

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
MÉMOIRE DE MASTER

En vue de l'obtention du
Diplôme de master en mathématiques.
Option: Statistiques et Probabilités approfondies

**Intégration numérique des équations
différentielles stochastiques et
implémentation sur python du modèle
SIR aléatoire.**

Présenté Par: BENALI AHLAM

Mémoire soutenu le 25 Septembre 2021 devant le jury composé de:

<i>M^r</i> A. Allam	MCA UABB TLEMCEM	Président
<i>M^{me}</i> S. Boukhiar	MAA UABB TLEMCEM	Examinatrice
<i>M^{me}</i> L. Khitri-Kazi-Tani	MCB UABB TLEMCEM	Encadrante

Année universitaire: 2020 – 2021

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

Mes très chers parents qui m'ont entouré avec leur amour et m'ont donné la capacité d'attendre ce niveau de savoir, et qui ont tout sacrifié pour mes études, tout le mérite leurs revient. Que Dieu leur procure bonne santé et longue vie.

À mes chers frères, que je leur souhaite une vie pleine de bonheur et de succès.

À la mémoire de mon oncle qui vient de nous quitter et qui ne pourra malheureusement pas être un témoin exceptionnel de l'achèvement de ce travail, que Dieu lui fasse miséricorde.

À toute ma famille.

À mes amis, et à tous mes proches.

À tous ceux qui m'aiment, je dédie ce modeste travail.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon Dieu ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la force et le courage durant ces années d'études et de mener à bien ce modeste travail .

C'est avec beaucoup de plaisir que j'exprime ici ma profonde gratitude à mon encadreur Madame L. KHITRI, pour sa gentillesse et soutien, sa disponibilité, et aussi pour le temps qu'elle a consacré à diriger ce mémoire .

Je remercie Monsieur A. ALLAM chef de département, pour l'honneur d'avoir accepté de présider le jury.

Mes vifs remerciement s'adresse aussi à Madame S. BOUKHIAR, d'avoir accepter d'examiner ce mémoire et faire partie du jury.

Enfin, mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années d'études.

Résumé

Dans ce travail nous avons étudié la méthode d'Euler-Maruyama pour la résolution numérique des équations différentielles stochastiques. Comme application, nous avons proposé une simulation des deuxième et troisième vagues de l'épidémie du COVID-19 en Algérie à l'aide du modèle SIR stochastique.

Mots-clés: Mouvement Brownien, intégrale d'Itô, équations différentielles stochastiques, méthode d'Euler-Maruyama, convergence forte, modèle SIR.

Abstract

In this work we studied the Euler-Maruyama method for numerical resolution of stochastic differential equations. As an application, we proposed a simulation of the second and third waves of the COVID-19 outbreak in Algeria using the stochastic SIR model.

Key Words: Brownian motion, Ito integral, stochastic differential equations, Euler-Maruyama method, strong convergence, SIR model.

Abréviations & Notations

- \mathbb{P} : La mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- $\mathbb{E}(X)$: L'espérance mathématique de la variable aléatoire X .
- $\mathcal{B}(\mathbb{R})$: La tribu borélienne sur \mathbb{R}
- $\sigma(X)$: La tribu engendré par la variable X .
- $|x|$: Valeur absolue de la variable x .
- $[x]$: Partie entière de x .
- $\|f\|_2$: $f \in \mathbb{R}^d$, $\|f\|_2 = \left(\sum_{i=1}^d |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
- $\|A\|_2$: La norme de Frobenius de $A = (a_{ij})_{1 \leq i < d, 1 \leq j < n} \in \mathbb{R}^{d \times n}$
 $\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\text{trace}(A^T A)\right)^{\frac{1}{2}}$.
- $x \vee y$: Le maximum entre x et y .
- $x \wedge y$: Le minimum entre x et y .
- $\mathbb{1}_A(x)$: Fonction indicatrice, $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, 0 sinon.
- $\text{cov}(X, Y)$: covariance des variables aléatoires X et Y .
- *i.i.d* : Indépendantes et identiquement distribuées.
- *p.s* : Presque sûrement.
- *EDS* : Equation différentielle stochastique.
- $X \sim \mathcal{N}(m, v)$: X suit une loi normale de moyenne m et variance v .
- $X_n \xrightarrow{p.s} X$: La suite de variables aléatoires (X_n) converge presque sûrement vers X .

- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$: La suite de variables aléatoires (X_n) converge en loi vers X .
- $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$: L'espace des fonctions continues $f : (t, x) \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}$ dont les dérivées d'ordre 1 en t et les dérivées jusqu'à l'ordre 2 en x sont continues par rapport à (t, x) .
- \square : Fin de démonstration.

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Abréviations & Notations	iv
Introduction	ix
1 Calcul stochastique	1
1.1 Définitions	1
1.2 Mouvement brownien	5
1.2.1 Mouvement brownien comme limite d'une marche aléatoire	5
1.2.2 Mouvement brownien comme processus aléatoire particulier	6
1.3 Intégrale d'Itô	8
1.4 Formule d'Itô	10
2 Équations différentielles stochastiques	12
2.1 Équations différentielles stochastiques	12
2.2 Existence et unicité de la solution	13
2.3 Le modèle de croissance de population stochastique	16
3 Approximations numériques des équations différentielles stochastiques	18
3.1 Discrétisation et convergence	18
3.2 La méthode d'Euler-Maruyama	19
3.3 Application au modèle de croissance de population stochastique .	26
3.3.1 Simulation de la solution exacte	26
3.3.2 Simulation de la méthode d'Euler-Maruyama	29
4 Étude du modèle SIR	31
4.1 Modèle SIR déterministe	31
4.1.1 Explication du système	32
4.1.2 Exemple de simulation du modèle	33

TABLE DES MATIÈRES

vii

4.2	Modèle SIR stochastique	34
4.2.1	Analyse des conditions d'existence et d'unicité de la solution du modèle SIR	35
4.2.2	Estimation des paramètres du modèle	37
4.2.3	Simulation du modèle SIR stochastique	39

Table des figures

1.1	Simulation de 3 trajectoires d'une marche aléatoire pour $n=5$. . .	4
1.2	Simulation de 10 trajectoires d'une marche aléatoire pour $n=100$.	4
1.3	Simulation de 10 trajectoires du mouvement brownien	6
1.4	Simulation d'un mouvement brownien de dimension 2	8
3.1	4 réalisations de la solution exacte du modèle de croissance de population stochastique	27
3.2	Distrubution de $N_{2.5}$ et $N_{7.5}$	28
3.3	La solution approchée par la méthode d'Euler-Maruyama et la solution exacte	29
3.4	Erreur forte et faible de la methode d'Euler-Maryama	30
4.1	modèle SIR déterministe pour $\beta = 2 \cdot 10^{-4}$	33
4.2	modèle SIR déterministe pour $\beta = 10 \cdot 10^{-4}$	34
4.3	Représentation du cumul des cas infectés de 20 réalisations du modèle SIR stochastique et les données réelles	39
4.4	5 réalisations du modèle SIR stochastique	40
4.5	Représentation du cumul des cas infectés de 20 réalisations du modèle SIR stochastique et les données réelles	41
4.6	5 réalisations du modèle SIR stochastique	42

Introduction

La pandémie du COVID-19 est une pandémie provoquée par le coronavirus SARS-CoV-2, qui a débuté en Chine le 16 Novembre 2019. De nombreux variants du virus affectant les propriétés de celui-ci déclenchent plusieurs vagues de la pandémie.

Face à l'urgence de la situation un travail important de modélisation mathématique a été accompli par les scientifiques pour étudier cette pandémie afin de suivre son évolution et de contrôler la maladie.

Il existe deux grandes classes de modèles pour l'étude de la dynamique d'une épidémie : les modèles déterministes et les modèles stochastiques. La contagion comme la guérison sont des processus aléatoires. Les équations différentielles stochastiques permettent de modéliser des trajectoires aléatoires soumises à des phénomènes de diffusion, elles conviennent bien pour la modélisation en épidémiologie .

En général, on ne connaît pas les solutions exactes de ces équations différentielles stochastiques, on a alors recours à des approximations numériques.

Notre objectif dans ce mémoire est l'analyse de convergence forte du schéma d'Euler-Maruyama pour la résolution numérique des équations différentielles stochastiques. Puis à l'aide du modèle épidémiologique SIR stochastique, une simulation des deuxième et troisième vagues de l'épidémie du COVID-19 en Algérie est proposée.

Ce travail est présenté en quatre chapitres :

Première chapitre : Il est consacré aux rappels de base concernant le calcul stochastique et les processus stochastiques. On donnera les principales propriétés du mouvement Brownien. Après on présentera quelques résultats importants relatifs à l'intégrale stochastique.

Deuxième chapitre : Par la suite nous citons le théorème d'existence et d'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques.

Troisième chapitre : Ensuite nous présentons la méthode d'Euler-Maruyama et nous donnons des résultats de convergence avec une simulation d'un exemple pratique qui décrit le phénomène de croissance de population.

Quatrième chapitre : Dans ce chapitre, nous étudions le modèle SIR stochastique et l'appliquons au cas du COVID-19 en Algérie.
A la fin, une conclusion générale est rédigée pour résumer le travail.

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désignera un espace de probabilité complet.
Tous les processus stochastiques sont définis sur cet espace de probabilité.

Chapitre 1

Calcul stochastique

Dans ce premier chapitre nous introduisons et définissons quelques outils de calcul stochastiques.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1.

Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une suite croissante de sous-tribus de \mathcal{F} (ie : $s < t, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$).

On appelle espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Une filtration est dite continue à droite si $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$ pour tout $t \geq 0$.

Une filtration est dite satisfaisant les conditions usuelles si : elle est continue à droite et \mathcal{F}_0 contient tous les ensembles négligeables.

Définition 1.1.2.

1) Un processus stochastique réel $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ est une famille de variables aléatoires

$$X : [0, T] \times \Omega \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

2) Si $t \in \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} le processus est dit discret.

3) Pour $\omega \in \Omega$ fixé l'application

$$\begin{aligned} [0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

est appelée trajectoire du processus.

4) Pour $t \in [0, T]$ fixé

$$\omega \mapsto X_t(\omega)$$

est une variable aléatoire.

Définition 1.1.3.

Soit $(X_t)_{t \in [0, T]}$ un processus stochastique, la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^0)_{t \in [0, T]}$ associée à $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est définie par :

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s, s \leq t), \forall t \in [0, T]$$

Définition 1.1.4.

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique et soit

$$\Delta_n = \{(s = t_0) < t_1 < \dots < (t_n = t)\}, n \in \mathbb{N}$$

une subdivision de $[s, t]$ telle que $\max_i |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ alors

$$\langle X \rangle_t = \sum_{i=0}^{n-1} (X(t_{i+1}) - X(t_i))^2$$

$\langle X \rangle_t$ s'appelle la variation quadratique de X sur $[s, t]$.

Définition 1.1.5.

1) Soient \mathcal{F}_t une filtration et un processus aléatoire $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$, on dit que $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est \mathcal{F} -adapté si pour tout t , la variable aléatoire X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

2) Soit $L^2(\Omega)$ est l'espace de variables aléatoires X définies sur Ω telles que

$$\|X\| = \|X\|_{L^2(\Omega)} := \left(\mathbb{E}(X^2)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

3) Soit $L^2(\Omega, [0, T])$ l'ensemble des processus X adaptés sur $[0, T]$ tels que

$$\|X\| = \|X\|_{L^2(\Omega, [0, T])} := \left(\mathbb{E}\left(\int_0^T X_t^2 dt\right)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

4) On dit la suite de processus aléatoire $\{X^n\}$ converge vers un processus aléatoire X sur $L^2(\Omega, [0, T])$, $X^n \xrightarrow{L^2(\Omega, [0, T])} X$ si :

$$\|X^n - X\|_{L^2(\Omega, [0, T])} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Définition 1.1.6.

Un processus adapté $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est appelé processus élémentaire s'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ telle que $X_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(\omega) \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$.

Définition 1.1.7.

On se donne une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Un processus $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ est une \mathcal{F}_t -martingale (resp. sous-martingale, surmartingale) si :

- $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty, \forall t \in I$.
- X_t est \mathcal{F}_t -adapté.
- $\forall s, t \in I, 0 \leq s \leq t : \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ *P.p.s* (resp $\geq X_s, \leq X_s$).
Si X est une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale), alors l'application $t \rightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est constante (resp. croissante, décroissante).

Définition 1.1.8 (Marche aléatoire).

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d prenant les deux valeurs $+1$ ou -1 avec :

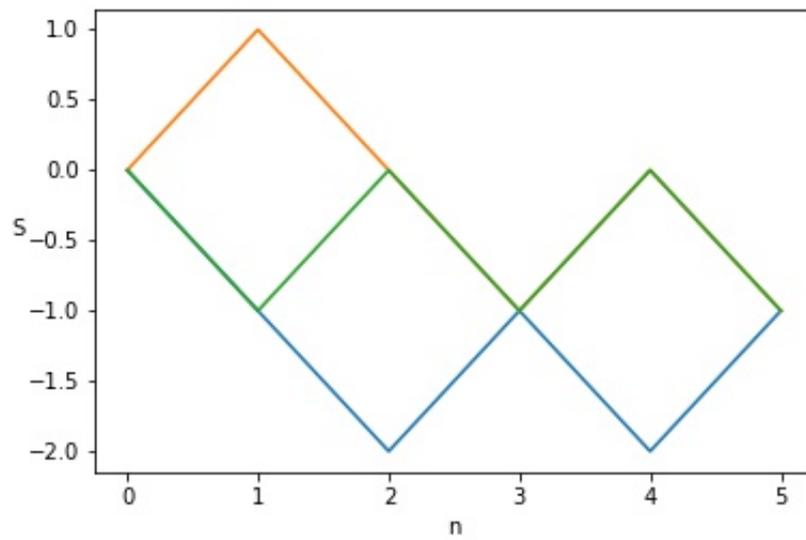
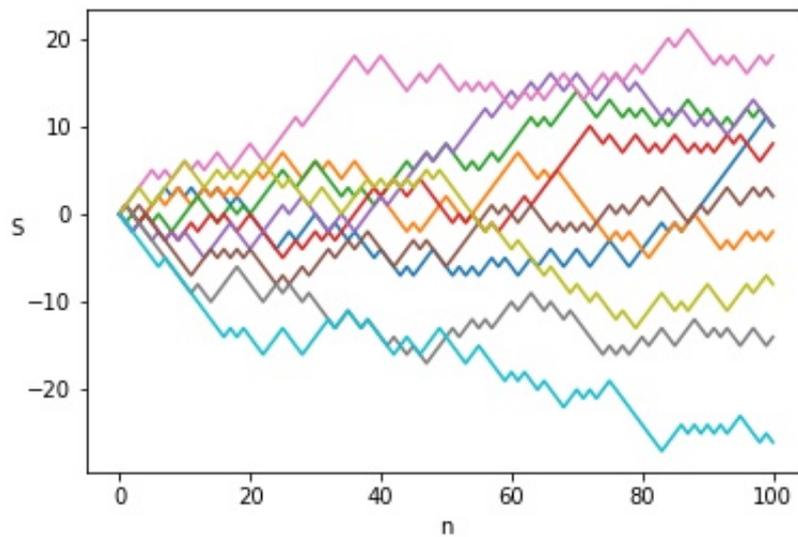
$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$$

On définit :

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_n &= \sum_{i=1}^n X_i \end{aligned}$$

la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est appelée marche aléatoire symétrique sur \mathbb{Z} avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n) &= 0 \\ \mathbb{E}(S_n^2) &= n \end{aligned}$$

FIGURE 1.1 : Simulation de 3 trajectoires d'une marche aléatoire pour $n=5$ FIGURE 1.2 : Simulation de 10 trajectoires d'une marche aléatoire pour $n=100$ 

1.2 Mouvement brownien

Parmi les exemples les plus connus du processus stochastique, nous présentons le mouvement brownien qui joue un rôle important dans la théorie du calcul stochastique. Dans de nombreux problèmes appliqués le mouvement brownien sert à modéliser les perturbations aléatoires, il permet de construire des modèles simples sur lesquels des calculs peuvent être faits.

1.2.1 Mouvement brownien comme limite d'une marche aléatoire

Soit la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ définie précédemment, on définit le processus

$$S_t := S_{[t]} = S_k, t \in [k, k + 1[, k \in \mathbb{N}$$

par le théorème central limite on a :

$$S_t^{(n)} := \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$$

en effet pour tout $t > 0$:

$$\frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}} \times \sqrt{\frac{[nt]}{n}}$$

on a par le théorème central limite

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

et $\frac{(nt - 1)}{n} < \frac{[nt]}{n} \leq t$ donc $\frac{[nt]}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t$.

Le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ est appelé mouvement brownien.

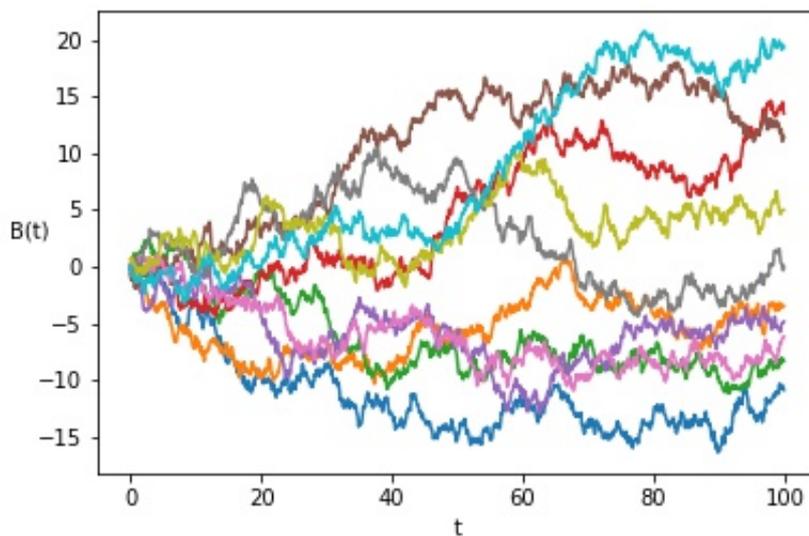
1.2.2 Mouvement brownien comme processus aléatoire particulier

Théorème 1.2.1. (Propriétés du mouvement brownien standard)

Un mouvement brownien est un processus stochastique réel $B = (B_t)_{t \geq 0}$ qui vérifie :

- 1) $B_0 = 0$ \mathbb{P} .p.s.
- 2) $\forall 0 \leq s \leq t, B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ (la stationnarité des accroissements du mouvement Brownien).
- 3) $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ les variables aléatoires réelles $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes (le mouvement Brownien est à accroissements indépendants).
- 4) l'application $t \rightarrow B_t$ est continue \mathbb{P} .p.s.
- 5) $\forall s, t \in [0, T], \text{cov}(B_t, B_s) = \min(t, s)$

FIGURE 1.3 : Simulation de 10 trajectoires du mouvement brownien



Remarque 1.2.1. Si $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien réel, alors la fonction de covariance $\text{cov}(B_t, B_s) = \mathbb{E}(B_t \dot{B}_s) = s \wedge t$.

Proposition 1.2.1.

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien alors $(B_t)_{t \geq 0}$ est un \mathcal{F} -martingale par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F} = \sigma(B_s, s \leq t)$ ie :
pour tout $s < t$ $\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s$

Preuve. si $s < t$ l'indépendance de $B_t - B_s$ et \mathcal{F}_s implique que

$$\mathbb{E}((B_t - B_s) | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$$

donc

$$\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s) | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s) | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s | \mathcal{F}_s) = B_s \quad \square$$

Remarque 1.2.2.

Les trajectoires du mouvement brownien sont continues mais ne sont pas différentiables.

Théorème 1.2.2. La variation quadratique sur $[s; t]$ du mouvement brownien vaut $t - s$ dans $L^2(\Omega)$.

Corollaire 1.2.1.

La variation totale du mouvement brownien $\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta B_i^n| = \sum_{i=0}^{n-1} |B(t_{i+1}) - B(t_i)|$ vaut $+\infty$ P.p.s.

Preuve. On a $\sum_i |\Delta B_i^n| = \sum_i \frac{(\Delta B_i)^2}{|\Delta B_i|} \geq \sum_i \frac{(\Delta B_i)^2}{\max_j |\Delta B_j|} = \frac{1}{\max_j |\Delta B_j|} \cdot \sum_i (\Delta B_i)^2$

on a par théorème 1.2.2 $\sum_i (\Delta B_i)^2 \xrightarrow{\text{P.p.s}} t - s, n \rightarrow \infty$

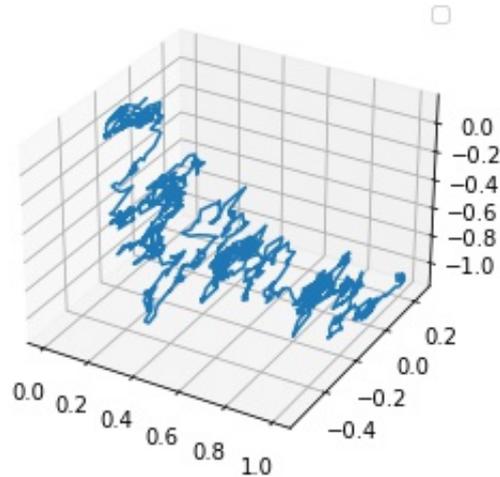
et de plus les trajectoires du mouvement brownien sont uniformément continues sur $[s, t]$ donc $\max_j |\Delta B_j| \rightarrow 0$ P.p.s

donc $\sum_i |\Delta B_i^n| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \quad \square$

Remarque 1.2.3.

On dit que $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^m)$ est un mouvement brownien de dimension m si les processus $(B_t^i, 1 \leq i \leq m)$ sont des mouvements browniens indépendants.

FIGURE 1.4 : Simulation d'un mouvement brownien de dimension 2



1.3 Intégrale d'Itô

Définition 1.3.1.

L'intégrale d'Itô (ou l'intégrale stochastique) entre 0 et $T \leq +\infty$ d'un processus élémentaire X est définie par :

$$\int_0^T X_t dB_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Proposition 1.3.1.

L'intégrale d'Itô sur $S_b[0, T]$ où $S_b[0, T]$ est l'ensemble des processus élémentaire bornés sur $[0, T]$ a les propriétés suivantes :

- (1) $X \rightarrow \int_0^T X_t dB_t$ est linéaire
- (2) $\mathbb{E}(\int_0^T X_t dB_t) = 0$
- (3) $\mathbb{E}(\int_0^T X_t dB_t)^2 = \mathbb{E}(\int_0^T X_t^2 dt)$
- (4) $\mathbb{E}(\int_0^T X_t dB_t \int_0^T Y_t dB_t) = \mathbb{E}(\int_0^T X_t Y_t dt)$

L'intégrale stochastique d'un processus quelconque X est ensuite définie en l'approchant par une suite de processus élémentaires convergeant vers X , et en passant à la limite. En effet, nous avons la proposition suivante

Proposition 1.3.2.

Pour tout processus aléatoire $X \in L^2(\Omega, [0, T])$, il existe une suite de processus élémentaires (X^n) convergente vers X dans $L^2(\Omega, [0, T])$ ie :

$$\|X^n - X\|^2 = \mathbb{E} \int_0^T (X_t^n - X_t)^2 dt \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$$

Définition 1.3.2.

Supposons que $X \in L^2(\Omega, [0, T])$ et $X^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega, [0, T])} X$ tel que X^n est un processus élémentaire borné. L'intégrale d'Itô du processus X est égale la limite dans $L^2(\Omega)$:

$$\int_0^T X_t dB_t := \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T X_t^n dB_t$$

On peut vérifier que cette limite existe et est indépendante de la suite d'approximations choisie (voir par exemple [2, page 72]).

Théorème 1.3.1.

L'intégrale d'Itô sur $L^2(\Omega, [0, T])$ a les propriétés suivantes :

- (1) $X \rightarrow \int_0^T X_t dB_t$ est linéaire
- (2) $\mathbb{E}(\int_0^T X_t dB_t) = 0$
- (3) $\mathbb{E}(\int_0^T X_t dB_t)^2 = \mathbb{E}(\int_0^T X_t^2 dt)$
- (4) $\mathbb{E}(\int_0^T X_t dB_t \int_0^T Y_t dB_t) = \mathbb{E}(\int_0^T X_t Y_t dt)$

Définition 1.3.3.

Soit X un processus \mathcal{F}_t -adapté à valeur dans $\mathbb{R}^{d \times m}$ tel que $\int_0^T \|X_t\|_2^2 dt < \infty$ p.s et $\mathbb{E}(\int_0^T \|X_t\|_2^2 dt) < \infty$, en utilisant la notation matricielle, nous définissons l'intégrale d'Itô multidimensionnelle par :

$$\int_0^T X_t dB_t = \int_0^T \begin{pmatrix} X_t^{11} & \dots & X_t^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ X_t^{d1} & \dots & X_t^{dm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ \vdots \\ dB_t^m \end{pmatrix}$$

est un vecteur colonne de dimension d dont la i ème composante est la somme des intégrales d'Itô à une dimension :

$$\sum_{j=1}^m \int_0^T X_t^{ij} dB_t^j$$

1.4 Formule d'Itô

Définition 1.4.1.

Un processus d'Itô est un processus X_t à valeur réelles de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}.p.s$$

avec $X_0 \mathcal{F}_0$ mesurable, φ et θ deux processus \mathcal{F} -adaptés vérifiant :

$$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty \quad \mathbb{P}.p.s \quad \text{et} \quad \int_0^t |\varphi_s| ds < +\infty \quad \mathbb{P}.p.s.$$

Théorème 1.4.1. (Formule d'Itô scalaire)

Soit X_t un processus d'Itô de la forme $X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s$ et $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ alors nous avons presque sûrement :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f(s, X_s)}{\partial x} \varphi_s + \frac{\partial f(s, X_s)}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(s, X_s)}{\partial^2 x} \theta_s^2 \right) ds + \int_0^t \frac{\partial f(s, X_s)}{\partial x} \theta_s dB_s$$

sous la forme différentielle :

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} \varphi_t + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial^2 x} \theta_t^2 \right) dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} \theta_t dB_t$$

Théorème 1.4.2. (La formule d'Itô pour un mouvement brownien)

Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ alors :

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

on peut écrire sous forme différentielle

$$df(B_t) = f'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t) dt$$

Théorème 1.4.3.

Si $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ alors la formule d'Itô :

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial f(s, B_s)}{\partial x} dB_s + \int_0^t \frac{\partial f(s, B_s)}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f(s, B_s)}{\partial^2 x} ds$$

on peut écrire sous forme différentielle :

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f(t, B_t)}{\partial x} dB_t + \frac{\partial f(t, B_t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, B_t)}{\partial^2 x} dt$$

Remarque

Si $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ alors $f(t, X_t)$ est également un processus d'Itô.

En particulier, si

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

et

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial x} f(s, B_s) \right)^2 ds \right] < \infty \forall t,$$

alors $f(t, B_t)$ est une martingale.

Théorème 1.4.4. (Formule d'Itô vectorielle)

Soit X_t un processus d'Itô de dimension d de la forme $X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s$ et $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ alors :

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} \varphi_t + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{trace} \left(\theta_t^T \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial^2 x} \theta_t \right) \right) dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} \theta_t dB_t$$

lemme 1.4.1. (lemme de Gronwall) voir([1])

soit f et $\epsilon \in C([0, T])$ des fonctions positives satisfait l'inégalité suivante :

$$f(t) \leq c \int_0^t f(s) ds + \epsilon(t), \quad t \in [0, T]$$

avec c une constante positive alors :

$$f(t) \leq \epsilon(t) + c \int_0^t \exp(c(t-s)) \epsilon(s) ds, \quad t \in [0, T]$$

cas particulier, si $0 \leq f(t) \leq c \int_0^t f(s) ds, \quad t \in [0, T]$, alors $f \equiv 0$.

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques

Dans ce chapitre, après l'introduction des équations différentielles stochastiques nous discutons quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution.

2.1 Équations différentielles stochastiques

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet avec une filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfaisant les conditions usuelles et $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^m)$ un mouvement brownien de dimension m sur cet espace.

On considère une variable aléatoire x_0 \mathcal{F}_0 -mesurable et de carré intégrable et deux fonctions mesurables :

$$\begin{aligned}\mu &: [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \sigma &: [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}\end{aligned}$$

Définition 2.1.1.

On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0 \quad (2.1)$$

et on peut écrire sous forme :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad t \in [0, T] \quad (2.2)$$

Remarque 2.1.1. Dans (2.2) le coefficient de "ds", i.e. $\mu(s; X_s)$, s'appelle le coefficient de dérive, celui de "dB_s", i.e. $\sigma(s; X_s)$, s'appelle le coefficient de diffusion.

Définition 2.1.2. Un processus stochastique $X_t, t \in [0, T]$ est appelé solution de l'équation différentielle (2.2) avec condition initiale x_0 s'il vérifie les propriétés suivantes :

1) $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est continu et adapté à la filtration \mathcal{F} .

2) $\int_0^t \|\mu(s, X_s)\|_2 ds + \int_0^t \|\sigma(s, X_s)\|_2^2 ds < \infty \mathbb{P}.p.s$

3) $(X_t)_{t \in [0, T]}$ vérifie (2.2) c'est-à-dire :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

pour tout $t \in [0, T] \mathbb{P}.p.s$

2.2 Existence et unicité de la solution

Théorème 2.2.1 ([2],[3]). S'il existe des réels $k > 0$ et $l > 0$ tels que condition 1 (Condition de Lipschitz) :

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\|\mu(t, x) - \mu(t, y)\|_2 + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\|_2 \leq k\|x - y\|_2$$

condition 2 (Condition de croissance linéaire) :

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\|\mu(t, x)\|_2 + \|\sigma(t, x)\|_2 \leq l(1 + \|x\|_2)$$

Alors l'équation (2.2) admet une solution à trajectoire presque sûrement continue, cette solution est unique dans le sens que si $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ sont deux solutions presque sûrement continues, alors :

$$X_t = Y_t \mathbb{P}.p.s \text{ pour tout } t \geq 0$$

Remarque 2.2.1. La condition (1) implique l'unicité de la solution $(X_t)_{t \geq 0}$, et la condition (2) garantit l'existence de cette solution (la solution "n'explose pas" en temps fini).

Remarque 2.2.2. Le théorème 2.2.1 ne change pas si la condition (1) est remplacée par la condition suivante :

$\exists k_1 > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\|\mu(t, x) - \mu(t, y)\|_2^2 + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\|_2^2 \leq k_1 \|x - y\|_2^2$$

ou par la condition suivante :

$\exists k_2 > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\|\mu(t, x) - \mu(t, y)\|_2^2 \vee \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\|_2^2 \leq k_2 \|x - y\|_2^2$$

et si la condition (2) est remplacée par la condition suivante :

$\exists l_1 > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\|\mu(t, x)\|_2^2 + \|\sigma(t, x)\|_2^2 \leq l_1(1 + \|x\|_2^2)$$

ou par la condition suivante :

$\exists l_2 > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\|\mu(t, x)\|_2^2 \vee \|\sigma(t, x)\|_2^2 \leq l_2(1 + \|x\|_2^2)$$

La condition de Lipschitz globale est très restrictive on peut l'affaiblir avec une condition de Lipschitz locale nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 2.2.2.

Supposons que la condition de croissance linéaire est satisfaite, mais la condition de Lipschitz est remplacée par la condition de Lipschitz locale suivante :

pour tout entier $n \geq 1$, il existe une constante positive k_n tel que, pour tout $t \in [0, T]$, et tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ avec $\|x\|_2 \vee \|y\|_2 \leq n$

$$\|\mu(t, x) - \mu(t, y)\|_2^2 \vee \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\|_2^2 \leq k_n \|x - y\|_2^2$$

alors il existe une unique solution de l'équation différentielle stochastique (2.1).

La condition de croissance linéaire peut être aussi affaiblie comme présenté dans le théorème suivant.

Théorème 2.2.3.

Supposons que la condition de Lipschitz locale est satisfaite, mais la condition de croissance linéaire est remplacée par la condition de monotone suivante :

il existe une constante positive k tel que, pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}^d$

$$x^T \mu(t, x) + \frac{1}{2} \|\sigma(t, x)\|_2^2 \leq k(1 + \|x\|_2^2)$$

alors il existe une unique solution X_t de l'équation différentielle stochastique (2.1).

A partir du théorème (4.3) ([3]) on a le résultat important sur la régularité de la solution suivant :

Théorème 2.2.4 (Régularité de la solution).

Soit X_t la solution de l'équation différentielle (2.1) et $X_0 \in L^2(\Omega)$, supposons que la condition de croissance linéaire est satisfaite :

$\exists k > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$ et $s \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\|\mu(t, x)\|_2^2 \vee \|\sigma(t, x)\|_2^2 \leq k(1 + \|x\|_2^2)$$

Alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^2) \leq c|t - s|$$

On peut généraliser la formule d'Ito avec le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.1. Soit X un processus stochastique satisfaisant l'équation différentielle (2.1) et $F \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$, on applique la formule d'Ito à $F(t, X)$ alors :

$$(i) \quad dF(t, X_t) = \left(\frac{\partial F(t, X_t)}{\partial t} + \mu(t, X_t) \frac{\partial F(t, X_t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X_t) \frac{\partial^2 F(t, X_t)}{\partial^2 x} \right) dt + \sigma(t, X_t) \frac{\partial F(t, X_t)}{\partial x} dB_t$$

$$(ii) \quad \mathbb{E} \left(\int_0^T \sigma(t, X_t) \frac{\partial F(t, X_t)}{\partial x} dB_t \right) = 0$$

2.3 Le modèle de croissance de population stochastique

Le modèle de croissance de population stochastique est un modèle linéaire écrit sous la forme différentielle :

$$dN_t = \mu N_t dt + \sigma N_t dB_t$$

Existence et unicité de la solution

On pose $f(t, x) = \mu x$ et $g(t, x) = \sigma x$ il est clair que :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_2^2 = |f(t, x) - f(t, y)|^2 \leq \mu^2 |x - y|^2$$

et

$$\|g(t, x) - g(t, y)\|_2^2 = |g(t, x) - g(t, y)|^2 \leq \sigma^2 |x - y|^2$$

donc

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_2^2 \vee \|g(t, x) - g(t, y)\|_2^2 \leq C \|x - y\|_2^2 \text{ avec } C = (\mu^2 \vee \sigma^2)$$

de plus :

$$\|f(t, x)\|_2^2 = \mu^2 |x|^2 \leq \mu^2 (1 + |x|^2)$$

et

$$\|g(t, x)\|_2^2 = \sigma^2 |x|^2 \leq \sigma^2 (1 + |x|^2)$$

alors

$$\|f(t, x)\|_2^2 \vee \|g(t, x)\|_2^2 \leq C (1 + \|x\|_2^2) \text{ avec } C = (\mu^2 \vee \sigma^2)$$

D'après le théorème 2.2.1 le modèle stochastique précédent admet une solution unique.

La solution exacte

La solution s'écrit :

$$N_t = N_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)$$

en effet :

$$\frac{dN_t}{N_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

alors :

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N_s} = \mu t + \sigma B_t \quad (2.3)$$

En utilisant la formule d'Itô pour la fonction $f(t, x) = \ln x$, $x > 0$ on obtient :

$$d(\ln N_t) = \frac{1}{N_t} dN_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{N_t^2} d\langle N \rangle_t \right)$$

2.3. LE MODÈLE DE CROISSANCE DE POPULATION STOCHASTIQUE 17

$$\begin{aligned} &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2N_t^2} \sigma^2 N_t^2 dt \\ &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \end{aligned}$$

alors

$$\frac{dN_t}{N_t} = d(\ln N_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 dt$$

d'après (2.3) on conclut

$$\ln \frac{N_t}{N_0} = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t$$

d'où

$$N_t = N_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right)$$

Chapitre 3

Approximations numériques des équations différentielles stochastiques

Dans ce chapitre nous intéressons à la résolution numérique d'une équation différentielle stochastique dirigée par un mouvement brownien unidimensionnel par la méthode d'Euler Maruyama.

3.1 Discrétisation et convergence

Considérons l'équation différentielle stochastique (2.2) et une subdivision de l'intervalle $[0, T]$:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

de pas de discrétisation $h = \frac{T}{N}$.

Un schéma de discrétisation sera noté $X_{t_i}^h$ et sera en général défini de façon itérative par une formule du type :

$$X_{t_{i+1}}^h = F(t_i, X_{t_i}^h, t_{i+1} - t_i, B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

où la fonction F dépend de μ et σ .

Nous commençons par introduire quelques notions de convergence.

Définition 3.1.1. *On dit que X^h converge fortement vers X à l'ordre $\alpha > 0$ au temps T , s'il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ indépendant de h tel que $\forall h \leq h_0$*

$$\mathbb{E}(|X_T^h - X_T|) \leq C(h^\alpha)$$

Il est parfois utile d'estimer les espérances de fonctionnelles de X .

Définition 3.1.2. On dit que X^h converge faiblement vers X à l'ordre $\beta > 0$ au temps T , s'il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ indépendant de h tel que $:\forall h \leq h_0, \forall f \in C_p^{2\beta+2}$

$$\mathbb{E}(f(X_t^h)) - \mathbb{E}(f(X_t)) \leq C(h^\beta)$$

où $C_p^{2\beta+2}$ est l'ensemble des fonctions à croissance au plus polynomiale de classe $2\beta + 2$

Remarque 3.1.1. une fonction f est à croissance au plus polynomiale s'il existe $s \in \mathbb{N}$ et $C_s > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq C_s(1 + |x|^s)$$

3.2 La méthode d'Euler-Maruyama

Nous commençons par la construction de la méthode Soit l'équation différentielle stochastique sous forme intégrale (2.2).

Pour $t = t_i$ l'équation est

$$X_{t_i} = X_0 + \int_0^{t_i} \mu(s, X_s) ds + \int_0^{t_i} \sigma(s, X_s) dB_s$$

et pour $t = t_{i+1}$ l'équation est

$$X_{t_{i+1}} = X_0 + \int_0^{t_{i+1}} \mu(s, X_s) ds + \int_0^{t_{i+1}} \sigma(s, X_s) dB_s$$

par soustraction membre à membre :

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(s, X_s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s, X_s) dB_s$$

Le terme de dérive est approché par

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(s, X_s) ds \simeq \mu(t_i, X_{t_i}) (t_{i+1} - t_i)$$

et le terme de diffusion est approché par

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s, X_s) dB_s \simeq \sigma(t_i, X_{t_i}) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Le schéma d'Euler-Maruyama est :

$$\begin{aligned} X_0^h &= x_0 \\ X_{i+1}^h &= X_i^h + \mu(t_i, X_i^h)h + \sigma(t_i, X_i^h)\Delta B_i, \text{ pour } i = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

avec $\Delta B_i = \Delta B_i^h = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$, $t_i = ih$

Pour l'étude de la convergence nous avons besoin du résultat important donné dans la proposition suivante :

Proposition 3.2.1.

Supposons que les coefficients de l'EDS (2.1) μ et σ satisfont les conditions suivantes :

H1 : $\exists k > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $s, t \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$|\mu(t, x) - \mu(s, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(s, y)|^2 \leq k(|t - s| + |x - y|^2)$$

H2 : $\exists l > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$|\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq l(1 + |x|^2)$$

Alors pour tout $i = 0, \dots, N$:

$$\mathbb{E}(|X_i - X_i^h|^2) \leq Mh$$

Preuve.

Pour entamer la preuve nous avons besoin d'un processus particulier \widehat{X}_t , il sert à approximer la solution pour tout $t \in [0, T]$ et pas seulement au point t_i pour $i = 0, \dots, N$.

Pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$ et $i = 0, \dots, N-1$, on définit

$$\widehat{X}_t = X_i^h + \int_{t_i}^t \mu(s, X_i^h)ds + \int_{t_i}^t \sigma(s, X_i^h)dB_s$$

On remarque que \widehat{X}_t est la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$d\widehat{X}_t = \mu(t_i, X_i^h)dt + \sigma(t_i, X_i^h)dB_t \quad \widehat{X}_{t_i} = X_i^h \quad (3.1)$$

et pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$ et $i = 0, \dots, N - 1$ on définit l'erreur par

$$\epsilon_t = X_t - \widehat{X}_t$$

alors pour $i = 0, \dots, N - 1$, le processus stochastique ϵ_t est solution de EDS sur $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$d\epsilon_t = (\mu(t, X_t) - \mu(t_i, X_t^h))dt + (\sigma(t, X_t) - \sigma(t_i, X_t^h))dB_t \quad (3.2)$$

associée à la condition initiale

$$\epsilon_{t_i} = X_{t_i} - \widehat{X}_{t_i}.$$

En appliquant la formule d'Itô (voir corollaire 2.2.1 (i)) pour ϵ_t^2 on obtient :

$$d\epsilon_t^2 = 2(X_t - \widehat{X}_t)(\mu(t, X_t) - \mu(t_i, X_t^h))dt + (\sigma(t, X_t) - \sigma(t_i, X_t^h))^2 dt + 2(X_t - \widehat{X}_t)(\sigma(t, X_t) - \sigma(t_i, X_t^h))dB_t$$

alors $\mathbb{E}(\epsilon^2(t_{i+1}))$ satisfait :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\epsilon_{t_{i+1}}^2) &= \mathbb{E}(\epsilon_{t_i}^2) + \mathbb{E}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\sigma(t, X_t) - \sigma(t_i, X_t^h))^2 dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} 2(X_t - \widehat{X}_t)(\mu(t, X_t) - \mu(t_i, X_t^h))dt\right) + \\ &\mathbb{E}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} 2(X_t - \widehat{X}_t)(\sigma(t, X_t) - \sigma(t_i, X_t^h))dB_t\right) \end{aligned}$$

En utilisant (ii) de corollaire 2.2.1 on a

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t_{i+1}}^2) = \mathbb{E}(\epsilon_{t_i}^2) + \mathbb{E}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\sigma(t, X_t) - \sigma(t_i, X_t^h))^2 dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} 2(X_t - \widehat{X}_t)(\mu(t, X_t) - \mu(t_i, X_t^h))dt\right)$$

et par l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\epsilon_{t_{i+1}}^2) &\leq \mathbb{E}(\epsilon_{t_i}^2) + \mathbb{E}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\sigma(t, X_t) - \sigma(t_i, X_t^h))^2 dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (X_t - \widehat{X}_t)^2 dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mu(t, X_t) - \mu(t_i, X_t^h))^2 dt\right) \\ &\leq \mathbb{E}(\epsilon_{t_i}^2) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}\left(\sigma(t, X_t) - \sigma(t_i, X_t^h)\right)^2 dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}\left(X_t - \widehat{X}_t\right)^2 dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}\left(\mu(t, X_t) - \mu(t_i, X_t^h)\right)^2 dt \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} |\mu(t, X_t) - \mu(t_i, X_t^h)|^2 &= |\mu(t, X_t) - \mu(t_i, X_{t_i}) + \mu(t_i, X_{t_i}) - \mu(t_i, X_t^h)|^2 \\ &\leq |\mu(t, X_t) - \mu(t_i, X_{t_i})|^2 + |\mu(t_i, X_{t_i}) - \mu(t_i, X_t^h)|^2 \\ &\quad + 2|\mu(t, X_t) - \mu(t_i, X_{t_i})| |\mu(t_i, X_{t_i}) - \mu(t_i, X_t^h)| \\ &\leq 2|\mu(t, X_t) - \mu(t_i, X_{t_i})|^2 + 2|\mu(t_i, X_{t_i}) - \mu(t_i, X_t^h)|^2 \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse H1 :

$$|\mu(t, X_t) - \mu(t_i, X_{t_i}^h)|^2 \leq 2k|t - t_i| + 2k|X_t - X_{t_i}|^2 + 2k|X_{t_i} - X_{t_i}^h|^2$$

de même :

$$|\sigma(t, X_t) - \sigma(t_i, X_{t_i}^h)|^2 \leq 2k|t - t_i| + 2k|X_t - X_{t_i}|^2 + 2k|X_{t_i} - X_{t_i}^h|^2$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\epsilon_{t_{i+1}}^2) &\leq \mathbb{E}(\epsilon_{t_i}^2) + 4k \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i) dt + 4k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}(|X_t - X_{t_i}|^2) dt \\ &\quad + 4k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}(|X_{t_i} - X_{t_i}^h|^2) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}(X_t - \widehat{X}_t)^2 dt \end{aligned}$$

donc d'après le théorème 2.2.4

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\epsilon_{t_{i+1}}^2) &\leq \mathbb{E}(\epsilon_{t_i}^2) + 4k \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i) dt + 4kc \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i) dt \\ &\quad + 4k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}(\epsilon_{t_i}^2) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}(X_t - \widehat{X}_t)^2 dt \\ &\leq (4kh + 1)\mathbb{E}(\epsilon_{t_i}^2) + 2k(1 + c)h^2 + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}(\epsilon_s^2) ds \end{aligned}$$

donc :

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t_{i+1}}^2) \leq b(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}(\epsilon_s^2) ds$$

avec $b(t) = (4kh + 1)\mathbb{E}(\epsilon_{t_i}^2) + 2k(1 + c)h^2$

par application du lemme de Gronwall :

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t_{i+1}}^2) \leq b(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \exp(t_{i+1} - t)b(t)dt$$

donc

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t_{i+1}}^2) \leq \exp(h) \left[(4kh + 1)\mathbb{E}(\epsilon_{t_i}^2) + 2k(1 + c)h^2 \right]$$

on pose $a_i = \mathbb{E}(\epsilon_{t_i}^2)$ et $r = \exp(h)(4kh + 1)$ et $s = \exp(h)2k(c + 1)h^2$

alors $a_{i+1} \leq ra_i + s$ pour tout $i = 0, \dots, N - 1$ avec $a_0 = \mathbb{E}(\epsilon_0^2) = 0$.

Une simple récurrence permet de vérifier qu'alors :

$$a_N \leq s \frac{r^N - 1}{r - 1}.$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\epsilon_{t_N}^2) &\leq 2k(c + 1) \exp(h)h^2 \frac{\exp(Nh)(4kh + 1)^N - 1}{\exp(h)(4kh + 1) - 1} \\ &\leq \frac{2k(c + 1) \exp(h)h^2 \exp(Nh)(4kh + 1)^N}{\exp(h)(4kh + 1) - 1} \\ &\leq \frac{2k(c + 1) \exp(h)h^2 \exp(Nh) \exp(4Nkh)}{\exp(h) - 1 + 4kh \exp(h)} \end{aligned}$$

En notant que

$$\exp(h) - 1 > 0$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\epsilon_{t_N}^2) &\leq \frac{2k(c + 1) \exp(h)h^2 \exp(Nh) \exp(4Nkh)}{4kh \exp(h)} \\ &\leq \frac{(c + 1)h \exp(Nh) \exp(4Nkh)}{2} \\ &\leq h \frac{(c + 1) \exp((1 + 4k)T)}{2} \end{aligned}$$

Nous avons donc montrer pour tout $i = 0, \dots, N$:

$$\mathbb{E}(|X_{t_i} - X_{t_i}^h|^2) \leq Mh$$

$$\text{avec } M = \frac{(c + 1) \exp((1 + 4k)T)}{2}.$$

D'où la proposition. □

Remarque

L'approximation d'Euler-Maruyama de la solution exacte est la chaîne de Markov X^h définie par

$$\begin{aligned} X_0^h &= x_0 \\ X_{t_{i+1}}^h &= X_{t_i}^h + \mu(t_i, X_{t_i}^h)h + \sigma(t_i, X_{t_i}^h)\Delta B_i, \text{ pour } i = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Maintenant, nous avons besoin de définir l'approximation d'Euler-Maruyama pour tout $t \in [0, T]$. Pour cela nous allons introduire le processus \tilde{X}_t comme interpolation linéaire par morceaux passant par les points $(t_i, X_{t_i}^h)$ définie par :

$$\tilde{X}_t = \frac{X_{t_i}^h(t_{i+1} - t)}{h} + \frac{X_{t_{i+1}}^h(t - t_i)}{h}$$

pour $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ et $i = 0, \dots, N-1$

Nous pouvons énoncer le théorème de convergence suivant :

Théorème 3.2.1.

Sous les hypothèses H1 et H2 l'approximation de la méthode d'Euler-Maruyama converge vers la solution exacte dans $L^2(\Omega, [0, T])$.

Preuve.

On a :

$$\|X - \tilde{X}\|_{L^2(\Omega, [0, T])}^2 = \mathbb{E} \int_0^T |X_t - \tilde{X}_t|^2 dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}|X_t - \tilde{X}_t|^2 dt.$$

Remplaçons par la formule de \tilde{X} :

$$\begin{aligned} \|X - \tilde{X}\|_{L^2(\Omega, [0, T])}^2 &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E} \left| X_t - \frac{X_{t_i}^h(t_{i+1} - t)}{h} - \frac{X_{t_{i+1}}^h(t - t_i)}{h} \right|^2 dt \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E} \left| X_t - X_{t_i} + X_{t_i} \frac{(t_{i+1} - t) + (t - t_i)}{h} + X_{t_{i+1}} \frac{(t - t_i)}{h} - X_{t_{i+1}} \frac{(t - t_i)}{h} \right. \\ &\quad \left. - \frac{X_{t_i}^h(t_{i+1} - t)}{h} - \frac{X_{t_{i+1}}^h(t - t_i)}{h} \right|^2 dt \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E} \left(|X_t - X_{t_i}| + |X_{t_i} - X_{t_i}^h| \frac{t_{i+1} - t}{h} + |X_{t_{i+1}} - X_{t_{i+1}}^h| \frac{t - t_i}{h} + |X_{t_i} - X_{t_{i+1}}| \frac{t - t_i}{h} \right)^2 dt \end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité ($2ab \leq a^2 + b^2$) alors :

$$\begin{aligned} \|X - \tilde{X}\|_{L^2(\Omega, [0, T])}^2 &\leq 4 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}|X_t - X_{t_i}|^2 dt + 4 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}|X_{t_i} - X_{t_i}^h|^2 \frac{(t_{i+1} - t)^2}{h^2} dt \\ &+ 4 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}|X_{t_{i+1}} - X_{t_{i+1}}^h|^2 \frac{(t - t_i)^2}{h^2} dt + 4 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}|X_{t_i} - X_{t_{i+1}}|^2 \frac{(t - t_i)^2}{h^2} dt. \end{aligned}$$

En appliquant la proposition précédente :

$$\begin{aligned} \|X - \tilde{X}\|_{L^2(\Omega, [0, T])}^2 &\leq 4 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}|X_t - X_{t_i}|^2 dt + 4 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} M \frac{(t_{i+1} - t)^2}{h} dt \\ &+ 4 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} M \frac{(t - t_i)^2}{h} dt + 4 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}|X_{t_i} - X_{t_{i+1}}|^2 \frac{(t - t_i)^2}{h^2} dt. \end{aligned}$$

A partir du théorème 2.2.4 on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|X - \tilde{X}\|_{L^2(\Omega, [0, T])}^2 &\leq 4 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} c(t - t_i) dt + 4 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} M \frac{(t_{i+1} - t)^2}{h} dt \\ &+ 4 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} M \frac{(t - t_i)^2}{h} dt + 4 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} c|t_i - t_{i+1}| \frac{(t - t_i)^2}{h^2} dt \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \|X - \tilde{X}\|_{L^2(\Omega, [0, T])}^2 &\leq 4 \sum_{i=0}^{N-1} \left(c \frac{h^2}{2} + M \frac{h^3}{3h} + M \frac{h^3}{3h} + c \frac{h^3}{3h} \right) \\ &\leq 4 \sum_{i=0}^{N-1} (5c + 4M) \frac{h^2}{6} \\ &\leq (10c + 8M) N \frac{h^2}{3} \\ &\leq (10c + 8M) T \frac{h}{3} \end{aligned}$$

finalement

$$\|X - \tilde{X}\|_{L^2(\Omega, [0, T])}^2 \leq \tilde{c}^2 h$$

3.3. APPLICATION AU MODÈLE DE CROISSANCE DE POPULATION STOCHASTIQUE 26

avec $\tilde{c}^2 = (10c + 8M)\frac{T}{3}$

En conclusion

$$\|X - \tilde{X}\|_{L^2(\Omega, [0, T])} \leq \tilde{c} \sqrt{h}$$

□

Ce qui nous permet d'énoncer le théorème de convergence forte suivant :

Théorème 3.2.2 (Convergence forte de la méthode d'Euler-Maruyama).

Sous les hypothèses H1 et H2, l'approximation d'Euler-Maruyama converge fortement vers la solution exacte à l'ordre 1/2.

La qualité de convergence faible du schéma d'Euler-Maruyama est exprimée dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.3 (Convergence faible de la méthode d'Euler Maruyama).

Sous les hypothèses H1 et H2, l'approximation d'Euler-Maryama converge faiblement vers la solution exacte à l'ordre 1.

3.3 Application au modèle de croissance de population stochastique

Dans cette partie nous allons analyser le schéma d'Euler-Maruyama pour un mouvement brownien géométrique utilisé pour modéliser la croissance d'une population stochastique. On considère l'EDS

$$dN_t = \mu N_t dt + \sigma N_t dB_t$$

3.3.1 Simulation de la solution exacte

La solution exacte est

$$N_t = N_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)$$

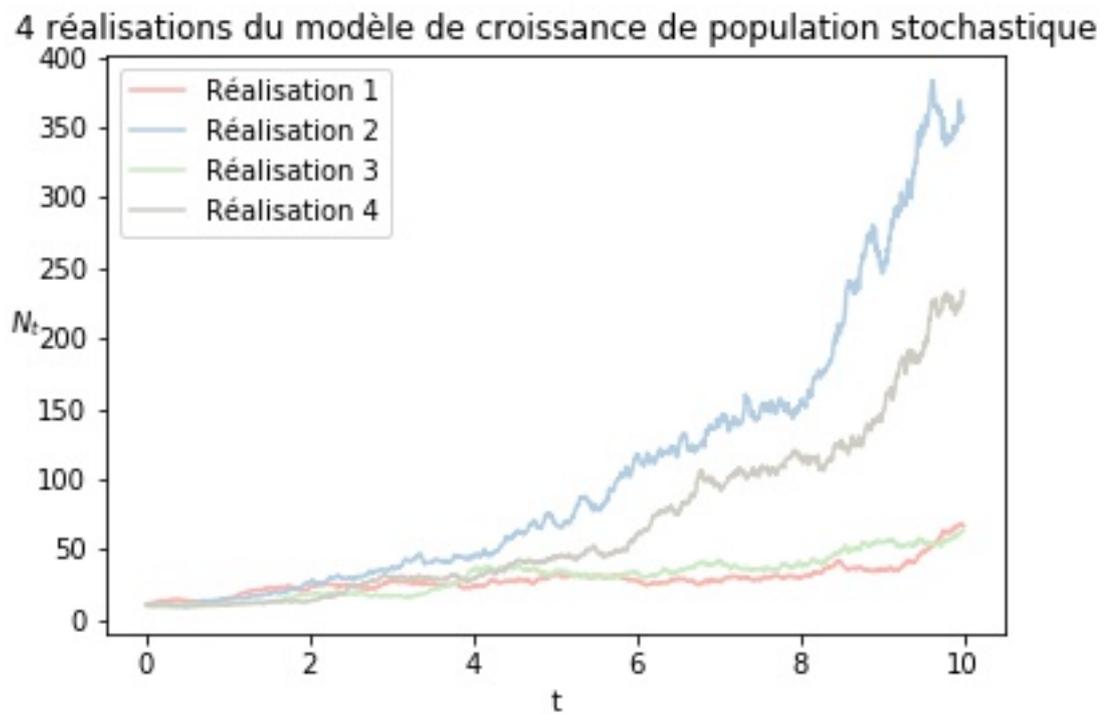
Pour les simulation nous avons pris les valeurs numériques arbitraires suivantes :

$$\mu = 0.3, \sigma = 0.2 \text{ et } N_0 = 10.$$

Dans la figure 3.1, sont représentées quatre réalisations de la solution exacte sur l'intervalle $t \in [0, 10]$.

3.3. APPLICATION AU MODÈLE DE CROISSANCE DE POPULATION STOCHASTIQUE 27

FIGURE 3.1 : 4 réalisations de la solution exacte du modèle de croissance de population stochastique



3.3. APPLICATION AU MODÈLE DE CROISSANCE DE POPULATION STOCHASTIQUE 28

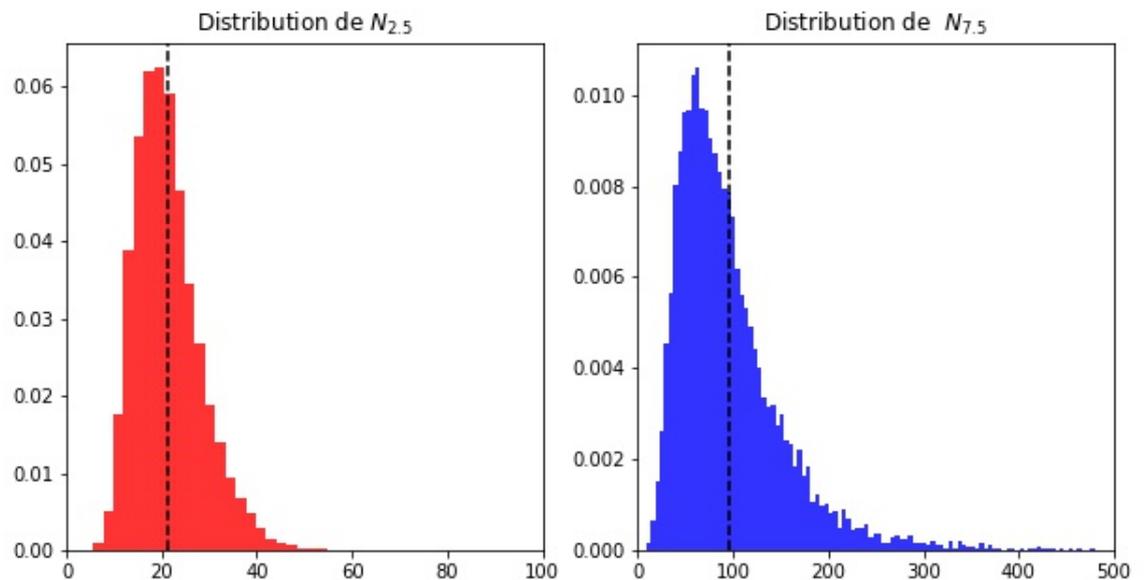
Dans ce qui suit, pour les valeurs de $t = 2.5$ et $t = 7.5$ nous avons représenté la distribution de la population obtenue avec 10000 simulations.

Dans la figure 3.2 sont représentés les histogrammes des fréquences relatives. On voit que l'histogramme bleu correspondant à la distribution de $N_{7.5}$ est asymétrique à droite et l'histogramme rouge correspondant à la distribution de $N_{2.5}$.

Les deux lignes verticales montrant leurs moyennes confirment également une valeur moyenne plus élevée pour $N_{7.5}$.

Nous voyons également que $N_{7.5}$ a une plus grande variance.

FIGURE 3.2 : Distribution de $N_{2.5}$ et $N_{7.5}$

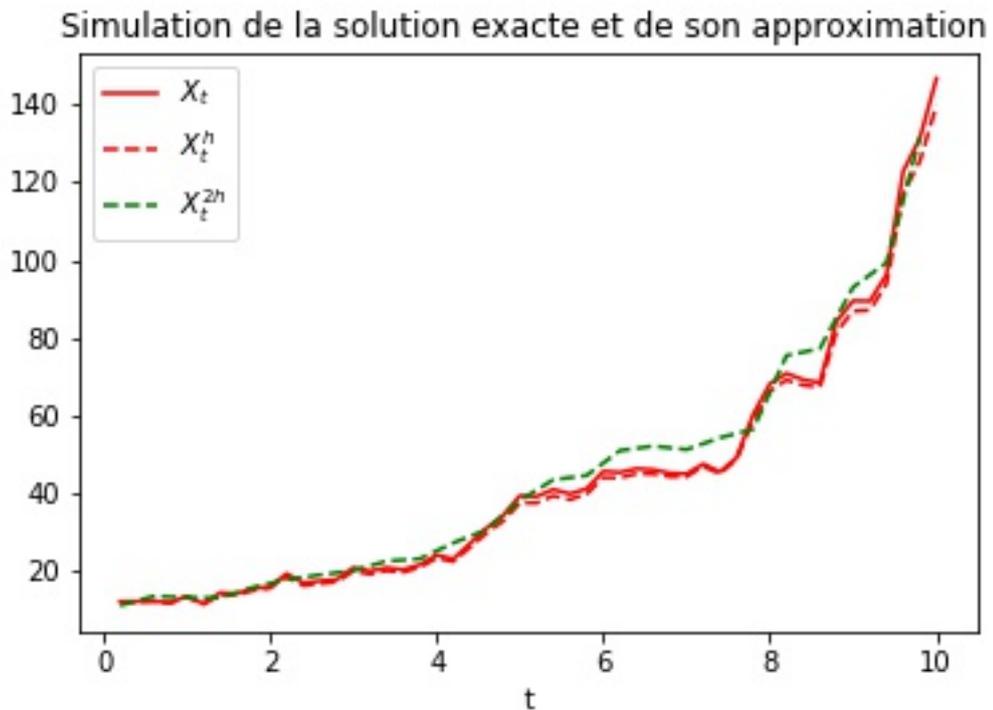


3.3.2 Simulation de la méthode d'Euler-Maruyama

Dans ce paragraphe, nous comparons l'approximation d'Euler-Maruyama avec la solution exacte. Dans la figure 3.3, deux schémas d'Euler-Maruyama sont appliqués. la première approximation avec un pas $h=0.2$ et la deuxième avec un pas $h=0.4$, la solution exacte est aussi représentée.

Nous remarquons que plus le pas de discrétisation diminue plus l'erreur est petit. On peut voir aussi que la trajectoire de solution approximée approche celle de la solution exacte.

FIGURE 3.3 : La solution approchée par la méthode d'Euler-Maruyama et la solution exacte



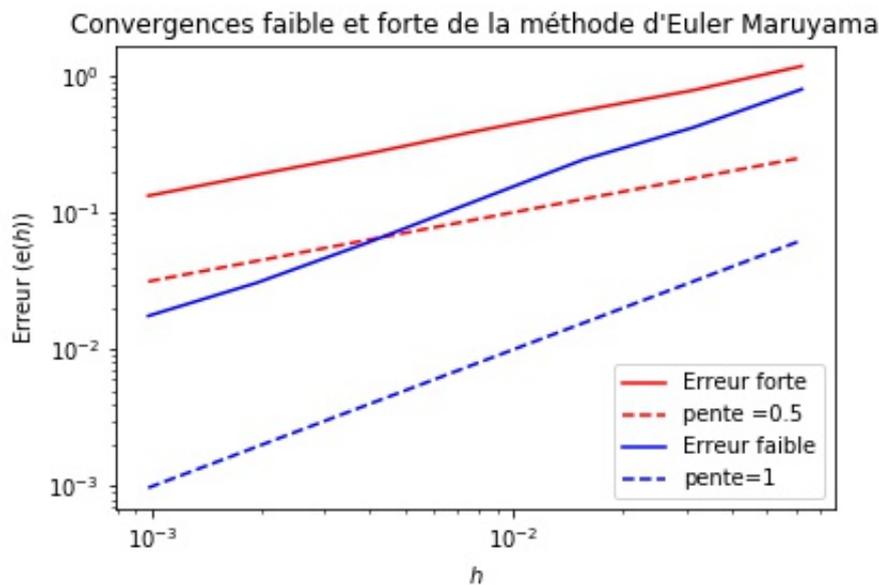
3.3. APPLICATION AU MODÈLE DE CROISSANCE DE POPULATION STOCHASTIQUE 30

Pour avoir une idée de l'erreur forte et faible d'Euler-Maruyama, on peut tracer le logarithme de l'erreur en fonction du logarithme du pas h choisi, on obtient des droites et leur pente est un indicateur empirique de l'ordre de la méthode.

On a appliqué la méthode d'Euler-Maruyama avec $h = 2^{R-10}$ pour $R = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, pour l'erreur forte nous calculons la moyenne des erreurs absolues puis trouvons le maximum, et pour l'erreur faible nous calculons l'erreur des moyenne puis trouvons le maximum.

D'après le graphe ci-dessous nous constatons une relation linéaire entre l'erreur forte et la taille de pas de temps avec une pente=0.5, cette pente représente l'ordre de convergence forte du schéma, et la pente 1 représente l'ordre de convergence faible du schéma.

FIGURE 3.4 : Erreur forte et faible de la méthode d'Euler-Maruyama



Une autre façon d'estimer les ordres de convergence est d'utiliser le module **statsmodels.api** et la fonction **OLS** pour obtenir la pente par régression linéaire, nous avons trouvé l'ordre de convergence faible=1.0041 et l'ordre de convergence forte=0.61. Ces résultats confirment bien la théorie.

Chapitre 4

Étude du modèle SIR

Dans ce chapitre, les modèles SIR déterministes et stochastiques sont introduits . Une simulation numérique des solutions dans les deux cas est présentée, ce qui aidera à la compréhension du comportement de ces modèles.

4.1 Modèle SIR déterministe

Le modèle SIR est un exemple de modèle mathématiques de maladies infectieuses.

C'est un modèle à compartiments, c'est à dire que la population est divisée en plusieurs catégories en fonction de l'état de santé de chaque individu.

Pour une population donnée, on étudie la taille de trois sous-populations au cours du temps t :

$S(t)$ représente les personnes saines au temps t

$I(t)$ les personnes infectées

$R(t)$ les personnes retirées .

$P_{totale} = S(t) + I(t) + R(t)$ représente alors la population constante totale au cours du temps et qui est suffisamment grande.

On a supposé que les individus guéris n'étaient plus infectés et que la probabilité qu'un individu soit infecté est constante pour tout S avec un taux β .

Mathématiquement, le modèle SIR est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} dS(t) = -\beta S(t)I(t)dt \\ dI(t) = (\beta S(t)I(t) - \gamma I(t))dt \\ dR(t) = \gamma I(t)dt \end{cases}$$

4.1.1 Explication du système

Les dérivées $\frac{d}{dt}$ permettent de connaître la variation (c'est à dire si c'est croissant ou décroissant) des fonctions S, I et R en fonction du temps t.

Le terme $S(t)I(t)$ représente le nombre de contacts entre des personnes saines et des personnes infectées.

β étant le taux de transmission, il y a dès lors $\beta S(t)I(t)$ personnes nouvellement infectées. Celles-ci se soustraient des personnes saines, et s'ajoutent aux personnes infectées.

γ étant le taux de guérison, il a $\gamma I(t)$ personnes nouvellement guéries qui s'enlèvent des personnes infectées et s'ajoutent aux personnes retirées.

Définition 4.1.1. *Le nombre de reproduction R_0 est le nombre moyen de cas secondaires produits par un individu infectieux au cours de sa période d'infection. Au début de l'épidémie, l'expression de R_0 est $\frac{\beta}{\gamma} P_{totale}$ puisque $\frac{1}{\gamma}$ représente la durée moyenne de la maladie et qu'au début, les personnes rencontrées sont presque toutes saines.*

Remarque 4.1.1. *En divisant la deuxième équation du modèle SIR par $\gamma I(t)$ on a :*

$$\frac{dI(t)}{\gamma I(t)} = \frac{\beta S(t)}{\gamma} - 1$$

La maladie va se propager tant que $\frac{\beta S(t)}{\gamma} > 1$ Le rapport $\frac{\beta S(t)}{\gamma}$ est le nombre d'individus infectés par un seul individu contagieux.

Donc si $\frac{\beta S(0)}{\gamma} > 1$ il y a une épidémie, sinon seulement quelques individus seront infectés et la maladie va disparaître d'elle même.

Théorème 4.1.1. *Si $R_0 > 1$, alors $I(t)$ croît, atteint son maximum puis décroît vers 0 quand t tend vers $+\infty$: c'est une épidémie.*

Sinon, $I(t)$ décroît directement vers 0 quand t tend vers $+\infty$: il n'y a pas d'épidémie.

4.1.2 Exemple de simulation du modèle

Dans ce qui suit nous allons illustrer la solution du modèle SIR. L'intégration du système différentiel est faite par la fonction `odeint` du module `scipy.integrate`. Dans la figure 4.1, la solution du modèle SIR déterministe est représentée avec les paramètres arbitraires $\beta = 2 \cdot 10^{-4}$, $\gamma = 0.1$ et les valeurs initiales $I(0) = 1$, $R(0) = 0$ et $S(0) = N - 1$ pour $N = 1000$ et une période $[0, 160]$. Le nombre de reproduction dans ce cas est $R_0 = 2$.

Dans la figure 4.2, $\beta = 10 \cdot 10^{-4}$. La valeur de R_0 dans ce cas est $R_0 = 10$.

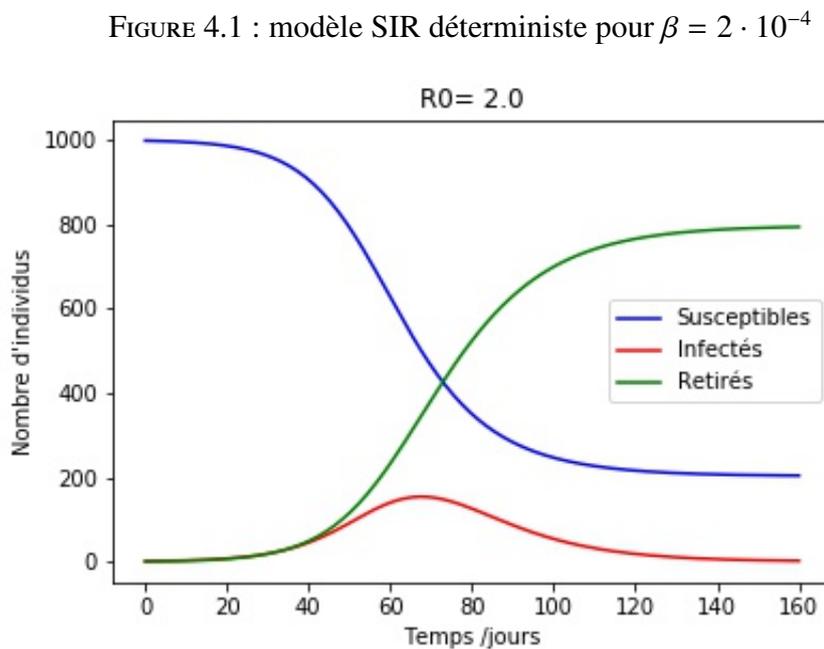
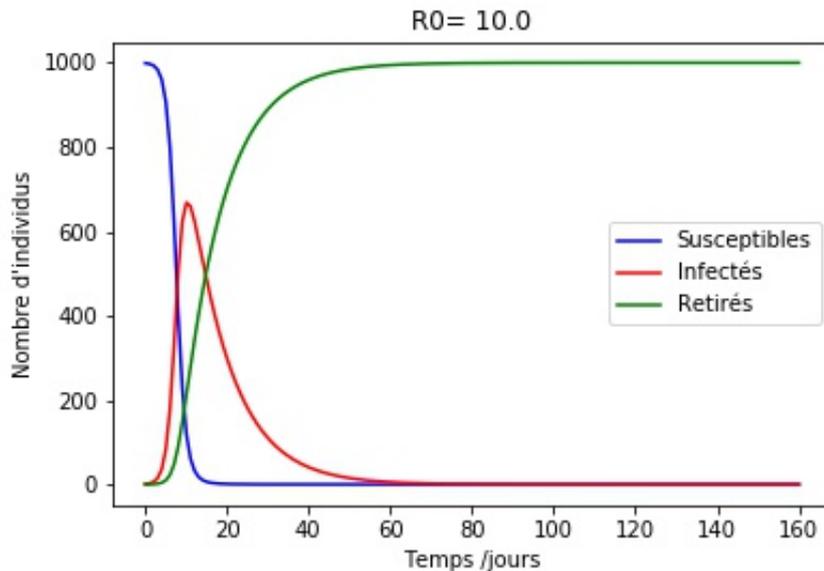


FIGURE 4.2 : modèle SIR déterministe pour $\beta = 10 \cdot 10^{-4}$ 

4.2 Modèle SIR stochastique

Il existe différentes manières de transformer le modèle SIR déterministe en un modèle stochastique, dans ce mémoire nous présentons la méthode de la perturbation paramétrique.

Étant donné le modèle SIR déterministe, l'idée de la perturbation paramétrique est de choisir un paramètre dans le modèle et le changer en une variable aléatoire.

Alors le paramètre γ change en $\hat{\gamma}$ c'est à dire

$$\hat{\gamma}dt = \gamma dt + \sigma dB_t$$

si on remplace γdt par $\hat{\gamma}dt$ le modèle SIR stochastique devient :

$$\begin{cases} dS_t = -\beta S_t I_t dt \\ dI_t = (\beta S_t I_t - \gamma I_t) dt + \sigma I_t dB_t \\ dR_t = \gamma I_t dt - \sigma I_t dB_t \end{cases}$$

avec

$P_{totale} = S_t + I_t + R_t$ est la population constante totale au cours du temps.

I_0 est le nombre initial d'infections.

S_0 est le nombre initial d'individus saines.

$$R_0 = P_{totale} - S_0 - I_0$$

dB_t est un mouvement brownien.

σ est un paramètre utilisé pour modéliser la stochasticité ou l'aléatoire dans l'évolution.

En nous inspirant des travaux de Maki et Hirose [4] et Simha et al. [5], nous modélisons dans ce mémoire l'évolution des infections au COVID-19 via le modèle SIR stochastique.

4.2.1 Analyse des conditions d'existence et d'unicité de la solution du modèle SIR

on pose $X = \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} S' \\ I' \\ R' \end{pmatrix}$ et

$$f(t, X) = \begin{pmatrix} -\beta S I \\ \beta S I - \gamma I \\ \gamma I \end{pmatrix}$$

$$g(t, X) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma I \\ -\sigma I \end{pmatrix}$$

alors

$$\|f(t, X) - f(t, X')\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\beta S I \\ \beta S I - \gamma I \\ \gamma I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\beta S' I' \\ \beta S' I' - \gamma I' \\ \gamma I' \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\beta(SI - S'I') \\ \beta(SI - S'I') - \gamma(I - I') \\ \gamma(I - I') \end{pmatrix} \right\|_2$$

première étape : Vérification de la condition de Lipschitz locale

En introduisant le terme $S'I'$ on obtient :

$$\begin{aligned} |-\beta(SI - S'I')|^2 &= \beta^2 |SI - S'I' + S'I' - S'I'|^2 \\ &= \beta^2 |S(I - I') + (S - S')I'|^2 \\ &\leq \beta^2 (|S(I - I')| + |(S - S')I'|)^2 \\ &\leq 2\beta^2 (|S(I - I')|^2 + |(S - S')I'|^2) \end{aligned}$$

En supposant que $\|X\| \vee \|X'\| \leq \rho$ on a

$$|-\beta(SI - S'I')|^2 \leq 2\beta^2 \rho^2 (|(I - I')|^2 + |(S - S')|^2) \quad (4.1)$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} |\beta(SI - S'I') - \gamma(I - I')|^2 &\leq (|\beta(SI - S'I')| + |\gamma(I - I')|)^2 \\ &\leq 2(|\beta(SI - S'I')|^2 + |\gamma(I - I')|^2) \end{aligned}$$

et donc

$$|\beta(SI - S'I') - \gamma(I - I')|^2 \leq (2\gamma^2 + 4\beta^2\rho^2) \|X - X'\|_2^2 \quad (4.2)$$

Il est clair que

$$\|g(t, X) - g(t, X')\|_2^2 \leq 2\sigma^2 \|X - X'\|_2^2 \quad (4.3)$$

les inégalités (4.1), (4.2) et (4.3) impliquent

$$\|f(t, X) - f(t, X')\|_2^2 \vee \|g(t, X) - g(t, X')\|_2^2 \leq K_\rho \|X - X'\|_2^2$$

avec $K_\rho = (2\sigma^2) \vee (3\gamma^2 + 6\beta^2\rho^2)$

Nous avons donc démontré la condition de Lipschitz locale pour le système SIR stochastique.

Deuxième étape : Vérification de la condition de croissance linéaire

Soit $\rho_0 > 0$ fixé aussi grand que l'on veut. On pose

$$f_{\rho_0}(t, X) = \begin{cases} f(t, X) & \text{si } \|X\|_2 < \rho_0; \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

et

$$g_{\rho_0}(t, X) = \begin{cases} g(t, X) & \text{si } \|X\|_2 < \rho_0; \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|f_{\rho_0}(t, X)\|_2^2 &\leq \left\| \begin{pmatrix} -\beta SI \\ \beta SI - \gamma I \\ \gamma I \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ &\leq \beta^2 S^2 I^2 + (\beta SI - \gamma I)^2 + \gamma^2 I^2 \\ &\leq 2\beta^2 S^2 I^2 - 2\beta\gamma S I^2 + 2\gamma^2 I^2 \\ &\leq 2\beta^2 S^2 I^2 + \beta^2 S^2 + \gamma^2 I^4 + \gamma^2 I^2 \\ &\leq \beta^2 (2I^2 + 1) S^2 + \gamma^2 (1 + I^2) I^2 \\ &\leq \beta^2 (2\rho_0^2 + 1) S^2 + \gamma^2 (1 + 2\rho_0^2) I^2 \\ &\leq (\beta^2 + \gamma^2) (2\rho_0^2 + 1) \|X\|_2^2 \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \|g_{\rho_0}(t, X)\|_2^2 &\leq 2\sigma^2 I^2 \\ &\leq 2\sigma^2 \|X\|_2^2 \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|f_{\rho_0}(t, X)\|_2^2 \vee \|g_{\rho_0}(t, X)\|_2^2 \leq \tilde{K}_0(1 + \|X\|_2^2)$$

avec $\tilde{K}_0 = (\beta^2 + \gamma^2)(2\rho_0^2 + 1) \vee 2\sigma^2$

En conclusion, l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_t = f_{\rho_0}(t, X_t)dt + g_{\rho_0}(t, X_t)dB_t, \quad X_0 \text{ donné et } t > 0$$

est assurée grâce au théorème 2.2.1.

4.2.2 Estimation des paramètres du modèle

Le modèle déterministe a deux paramètres qui peuvent être estimés en remplaçant la dérivée par la différence divisée :

$$\frac{dS(t)}{dt} \approx \frac{S_{t_{i+1}} - S_{t_i}}{t_{i+1} - t_i}$$

ce qui implique

$$\frac{S_{t_{i+1}} - S_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \approx -\beta(t_i)S(t_i)I(t_i)$$

donc

$$\beta(t_i) \approx \frac{S_{t_i} - S_{t_{i+1}}}{(t_{i+1} - t_i)S(t_i)I(t_i)} \quad (4.4)$$

de même

$$\frac{dR(t)}{dt} \approx \frac{R_{t_{i+1}} - R_{t_i}}{t_{i+1} - t_i}$$

ce qui implique

$$\frac{R_{t_{i+1}} - R_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \approx \gamma(t_i)I(t_i)$$

$$\gamma(t_i) \approx \frac{R_{t_{i+1}} - R_{t_i}}{(t_{i+1} - t_i)I(t_i)} \quad (4.5)$$

Le modèle stochastique a trois paramètres β , γ , σ , le coefficient σ est estimé par la propriété de la variation quadratique de processus $I(t)$:

$$\hat{\sigma}^2 \approx \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (I_{t_{i+1}} - I_{t_i})^2}{\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) I_{t_i}^2}$$

en effet :

Pour estimer $\hat{\sigma}$ on considère l'EDS :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

sous forme intégrale :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

On a la variation quadratique d'une intégrale stochastique HY telle que $(HY)_t = \int_0^t H_s dY_s$ est donnée par :

$$\langle HY \rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle Y \rangle_s$$

on obtient avec $(\mu_t = \mu(t, X_t), \sigma_t = \sigma(t, X_t)$ et $A_t = t)$:

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_t &= \langle \mu A \rangle_t + \langle \sigma B \rangle_t = \int_0^t \mu_s^2 d\langle A \rangle_s + \int_0^t \sigma_s^2 d\langle B \rangle_s \\ &= \int_0^t \sigma(s, X_s)^2 ds \end{aligned}$$

donc

$$\langle I \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t I^2(s) ds$$

de plus on a :

$$\langle I \rangle_t = \sum_{i=0}^{n-1} (I_{t_{i+1}} - I_{t_i})^2 \text{ et } \int_0^t I^2(s) ds \approx \sum_{i=0}^{n-1} I_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i)$$

ce qui est implique :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (I_{t_{i+1}} - I_{t_i})^2 = \hat{\sigma}^2 \sum_{i=0}^{n-1} I_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i) \quad (4.6)$$

4.2.3 Simulation du modèle SIR stochastique

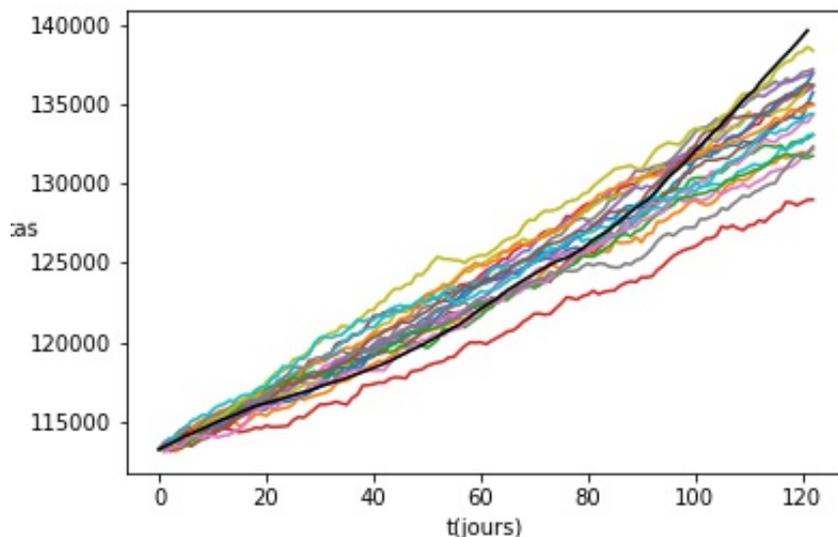
Modélisation de la deuxième vague de COVID-19 en Algérie

Nous avons modélisé la deuxième vague causée par le variant B.1.1.7 du SARS-CoV-2, aussi appelé le variant alpha ou variant anglais. En suivant la chronologie détaillée dans [8] nous observons les données du 1 Mars 2021 jusqu'à 30 Juin 2021. Les données ont été obtenues à partir de [7].

D'après les formules 4.4 et 4.5 on a calculé les paramètres β_i, γ_i pour $i = 0, \dots, 9$ puis leurs moyennes, nous avons obtenu $\beta = 6.065 \cdot 10^{-11}$, $\gamma = 0.0011$ et $\sigma = 0.0014$, à partir de la formule 4.6 dans notre cas le pas $h=1$ représente le jour, en comparant avec les paramètres donnés dans l'article [5] la table 1 pour l'Espagne qui a une population de même ordre de grandeur que l'Algérie de 4.67×10^7 où $\beta = 7.5 \cdot 10^{-9}$, $\gamma = 0.06$ et $\sigma = 0.02$ nous remarquons que nos valeurs sont plus petites.

Dans la figure 4.3 nous comparons 20 réalisations du modèle SIR avec les données réelles, la courbe de données réelles est de couleur noire, nous voyons que les 20 trajectoires observées de ce modèle sont proches de celle des données réelles et de ce fait nous validons les paramètres obtenus.

FIGURE 4.3 : Représentation du cumul des cas infectés de 20 réalisations du modèle SIR stochastique et les données réelles



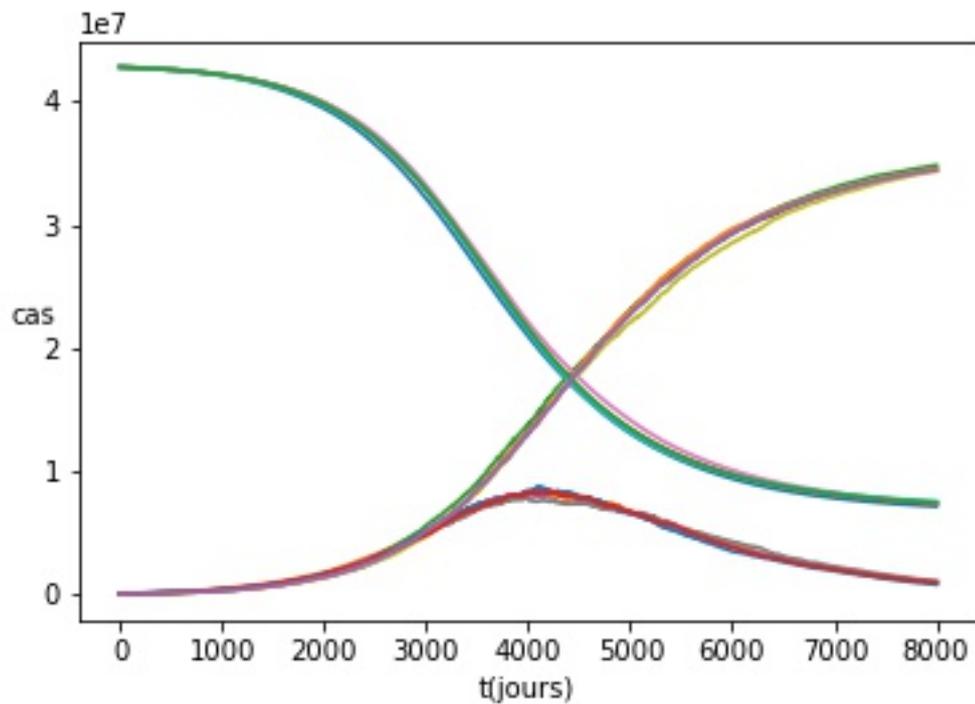
Dans la figure 4.4 nous faisons une prédiction de l'évolution de la propagation de COVID19 en Algérie pour une durée de 8000 jours. On trouve un plateau vers $0.9 \cdot 10^7$ après 4100 jours.

On remarque qu'après 8000 jours, on aura :

- $0.8 \cdot 10^7$ personnes saines.
- $0.1 \cdot 10^7$ personnes infectées.
- $3.4 \cdot 10^7$ personnes retirées.

On remarque que l'épidémie va disparaître au bout de 8000 jours sans aucune intervention.

FIGURE 4.4 : 5 réalisations du modèle SIR stochastique



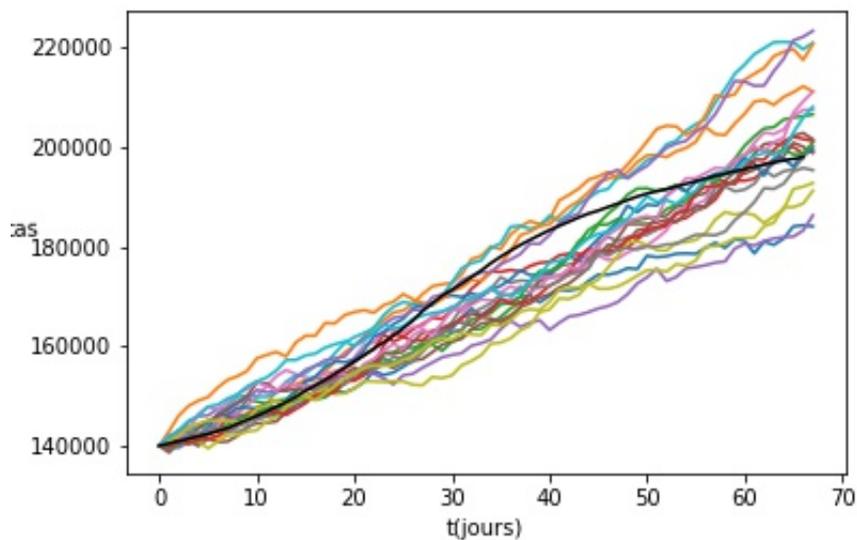
Modélisation de la troisième vague de COVID-19 en Algérie

Nous avons modélisé la troisième vague causée par le variant B.1.617.2 du SARS-CoV-2, aussi appelé variant delta ou variant indien. En suivant la chronologie détaillée dans [8] nous observons les données à partir de 1 Juillet 2021 jusqu'à 17 Septembre 2021.

Avec la même procédure que précédemment nous avons obtenu $\beta = 2.18 \cdot 10^{-10}$, $\gamma = 0.0036$ et $\sigma = 0.0060$, en comparant avec les paramètres estimés dans la deuxième vague et avec les paramètres donnés dans l'article [5] la table 1 pour l'Espagne, nous remarquons que les valeurs de la troisième vague sont plus grands que ceux de la deuxième vague et reste plus petits que ceux de l'Espagne.

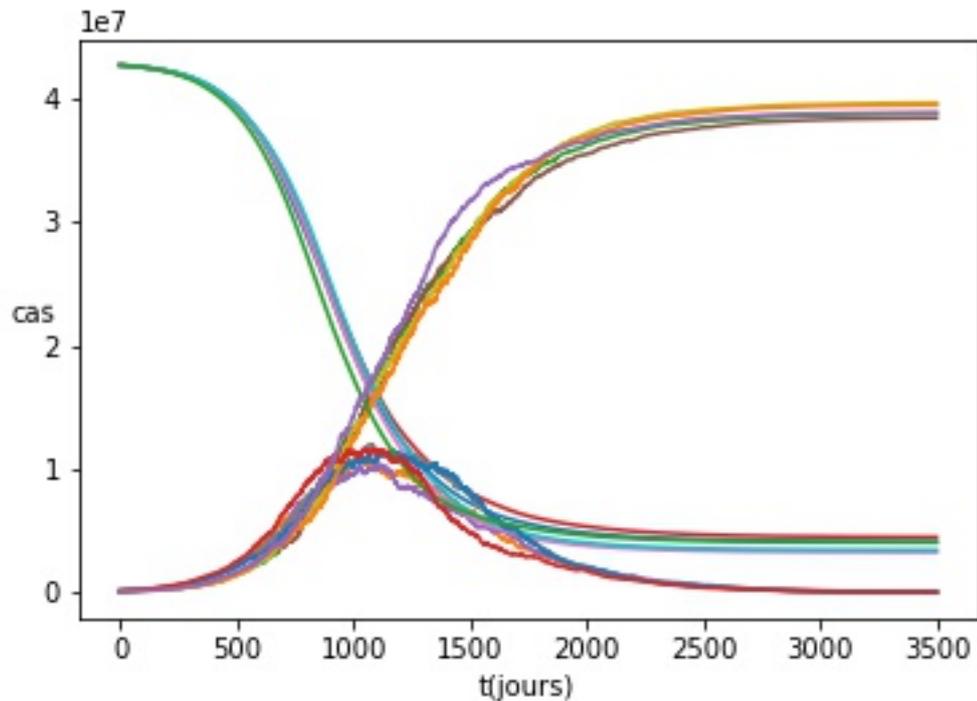
Dans la figure 4.5 nous comparons 20 réalisations du modèle SIR, cumul des cas infectés, avec les données réelles, la courbe de données réelles est de couleur noir, nous voyons que les 20 trajectoires observées de ce modèle sont "proches" de celle des données réelles.

FIGURE 4.5 : Représentation du cumul des cas infectés de 20 réalisations du modèle SIR stochastique et les données réelles



Dans la figure 4.6 nous faisons une prédiction d'évolution de la propagation de la troisième vague du COVID19 en Algérie pour une durée de 3500 jours.

FIGURE 4.6 : 5 réalisations du modèle SIR stochastique



On trouve un pic vers 10^7 d'après 1000 jours.
On remarque qu'après 2000 jours, on aura :

- $0.5 \cdot 10^7$ personnes sains.
- $0.1 \cdot 10^7$ personnes infectés.
- $3.7 \cdot 10^7$ personnes retirées.

On remarque que l'épidémie va disparaître au bout de 2500 jours.

Conclusion

Dans ce travail nous avons analysé la convergence forte du schéma d'Euler-Maruyama pour la résolution numérique des équations différentielles stochastiques. Pour atteindre ce but, nous avons présenté

- Quelques outils de calcul stochastique (processus stochastique, mouvement brownien, intégrale d'Itô et formule d'Itô).
- Les équations différentielles stochastiques en exposant les conditions suffisantes d'existence et d'unicité de la solution.
- L'approximation d'Euler-Maruyama et l'étude de convergence forte de ce schéma
- Des simulations numériques pour confirmer les résultats théoriques de convergence sont aussi proposées dans le cadre du modèle de croissance stochastique.

Ensuite nous avons proposé une analyse des deuxième et troisième vagues de l'épidémie du COVID-19 en Algérie, à l'aide du modèle SIR stochastique. Nous avons étudié les conditions d'existence et d'unicité de la solution. Pour finir, en exploitant les données disponibles nous avons produit une simulation en utilisant le langage Python 3.

L'étude et l'analyse des points cités ci-dessus nous a conduit aux conclusions suivantes :

- Les équations différentielles stochastiques sont adaptées à la modélisation en épidémiologie.
- Le schéma d'Euler-Maruyama est l'une des méthodes les plus simples pour la résolution des équations différentielles stochastiques. Elle a l'avantage d'être facilement programmable.
- Nos prédictions de la propagation du COVID19 en Algérie peuvent ne pas correspondre à la réalité car la modélisation des maladies infectieuses demande

d'étudier non seulement les cycles de transmission mais aussi l'influence des caractéristiques (âge, genre) ou saisonnalité (la transmission d'infection change au cours du temps) ou des comportements (voyager, aller à l'école ou au travail, rester à la maison) ou stratégies de contrôle (comme la vaccination, confinement), et nous avons négligé ces aspects.

Annexe

code python

10 trajectoires d'une marche aléatoire pour n=100

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from random import choice
nbmarche,n=10,100
x=np.linspace(0,100,num=n+1)
for i in range (nbmarche):
    y=[0]
    for i in range (n):
        y.append(y[-1]+choice([-1,1]))
    fig=plt.figure(3)
    plt.plot (x,y)
    plt.xlabel("n")
    plt.ylabel("S",rotation=1)
    fig.savefig('marche1.jpeg')
```

10 trajectoires du mouvement brownien

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
t0=0
T=100
N=1000
M=10
h=(T-t0)/N
t=np.arange(t0,T,h)
dw=np.sqrt(h)*np.random.randn(N,M)
w=np.cumsum(dw,axis=0)
fig=plt.figure(1)
```

```
plt.plot(t,w)
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("B(t)",rotation=1)
fig.savefig('Brown2.jpeg')
```

Simulation d'un mouvement brownien de dimension 2

```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
t0=0
T=1
N=1000
h=(T-t0)/N
t=np.arange(t0,T+h,h)
dw1=np.random.normal(loc=0,scale=np.sqrt(h),size=N)
w1=np.cumsum(dw1)
w1=np.concatenate((np.array([0]),w1))
dw2=np.random.normal(loc=0,scale=np.sqrt(h),size=N)
w2=np.cumsum(dw2)
w2=np.concatenate((np.array([0]),w2))
fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
ax.plot(t, w1, w2)
ax.legend()
fig.savefig('Browndim2.jpeg')
```

4 réalisations du modèle de croissance de population stochastique

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# palettes de couleurs pour la fonction plot
pal = ["#FBB4AE", "#B3CDE3", "#CCEBC5", "#CFCCC4"]
# Paramètres du modèle sde
mu, sigma, X0 = 0.3, 0.2, 10
# Paramètres de simulation
T = 10
dt = 0.01
t = np.arange(dt, T + dt, dt)
N=int(T/dt)
```

```

# Initialisation de la figure
fig1=plt.figure(1)
plt.title('4 réalisations du modèle de croissance de population stochastique')
plt.ylabel('$N_t$',rotation=1); plt.xlabel('t')
for i in range(len(pal)):
    np.random.seed(i)
    dB = np.sqrt(dt) * np.random.randn(N)
    B = np.cumsum(dB)
    Y = X0 * np.exp((mu - 0.5 * sigma**2) * t + sigma * B)
    plt.plot(t, Y, label = "Réalisation " + str(i+1), color=pal[i])
plt.legend(loc = 2);
fig1.savefig('real.jpeg')

```

Distrubution de $N_{2.5}$ et $N_{7.5}$

```

mu, sigma, X0 = 0.3, 0.2, 10
# Paramètres de simulation
T = 10
dt = 0.01
t = np.arange(dt, T + dt, dt)
N=int(T/dt)
N_1, N_2, N_total = [], [], []
for i in range(10000):
    # Create Brownian Motion
    np.random.seed(i)
    dB = np.sqrt(dt) * np.random.randn(N)
    B = np.cumsum(dB)
    # Exact Solution
    Y = X0 * np.exp(((mu - 0.5 * sigma**2) * t) + (sigma * B))
    N_1.append(Y[int(0.25 * N)])
    N_2.append(Y[int( .75*N)])
    N_total.append(Y)
fig2=plt.figure(2, figsize=(10,5))
plt.subplot(121)
plt.xlim(0,100)
plt.hist(N_1,color="r",bins=30,density=1,alpha=0.8)
plt.axvline(np.mean(N_1),linestyle='--',color="k")
plt.title('Distribution de $N_{2.5}$')
plt.subplot(122)
plt.hist(N_2,color="b",bins=150,density=1,alpha=0.8)
plt.xlim(0,500)

```

```
plt.axvline(np.mean(N_2),linestyle='--',color="k");
plt.title('Distribution de  $N_{\{7.5\}}$ ')
fig2.savefig('distr.jpeg')
```

La solution approchée par la méthode d'Euler-Maruyama et la solution exacte

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Paramètres du modèle sde
mu, sigma, X0 = 0.3, 0.2, 10
# Paramètres de simulation
T = 10
h = 0.2
t = np.arange(h, T + h, h) # Start at h because Y = X0 at t = 0
N=int(T/h)
# Creation du mouvement Brownien
np.random.seed(1)
dB = np.sqrt(h) * np.random.randn(N)
B = np.cumsum(dB)
# Solution exacte
Y = X0 * np.exp((mu - 0.5*sigma**2)*t + (sigma * B))
#Approximation EM pour un pas h
X_h, X = [], X0
for j in range(N):
    X += mu*X*h + sigma*X*dB[j]
    X_h.append(X)
# Approximation EM pour un pas 2*h
X_2h, X= [],X0
H = np.arange(h,T+h,2*h)
for j in range(int(N/2)):
    X += mu*X* (2*h) + sigma*X*sum(dB[2*(j-1):2*j])
    X_2h.append(X)
# Représentation graphique
fig1=plt.figure(1)
plt.plot(t, Y, label="$X_t$", color="r")
plt.plot(t, X_h, label="$X_t^h$", color="r", ls='--')
plt.plot(H, X_2h, label="$X_t^{2h}$", color="g", ls='--')
plt.title("Simulation de la solution exacte et de son approximation ")
plt.xlabel('t'); plt.legend(loc = 2);
fig1.savefig('euler.jpeg')
```

Erreur forte et faible de la methode d'Euler-Maryama

```

erreur_forte, erreur_faible = [], []
hh = [2 ** (R-10) for R in range(7)]
mc = 10000
for h in hh:
    t = np.arange(h,T+ h, h)
    n = len(t)
    # Initialisation du vecteur erreur
    err_em= np.zeros(n)
    Y_sum, Xem_sum= np.zeros(n), np.zeros(n)
    for i in range(mc):
        np.random.seed(i)
        dB = np.sqrt(h) * np.random.randn(n)
        B = np.cumsum(dB)
        # Solution exacte
        Y = X0 * np.exp((mu - 0.5*sigma**2)*t + sigma * B)
        Xemt, Xem = X0, []
        for j in range(n):
            # Euler-Maruyama
            Xemt += mu*Xemt* h + sigma * Xemt * dB[j]
            Xem.append(Xemt)
        err_em += abs(Y - Xem)
        Y_sum += Y
        Xem_sum += Xem
    # Calcul de la moyenne des erreurs absolues puis trouver le maximum (erreur)
    erreur_forte.append(max(err_em / mc))
    # Calcul de l'erreur des moyenne puis trouver le maximum (erreur faible)
    erreur_faible.append(max(abs(Y_sum - Xem_sum)/mc))
# Représentation graphique
fig2=plt.figure(2)
plt.loglog(hh, erreur_forte, label="Erreur forte",color="r")
plt.loglog(hh,np.asarray(hh)**.5,color="r",ls="--", label="pente =0.5")
plt.loglog(hh, erreur_faible, label="Erreur faible",color="b")
plt.loglog(hh,hh,color="b",ls="--", label="pente=1")
plt.title("Convergences faible et forte de la méthode d'Euler Maruyama")
plt.xlabel('$h$'); plt.ylabel('Erreur (e($h$))'); plt.legend();
import statsmodels.api as sm
X = sm.add_constant(np.log(hh))
results = sm.OLS(np.log(erreur_faible),X).fit()
print("Ordre de convergence faible: "+ str(results.params[1]))

```

```

results = sm.OLS(np.log(erreur_forte),X).fit()
print("Ordre de convergence forte: "+ str(results.params[1]))
fig2.savefig('erreur.jpeg')

```

Exemple de simulation du modèle SIR déterministe

```

import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
# Population totale, N.
N = 1000
# Valeurs initiales I0 et R0.
I0, R0 = 1, 0
# Les individus susceptibles d'être infectés S0.
S0 = N - I0 - R0
beta, gamma = 2e-4, .1
t = np.linspace(0, 160, 160)
# Les equations différentielles du modèle SIR
def df(y, t, N, beta, gamma):
    S, I, R = y
    dSdt = -beta * S * I
    dIdt = beta * S * I - gamma * I
    dRdt = gamma * I
    return dSdt, dIdt, dRdt
# Condition initiale
y0 = S0, I0, R0
# Integration du système différentielle par la fonction odeint
beta=2e-4
r0=beta*N/gamma
sol = odeint(df, y0, t, args=(N, beta, gamma))
S, I, R = sol.T
# Représentation graphique des courbes S(t),I(t) et R(t)
fig =plt.figure(1)
plt.plot(t, S, 'b',label='Susceptibles')
plt.plot(t, I,'r', label='Infectés')
plt.plot(t, R, 'g', label='Retirés')
plt.xlabel('Temps /jours')
plt.ylabel("Nombre d'individus")
plt.legend()
plt.title('R0= '+str(r0))
fig.savefig('sirdet1.jpeg')

```

```

beta=10e-4
r0=beta*N/gamma
sol = odeint(df, y0, t, args=(N, beta, gamma))
S, I, R = sol.T
# Représentation graphique des courbes S(t),I(t) et R(t)
fig = plt.figure(2)
plt.plot(t, S, 'b',label='Susceptibles')
plt.plot(t, I,'r', label='Infectés')
plt.plot(t, R, 'g', label='Retirés')
plt.xlabel('Temps /jours')
plt.ylabel("Nombre d'individus")
plt.legend()
plt.title('R0= '+str(r0))
fig.savefig('sirdet2.jpeg')

```

Représentation du cumul des cas infectés de 20 réalisations du modèle SIR stochastique et les données réelles

```

import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
df = pd.read_csv('Algerie2.csv',delimiter=";")
print("Les 5 premières lignes de la base de données")
print(df.head())
df1=df.loc[:,["cas","deces","guerisons"]]
print("extraction des données")
print()
print(df1.head())
a=df1.values
n=len(a)
I=np.zeros(len(a))
I=a[:,0]
R=np.zeros(len(a))
R=a[:,1]+a[:,2]
S=np.zeros(len(a))
S=43e6-I-R
m=10
beta=np.zeros(m)
gamma=np.zeros(m)
sigma=np.zeros(m)
alpha=np.sqrt(sum((I[1:m]-I[:m-1])**2)/sum(I[:m-1]**2))

```

```

for i in range (0,m):
    beta[i]=(S[i]-S[i+1])/(S[i]*I[i])
    gamma[i]=(R[i+1]-R[i])/I[i]
    sigma[i]=(I[i+1]-I[i])**2
mbeta=sum(beta)/(m)
mgamma=sum(gamma)/(m)
msigma=np.sqrt(sum(sigma)/sum(I[:m]**2))
SIR_drift=lambda x,t :np.array([-Beta*x[0]*x[1],Beta*x[0]*x[1]-Gamma*x[1],Gamma*x[1])
SIR_diffusion=lambda x,t : np.array([0,Sigma*x[1],-Sigma*x[1]])
SIR=lambda x,t :np.array([-Beta*x[0]*x[1],Beta*x[0]*x[1]-Gamma*x[1]+Sigma*x[1])
def Euler_Maryama(f,g,x0,t0,T,N):
    h=(T-t0)/N
    t=np.linspace(t0,T,N+1)
    x=[]
    x.append(x0)
    dw=np.random.normal(loc=0.0,scale=np.sqrt(h),size=t.size)
    for i in range (N):
        x.append(x[i]+f(x[i],(i)*h)*h+g(x[i],(i)*h)*dw[i+1])
    return t,x
t0=0
T=n
N=n
h=(T-t0)/N
#t1=np.linspace(0,m,N)
#ptotale=43e6
Beta=mbeta
Gamma=mgamma
Sigma=msigma
I0=I[0]
S0=S[0]
R0=R[0]
x0=np.array([S0,I0,R0])
plt.figure(1)
for k in range(20):
    t,x=Euler_Maryama(SIR_drift,SIR_diffusion,x0,t0,T,N)
    b=x[0]
    for i in range (1,N+1):
        c=np.vstack((b,x[i]))
        b=c
    plt.plot(t,b[:,1]),
    plt.xlabel("t(jours)"),

```

```
plt.ylabel("cas",rotation=1)
plt.plot(I,"k")
plt.savefig('sir1.jpeg')
```

5 réalisations du modèle SIR stochastique

```
df = pd.read_csv('Algerie2.csv',delimiter=";")
df1=df.loc[:,["cas","deces","guerisons"]]
a=df1.values
n=len(a)
I=np.zeros(len(a))
I=a[:,0]
R=np.zeros(len(a))
R=a[:,1]+a[:,2]
S=np.zeros(len(a))
S=43e6-I-R
m=10
beta=np.zeros(m)
gamma=np.zeros(m)
sigma=np.zeros(m)
alpha=np.sqrt(sum((I[1:m]-I[:m-1])**2)/sum(I[:m-1]**2))
for i in range (0,m):
    beta[i]=(S[i]-S[i+1])/(S[i]*I[i])
    gamma[i]=(R[i+1]-R[i])/I[i]
    sigma[i]=(I[i+1]-I[i])**2
mbeta=sum(beta)/(m)
mgamma=sum(gamma)/(m)
msigma=np.sqrt(sum(sigma)/sum(I[:m]**2))
SIR_drift=lambda x,t :np.array([-Beta*x[0]*x[1],Beta*x[0]*x[1]-Gamma*x[1],Gamma*x[1])
SIR_diffusion=lambda x,t : np.array([0,Sigma*x[1],-Sigma*x[1]])
SIR=lambda x,t :np.array([-Beta*x[0]*x[1],Beta*x[0]*x[1]-Gamma*x[1]+Sigma*x[1])
def Euler_Maryama(f,g,x0,t0,T,N):
    h=(T-t0)/N
    t=np.linspace(t0,T,N+1)
    x=[]
    x.append(x0)
    dw=np.random.normal(loc=0.0,scale=np.sqrt(h),size=t.size)
    for i in range (N):
        x.append(x[i]+f(x[i],(i)*h)*h+g(x[i],(i)*h)*dw[i+1])
    return t,x
t0=0
```

```
T=8000
N=8000
h=(T-t0)/N
#t1=np.linspace(0,m,N)
#ptotale=43e6
Beta=mbeta
Gamma=mgamma
Sigma=msigma
I0=I[0]
S0=S[0]
R0=R[0]
x0=np.array([S0,I0,R0])
plt.figure(1)
for k in range(5):
    t,x=Euler_Maryama(SIR_drift,SIR_diffusion,x0,t0,T,N)
    b=x[0]
    for i in range (1,N+1):
        c=np.vstack((b,x[i]))
        b=c
    [p1,p2,p3]=plt.plot(t,x)
plt.xlabel("t(jours)"),
plt.ylabel("cas",rotation=1)
plt.savefig('sir2.jpeg')
```

Bibliographie

- [1] Edward Allen, Modeling with Itô Stochastic Differential Equations, Mathematical modelling : Theory and applications, Springer Netherlands, 2007.
- [2] Vgirdas Mackevičius, Introduction to Stochastic Analysis, Integrals and Differential Equations, Wiley-ISTE,2011.
- [3] Xuerong Mao, Stochastic Differential Equations and Applications, Woodhead Publishing,Second Edition 2007.
- [4] Yoshihiro Maki, Hideo Hirose, Infectious Disease Spread Analysis Using Stochastic Differential Equations for SIR Model,4th International Conference on Intelligent Systems, Modelling and Simulation, 2013.
- [5] Ashutosh Simha, R.Venkatesha Prasad, Sujay Narayana, A simple stochastic SIR model for COVID-19 Infection Dynamics for Karnataka after interventions -Learning from European Trends,<https://arxiv.org/abs/2003.11920>, avril 2020.
- [6] <http://images.math.cnrs.fr/Modelisation-d-une-epidemie-partie-1.html>
- [7] <https://www.coronavirus-statistiques.com/open-data/>
- [8] https://fr.wikipedia.org/wiki/Pandémie_de_Covid-19_en_Algerie