République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université de Tlemcen
Faculté de Sciences

Département de Mathématiques
Spécialité : Équations aux dérivées partielles et applications

MÉMOIRE DE MASTER

Existence de solutions d'un problème elliptique semi linéaire avec exposant critique de Hardy-Sobolev

---

Présenté par:

Djadaine Sarah

Soutenue le : 14/ 07/ 2021 devant le jury

PRÉSIDENT :	Mme Y. Nasri	Professeur,	Université de Tlemcen
EXAMINATEUR :	Mme A. Matallah	Maître de Conférences A,	E. S. M. Tlemcen
ENCADRANT :	Mr A. Rimouche	Maître de Conférences B,	Université de Tlemcen

---

2020/2021

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mon trés cher père. Tu as toujours été mon école de patience, de confiance et surtout d'espoir. Tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager . Que ce travail traduit ma gratitude.
J'implore Dieu, tout puissant, de vous accorder une bonne santé, longue vie et beaucoup de bonheur .

Mon trés chère mère. Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.
Puisse Dieu, tout puissant vous combler de santé, de bonheur et vous procurer une longue vie.

Mes chères soeurs, Rahma, Krima et Amel, pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

Mes chères amies, Yasmine, Aaicha et Meriem, pour leurs aides et supports dans les moments difficiles.

Toute ma famille.

Remerciements

Avant tout je remercie **ALLAH** qui m'a donné la force, le courage et la patience pour terminer ce mémoire.

J'adresse mes remerciements par un grand respect et gratitude en particulier à mon encadreur monsieur **Ali Rimouche** qui a dirigé ce travail, de m'avoir encadré et proposé un sujet aussi passionnant et intéressant. Sa disponibilité permanente et son aide m'ont été d'un soutien dont je lui suis particulièrement reconnaissant . Sa compétence et ses conseils m'ont été grand secours.

Je souhaite également remercier tout les professeurs qui m'ont beaucoup appris, pour leurs precieux conseils et aimables encouragements durant toute ma trajectoire d'etude.

Je tiens à remercier avec plus grande gratitude madame **Nasri Yasmina** de l'honneur q'elle me fait d'avoir accepter de présider le jury de ce mémoire.

Mes vifs remerciements s'adressent à madame **Matallah Atika** d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

En fin, grand merci à toute personne m'ayant aidée et guidée pour la réalisation de ce mémoire.

Sommaire

Introduction générale

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et de notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basée sur les équations aux dérivées dérivées partielles (EDP), nous pouvons citer par exemple les prévisions météorologiques, les secousses sismiques, les mouvements des océans, des disciplines scientifiques telles l'économie, la finance, les sciences médicales. Les EDP interviennent aussi dans les problèmes physiques : en électromagnétisme (équation de Maxwell), en mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes), en mécanique quantique (équation de Schrödinger) etc.

Une EDP est une équation dont l'inconnue est une fonction et qui fait intervenir non seulement cette fonction mais aussi ses dérivées partielles. L'ordre maximal de dérivation intervenant dans l'équation est appelé ordre de l'EDP.
On distingue trois grandes catégories d'EDP : elliptique, parabolique, et hyperbolique. Les équations de type elliptique interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est-a-dire n'évoluant pas au cours du temps). Le prototype d'équation elliptique est l'équation de Poisson $-\Delta u = f$, l'inconnue $u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, et de donnée f. Un exemple d'équation de Poisson est celle vérifiée par la potentiel électrostatique $-\Delta v = \frac{\varphi}{\epsilon}$ avec φ est la densité volumique de charge électrique et ϵ la permittivité électrique du milieu.

Il y a plusieurs méthodes pour l'étude de l'existence et les propriétés qualitatives des solutions des EDP : les méthodes topologiques comme la méthode du point fixe, les méthodes variationnelles, les méthodes numériques comme la méthode des élément finis, la méthode de sous et sur solution, et les arguments de compacité. Par conséquent l'étude de ces équations est une tâche ardue car il n'y a pas de méthodes générales pour leurs résolutions, et donc chaque problème nécessite une approche appropriée selon le type de linéarité.

Dans ce mémoire, on s'intéresse essentiellement à l'étude de problèmes elliptiques semi-linéaires homogènes, dans les problèmes considéré au cours de ce travail, nous nous plaçons sur un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$, avec des conditions aux limites de type Dirichlet, notre travail consiste à étudier l'existence d'une solution positive.
La présence d'exposant critique critique de Sobolev ou de Hardy-Sobolev pose un certain nombre de difficultés liées à la perte de compacité dans les injections type Sobolev. Les méthodes variationnelle classiques ne sont pas applicables.

Les problèmes contenant un seul exposant ont été largement étudiée, on les appelle problèmes de type Brézis-Nirenberg (voir par exemple : [5], [7],[19]).

Dans ce mémoire, nous allons traiter un cas particulier du papier de Ghoussoub-Yuan [13], on étudie l'existence de solution positive du problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{|u|^{p-2}}{|x|^s} u + \lambda |u|^{q-2} u \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N (N \geq 3), 2 < q < p \leq 2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$ est l'exposant critique de Hardy-Sobolev et $0 \leq s < 2$.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre concerne la partie préliminaires où on donne quelques définitions et théorèmes sur les espaces de Sobolev et les méthodes variationnelles.

Dans le chapitre 2. On étudie l'existence de solutions du problème (1) avec $s = 0$. En utilisant le théorème du col pour trouver une solution faible positive dans $H_0^1(\Omega)$, et on distingue deux cas qu'on traitera explicitement, le cas critique c'est-a-dire pour
$p < 2^*(0) = 2^* = \frac{2N}{N-2}$ l'exposant critique de Sobolev, et le cas critique, c'est a dire pour $p = 2^*$, dans ce cas il y a un perte de compacité dans l'injections de Sobolev car l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$ n'est pas compacte. Dans ce cas, les arguments standard de la théorie des points critiques ne sont pas applicables.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude du problème (1) avec $0 < s < 2$. On distingue deux cas :

1. Le cas sous critique (c'est-a-dire pour $2 < q < p < 2^*(s)$),où on démontre l'existence d'une solution positive dans $H_0^1(\Omega)$ pour tout $\lambda > 0$.
2. Le cas critique (c'est-a-dire pour $2 < q < p = 2^*(s)$) : sous des conditions suffisantes sur l'exposant q , on a montré l'existence d'une solution positive.

Notations

Symbole	**Signification**
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Vecteur de $\mathbb{R}^N$; $(N \in \mathbb{N})$.
$\vert x\vert = \left(\sum\limits_{i=0}^{N} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$	Module de x.
$(u_n) := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Suite à valeurs réels .
$\rightharpoonup$	Convergence faible.
$\rightarrow$	Convergence forte.
Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	Frontière de Ω.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω.
$C(\Omega)$	L'ensemble de fonctions continues sur Ω .
$C^\infty(\Omega)$	L'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivable définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$D(\Omega)$	L'ensemble de fonctions indéfiniment dérivable sur Ω et à support compact.
$D'(\Omega)$	Dual topologique de $D(\Omega)$.
$\vert\vert u\vert\vert := \vert\vert u\vert\vert_{H_0^1(\Omega)}$	La norme dans $H_0^1(\Omega)$.
$\nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$	Gradient de la fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.
$\Delta u := \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplacien de la fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.
$\frac{\partial u}{\partial \eta}$	Dérivée normale extérieure.
p.p :	Presque partout.
$B(x, R)$	La boule dans $\mathbb{R}^N$ de centre x et de rayon r.
ω_n	La mesure de la sphère unité dans $\mathbb{R}^N$.
$2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$	L'exposant critique de Hardy-Sobolev avec $0 < s < 2$.
$2^* = \frac{2N}{N-2}$	L'exposant critique de Sobolev.
E'	Espace dual de E.
$\langle , \rangle$	Dualité E', E.

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre est de rappeler les principaux résultats utilisés dans ce mémoire .

1.1 Espaces de Sobolev

1.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1. Soit $1 \leq p < \infty$; l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$, est défini par :

$$\Big\{u : \Omega \to \mathbb{R}, u \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x < \infty\Big\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_p = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach, séparable, de plus si $1 < p < \infty$ est réflexif.

On définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ par :

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \exists\, c > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Théorème 1.1.1 (**Inégalité de Hölder** [4]**).** *Soient f, g sont deux fonctions telles que $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$(p' le conjugué de p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} =$*

1*) avec* $1 \leq p < \infty$. *Alors* $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega |fg| \leq ||f||_p ||g||_{p'}.$$

Théorème 1.1.2 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue [18]). *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *telle que* $f_n \to f$ *p.p sur* Ω *quand* $n \to +\infty$ *et il existe une suite* $(g_n) \subset L^1(\Omega)$ *telle que* $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ *p.p sur* Ω *et* $g_n \to g$ *dans* $L^1(\Omega)$. *Alors*

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

1.1.2 Espaces $W^{1,p}(\Omega)$

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels (c'est-à-dire constitués de fonctions) ; ils doivent leur nom au mathématicien russe Sergei Lvovich Sobolev (1908 - 1989) . En quelques mots, un espace de Sobolev est un espace de Banach ou un espace de Hilbert de fonctions pouvant être dérivées suffisamment de fois, ces espaces sont un outil essentiel pour l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, ils se sont imposés comme un environnement adéquat pour la recherche de solutions, car ce sont des espaces fermés.

Définition 1.1.2. On note par $C_c^\infty(\Omega)$, l'espace vectoriel des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ dont le support est compact et contenu dans Ω.

Définition 1.1.3 ([4]). On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par $\Big\{u \in L^p(\Omega);\ \exists\, g_1, \ldots, g_N \in L^p(\Omega)$ tels que $\displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi;\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \forall i = 1, \ldots, N\Big\}$.

En d'autre terme

$$W^{1,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega) \ : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \ \ \forall 1 \leq i \leq N \Big\}$$

Pour $u \in \ W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p. \tag{1.1.1}$$

Remarque 1.1.1 ([4]). *La norme* (1.1.1) *est équivalente à la norme*

$$\Big(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}} \quad (si\ 1 \leq p < \infty)$$

On pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} := \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2},$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)} \big)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Proposition 1.1.1 ([4]). *L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Théorème 1.1.3 ([4]). *L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire suivant :*

$$\langle u, v\rangle_{H^1} := \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

est un espace est un espace de Hilbert séparable.

Espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.1.4 ([4]). On désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de l'espace $C_c^{\infty}(\Omega)$ dans l'espace $W^{1,p}(\Omega)$.
L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}$ est un espace de Banach séparable ; il est réflexif si $1 < p < \infty$.
On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.
L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Remarque 1.1.2 ([4]). $W^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. *De plus si* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *alors en général* $W^{1,p}(\Omega) \neq W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.1.4 ([4]). *Supposons que Ω de classe C^1, et $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, avec $1 \leq p < \infty$.*
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $u = 0$ *sur* $\partial\Omega$.

b) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

Notation 1. On désigne par $W_0^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$.
On désigne l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$ par $H^{-1}(\Omega)$.

1.1.3 Injections de Sobolev

Définition 1.1.5. Soient X et Y deux espaces de Banach et A un opérateur continu de X dans Y (pas forcément linéaire) , on dit que A est un opérateur compact si l'image par A de tout borné de X est relativement compacte dans Y .
En d'autre termes , si $(u_n) \subset X$ est une suite bornée , alors la suite $v_n = A(u_n) \subset Y$ admet une sous suite convergente dans Y .

Si $X \subset Y$, on peut considérer l'application identité $\mathbb{I}$ de X dans Y , on sait que $\mathbb{I}$ est injective. Si $\mathbb{I}$ est continue, on dit que l'injection de X dans Y est continue et on note $X \hookrightarrow Y$. Si en plus $\mathbb{I}$ est compacte, on dit que l'injection de X dans Y est compacte et on note $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

Théorème 1.1.5 (Immersion de Sobolev [17]). *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \geq 1$. On a les injections suivantes :*

i) Si $1 \leq p < N$ alors

a) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}$.

b) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < p^*$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{Np}{N-p}$.

ii) Si $p = N$ alors $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < \infty$.

iii) Si $p > N$ et $0 < \alpha < 1 - \frac{p}{N}$ alors $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, où $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C(\Omega) : \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\right\}$.

Remarque 1.1.3 ([4]). *D'aprés théorème de représentation de Riesz, on peut identifier $L^2(\Omega)$ à son dual. Par conséquent on a le schéma*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

Définition 1.1.6. Pour tout $u \in C_c^\infty(\Omega), p \geq 1$, soit :

$$\|u\|^p_{W_0^{1,p}} := \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_P^p$$

Par le théorème d'immersion de Sobolev, l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^{p^*}(\Omega)$ est continue, alors il existe une constante optimale S_p qui ne dépend que de N et p telle que :

$$S_p \|u\|^p_{p^*} \leq \|u\|^p_{W_0^{1,p}}, \quad \text{pour tout} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

avec

$$S_p := \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\|u\|^p_{W_0^{1,p}}}{\|u\|^p_{p^*}}$$

Proposition 1.1.2 ([21]). *Soit $S := S_2$ la meilleure constante de Sobolev pour l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$ .Alors l'infimum S n'est jamais atteint quand Ω est un domaine borné.*

Théorème 1.1.6 ([2]). *L'infimum S est atteint sur $\mathbb{R}^N$ par une des fonctions*

$$U_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} \qquad \textit{avec } \varepsilon > 0.$$

Proposition 1.1.3 (Inégalité de Poincaré [4]). *Soit Ω un ouvert* *borné . Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que :*

$$||u||_p \leq C||\nabla u||_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

Remarque 1. Cette inégalité est vraie si on suppose seulement que Ω est de mesure finie, ou bien si Ω est borné dans une seule direction.

Théorème 1.1.7 (**Inégalité de Hardy** [14]). *Soit $t \in \mathbb{R}$ avec $t+N > 0$, et soit $0 \in \Omega$. Alors pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega |x|^t|u|^2 \mathrm{d}x \leq \Big(\frac{2}{N+t}\Big)^2 \int_\Omega |x\nabla u|^2|x|^t \mathrm{d}x.$$

La constante $\left(\frac{2}{N+t}\right)^2$ est optimale et n'est jamais atteinte.

Lemme 1.1.1 (**Inégalité de Hardy-Sobolev** [13]). *Supposons que $0 \leq s < 2$, $1 \leq q \leq 2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$ et $0 \in \Omega$. Alors*

a) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\Big(\int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^s}\mathrm{d}x\Big)^2 \leq C\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\Big)^q \quad \text{pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

b) L'application $u \longmapsto \frac{u}{|x|^{\frac{s}{q}}}$ de $H_0^1(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$ est compacte pour $q < 2^*(s)$.

Lemme 1.1.2 ([8]). *Soit $0 \leq s < 2$, alors l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega, |x|^{-s}\mathrm{d}x)$ est*

a) compacte pour tout $1 \leq q < 2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$.

b) continue pour tout $1 \leq q \leq 2^*(s)$.

Définition 1.1.7. La meilleure constante de Hardy-Sobolev $M_{s,q}(\Omega)$ est définie par :

$$M_{s,q}(\Omega) := \inf_{u\in H_0^{1,p}(\Omega), u\neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^s}\right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x}.$$

En particulier pour $p = 2$ et $q = 2^*(s)$ on note la meilleure constante de Hardy-Sobolev par $M_s(\Omega)$.

Lemme 1.1.3 ([13])**.**

a) M_s est indépendant de Ω.

b) L'infimum M_s est atteint sur $\mathbb{R}^N$ par une des fonctions

$$V_\varepsilon(x) = \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^{(2-s)}\right)^{\frac{N-2}{2-s}}},$$

avec $\varepsilon > 0$.

Lemme 1.1.4 (**Lemme de Brézis-Lieb** [18]). *Soient $1 \leq p < \infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(u_n) \subset L^p(\Omega)$. Si (u_n) une suite bornée dans $L^p(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ p.p dans Ω. Alors*

$$\lim_{n\to\infty}(||u_n||_p^p - ||u_n - u||_p^p) = ||u||_p^p.$$

Théorème 1.1.8 (**Formule de Green** [17]). *Soient u et v deux fonctions de classe $C^2(\overline{\Omega})$ avec Ω un ouvert borné de classe C^1 .Alors*

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(\sigma).v(\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

1.2 Méthodes variationnelles

Définition 1.2.1. Une EDP elliptique semi linéaire est une EDP elliptique non linéaire telle que la partie principale est linéaire par rapport à u.

Exemple 1.

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) = f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Le terme principale de (1.2.1) est

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u(x)$$

Il est clair que ce terme est linéaire par rapport à u, donc (1.2.1) est un problème elliptique semi linéaire.

Définition 1.2.2. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

avec f est une fonction dans donnée définie sur Ω.
La condition aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega$ s'appelle la condition de Dirichlet.
On dit que u est une solution faible du problème (1.2.2) si $u \in H_0^1(\Omega)$ de plus $-\Delta u = f$ au sens des distributions (c'est-à-dire $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$)

Définition 1.2.3. Une fonction u est dite solution classique de (1.2.2) si $u \in C^2(\overline{\Omega})$, vérifiant (1.2.2).

Remarque 2. Toute solution classique est une solution faible.
Si u une solution classique de (1.2.2) alors f doit appartient à $C(\Omega)$.

1.2.1 Point critique et condition de Palais-Smale

Définition 1.2.4. Soient E un espace de Banach et J une fonction définie sur E, on dit que J est Fréchet différentiable en un point $u \in E$, s'il existe une application linéaire bornée $J'(u) \in E'$ (E' est le dual topologique de E), telle que

$$\frac{|J(u+v) - J(u) - \langle J'(u), v\rangle|}{\|v\|_E} \to 0 \text{ quand } \|v\|_E \to 0,$$

ou bien, pour tout w dans un voisinage de u, on a

$$J(w) - J(u) = \langle J'(u), w - u\rangle + o(w - u).$$

L'application $u \to J'(u)$ appelée la différentielle de J en u, et J est dite de classe C^1 si cette application est continue.

Théorème 1.2.1 **([21]).** *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N, (N \geq 3)$. Supposons qu'il existe une fonction $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mesurable en $x \in \Omega$, continûment différentiable en $u \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}^N$, avec $F_u := \frac{\partial F}{\partial u}$ et $F_p := \frac{\partial F}{\partial p}$ et les conditions suivantes sont vérifiées :*

a) $|F(x,u,p)| \leq C(1 + |u|^{s_1} + |p|^2)$, *où* $s_1 \leq \frac{2N}{N-2}$.

b) $|F_u(x,u,p)| \leq C(1 + |u|^{s_2} + |p|^{t_2})$, *où* $s_2 \leq \frac{N+2}{N-2}$ *et* $t_2 \leq \frac{N+2}{N}$.

c) $|F_p(x,u,p)| \leq C(1 + |u|^{s_3} + |p|)$, *où* $s_3 \leq \frac{N}{N-2}$.

Alors, la fonctionnelle J définie par :

$$J(u) := \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\mathrm{d}x,$$

est de classe C^1 et $J'(u)$ est donnée par :

$$\langle J'(u), v\rangle := \int_\Omega (F_u(x, u, \nabla u)v + F_p(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v)\mathrm{d}x.$$

Définition 1.2.5. Soient E un espace de Banach, $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. $u \in E$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$, sinon on dit que u est un point régulier.
Soit $c \in \mathbb{R}$, si il existe $u \in E$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$, alors c est une valeur critique de J, sinon c est dite valeur régulière.

Définition 1.2.6. Soient E un espace de Banach et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) $(\mathrm{P.S})_c$, si toute suite (u_n) de E telle que

$$\begin{cases} J(u_n) \to c & \text{dans } \mathbb{R} \\ J'(u_n) \to 0 & \text{dans } E', \end{cases}$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

1.2.2 Principe variationnel d'Ekeland

Définition 1.2.7 (Fonction bornée inférieurement). Soit J une fonction définie sur un espace de Banach réflexif E, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que J est bornée inférieurement sur E, s'il existe une constante réelle m telle que : $J(x) \geq m$ pour tout $x \in E$.

On pose $M = \inf_E J(x)$, alors il existe une suite minimisante $(u_n) \subset E$ telle que $J(u_n) \to M$ quand $n \to \infty$.

Définition 1.2.8 (Fonction semi continue inférieurement). Soit J une fonction définie sur E, on dit que J est semi continue inférieurement (s.c.i) si pour tout $t \in \mathbb{R}$, les ensembles $|J \leq t| := \{x \in E : J(x) \leq t\}$ sont fermés.

Définition 1.2.9 (Fonction faiblement semi continue inférieurement). Soit J une fonction définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. J est dite faiblement semi continue inférieurement (f.s.c.i.) en u si, pour toute suite (u_n) qui converge faiblement vers u, on a :

$$J(u) \leq \varliminf_{n\to\infty} J(u_n)$$

Nous allons maintenant donner un lemme abstrait qui joue un grand rôle dans un certain nombre de situation faisant intervenir le calcul des variations, le lemme d'Ekeland. Le lemme et le corollaire suivants montrent qu'il est possible de trouver des suites minimisantes sous certains conditions sur la fonctionnelle.

Lemme 1.2.1 (Principe variationnel d'Ekeland [9]). *Soient (E, d) un espace métrique complet et J une fonction s.c.i de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que J est bornée inférieurement avec $c = \inf_{x\in E} J(x)$.*
Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe u_ε tel que :

$$\begin{cases} c \leq J(u_\varepsilon) \leq c + \varepsilon \\ \forall x \in E, x \neq u_\varepsilon,\ J(x) - J(u_\varepsilon) + \varepsilon d(x, u_\varepsilon) > 0. \end{cases}$$

Corollaire 1 (**[11]**). *Soient E un espace de Banach et $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. On suppose que la fonction J est bornée inférieurement, alors il existe une suite $(u_n) \subset E$ telle que :*

a) $J(u_n) = c + o(1)$.

b) $J'(u_n) \to 0$ *dans* H^{-1}.

1.2.3 Théorème du Col

Le théorème suivant constitue un outil puissant pour montrer l'existence d'un point critique d'une fonctionnelle.

Théorème 1.2.2 (**Théorème du col [1]**). *Soient E un espace de Banach, $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ une fonction qui vérifie la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0) = 0$ et telle que :*

i) Il est existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $|u| = R$, alors $J(u) \geq a$.

ii) Il existe $v \in E$ tel que $\|v\| > R$ et $J(v) < a$.

Alors J admet une valeur critique c telle que $c \geq a$, c'est-à-dire, si on pose

$$\beta := \{g : [0, 1] \to E \ continue \ , \ g(0) = 0 \ et \ h(1) = v\},$$

et

$$c := \inf_{g \in \beta} \max_{t \in [0,1]} J(g(t)).$$

Alors c est une valeur critique de J, et $c \geq a$.

Théorème 1.2.3 (**Principe du maximum faible [17]**). *Soient un ouvert borné connexe, $a(\cdot) := (a_{ij}(\cdot))_{1 \leq i,j \leq N}$ une matrice, $b(\cdot) := (b_i(\cdot))_{1 \leq i \leq N}$*

et $\beta(\cdot) := (\beta_i(\cdot))_{1\leq i\leq N}$ *deux vecteurs, et* c *une fonction. On considère* A *et* L *deux opérateurs du second ordre définis par :*

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum_{j=1}^{N} \partial_j(\beta_j u) + b\cdot\nabla u + cu,$$

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\partial_{ij}u + b\cdot\nabla u + cu,$$

avec a_{ij}, β_i, b_i, c *dans* $L^\infty(\Omega)$*. On suppose que la condition suivante est satisfaite*

$$\exists\alpha > 0, \forall\epsilon \in \mathbb{R}^N, \quad p.p \ sur \ \Omega, a(x)\epsilon\cdot\epsilon = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\epsilon_j\epsilon_i \geq \alpha|\epsilon|^2,$$

et que

$$c + \nabla\cdot\beta = c + \sum_{i=1}^{N} \partial_i\beta_i \geq 0 \ \ dans \ D'(\Omega).$$

Si $u \in H^1(\Omega)$ *vérifie* $Au \leq 0$ *au sens de* $D'(\Omega)$ *alors :*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

Remarque 1.2.1. *On notera que le principe du maximum faible implique que si* $Au = f \geq 0$ *au sens de* $D'(\Omega)$ *et* $u \in H_0^1(\Omega)$*, alors* $u \geq 0$*, et qu'en particulier on obtient un résultat d'unicité pour des équations du type* $Au = f$ *et* $u \in H_0^1(\Omega)$ *: en effet si* $Au = 0$ *et* $u \in H_0^1(\Omega)$*, en appliquant le principe du maximum faible à* u *et à* $-u$*, on obtient* $\sup_\Omega u \leq 0$ *et ,* $\sup_\Omega(-u) \leq 0$ *i.e.* $u \equiv 0$*.*

Théorème 1.2.4 (Principe du maximum classique [10]). *Soit* $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$*.*

i) Si $-\Delta u \leq 0$ *dans* Ω*, alors*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

ii) Si $-\Delta u \geq 0$ *dans* Ω*, alors*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Théorème 1.2.5 (Principe du maximum fort [10]). *Soient* Ω *un domaine borné, et* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*.*

i) Si $-\Delta u \leq 0$ *et si* u *atteint un maximum positif à l'intérieur de* Ω*, alors* u *est constante sur* Ω*.*

ii) Si $-\Delta u \geq 0$ *et si* u *atteint un minimum positif à l'intérieur de* Ω*, alors* u *est constante sur* Ω*.*

Théorème 1.2.6 ([20]). *Soit* u *une solution faible de (1.2.2), alors*

i) Si $f \in L^m(\Omega), m > \frac{N}{2}$*, alors* $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$*.*

ii) Si $f \in L^m(\Omega), \frac{2N}{N+2s} \leq m < \frac{N}{2s}$*, alors* $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{m_s^{**}}(\Omega), m_s^{**} = \frac{mN}{N-2ms}$*.*

Dans tous les cas on a $u \in W^{2,m}(\Omega)$ *et*

$$\|u\|_{W^{2,m}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Théorème 1.2.7 (valeur propre du laplacien[4]). *Soit le problème aux valeurs propres*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur \partial\Omega \end{cases}$$

Les valeurs propres du Laplacien sur Ω forment une suite croissante $\lambda_k > 0$ qui tend vers l'infini, de plus les vecteurs propres correspondants sont des fonctions continues et forment une suite orthonormée complète dans $L^2(\Omega)$. De plus, la première valeur propre λ_1 est simple et le premier vecteur propre ϕ_1 peut être pris > 0 dans Ω, tandis que tous les autres changent de signe.

Définition 1.2.10 (**Négligeabilité).** Soient f et g sont deux fonctions ; on dit que f est négligeable devant g asymptotiquement ou que f est un $o(g)$ au voisinage d'un réel a fini ou non si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

c'est-a-dire :

$$|f(x)| \leq |g(x)| \, \varepsilon \quad \forall \, \varepsilon > 0$$

Et on dit que la fonction $|f|$ est bornée par la fonction $|g|$ asymptotiquement a un vecteur prés si et seulement si $|f(x)| \leq |g(x)| \cdot k$ pour certain $k > 0$ et on note : $f(x) = O(g(x))$
$f =_a O(1)$ signifie que f est bornée au voisinage de a

Chapitre 2

Problème elliptique semilinéaire sans singularités

2.1 Introduction

Dans cet chapitre , on s'intéresse au problème elliptique semilinéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u + \lambda |u|^{q-2}u & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (P_\lambda)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$), $2 < q < p \leq 2^*$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev et λ est un paramètre positif.

- Pour $p = 2^*$ et $q = 2$ le problème (P_λ) a été étudié par Haïm Brézis et Louis Nirenberg en 1983 dans le célèbre article [5], ils ont montré :
  - Si $\lambda \in (0, \lambda_1)$ et $N \geq 4$ le problème (P_λ) admet au moins une solution positive (λ_1 est la première valeur propre du Δ dans $H_0^1(\Omega)$).
  - Lorsque Ω est une boule ,et $N = 3$, ils ont prouvé l'existence de solution pour tout $\lambda \in (\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1)$.
  - Si $\lambda \geq \lambda_1$; ou bien Ω est un domaine étoilé par rapport à l' origine et $\lambda \leq 0$ alors le problème n'admet pas de solution non triviale.

— G.Tarantello dans [23] montre que le problème non homogène

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $f \neq 0$, $f \in H^{-1}$ satisfait une certaine condition, admet deux solutions u_0 et u_1 dans $H_0^1(\Omega)$, de plus : $u_0 \geq 0$ et $u_1 \geq 0$ si $f \geq 0$.

Dans ce chapitre, nous allons traiter un cas particulier du papier de Ghoussoub-Yaun [13].

Remarque 2.1.1.

- *Pour trouver la formulation variationnelle du problème* (P_λ) *en multiplions* $(-\Delta u = |u|^{p-2}u + \lambda|u|^{q-2}u)$ *par* $\phi \in H_0^1(\Omega)$ *et on intègre par partie, on obtient*

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\phi(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega (|u|^{p-2}u\phi + \lambda|u|^{q-2}u\phi)\mathrm{d}x$$

- *On dit que* u *est une solution faible du problème* (P_λ) *si et seulement si* $u \in H_0^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\phi(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega (|u|^{p-2}u\phi + \lambda|u|^{q-2}u\phi)\mathrm{d}x, \quad \forall\phi \in H_0^1(\Omega)$$

- *Pour tout* $u \in H_0^1(\Omega)$, *on définit la fonctionnelle d'énergie* J_λ, *associée au* (P_λ), *par*

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x.$$

- *Montrons que fonctionnelle* J_λ *est fonctionnelle d'énergie de* (P_λ) *:*

Calculons la différentielle de J_λ :

$$\begin{aligned}\langle J_\lambda'(v), w\rangle &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(J_\lambda(v+tw) - J_\lambda(v)) \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{2}\Big(\int_\Omega |\nabla(v+tw)|^2 - |\nabla v|^2\Big) - \frac{1}{p}\Big(\int_\Omega |v+tw|^p - |v|^p\Big) \\ &\quad - \frac{\lambda}{q}\Big(\int_\Omega |v+tw|^q - |v|^q\Big)\Big)\end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{2}\Big(\int_\Omega |\nabla(v+tw)|^2 - |\nabla v|^2\Big)\Big) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w$$

et par la formule de Taylor on trouve

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{q}\Big(\int_\Omega |v+tw|^q - |v|^q\Big)\Big) = \int_\Omega |v|^{q-2} v w$$

Alors

$$\langle J_\lambda'(v), w\rangle = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w - \int_\Omega |v|^{p-2} v w - \lambda \int_\Omega |v|^{q-2} v w$$

donc J_λ est la fonctionnelle d'énergie associé à (P_λ). De plus on a J_λ et J_λ' sont continues, donc J_λ est de classe C^1, et les solution du problème (P_λ) sont des pointes critiques de J_λ.

2.2 Résultats principaux

Théorème 2.2.1. *Soit Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$. Supposons que $2 < q < p < 2^*$, alors le problème (P_λ) admet une solution positive dans $H_0^1(\Omega)$ pour tout $\lambda > 0$.*

Théorème 2.2.2. *Soit Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$. Supposons que*

$$\max\{2, \frac{4}{N-2}, \frac{N}{N-2}\} < q < p = 2^*,$$

alors le problème (P_λ) admet une solution positive dans $H_0^1(\Omega)$ pour tout $\lambda > 0$.

2.3 Preuve des résultats principaux

Pour la démonstration on utilisons le théorème du col .
D'abord, on commence par montrer que la fonctionnelle J_λ satisfait les conditions géométriques du théorème du col .
On a $J_\lambda(0) = 0$.

Lemme 2.3.1. *Si $2 < q < p \leq 2^*$ et λ un réel positif, alors la fonctionnelle J_λ vérifie les conditions suivantes :*

a) Il existe $\beta > 0$ et $R > 0$ tels que si $||u|| = R$, alors $J_\lambda(u) \geq \beta$.

b) Il existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tels que $||v|| > R$, et $J_\lambda(v) < \beta$.

Démonstration.

a) Soit $u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0$, par l' inégalité de Sobolev on a

$$\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x \leq C(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x)^{\frac{q}{2}}$$

pour une constante $C > 0$.

Si $\|u\| > 1$ alors

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - (\frac{C}{p} + \lambda\frac{C'}{q})\|u\|^p \\ &= \|u\|^p(\frac{1}{2}\|u\|^{2-p} - (\frac{C}{p} + \lambda\frac{C'}{q})) \end{aligned}$$

avec C et C' sont des constantes positives.

Posons $x = \|u\|$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on définit la fonction g par

$$g(x) = x^p(\frac{1}{2}x^{2-p} - (\frac{C}{p} + \lambda\frac{C'}{q})),$$

on remarque que $g(x) > 0$ pour tout $x > \big(2(\frac{C}{p} + \lambda\frac{C'}{q})\big)^{\frac{1}{2-p}}$.

Donc il existe $R > 0$ tel que le point a) du lemme 2.3.1 est satisfait, il suffit de prendre $R = \|u\| > \max\{1, \big(2(\frac{C}{p} + \lambda\frac{C'}{q})\big)^{\frac{1}{2-p}}\}$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} J_\lambda(tu) &= \frac{1}{2}||tu||^2 - \frac{1}{p}||tu||_p^p - \lambda\frac{1}{q}||tu||_q^q \\ &= \frac{t^2}{2}||u||^2 - \frac{t^p}{p}||u||_p^p - \lambda\frac{t^q}{q}||u||_q^q, \end{aligned}$$

on a $J_\lambda(tu) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$.

Donc $\exists\, t_0 > 0$ et assez grand tel que le point b) du lemme 2.3.1 est vérifier.

$\square$

2.3.1 Preuve du théorème 2.2.1(Cas sous-critique)

Nous utilisons les lemmes suivants

Lemme 2.3.2. *Soit* (u_n) *une suite de* $H_0^1(\Omega)$ *telle que*

$$\begin{cases} J_\lambda(u_n) \longrightarrow c & dans\ \mathbb{R} \\ J'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0 & dans\ H^{-1}(\Omega), \end{cases}$$

alors il existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *telle que* $u_n \rightharpoonup u_0$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ *et* $J'_\lambda(u_0) = 0$.

Démonstration.

J_λ est vérifie les conditions géométriques, d'après le lemme d'Ekeland il existe une suite $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$J_\lambda(u_n) = c + o(1) \text{ et } J'_\lambda(u_n) \to 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega), \tag{2.3.1}$$

ensuite

$$J_\lambda(u_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega |u_n|^p \mathrm{d}x - \lambda\frac{1}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x = c + o(1) \tag{2.3.2}$$

$$\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega |u_n|^p \mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x = o(1) \tag{2.3.3}$$

d'après (2.3.3) on a

$$\lambda\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega |u_n|^p \mathrm{d}x + o(1) \tag{2.3.4}$$

remplaçons (2.3.4) dans (2.3.2) on trouve

$$\begin{aligned} c+o(1) &= (\frac{1}{2}-\frac{1}{q})\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x + (\frac{1}{q}-\frac{1}{p})\int_\Omega |u_n|^p \mathrm{d}x \\ &\geq (\frac{1}{2}-\frac{1}{q})||u_n||^2 \end{aligned}$$

On a $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right) > 0$ car $2 < q$ alors (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on peut alors en extraire une sous-suite (notée (u_n)) et trouver un $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega), \\ u_n &\to u_0 \text{ p.p dans } \Omega, \end{aligned}$$

et

$$u_n \to u_0 \quad \text{dans } L^r(\Omega) \quad \text{pour } 1 \leq r < 2^*.$$

D'après l'équation (2.3.1) on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle J'_\lambda(u_n), v\rangle = 0, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

et donc $J'_\lambda(u_0) = 0$. □

Ensuite, on va montrer que (u_n) converge vers u_0 fortement dans $H_0^1(\Omega)$ avec u_0 est non nulle.

Lemme 2.3.3. *Si (u_n) une suite dans $H_0^1(\Omega)$ telle que*

$$\begin{cases} J_\lambda(u_n) \longrightarrow c & \textit{dans } \mathbb{R} \\ J'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0 & \textit{dans } H^{-1}(\Omega), \end{cases}$$

avec $u_n \rightharpoonup u_0$ *dans* $H_0^1(\Omega)$, *alors* $u_n \to u_0$ *fortement dans* $H_0^1(\Omega)$, *de plus* u_0 *est non nulle.*

Démonstration.
On a

$$J_\lambda(u_n) = c + o(1) \text{ et } \langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle = o(1)$$

Posons $(w_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que $w_n = u_n - u_0$, d'après le lemme 2.3.2 on obtient

$$\begin{aligned} &w_n \rightharpoonup 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega),\\ &w_n \to 0 \text{ p.p dans } \Omega, \end{aligned}$$

et

$$w_n \to 0 \ \text{ dans } L^r(\Omega) \ \text{ pour } 1 \leq r < 2^*.$$

D'après le lemme de Brézis-Lieb [18] on a

$$\int_\Omega |u_n|^p = \int_\Omega |w_n|^p + \int_\Omega |u_0|^p + o(1),$$

$$\int_\Omega |u_n|^q = \int_\Omega |w_n|^q + \int_\Omega |u_0|^q + o(1)$$

et

$$\begin{aligned} ||u_n||^2 &= \int_\Omega |\nabla(w_n + u_0)|^2 \mathrm{d}x\\ &= \|w_n\|^2 + \|u_0\|^2 + o(1). \end{aligned}$$

Donc

$$\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle = \langle J'_\lambda(u_0), u_0\rangle + \int_\Omega |\nabla w_n|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega |w_n|^p - \lambda \int_\Omega |w_n|^q = o(1).$$

D'aprés lemme 2.3.2 on a

$$\langle J'_\lambda(u_0), u_0\rangle = 0,$$

et

$$\int_\Omega |w_n|^r \to 0 \text{ pour tout } 1 \leq r < 2^*,$$

ainsi

$$||w_n||^2 = o(1),$$

alors

$$\|w_n\| \to 0$$

on conclut que

$$u_n \to u_0 \;\text{ fortement dans } H_0^1(\Omega).$$

□

Preuve du théorème 2.2.1.

D'après les lemmes 2.3.1 ,2.3.2 et 2.3.3, la fonctionnelle J_λ vérifie les hypothèses du Théorème du col, par conséquent il existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ point critique de J_λ avec $J'_\lambda(u_0) = 0$ et $J_\lambda(u_0) = c$, telle que

$$c := \inf_{\phi\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} J(\phi(t)),$$

où

$$\Gamma := \left\{\phi \in C([0,1], H_0^1), \phi(0) = 0, \phi(1) = v\right\}$$

∴ le problème (P_λ) admet une solution u_0 non triviale dans $H_0^1(\Omega)$. De plus on a $J_\lambda(u_0) = J_\lambda(|u_0|) = c$, avec $c > 0$ par conséquent u_0 est positive. □

2.3.2 Preuve du théorème 2.2.2(Cas critique)

Dans ce cas l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$ n'est pas compacte, alors la condition de Palais-Smale ne peut-pas être satisfaite.
On pose

$$c^* := \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}},$$

avec S est la meilleure constante de Sobolev pour l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$.
Nous établissons les résultats suivants :

Lemme 2.3.4. *Si $2 < q < p = 2^*$ .Alors la fonctionnelle J_λ satisfait la condition de Palais-Smale pour tout*

$$0 < c < c^*.$$

Démonstration.

Soit (u_n) une suite de $H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$J_\lambda(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } J'_\lambda(u_n) \to 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega), \tag{2.3.5}$$

avec $0 < c < c^*$.
Montrons d'abord que la suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
En effet, on a

$$J_\lambda(u_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x = c + o(1) \tag{2.3.6}$$

et

$$\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x = o(1) \tag{2.3.7}$$

D'après (2.3.7) on obtient

$$\lambda \int_{\Omega} |u_n|^q \mathrm{d}x = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \int_{\Omega} |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x + o(1) \tag{2.3.8}$$

Multiplions (2.3.7) par $(-\frac{1}{q})$, nous obtenons

$$-\frac{1}{q}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle = \frac{-1}{q}\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_{\Omega} |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x + \lambda\frac{1}{q}\int_{\Omega} |u_n|^q \mathrm{d}x = o(1) \tag{2.3.9}$$

En additionnant terme à terme les membres des équations (2.3.6) et (2.3.9), nous obtenons

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x + (\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*})\int_{\Omega} |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x = c + o(1),$$

ce qui implique

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x \leq c + o(1) < c^*,$$

(Car : $2 < q < 2^*$). Par conséquent, la suite (u_n) est bornée, et alors elle admet une sous-suite notée (u_n) et $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned}
&u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega),\\
&u_n \to u \text{ p.p dans } \Omega,\\
&u_n \to u \ \text{ dans } L^r(\Omega) \text{ pour tout } \ 2 < r < 2^*,\\
&u_n \rightharpoonup u \ \text{ dans } L^{2^*}(\Omega).
\end{aligned}$$

Maintenant , montrons que la fonctionnelle J_λ est satisfait la condition de Palais-Smale pour tout c inférieur à c^*.

On a $J'(u_n) \longrightarrow 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Alors pour $n \to \infty$ on a

$\langle J'_\lambda(u), v\rangle = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - \lambda |u|^{q-2} uv - |u|^{2^*-2} uv) \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$

Pour $v = u$ on trouve

$$\langle J'_\lambda(u), u\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \int_\Omega |u|^{2^*} \mathrm{d}x = 0 \tag{2.3.10}$$

Posons $w_n = u_n - u$.
D'une part on a

$$J_0(w_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u_n - u|^{2^*},$$

d'après le lemme de Brézis-Lieb, on obtient

$$J_0(w_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - |\nabla u|^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (|u_n|^{2^*} - |u|^{2^*})\mathrm{d}x + o(1).$$

Ainsi, pour $n \to \infty$ on obtient :

$$\begin{aligned} J_0(w_n) &= J_\lambda(u_n) - J_\lambda(u) + o(1) \\ &\leq J_\lambda(u_n) + o(1) \leq c < c^*, \end{aligned}$$

et pour n assez grand on a

$$\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big)\|\nabla u_n - \nabla u\|^2 \leq c < c^*, \tag{2.3.11}$$

et d'autre part on a

$$\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), w_n\rangle = \langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle - \langle J'_\lambda(u), u_n\rangle - \langle J'_\lambda(u_n), u\rangle + \langle J'_\lambda(u), u\rangle$$

et d'après lemme de Brézis-Lieb on obtient

$$\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), w_n\rangle = \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega |u_n - u|^{2^*} \mathrm{d}x + o(1),$$

d'après (2.3.10), on trouve

$$\begin{aligned}\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), w_n\rangle &= \langle J'_\lambda(u_n), w_n\rangle \\ &= \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega |u_n - u|^{2^*} \mathrm{d}x + o(1) \\ &= o(1),\end{aligned}$$

d'autre part, par l'inégalité de Sobolev on obtient

$$\begin{aligned} o(1) &= \int_\Omega \big(|\nabla u_n - \nabla u|^2 - |u_n - u|^{2^*}\big)\mathrm{d}x \\ &\geq \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2 \mathrm{d}x - S^{\frac{-2^*}{2}}\Big(\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2 \mathrm{d}x\Big)^{\frac{2^*}{2}} \\ &= \Big(\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2 \mathrm{d}x\Big)\Big(1 - S^{\frac{-2^*}{2}}\Big(\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2 \mathrm{d}x\Big)^{\frac{2^*-2}{2}}\Big)\end{aligned}$$

d'après (2.3.11) on a

$$1 - S^{\frac{-2^*}{2}}\Big(\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2\Big)^{\frac{2^*-2}{2}} > 0$$

donc

$$o(1) \geq k \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2 \mathrm{d}x,$$

pour certain $k > 0$. Par conséquent $u_n \to u$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$ □

Pour la suite de démonstration, on prend $\varphi \in C_c^\infty$, une fonction positive (une fonction de plateau) telle que :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 & \text{si } |x| \leq R \\ 0 < \varphi(x) < 1 & \text{si } R < |x| < 2R \\ \varphi(x) = 0 & \text{si } |x| \geq 2R \end{cases} \tag{2.3.12}$$

où $B(0,2R) \subset \Omega$, et $u_\varepsilon(x) = \varphi(x)U_\varepsilon(x)$.
on définit

$$L_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*})^{\frac{1}{2^*}}},$$

D'après [5, 13], S est atteint sur $\mathbb{R}^N$ par la famille des fonctions

$$Y_\varepsilon(x) = \frac{C_\varepsilon}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}, \quad \varepsilon > 0,$$

avec $C_\varepsilon = (\varepsilon N(N-2))^{\frac{N-2}{4}}$.
et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Y_\varepsilon|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |Y_\varepsilon|^{2^*} = S^{\frac{N}{2}}.$$

Lemme 2.3.5. *On a les estimations suivantes :*

a) $\|L_\varepsilon\|^2 = S + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})$

b) $\int_\Omega |L_\varepsilon|^q = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}(N - q\frac{N-2}{2})})$ *pour tout :* $\frac{N}{N-2} < q < 2^*$.

Démonstration.

a) Nous allons estimer

$$\|\nabla L_\varepsilon\|_2^2 = \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}{(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*})^{\frac{2}{2^*}}}. \tag{2.3.13}$$

1) On calcule

$$\begin{aligned}\nabla u_\varepsilon(x) &= \nabla\varphi(x)U_\varepsilon(x) + \varphi(x)\nabla U_\varepsilon(x)\\ &= \frac{\nabla\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} - \frac{\varphi(x)(N-2)x}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N}{2}}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 = \int_\Omega \frac{|\nabla\varphi(x)|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}\mathrm{d}x \\ + (N-2)^2\int_\Omega \frac{(\varphi(x)^2|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}\mathrm{d}x \\ - 2(N-2)\int_\Omega \frac{|\nabla\varphi(x)|\varphi(x)|x|}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Par définition on a $\varphi \equiv 1$ au voisinage de 0. Alors $\nabla\varphi \equiv 0$ ce qui implique

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla\varphi(x)|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}\mathrm{d}x \leq K_1,$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|\nabla\varphi(x)|\varphi(x)|x|}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}}\mathrm{d}x \leq K_2,$$

pour des constantes positives K_1 et K_2 indépendantes de ε. On obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 &= (N-2)^2\int_\Omega \frac{(\varphi(x))^2|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}\mathrm{d}x + O(1) \\ &= (N-2)^2\int_\Omega \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}\mathrm{d}x \\ &\quad + (N-2)^2\int_\Omega \frac{(\varphi(x))^2-1)|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}\mathrm{d}x + O(1).\end{aligned}$$

On remarque que $\varphi^2 - 1 \equiv 0$ prés de 0, on peut donc écrire

$$\int_\Omega \frac{(\varphi(x))^2-1)|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}\mathrm{d}x + O(1) = O(1),$$

alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 &= (N-2)^2 \int_\Omega \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\mathrm{d}x + O(1)\\ &= (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\mathrm{d}x\\ &\quad - (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\mathrm{d}x + O(1)\\ &= (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\mathrm{d}x + O(1)\\ &= \|\nabla U_\varepsilon\|_2^2 + O(1),\end{aligned}$$

car on a $0 \notin \mathbb{R}^N\backslash\Omega$ ainsi $\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\mathrm{d}x = O(1)$ donc on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 = \|\nabla U_\varepsilon\|_2^2 + O(1) \tag{2.3.14}$$

2) on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} &= \int_\Omega (\varphi(x))^{2^*}|U_\varepsilon(x)|^{2^*}\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega \frac{(\varphi(x))^{2^*}}{(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{2^*(N-2)}{2}}}\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega \frac{\varphi(x)^{2^*}}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\mathrm{d}x, \qquad (\text{car } \frac{2^*(N-2)}{2} = N)\\ &= \int_\Omega \frac{((\varphi(x)^{2^*}-1)}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On remarque que $\varphi^{2^*} - 1 \equiv 0$ prés de 0, on peut donc écrire

$$\int_\Omega \frac{(\varphi(x))^{2^*}-1)}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\mathrm{d}x + O(1) = O(1).$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} &= \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon+|x|^2)^N} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon+|x|^2)^N} - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + O(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + O(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |U_\varepsilon|^{2^*}\mathrm{d}x + O(1).
\end{aligned}$$

Car, on a $0 \notin \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\mathrm{d}x = O(1).$$

Par définition de Y_ε on trouve

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} = O(1) + \int_{\mathbb{R}^N} |Y_\varepsilon|^{2^*} C_\varepsilon^{-2^*}, \tag{2.3.15}$$

d'après (2.3.13), (2.3.14), (2.3.15), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\nabla L_\varepsilon\|_2^2 &= \frac{O(1) + \|\nabla Y_\varepsilon(x)\|_2^2 C_\varepsilon^{-2}}{O(1) + (\int_{\mathbb{R}^N} |Y_\varepsilon|^{2^*})^{\frac{2}{2^*}} C_\varepsilon^{-2}} \\
&= \frac{O(1) + S^{\frac{N}{2}} C_\varepsilon^{-2}}{O(1) + S^{\frac{N-2}{2}} C_\varepsilon^{-2}} \\
&= \frac{O(1) + S^{\frac{N}{2}} (\varepsilon N(N-2))^{\frac{2-N}{2}}}{O(1) + S^{\frac{N-2}{2}} (\varepsilon N(N-2))^{\frac{2-N}{2}}} \\
&= O((\varepsilon N(N-2))^{\frac{N-2}{2}}) + S^{\frac{N}{2}-\frac{N-2}{2}},
\end{aligned}$$

donc

$$\|\nabla L_\varepsilon\|_2^2 = S + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

b) Nous estimer l'intégrale

$$\int_\Omega |L_\varepsilon|^q = \frac{\|u_\varepsilon\|_q^q}{(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*})^{\frac{q}{2^*}}}$$

on calcul

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|_q^q &= \int_\Omega |u_\varepsilon|^q = \int_\Omega |\varphi(x)U_\varepsilon(x)|^q \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \frac{((\varphi(x)^q - 1)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{q(N-2)}{2}}}\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{q(N-2)}{2}}} \\ &= \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{q(N-2)}{2}}} + O(1)\end{aligned}$$

car, on remarque que $(\varphi(x))^q - 1 \equiv 0$ prés de 0, alors on obtient

$$\int_\Omega \frac{((\varphi(x))^q - 1))}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{q(N-2)}{2}}}\mathrm{d}x = O(1).$$

On remarque que l'intégrale $\int_\Omega \frac{r^{N-1}}{r^{q(N-2)}}\mathrm{d}x$ existe si et seulement si $q(N-2) - (N-1) > 1$ c'est-a-dire pour $q > \frac{N}{N-2}$.
En effet,

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|_q^q = &\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{q(N-2)}{2}}} \\ &- \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{q(N-2)}{2}}} + O(1),\end{aligned}$$

on a $0 \notin \mathbb{R}^N\setminus\Omega$ donc $\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{q(N-2)}{2}}} + O(1) = O(1)$, alors on obtient

$$\|u_\varepsilon\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{q(N-2)}{2}}} + O(1)$$

et par changement de variable en coordonnées polaires , c'est-a-dire

, en utilisant le changement de variable $r = |x|$, on trouve

$$\|u_\varepsilon\|_q^q = \omega_N \int_0^\infty \frac{r^{N-1}}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{q(N-2)}{2}}} \mathrm{d}r + O(1),$$

Maintenant, en utilisant le changement de variable $y = r\varepsilon^{\frac{-1}{2}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_q^q &= \omega_N \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{N-1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon + (\varepsilon y)^2)^{q\frac{N-2}{2}}} \mathrm{d}y + O(1) \\
&= \omega_N \varepsilon^{\frac{N}{2} - q\frac{N-2}{2}} \Big(\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)^{q\frac{N-2}{2}}} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)^{q\frac{N-2}{2}}} \Big) + O(1) \\
&= \omega_N \varepsilon^{\frac{N}{2} - q\frac{N-2}{2}} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)^{q\frac{N-2}{2}}} + O(1) \\
&= O(\varepsilon^{\frac{N}{2} - q\frac{N-2}{2}}),
\end{aligned}$$

et d'après la définition de Y_ε, on trouve

$$\begin{aligned}
\|L_\varepsilon\|_q^q &= \frac{\|u_\varepsilon\|_q^q}{O(1) + (\int_\Omega |Y_\varepsilon|^{2^*})^{\frac{q}{2^*}} C_\varepsilon^{-q}} \\
&= \frac{O(\varepsilon^{\frac{N}{2} - q\frac{N-2}{2}})}{O(1) + (\int_\Omega |Y_\varepsilon|^{2^*})^{\frac{q}{2^*}} (N(N-2)\varepsilon)^{-q\frac{N-2}{4}}} \\
&= \frac{O(\varepsilon^{\frac{N}{2} - q\frac{N-2}{2}})}{O(1) + S^{q\frac{N-2}{4}} (N(N-2)\varepsilon)^{-q\frac{N-2}{4}}} \\
&= O(\varepsilon^{\frac{N}{2} - q\frac{N-2}{2} + \frac{N-2}{4}q}),
\end{aligned}$$

et donc

$$\|L_\varepsilon\|_q^q = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}(N - q\frac{N-2}{2})}).$$

$\square$

Pour la suite de la démonstation, on prend

$$c_1 := \inf_{\eta \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(\eta(t)),$$

où

$$\Gamma = \left\{ \eta \in C([0,1], H_0^1(\Omega)); \eta(0) = 0, J_\lambda(\eta(1)) < 0 \right\}$$

Lemme 2.3.6. *Supposons que* $\max\{2, \frac{N}{N-2}, \frac{4}{N-2}\} < q < 2^*$, *alors*

$$c_1 < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit la fonction A par

$$A(t) := J_\lambda(tL_\varepsilon) = \frac{1}{2}\|tL_\varepsilon\|^2 - \frac{1}{2^*}\|tL_\varepsilon\|^{2^*} - \frac{\lambda}{q}\|tL_\varepsilon\|_q^q,$$

on a $\|L_\varepsilon\|^{2^*} = 1$, alors

$$A(t) = \frac{t^2}{2}\|L_\varepsilon\|^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*} - \lambda \frac{t^q}{q} \int_\Omega |L_\varepsilon|^q \mathrm{d}x,$$

et B est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$B(t) := A(t) + \frac{\lambda}{q}\|tL_\varepsilon\|_q^q = \frac{t^2}{2}\|L_\varepsilon\|^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*},$$

en remarque que $A(t) \to -\infty$ quand $t \to \infty$, de plus $A(t) > 0$ pour t prés de 0, alors $\sup_{t \geq 0} A(t)$ est atteint pour certain $t_\varepsilon > 0$.
D'une part, on a

$$\begin{aligned} 0 &= A'(t_\varepsilon) \\ &= t_\varepsilon \Big(\|L_\varepsilon\|^2 - t_\varepsilon^{2^*-2} - \lambda t_\varepsilon^{q-2} \int_\Omega |L_\varepsilon|^q \mathrm{d}x \Big), \end{aligned}$$

par conséquent

$$\|L_\varepsilon\|^2 = t_\varepsilon^{2^*-2} + \lambda t_\varepsilon^{q-2}\int_\Omega |L_\varepsilon|^q \geq t_\varepsilon^{2^*-2}\mathrm{d}x,$$

(Car : λ et t_ε sont strictement positifs),
ensuite

$$t_\varepsilon \leq \|L_\varepsilon\|^{\frac{2}{2^*-2}},$$

et alors

$$\|L_\varepsilon\|^2 \leq t_\varepsilon^{2^*-2} + \lambda \|L_\varepsilon\|^{\frac{2(q-2)}{2^*-2}}\int_\Omega |L_\varepsilon|^q \mathrm{d}x,$$

en choisissant un ε assez petit et par les estimation du lemme 2.3.5 on obtient

$$t_\varepsilon^{2^*-2} \geq \frac{S}{2}.$$

Posons $t_m := \|L_\varepsilon\|^{\frac{2}{2^*-2}}$.
D'autre part, on a $B'(t_m) = 0$, et donc la fonction B est atteint son maximum en t_m, de plus B augmente dans l'intervalle $[0, t_m]$,
d'après les estimations du lemme 2.3.5 on obtient

$$\begin{aligned}
A(t_\varepsilon) &= B(t_\varepsilon) - \lambda \frac{t_\varepsilon^q}{q}\int_\Omega |L_\varepsilon|^q \mathrm{d}x \\
&\leq B(t_m) - \lambda \frac{t_\varepsilon^q}{q}\int_\Omega |L_\varepsilon|^q \mathrm{d}x \\
&= \frac{\|L_\varepsilon\|^{\frac{4}{2^*(s)-2}}}{2} - \frac{\|L_\varepsilon\|^{\frac{2.2^*}{2^*-2}}}{2^*} - \lambda \frac{t_\varepsilon^q}{q}\int_\Omega |L_\varepsilon|^q \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{N}\|L_\varepsilon\|^N - \lambda \frac{t_\varepsilon^q}{q}\int_\Omega |L_\varepsilon|^q \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) - \frac{\lambda}{q}\left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{q}{2^*-2}}\int_\Omega |L_\varepsilon|^q \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.3.5 on a

$$\int_\Omega |L_\varepsilon|^q \mathrm{d}x = O(\varepsilon^{\frac{N}{2}-q\frac{N-2}{4}}),$$

pour tout $q > \frac{N}{N-2}$. De plus si $q > \frac{4}{N-2}$, on trouve

$$\frac{N-2}{2} > \frac{1}{2}\Big(N - q\frac{N-2}{2}\Big)$$

Donc pour tout $\max\left\{2, \frac{4}{N-2}, \frac{N}{N-2}\right\} < q < 2^*$, et ε assez petit

$$c_1 \leq A(t_\varepsilon) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

$\square$

Preuve du théorème 2.2.2.

D'après les lemmes précédents, la fonctionnelle J_λ satisfait toutes les conditions du Théorème du col, alors le problème (P_λ) admet une solution non triviale u.
Supposons qu'il existe un $x \in \Omega$ tel que $-u(x) > 0$, on applique alors le principe du maximum à $-u$, on obtient que $-u$ est constant , et donc u est constant . Mais $u \in H_0^1(\Omega)$, et par conséquent $u \equiv 0$, c'est une contradiction car u est non triviale . Ceci conclut que u est une solution positive de (P_λ) dans $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Chapitre 3

Problème elliptique semilinéaire singulier

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va d'intéresser aux solutions faibles non triviales du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{|u|^{p-2}}{|x|^s}u + \lambda |u|^{q-2}u & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (P_{\lambda,s})$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}(N \geq 3)$, telle que $0 \in \Omega$, $0 < s < 2$, $2 < q < 2^*, 2 < p \leq 2^*(s)$, $2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$ est l'exposant critique de Hardy-Sobolev, et λ est un paramètre positif.

- Lorsque $p = 2^*(s)$, $q = 2$ et $0 \in \partial\Omega$, Ghoussoub et Kang [12] ont montré que l'existence de solution dépend du signe des courbures principales au voisinage de 0.
- Si $p = 2^*(s)$ et $q = 2$ telle que $0 \in \Omega$ le problème ($P_{\lambda,s}$) a été traité par Kang et Peng dans [16] .Ils ont prouvé que l'existence de la solution du problème ($P_{\lambda,s}$) est dépend de la dimension du λ.

- Kang et Deng [15] ont prouvé l'existence d'au moins deux solutions faibles dans $H_0^1(\Omega)$ pour le problème critique singulier non homogène

$$-\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s} + \lambda u + f$$

sous certaines hypothèses suffisantes sur f , λ et μ.

- Goussoub et Yaun ont fourni dans [13] , une étude complète du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\mu}{|x|^s}|u|^{q-2}u + \lambda |u|^{r-2}u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{P}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, telle que 0 dans l'intérieur de Ω et $1 < p < N, 0 \leq s \leq p \leq q \leq p^*(s) = p\frac{N-s}{N-2}$ et $q \leq r \leq p^*(0) = \frac{Np}{N-p}$. Ils ont distingué différents cas en fonction de la variation des exposants q et r.

Ce chapitre, nous allons traiter un cas particulier du papier de Ghoussoub-Yuan [13].

Remarque 3.1.1.

1. *Pour trouver la formulation faible du problème* ($P_{\lambda,s}$) *on multiplie* $\left(-\Delta u = \frac{|u|^{p-2}}{|x|^s}u + \lambda|u|^{q-2}u\right)$ *par* $v \in H_0^1(\Omega)$ *et intégrons sur* Ω *,on obtient :*

$$\int_\Omega -\Delta u \ v\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\frac{|u|^{p-2}}{|x|^s}u + \lambda|u|^{q-2}u\right) v\mathrm{d}x$$

et d'après la formule de Green on a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\frac{|u|^{p-2}}{|x|^s} uv + \lambda |u|^{q-2} uv \right) \mathrm{d}x$$

2. *On définie la fonctionnelle d'énergie pour le problème* ($P_{\lambda,s}$) *dans* $H_0^1(\Omega)$ *par :*

$$J_{\lambda,s}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^s}\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x.$$

3. *La fonctionnelle* $J_{\lambda,s}$ *est de classe* $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$.

4. *Les solutions du problème* ($P_{\lambda,s}$) *sont des points critiques de* $J_{\lambda,s}$.

Nos principaux résultats sont :

3.2 Principaux résultats

Théorème 3.2.1. *Soit* Ω *est un ouvert borné régulier de* $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$, *supposons que* $0 < s < 2$, $2 < q < 2^*$ *avec* $q < p < 2^*(s)$, *alors le problème* ($P_{\lambda,s}$) *admet une solution positive dans* $H_0^1(\Omega)$ *pour tout* $\lambda > 0$.

Théorème 3.2.2. *Soit* Ω *est un ouvert borné régulier de* $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 3)$, *et* $0 < s < 2$, *si* $\max\left\{2, \frac{4}{N-2}, \frac{N}{N-2}\right\} < q < 2^*$ *et* $p = 2^*(s)$, *alors le problème* ($P_{\lambda,s}$) *admet une solution positive dans* $H_0^1(\Omega)$ *pour tout* $\lambda > 0$.

3.3 Preuve des principaux résultats

En appliquant le théorème du col .
Premièrement, on montre que la fonctionnelle $J_{\lambda,s}$ est vérifier les hypothèses géométriques.
On a $J_{\lambda,s}(0) = 0$.

Lemme 3.3.1. *Si* $2 < q < 2^*$ *et* $q < p \leq 2^*(s)$ *avec* $0 < s < 2$ *et* $\lambda > 0$, *alors la fonctionnelle* $J_{\lambda,s}$ *vérifie les conditions suivantes*

a) Il existe $\phi > 0$ *et* $R > 0$ *tels que si* $||u|| = R$, *alors* $J_{\lambda,s}(u) \geq \phi$.

b) Il existe $\eta \in H_0^1(\Omega)$ *tels que* $||\eta|| > R, J_{\lambda,s}(\eta) < \phi$.

Démonstration.

a) Soit $u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0$, par les inégalités de Sobolev et de Hardy-Sobolev on a

$$J_{\lambda,s}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{K}{p}\|u\|^p - \lambda\frac{C}{q}\|u\|^q$$

oú K et C sont des constantes positives.
Si $\|u\| > 1$ alors

$$\begin{aligned} J_{\lambda,s}(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \big(\frac{K}{p} + C\frac{\lambda}{q}\big)\|u\|^p \\ &= \|u\|^p\big(\frac{1}{2}\|u\|^{2-p} - \big(\frac{K}{p} + C\frac{\lambda}{q}\big)\big) \end{aligned}$$

D'où, il existe R tel que

$$\max\Big\{1, \Big(2\big(\frac{K}{p} + \lambda\frac{C}{q}\big)\Big)^{\frac{1}{2-p}}\Big\} \leq R,$$

et $\phi = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{K}{p}\|u\|^p - \lambda\frac{C}{q}\|u\|^q > 0$ tels que : si $||u|| = R$ alors $J_{\lambda,s}(u) \geq \phi > 0$. Donc le point a) du lemme 3.3.1 est vérifie .

b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} J_{\lambda,s}(tu) &= \frac{1}{2}\|tu\|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|tu|^p}{|x|^s}\mathrm{d}x - \lambda\frac{1}{q}\int_\Omega |tu|^q \mathrm{d}x \\ &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{t^p}{p}\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^s}\mathrm{d}x - \lambda\frac{t^q}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x \end{aligned}$$

On a $J_{\lambda,s}(tu) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$ (car $2 < q < p$).
Donc il existe t_0 strictement positif et assez grand telle que $J_{\lambda,s}(t_0u) < 0$.
En prenant $\eta = t_0u$ donc le point b) du lemme 3.3.1 est vérifie . □

3.3.1 Preuve du théorème 3.2.1(Cas sous-critique) :

Lemme 3.3.2. *Soit $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ une suite telle que*

$$\begin{cases} J_{\lambda,s}(u_n) \to c & \textit{dans } \mathbb{R} \\ J'_{\lambda,s}(u_n) \to 0 & \textit{dans } H^{-1}(\Omega), \end{cases}$$

alors il existe $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ telle que u_n est converge faiblement vers u_1 dans $H_0^1(\Omega)$ et $J'_{\lambda,s}(u_1) = 0$.

Démonstration.

$J_{\lambda,s}$ est vérifie les conditions géométriques, d'après le lemme d'Ekeland, il existe une suite $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$J_{\lambda,s}(u_n) = c + o(1) \text{ et } J'_{\lambda,s}(u_n) \to 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega),$$

ensuite

$$\begin{aligned} c + o(1) &= J_{\lambda,s}(u_n) - \frac{1}{q}\langle J'_{\lambda,s}(u_n), v\rangle \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big)\|u_n\|^2 + \Big(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\Big)\int_\Omega \frac{\|u_n\|^p}{|x|^s} \\ &\geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big)\|u_n\|^2 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et alors il existe une sous suite $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ et $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tels que ;

$$\begin{aligned} &u_n \rightharpoonup u_1 \text{ dans } H_0^1(\Omega), \\ &u_n \to u_1 \text{ p.p dans } \Omega, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &u_n \to u_1 \text{ dans } L^r(\Omega) \text{ pour tout } 2 < r < 2^*, \\ &u_n \to u_1 \text{ dans } L^p(\Omega, |x|^{-s}\mathrm{d}x) \text{ pour tout } 2 < p < 2^*(s), 0 < s < 2. \end{aligned}$$

De plus on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle J'_{\lambda,s}(u_n), v\rangle = 0 \;\text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

et $J_{\lambda,s}$ est continue, donc

$$\langle J'_{\lambda,s}(u_1), v\rangle = 0 \;\text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

ce qui implique $J'_{\lambda,s}(u_1) = 0$. □

Lemme 3.3.3. *Si* (u_n) *une suite dans* $H_0^1(\Omega)$ *telle que*

$$\begin{cases} J_{\lambda,s}(u_n) \to c & \textit{dans } \mathbb{R} \\ J'_{\lambda,s}(u_n) \to 0 & \textit{dans } H^{-1}(\Omega), \end{cases}$$

avec $u_n \rightharpoonup u_1$ *dans* $H_0^1(\Omega)$*, alors* $u_n \to u_1$ *fortement dans* $H_0^1(\Omega)$*, de plus* u_1 *est non nulle.*

Démonstration. On a

$$J_{\lambda,s}(u_n) = c + o(1) \text{ et } \langle J'_{\lambda,s}(u_n), u_n \rangle = o(1)$$

Soit (z_n)une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que $z_n = u_n - u_1$,
d'aprés le lemme (3.3.2) on a :

$$z_n \rightharpoonup 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$
$$z_n \to 0 \text{ p.p dans } \Omega,$$

et

$$z_n \to 0 \text{ dans } L^r(\Omega) \text{ pour tout } 2 < r < 2^*,$$
$$z_n \to 0 \text{ dans } L^p(\Omega, |x|^{-s}\mathrm{d}x) \text{ pour tout } 2 < p < 2^*(s), 0 < s < 2.$$

par le lemme de Brézis-Lieb on a :

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^p}{|x|^s}\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|z_n|^p}{|x|^s}\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{|u_1|^p}{|x|^s}\mathrm{d}x + o(1),$$

et

$$\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x = \int_\Omega |z_n|^q \mathrm{d}x + \int_\Omega |u_1|^q \mathrm{d}x + o(1),$$

et on a :

$$||z_n||^2 = \int_\Omega |\nabla z_n|^2 = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u_1|^2 \mathrm{d}x + o(1).$$

Alors

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle J'_{\lambda,s}(u_n), u_n \rangle \\ &= \langle J'_{\lambda,s}(u_1), u_1 \rangle + \int_\Omega |\nabla z_n|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{|z_n|^p}{|x|^s} \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega |z_n|^q \mathrm{d}x \end{aligned}$$

d'aprés le lemme 3.3.2 on a

$$\langle J'_{\lambda,s}(u_1), u_1 \rangle = 0$$

et

$$\int_\Omega \frac{|z_n|^p}{|x|^s} \to 0$$

et

$$\int_\Omega |z_n|^q \to 0$$

Ainsi

$$||z_n||^2 = o(1)$$

Alors

$$||z_n||^2 \to 0$$

on conclut :

$$u_n \to u_1 \ \ \text{fortement dans } H_0^1(\Omega)$$

□

Preuve du théorème 3.2.1.

Les conditions du Théorème du col sont satisfaites donc il existe une solution qui est un point critique de $J_{\lambda,s}$, de plus on a $J_{\lambda,s}(u_1) = c > 0$, donc u_1 est non triviale et par le principe du maximum , on obtient que $u_1 > 0$. □

3.3.2 Preuve du théorème 3.2.2 (Cas critique)

Pour $p = 2^*(s)$, on a la fonctionnelle $J_{\lambda,s}$ ne satisfait pas la condition de Palais-Smale globale du fait que l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*(s)}(\Omega, |x|^{-s}\mathrm{d}x)$ n'est pas compacte. A cet effet, on détermine le niveau de compacité pour lequel la condition de Palais-Smale sera satisfaite.
On pose

$$c^* := \frac{2-s}{2(N-s)} M_s^{\frac{N-s}{2-s}},$$

avec M_s est la meilleure constante de Hardy-Sobolev.
Nous établissons les résultats suivants

Lemme 3.3.4. *Si $2 < q < 2^*$, $p = 2^*(s)$ et $0 < s < 2$, alors la fonctionnelle $J_{\lambda,s}$ satisfait la condition de Palais-Smale pour tout :*

$$0 < c < c^*.$$

Démonstration. D'après le principe variationnelle d'Ekeland il existe une suite (u_n) de $H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$J_{\lambda,s}(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } J'_{\lambda,s}(u_n) \to 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega),$$

alors

$$J_{\lambda,s}(u_n) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2^*(s)}\int_{\Omega}|u_n|^{2^*(s)}\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_{\Omega}|u_n|^q\mathrm{d}x = c + o(1) \tag{3.3.1}$$

et

$$\langle J'_{\lambda,s}(u_n), u_n\rangle = \int_{\Omega}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x - \int_{\Omega}|u_n|^{2^*(s)}\mathrm{d}x - \lambda\int_{\Omega}|u_n|^q\mathrm{d}x = o(1) \tag{3.3.2}$$

Multiplions (3.3.2) par $(\frac{-1}{q})$,et additionnons (3.3.1) et (3.3.2) terme à terme nous obtenons

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})\int_{\Omega}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x + (\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*(s)})\int_{\Omega}|u_n|^{2^*(s)}\mathrm{d}x = c + o(1),$$

ce qui implique

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})\int_{\Omega}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x \leq c + o(1) < c^*$$

donc , la suite (u_n) est bornée, et il existe une sous-suite (u_n) et $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$
$$u_n \to u \text{ p.p dans } \Omega$$

et

$$u_n \to u \text{ dans } L^q(\Omega), \text{ pour tout } 2 < q < 2^*$$
$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } L^{2^*(s)}(\Omega, |x|^{-s}\mathrm{d}x), \text{ pour } 0 < s < 2.$$

Comme (u_n) converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$, ce qui implique que $\langle J'_{\lambda,s}(u), u\rangle = 0$, et ainsi u est une solution faible du problème ($P_{\lambda,s}$)

. d'où

$$\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x$$

et

$$\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x + o(1).$$

Posons $z_n = u_n - u$, alors d'après le lemme de Brézis-Lieb, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla z_n|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + o(1) \tag{3.3.3}$$

$$\int_\Omega \frac{|z_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} + o(1) \tag{3.3.4}$$

$$\int_\Omega |z_n|^q \mathrm{d}x = \int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x + o(1) \tag{3.3.5}$$

et comme $J_{\lambda,s}(u_n) = c + o(1)$ et $J'_{\lambda,s}(u_n) = o(1)$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z_n|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|z_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x = -J_{\lambda,s}(u) + c + o(1), \tag{3.3.6}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla z_n|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{|z_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x = o(1).$$

Donc, on peut affirmer que

$$\int_\Omega |\nabla z_n|^2 \mathrm{d}x \to l, \quad \int_\Omega \frac{|z_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x \to l \tag{3.3.7}$$

Par définition de M_s , on déduit que

$$\int_\Omega |\nabla z_n|^2 \mathrm{d}x \geq M_s (\int_\Omega \frac{|z_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x)^{\frac{2}{2^*(s)}}.$$

et donc

$$l \geq M_s\, l^{\frac{2}{2^*(s)}}$$

par conséquent $l=0$, ou bien $l=M_s^{\frac{2^*(s)}{2^*(s)-2}}$.
Supposons que $l=M_s^{\frac{2^*(s)}{2^*(s)-2}}$, en passant à la limite dans (3.3.6) on trouve

$$J_{\lambda,s}(u)+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)})l=c$$

et comme $c\leq(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)})M_s^{\frac{N-s}{2-s}}$, on a

$$J_{\lambda,s}(u)<0$$

On a u est une solution faible du problème ($P_{\lambda,s}$), alors

$$J_{\lambda,s}(u)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)})\int_\Omega\frac{|z_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x\geq 0$$

ce qui est une contradiction. Ainsi $l=0$ et donc $u_n\to u$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$. □

Pour la suite de la démonstration , on a besoin d'établir quelques estimations utiles sur les fonctions extrémale. Soit φ une fonction de $C_c^\infty(\Omega)$ positive telle que

$$\begin{cases}\varphi(x)=1 & \text{si } |x|\leq R\\ 0<\varphi(x)<1 & \text{si } R<|x|<2R\\ \varphi(x)=0 & \text{si } |x|\geq 2R\end{cases}\tag{3.3.8}$$

On prend :

$$v_\varepsilon(x)=\varphi(x)V_\varepsilon(x)$$

et

$$Q_\varepsilon = \frac{v_\varepsilon}{\left(\int_\Omega \frac{|v_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s}\right)^{\frac{1}{2^*}}}.$$

De plus d'après [13], on a la fonction extrémale

$$T_\varepsilon(x) = k_\varepsilon V_\varepsilon(x),$$

avec $k_\varepsilon = (\varepsilon(N-s)(N-2))^{\frac{N-2}{2(2-s)}}$, et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla T_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|T_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} \mathrm{d}x = M_s^{\frac{N-s}{2-s}}.$$

Lemme 3.3.5. *On a les estimations suivantes :*

i) $\|Q_\varepsilon\|^2 = M_s + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2-s}})$

ii) $\int_\Omega |Q_\varepsilon|^q = O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}(N-q\frac{N-2}{2})})$ *pour tout :* $\frac{N}{N-2} < q < 2^*$.

Démonstration.

i) Nous allons estimer

$$\|\nabla Q_\varepsilon\|_2^2 = \frac{\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2}{\left(\int_\Omega \frac{|v_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s}\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}} \tag{3.3.9}$$

1) On calcule

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 &= \int_\Omega (\varphi(x))^2 |\nabla V_\varepsilon(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla \varphi(x)|^2 |V_\varepsilon(x)|^2 \mathrm{d}x \\ &+ 2\int_\Omega (\varphi(x)) |\nabla \varphi(x)| \nabla V_\varepsilon(x)| |V_\varepsilon(x)| \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

on a $\varphi \equiv 1$ au voisinage de 0 alors $\nabla\varphi \equiv 0$, et donc :

$$\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2 |V_\varepsilon(x)|^2 \mathrm{d}x \le D_1$$

et

$$\int_\Omega (\varphi(x))|\nabla\varphi(x)|\nabla V_\varepsilon(x)||V_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x \le D_2$$

pour les constantes D_1 et D_2 indépendantes de ε, ainsi

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 &= \int_\Omega (\varphi(x))^2 |\nabla V_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x + O(1)\\ &= \int_\Omega ((\varphi(x))^2 - 1)|\nabla V_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla V_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x + O(1)\end{aligned}$$

On remarque que $\varphi^2 - 1 \equiv 0$ prés de 0, On peut donc écrire $\int_\Omega ((\varphi(x))^2 - 1)|\nabla V_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x + O(1) = O(1)$, ce qui implique

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 &= \int_\Omega |\nabla V_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x + O(1)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla V_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} |\nabla V_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x + O(1)\end{aligned}$$

on a $0 \notin \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ donc $\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} |\nabla V_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x + O(1) = O(1)$, et ainsi,

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon(x)|^2 = \|\nabla V_\varepsilon\|_2^2 + O(1) \tag{3.3.10}$$

2) On a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|v_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} &= \int_\Omega \frac{\varphi(x)^{2^*(s)}}{(\varepsilon + |x|^{2-s})^{\frac{2^*(s)(N-2)}{2-s}} |x|^s} \mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega \frac{\varphi(x)^{2^*(s)} - 1}{(\varepsilon + |x|^{2-s})^{\frac{2^*(s)(N-2)}{2-s}} |x|^s} \mathrm{d}x\\ &\quad + \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^{2-s})^{\frac{2^*(s)(N-2)}{2-s}} |x|^s}\end{aligned}$$

par définition de φ on a $\varphi^{2^*(s)} - 1 \equiv 0$ prés de 0, alors on obient

$$\int_\Omega \frac{\varphi(x)^{2^*(s)} - 1}{(\varepsilon + |x|^{2-s})^{\frac{2^*(s)(N-2)}{2-s}} |x|^s} \mathrm{d}x = O(1),$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|v_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} &= \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^{2-s})^{\frac{2^*(s)(N-2)}{2-s}} |x|^s} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^{2-s})^{\frac{2^*(s)(N-2)}{2-s}} |x|^s} \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^{2-s})^{\frac{2^*(s)(N-2)}{2-s}} |x|^s} + O(1),\end{aligned}$$

avec $\int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^{2-s})^{\frac{2^*(s)(N-2)}{2-s}}} + O(1) = O(1)$ car $0 \notin \mathbb{R}^N \backslash \Omega$. D'ou

$$\int_\Omega \frac{|v_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^{2-s})^{\frac{2^*(s)(N-2)}{2-s}} |x|^s} \mathrm{d}x + O(1),$$

et par définition de T_ε on trouve,

$$\int_\Omega \frac{|v_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} = O(1) + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|T_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s} K_\varepsilon^{-2^*(s)} \tag{3.3.11}$$

D'après (3.3.9), (3.3.10) et (3.3.11) on obtient

$$\begin{aligned}\|\nabla Q_\varepsilon\|_2^2 &= \frac{O(1) + \|\nabla V_\varepsilon\|_2^2}{\left(\int_\Omega \frac{|v_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s}\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}} \\ &= \frac{O(1) + M_s^{\frac{N-s}{2-s}} K_\varepsilon^{-2}}{O(1) + M_s^{\frac{2(N-s)}{2^*(s)(2-s)}} K_\varepsilon^{-2}} \\ &= \frac{O(1) + M_s^{\frac{N-s}{2-s}} (\varepsilon(N-s)(N-2))^{\frac{2-N}{2-s}}}{O(1) + M_s^{\frac{2(N-s)}{2^*(s)(2-s)}} (\varepsilon(N-s)(N-2))^{\frac{2-N}{2-s}}}.\end{aligned}$$

Sachant que $\frac{M_s^{\frac{N-s}{2-s}}}{M_s^{\frac{2(N-s)}{2^*(s)(2-s)}}} = M_s$ et en utilisant un développement limité au voisinage de 0, on obtient

$$\|\nabla Q_\varepsilon\|_2^2 = M_s + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2-s}})$$

.

ii) Nous allons estimer la norme

$$\|Q_\varepsilon\|_q^q = \frac{\|v_\varepsilon\|_q^q}{(\int_\Omega \frac{|v_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s})^{\frac{q}{2^*}}}, \tag{3.3.12}$$

$$\begin{aligned}\|v_\varepsilon\|_q^q &= \int_\Omega |\varphi(x)V_\varepsilon(x)|^q \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \frac{((\varphi(x))^q - 1)}{(\varepsilon + |x|^{2-s})^{\frac{q(N-2)}{2-s}}}\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^{2-s})^{\frac{q(N-2)}{2-s}}}\end{aligned}$$

remarquons que $(\varphi(x))^q - 1 \equiv 0$ prés de 0 , alors on obtient

$$\int_\Omega \frac{(((\varphi(x))^q - 1)}{(\varepsilon + |x|^{2-s})^{\frac{q(N-2)}{2-s}}}\mathrm{d}x = O(1),$$

et ainsi

$$\|v_\varepsilon\|_q^q = \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(\varepsilon + |x|^{2-s})^{(2-s)\frac{q(N-2)}{2-s}}} + O(1),$$

on a l'intégrale $\int_\Omega \frac{r^{N-1}}{r^{\frac{q(N-2)}{2-s}}}$ est existe si $(2-s)\frac{q(N-2)}{2-s} - (N-1) > 1$ c'est-a-dire pour $q > \frac{N}{N-2}$.

Par changement de variable en coordonnées polaires, on trouve

$$\|v_\varepsilon\|_q^q = w_N \int_0^\infty \frac{r^{N-1}\mathrm{d}r}{(\varepsilon + r^{2-s})^{\frac{q(N-2)}{2-s}}} + O(1),$$

en posant $y = r\varepsilon^{\frac{-1}{2-s}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon\|_q^q &= w_N \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{(N-1)}{2-s}} \varepsilon^{\frac{1}{2-s}} y^{N-1} \mathrm{d}y}{(\varepsilon + (y\varepsilon^{\frac{1}{2-s}})^{2-s})^{\frac{q(N-2)}{2-s}}} + O(1) \\
&= w_N \varepsilon^{-\frac{N-2}{2-s}q + \frac{N}{2-s}} \Big(\int_1^\infty \frac{y^{N-1}\mathrm{d}y}{(1+y^{2-s})^{\frac{q(N-2)}{2-s}}} \\
&\quad + \int_0^1 \frac{y^{N-1}\mathrm{d}y}{(1+y^{2-s})^{\frac{q(N-2)}{2-s}}} \Big) + O(1) \\
&= w_N \varepsilon^{-\frac{N-2}{2-s}q + \frac{N}{2-s}} \int_1^\infty \frac{y^{N-1}\mathrm{d}y}{(1+y^{2-s})^{\frac{q(N-2)}{2-s}}} + O(1) \\
&= O(\varepsilon^{-\frac{N-2}{2-s}q + \frac{N}{2-s}}),
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|Q_\varepsilon\|_q^q &= \frac{O(\varepsilon^{-\frac{N-2}{2-s}q + \frac{N}{2-s}})}{O(1) + M_s^{\frac{q(N-s)}{2^*(s)(2-s)}} (\varepsilon(N-s)(N-2))^{\frac{-q(N-2)}{2(2-s)}}} \\
&= O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}(N - q\frac{N-2}{2})}).
\end{aligned}$$

□

Pour la suite, on prend $c := \inf\limits_{\eta\in\Gamma} \max\limits_{t\in[0,1]} J_{\lambda,s}(\eta(t))$, où

$$\Gamma = \big\{\eta \in C([0,1], H_0^1(\Omega)); \eta(0) = 0, J_{\lambda,s}(\eta(1)) < 0\big\}.$$

Lemme 3.3.6. *Soient* $0 \le s < 2$, $\lambda > 0$. *Supposons que* $\max\big\{2, \frac{4}{N-2}, \frac{N}{N-2}\big\} < q < 2^*$, *alors*

$$c < \frac{2-s}{2(N-s)} M_s^{\frac{N-s}{2-s}}.$$

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la fonction g par

$$\begin{aligned} g(t) &:= J_{\lambda,s}(tQ_\varepsilon) \\ &= \frac{t^2}{2}\|Q_\varepsilon\|^2 - \frac{1}{2^*(s)}t^{2^*(s)} - \lambda\frac{t^q}{q}\int_\Omega |Q_\varepsilon|^q \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

(car :$\displaystyle\int_\Omega \frac{\|Q_\varepsilon\|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x = 1$). Et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit la fonction h par

$$\begin{aligned} h(t) &:= J_{\lambda,s}(tQ_\varepsilon) + \lambda\frac{t^q}{q}\int_\Omega \|Q_\varepsilon\|^q \mathrm{d}x \\ &= \frac{t^2}{2}\|Q_\varepsilon\|^2 - \frac{1}{2^*(s)}t^{2^*(s)}. \end{aligned}$$

On a $g(t) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$ et $g(t) > 0$ prés de 0 , alors $\sup_{t\geq 0} g(t)$ est atteint pour certain $t_\varepsilon > 0$. Ainsi

$$g'(t_\varepsilon) = t_\varepsilon\left(\|Q_\varepsilon\|^2 - t_\varepsilon^{2^*(s)-2} - \lambda t_\varepsilon^{q-2}\int_\Omega |Q_\varepsilon|^q \mathrm{d}x\right) = 0,$$

on a

$$\|Q_\varepsilon\|^2 = t_\varepsilon^{2^*(s)-2} + \lambda t_\varepsilon^{q-2}\int_\Omega |Q_\varepsilon|^q \mathrm{d}x \geq t_\varepsilon^{2^*(s)-2}$$

car λ et t_ε sont strictement positifs. On obtient alors ,

$$\|Q_\varepsilon\|^{\frac{2}{2^*(s)-2}} \geq t_\varepsilon$$

Donc

$$\|Q_\varepsilon\|^2 \leq t_\varepsilon^{2^*(s)-2} + \lambda\|Q_\varepsilon\|^{\frac{2(q-2)}{2^*(s)-2}}\int_\Omega |Q_\varepsilon|^q \mathrm{d}x.$$

D'après les estimations du lemme 3.3.5 et pour ε assez petit , on a

$$t_\varepsilon^{2^*(s)-2} \geq \frac{M_s}{2}$$

On prend $t_0 = \|Q_\varepsilon\|^{\frac{2}{2^*(s)-2}}$.

La fonction h est atteint son maximum en t_0, et elle augmente dans l'intervalle $[0, t_0]$. D'après le lemme 3.3.5 on a :

$$\begin{aligned}
g(t_\varepsilon) &= h(t_\varepsilon) - \lambda \frac{t_\varepsilon^q}{q} \int_\Omega |Q_\varepsilon|^q \mathrm{d}x \\
&\leq h(t_0) - \lambda \frac{t_\varepsilon^q}{q} \int_\Omega |Q_\varepsilon|^q \mathrm{d}x \\
&= \frac{\|Q_\varepsilon\|^{\frac{4}{2^*(s)-2}}}{2} - \frac{\|Q_\varepsilon\|^{\frac{2.2^*(s)}{2^*(s)-2}}}{2^*(s)} - \lambda \frac{t_\varepsilon^q}{q} \int_\Omega |Q_\varepsilon|^q \mathrm{d}x \\
&= \frac{2-s}{2(N-s)} \|Q_\varepsilon\|^{\frac{2(N-s)}{2-s}} - \lambda \frac{t_\varepsilon^q}{q} \int_\Omega |Q_\varepsilon|^q \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{2-s}{2(N-s)} M_s^{\frac{N-s}{2-s}} + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2-s}}) - \frac{\lambda}{q} \left(\frac{M_s}{2} \right)^{\frac{q}{2^*(s)-2}} \int_\Omega |Q_\varepsilon|^q \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

d'après le lemme 3.3.5 on a

$$\int_\Omega |Q_\varepsilon|^q = O(\varepsilon^{\frac{1}{2-s}(N - q\frac{N-2}{2})}) \text{ pour tout } \frac{N}{N-2} < q < 2^*.$$

De plus si $q > \frac{4}{N-2}$, alors

$$\frac{N-2}{2-s} > \frac{1}{2-s}(N - q\frac{N-2}{2})$$

Donc pour tout $\max\left\{2, \frac{4}{N-2}, \frac{N}{N-2}\right\} < q < 2^*$ et ε assez petit

$$c \leq g(t_\varepsilon) < \frac{2-s}{2(N-s)} M_s^{\frac{N-s}{2-s}}.$$

□

Preuve du théorème 3.2.2. D'après les lemmes 3.3.1, 3.3.4 et 3.3.6 $J_{\lambda,s}$ satisfait les hypothèses du Théorème du col 1.2.2, donc c est une valeur

critique de $J_{\lambda,s}$, par définition il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $J_{\lambda,s}(u) = c$ et $J'_{\lambda,s}(u) = 0$, et comme
$J_{\lambda,s}(u) = J_{\lambda,s}(|u|) = c > 0$, alors le problème ($P_{\lambda,s}$) admet une solution positive dans $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti and H. P. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, 14 :349–381, December 1973.

[2] T. Aubin. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. *Journal of Differential Geometry*, 11 :573–598, January 1976.

[3] H. Brezis and E. Lieb. A Relation Between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 88 :486–490, 1983.

[4] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, 1983.

[5] H. Brézis and L. Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 36 :437–477, 1983.

[6] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg. First order interpolation inequalities with weights. *Compositio Mathematica*, 53 :259–275, 1984.

[7] G. Cerami, S. Solimini, and M. Struwe. Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents. *Journal of Functional Analysis*, 69 :289–306, December 1986.

[8] N. Chaudhuri and M. Ramaswamy. Existence of positive solutions of some semilinear elliptic equations with singular coefficients. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics*, 131(6), December 2001.

[9] I. Ekeland. On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 47 :324–353, 1974.

[10] L Evans. *Partial Differential Equations, Second edition*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, March 2010.

[11] D. G.de. Figueiredo. *Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*. Springer, 1989.

[12] N. Ghoussoub and X. S. Kang. Hardy–Sobolev critical elliptic equations with boundary singularities. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, 21 :767–793, November 2004.

[13] N. Ghoussoub and C. Yuan. Multiple Solutions for Quasi-Linear PDES Involving the Critical Sobolev and Hardy Exponents. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352(12) :5703–5743, 2000.

[14] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya. *Inequalities*. Cambridge University Press, 1988.

[15] D. Kang and Y. Deng. Multiple solutions for inhomogeneous elliptic problems involving critical Sobolev–Hardy exponents. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 60 :729–753, February 2005.

[16] D. Kang and S. Peng. Solutions for semilinear elliptic problems with critical Sobolev–Hardy exponents and Hardy potential. *Applied Mathematics Letters*, 18 :1094–1100, October 2005.

[17] O. Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques : et applications aux problèmes elliptiques*. Mathématiques et Applications. Springer-Verlag, 1993.

[18] E.H. Lieb and M. Loss. *Analysis*. Graduate Studies in Mathematics, 2001.

[19] D. Passaseo. Multiplicity of positive solutions of nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent in some contractible domains. *manuscripta mathematica*, 65 :147–165, June 1989.

[20] G. Stampacchia. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Annales de l'Institut Fourier*, 15(1) :189–257, 1965.

[21] M. Struwe. *Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

[22] G. Talenti. Best constant in Sobolev inequality. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 110 :353–372, December 1976.

[23] G. Tarantello. On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, 9 :28–304, 1992.

Résumé

Ce travail consiste à l'utilisation des méthodes variationnelle pour l'étude d'existence de solution positive de l'equation elliptique suivante :

.. .
$$-\Delta u = \frac{|u|^{p-2}}{|x|^s}u + \lambda|u|^{q-2}u \text{ dans } \Omega$$

avec condirion aux bords de Dirichlet. Où $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (N \geq 3)$ est un ouvert bornée régulier , $2 < q < p \leq 2^*(s)$ et $0 \leq s < 2$. Les résultats dépendant essentiellement des exposants q et p.

Mots clès : équation elliptique, méthodes variationnelles, exposant critique de Sobolev,exposant critique de Hardy- Sobolev, Condition de Palais Smale, théorème du Col.

Abstract

This work conserne the use of the variational methods to study the existence of at least one positive solution for the following elliptic equation :

$$-\Delta u = \frac{|u|^{p-2}}{|x|^s}u + \lambda|u|^{q-2}u \text{ in } \Omega$$

with boundary Dirichlet condition, where $\Omega \in \mathbb{R}^N (N \geq 3)$, is a smooth bounded domain, $2 < q < p \leq 2^*(s)$ and $0 \leq s < 2$. The results mainly depend on the exponents q and p.

Keywords :elliptic equation, variational methods, critical Sobolev exponent, critical Hardy-Sobolev exponent, Palais Smale condition, mountain pass theorem.

الملخص

يتكون هذَا العمل من استخدَام الأَسَاليب المتغيرة لدرَاسة وجود حل موجب لِلمعَادلة الاِهليجيَة التَّالِية

$$-\Delta u = \frac{|u|^{p-2}}{|x|^s}u + \lambda|u|^{q-2}u$$

مع شرط دِرِكلي، حيثُ $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \leq 3)$ ، حَد مَفتوح مُنتظم $2 < q < p \leq 2^*(s)$ وَ $0 \leq s < 2$. تعتمد نَتَأيج بِشكل اَسَاسي عَلَا الأُسَين p وَ q .

الكلمَات المفتَاحية

معَادلة اِيهليجية، طرُق المتغيرَات، الَاس الحرج لسوبوليف، الَأُس الحَرج لهَاردي سوبوليف ، شرط بَالي سمَايل، مبرهنة كول.

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

Université de Tlemcen