \frac{1}{\lambda - z} d\mu$.

2.2.2 Résultat du type Marcenko-Pastur

Soit $X = (X_1 X_2 \dots X_n)$ une matrice $(p \times n)$, tels que les vecteurs colonnes X_1, X_2, \dots, X_n sont iid, les éléments de chaque vecteur X_i peuvent être dépendants. Soient la matrice de covariance empirique $S_n = \frac{1}{p} X X^\top$ et μ_n sa fonction de répartition empirique.

On rappelle que μ est la loi de Marcenko-Pastur.

Théorème 3[7]

Pour toute matrice A_p complexe $(p \times p)$, de norme spectrale $\|A_p\|$ bornée, sous l'hypothèse,

$$\frac{1}{n} (X^\top A_p X - Tr(A_p)) \xrightarrow{P} 0, \quad n \longrightarrow \infty, \quad \text{on a } \boxed{\mu_n \longrightarrow \mu \quad p.s.}$$

La proposition suivant établit que l'hypothèse sur les moments quadratiques dans le Théorème 3 peut être remplacé par une condition de Lindeberg.

Proposition 2[7]

Soient X_{ij} des variables aléatoires indépendantes tels que $\mathbb{E}X_{ij} = 0$,

$$\mathbb{E}X_{ij}^2 = 1, \quad \forall i \geq j \geq 1, \quad \text{alors quand } n \longrightarrow \infty,$$

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_{ij}^2 I(|X_{ij}| > \epsilon \sqrt{n}) \xrightarrow{P} 0, \quad \forall \epsilon > 0 \right) \text{ si et seulement si } \left(\frac{1}{n} (X^\top A_p X - Tr(A_p)) \xrightarrow{P} 0 \right).$$

Lemme[7]

Soient C une matrice $(n \times n)$ réelle symétrique semi-définie positive, et $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ si $z \in \mathbb{C}$, avec $v = Im(z) > 0$, alors on a

1. $\|(C - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{v}$.
2. $|\text{Tr}(C + XX^\top - zI)^{-1} - \text{Tr}(C - zI)^{-1}| \leq \frac{1}{v}$.
3. $|X^\top(C - XX^\top - zI)^{-1}X| \leq 1 + \frac{|z|}{v}$.
4. $\text{Im}(z + z\text{Tr}(C - zI)^{-1}) \geq v$ et $\text{Im}(\text{Tr}(C - zI)^{-1}) > 0$.
5. $\text{Im}(z + zX^\top(C - zI)^{-1}X) \geq v$.

On indique que la preuve du Théorème 3 se développe par la méthode de la transformée de Cauchy-Stieltjes, et en utilisant les majorations du lemme technique précédent.

Chapitre 3

Représentation de la loi de Marcenko-Pastur

3.1 Introduction

Rappelons que la densité limite de la fonction de répartition des valeurs propres de la matrice de covariance empirique $S_n = \frac{1}{p}XX^T$, où X est une matrice aléatoire de dimension $(p \times n)$ d'entrées i.i.d centrées réduites, est donnée en fonction de $y = \lim p/n$, sous la forme suivante dite de Marcenko-Pastur :

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{2\pi xy} \sqrt{(b-x)(x-a)} I_{(a \leq x \leq b)},$$

où a et b sont des fonctions de y données par

$$\begin{cases} a(y) = (1 - \sqrt{y})^2 \\ b(y) = (1 + \sqrt{y})^2. \end{cases}$$

3.2 Exemples avec différentes valeurs de paramètre

Pour la valeur du paramètre $y = 1$, avec un changement de variable $x \rightarrow \sqrt{x}$, dans la loi de Marcenko-Pastur, on retrouve la loi du demi-cercle

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(4-x^2)} I_{-2 \leq x \leq 2}.$$

Représentée dans la Figure 1.

CHAPITRE 3. REPRÉSENTATION DE LA LOI DE MARCENKO-PASTUR²⁴

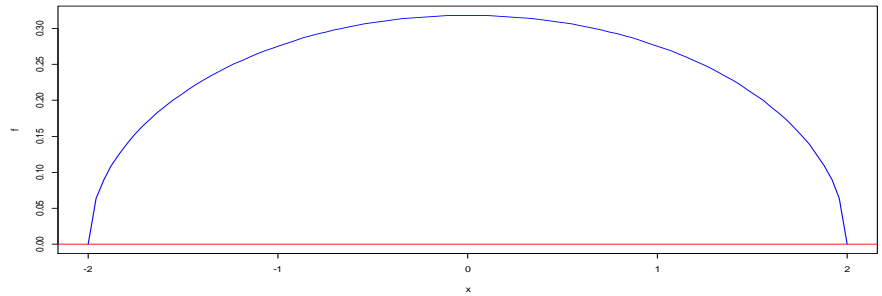


Figure 1 : La loi de demi-cercle.

Exemple 2:

Représentation graphique de la densité spectrale limite pour $\gamma=1$ et $a(\gamma)=0$, $b(\gamma)=4$,

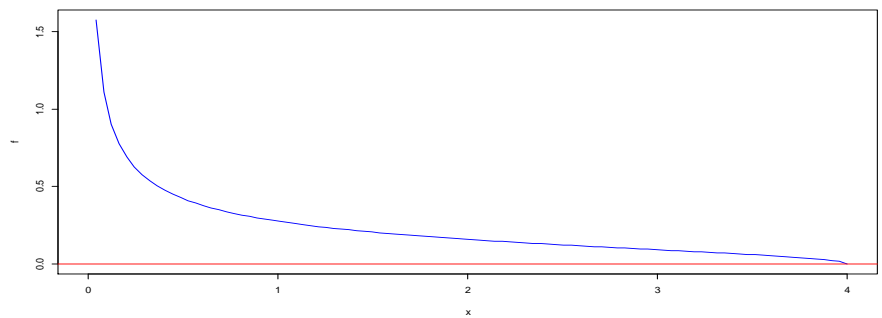


Figure 2 : Loi de M.P avec $\gamma=1$

Exemple 3:

Représentation graphique de la densité spectrale limite pour $\gamma=2$ et $a(\gamma)=0.17$, $b(\gamma)= 5.83$,

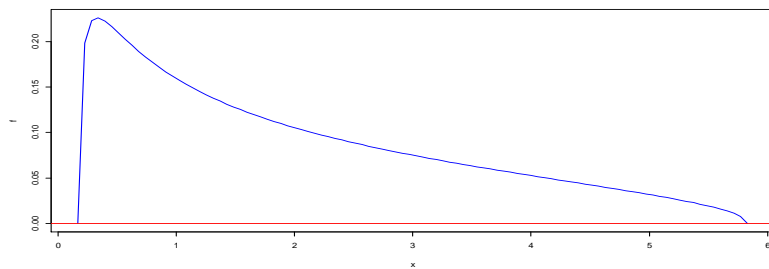


Figure 3: : La loi de M.P avec $\gamma=2$.

Exemple 4:

Représentation graphique de la densité spectrale limite pour $\gamma=2$ et $a(\gamma)=1$, $b(\gamma)= 9$,

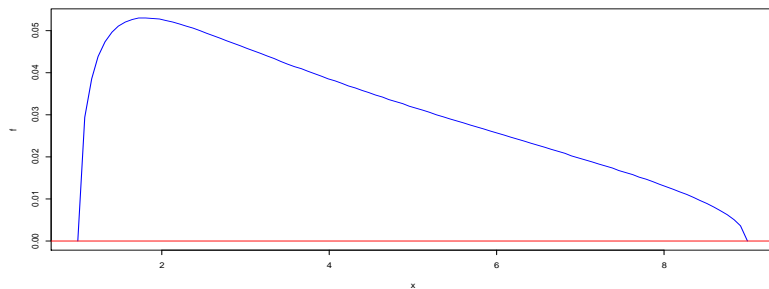


Figure 4:Loi de M.P avec $\gamma=4$.

CHAPITRE 3. REPRÉSENTATION DE LA LOI DE MARCENKO-PASTUR²⁶

Exemple 5:

Représentation graphique de la densité spectrale limite pour $\gamma=0.3$ et $a(\gamma)=0.2$, $b(\gamma)=2.4$,

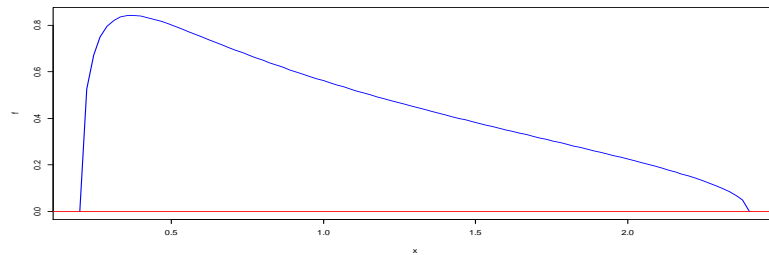


Figure 5:-La loi de M.P avec $\gamma=0.3$.

Exemple 6:

Représentation graphique de la densité spectrale limite pour $\gamma=0.5$ et $a(\gamma)=0.09$, $b(\gamma)=2.91$,

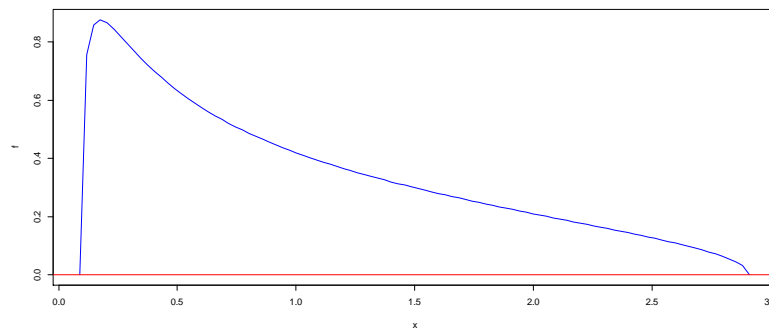


Figure 6:-La loi de M.P avec $\gamma=0.5$.

CHAPITRE 3. REPRÉSENTATION DE LA LOI DE MARCENKO-PASTUR²⁷

Exemple 7:

Dans cet exemple, on a combiné les 5 courbes des fonctions de densité précédentes dans le même graphe, pour voir le comportement de ces fonctions pour la valeur critique $\gamma=1$ et les valeurs de $\gamma < 1$ et $\gamma > 1$

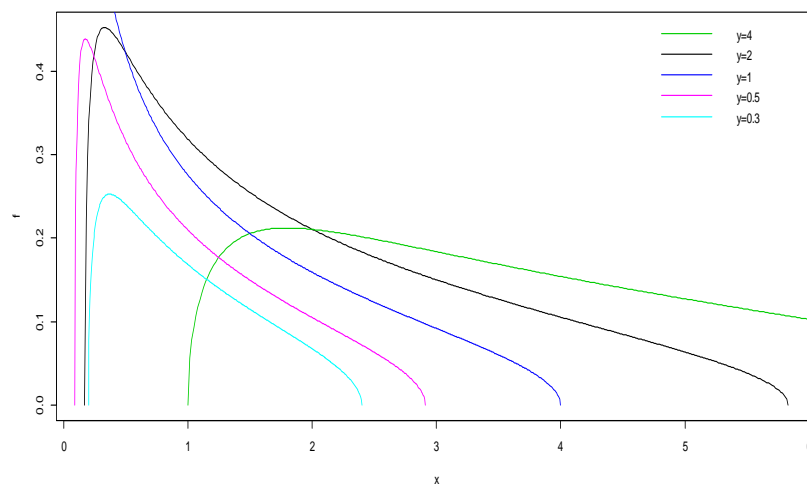


Figure 7: Loi de M.P

3.3 Code des graphes

On donne les programmes de la réalisation des figures précédentes par le logiciel R.

3.3.1 Programme de la loi du demi-cercle

```

> A = -2
> B = 2
> L = 100
> x < -seq(A, B, length = L)
> a = (2 - x)
> e = (x + 2)
> b = (a * e)^(1/2)
> c = 2 * pi
> f = b/c
> plot(x, f, type = "l", ylab = "f", col = "blue")
> abline(h = 0, col = "red")
> title(sub = "Figure 1 -Densité de la loi du demi cercle", cex.sub = 1, font.sub =
1, col.sub = 1).

```

3.3.2 Programme de la loi de M.P

```

y = 2
> A = 0.17
> B = 5.83
> L = 100
> x < -seq(A, B, length = L)
> a = (B - x)
> e = (x - A)
> b = (a * e)^(1/2)
> c = 2 * pi * x
> f = b/c
> plot(x, f, type = "l", ylab = "f", col = "blue")
> abline(h = 0, col = "red")
> title(sub = "Figure 2 -Densité de la loi de Marcenko-Pastur avec y = 2", cex.sub =
1, font.sub = 1, col.sub = 1).

```

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons commencé par décrire les modèles de matrices aléatoires aux quels nous nous intéressons, avant de présenter certains résultats asymptotiques concernant les propriétés spectrales de ces matrices.

Les matrices de covariance empirique considérées sont définies comme le produit d'une matrice aléatoire et sa transposée ou sa matrice adjointe dans le cas complexe, avec une normalisation.

De même que pour les matrices de Wigner, les propriétés asymptotiques des valeurs propres des matrices de covariance ont été conjecturées comme étant universelles, plus précisément, une distribution quelconque des valeurs propres d'une matrice aléatoire converge presque sûrement vers une loi déterministe.

Cependant, dans les domaines dans lesquels les matrices de covariance sont utiles, les résultats asymptotiques sont souvent nécessaires, par exemple la loi de Marcenko-Pasture ou des résultats de même type avec d'autres structures des matrices aléatoires, le comportement des valeurs propres extrêmes ... ect.

Ce genre d'étude repose sur des approches bien définies, comme la méthode des moments, la méthode de la transformée de Cauchy-Stieltjes dite aussi méthode de la résolvante, ainsi que la stratégie classique de Lindeberg.

Bibliographie

- [1] B.Valco. *Basic random matrix model*.Random Matrices 2009. Nombre de page :1 – 3.
- [2] B.Valco.*Marchenko-Pastur Law*. Random Matrices 2009. N.p : 1 – 7.
- [3] Céline Nadal.*Princip aux ensembles de matrices aléatoires*.Matrices aléatoires et leur application à la physique statistique et quantique .Université Paris Sud -Paris XI,2011.Français.
- [4] Djalil chafaï. [https ://djalil.chafai.net](https://djalil.chafai.net). 01 – 09 – 2021.
- [5] Djalil chafaï.*Introduction aux matrices aléatoires*.Printemps 2013 version préliminaire du lundi 8 avril 2013 .Nombre de page : 17 – 20.
- [6] M.Capitaine. *Introduction aux grand matrices aléatoires* ,cours M2R ,2012.
- [7] Pavel Yaskov.*A short proof of the Marchenko–Pastur theorem*.Probability theory. C. R.Acad.Sci.Paris,Ser.I354(2016)319–322.
- [8] Touati Hdjar.*Matrices Aléatoires*. La loi de wishart et ses application. Université Mouloud Mammert tizi-ouzou.2019.Page : 25 – 27.