الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie
جامعة أبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID- TLEMCEN

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER
EN MATHÉMATIQUES

Option : Equations aux Dérivées Partielles et Applications

Thème

Existence et comportement asymptotique des solutions positives de quelques problèmes elliptiques.

Soutenue le 14 Juillet 2021 par

Aicha ANITER

Devant le jury composé de :

Président :	Ahmed ATTAR,	M.C.A, Université de Tlemcen
Examinateur :	Rachid BENTIFOUR,	M.C.A, Université de Tlemcen
Encadrant :	Sabri BENSID,	M.C.A, Université de Tlemcen

Année Universitaire 2020/2021

Dédicaces

Je dédie ce travail
A ma chère mère
Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point de vous remercier comme il se doit. Votre affection me couvre, votre bienveillance me guide et votre présence à mes côtés.
A mon cher père
Vous êtes toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager.
A mes trés chers frères
Abderahim, Salah Eddine et son fils Abderahmanne, Bilal, Abdeljalil et Yassine. Et ma belle soeur Amina.
Puisse Dieu vous donne santé, bonheur, courage et surtout réussite.

Remerciements

D'abord je remercie «**ALLAH**», le tout puissant, pour m'avoir donné le courage et la santé pour réaliser ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude et mes remerciements à mon Encadreur de mémoire Mr. Sabri BENSID, il m'a guidé dans mon travail, m'a fait preuve d'une très grande compréhension, pour sa disponibilité et sa patience avec moi.

Je tiens à remercier Monsieur Ahmed ATTAR pour avoir accepté de présider le jury, je remercie également Monsieur Rachid BENTIFOUR pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail.

Enfin, merci à mes parents pour m'avoir donné le goût et l'ambition de faire mes études, ainsi qu'a tous les professeurs au cours de ma scolarité du primaire au Master, un grand merci plus particulièrement à mon amie Souda, merci à toi d'être mon amie.

Table des matières

Notations

Notation	Définition
Ω :	Ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$:	Frontière de Ω.
$\frac{\partial u}{\partial \nu}$:	La dérivée normale extèrieure.
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$:	Gradient de u.
$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$:	Laplacien de u.
$supp(u)$:	Support de la fonction u.
$\|.\|_r$:	La norme dans l'espace $\mathbb{L}^r$.
$\|.\|_E$:	La norme dans l'espace E.
E' :	Espace dual de E.
$< .,. >$:	Produit scalaire dans la dualité E, E'.
$p.p$:	Presque partout.
$\setminus$:	Différence entre les ensembles.
$\hookrightarrow$:	Injection continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$:	Injection compacte.
$\Omega' \subset\subset \Omega$:	Ω' est un sous ensemble de Ω et $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.

$\mathbb{C}^k(\Omega)$: L'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω. (k entier ≥ 0).

$\mathbb{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{u \in \mathbb{C}(\Omega);\ \sup\limits_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty\right\}$.

$\mathbb{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{u \in \mathbb{C}^k(\Omega); D^i u \in \mathbb{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \forall i,\ \ |i| \leq k\right\}$.

$\mathbb{L}^p(\Omega) := \left\{h : \Omega \to \mathbb{R},\ \ h\ \ mesurable\ \ et\ \ \int_{\Omega} |h|^p < \infty\right\}$

$\mathbb{L}^\infty(\Omega) := \left\{h : \Omega \to \mathbb{R},\ \ h\ \ mesurable\ \ et\ \ \exists\ \ c\ \ telle\ \ que\ \ |h(x)| \leq c\ \ p.p\ \ sur\ \ \Omega\right\}$.

$\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$: C'est l'espace de Sobolev, telle que la dérivée jusqu'a l'ordre m dans l'espace $\mathbb{L}^p$.

$\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev avec trace (fonction au bord) nulle.

$\mathbb{H}^m(\Omega) := \mathbb{W}^{m,2}(\Omega)$.

$\mathbb{H}_0^1(\Omega) := \mathbb{W}_0^{1,2}(\Omega)$.

Introduction générale

La modélisation mathématique des phénomènes physiques ou biologiques fait le plus souvent intervenir des équations aux dérivées partielles (EDP). Plusieurs types de problèmes apparaissent et par conséquent de multiples techniques se développent pour une meilleure compréhension du phénomène étudié.

Un des modèles les plus étudié est le modèle proie-prédateur. Si on note par u les proies et par v les prédateurs, alors à l'état stationnaire, u et v sont gouvernées par les équations suivantes

$$\begin{cases} -\Delta u = au - b(x)u^2 - cuv & \text{dans } \Omega \\ -\Delta v = \mu v - v^2 + duv & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

o$\grave{u}$ Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^N$, $(N > 1)$, a, μ, c, d sont des constantes avec c, $d > 0$ et b est une fonction continue positive donnée. Pour plus de détails, voir [3], [5].

Quand $v \equiv 0$, (absence des prédateurs) alors u satisfait l'équation suivante dite équation logistique.

$$\begin{cases} -\Delta u = au - b(x)u^2 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce problème a fait l'objet de plusieurs travaux. Nous invitons le lecteur à consulter les articles suivants [6], [8] et [17].

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude des solutions du problème suivant

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = au - b(x)u^p & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, $b(x) \geq 0$, $p > 1$ et $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Le problème (P) apparait donc dans beaucoup de modèles mathématiques issus de la biologie et aussi en dynamique de populations. Il décrit souvent la distribution de la population à l'état d'équilibre d'une espèce donnée dont la croissance obéit à une loi logistique.

Nous notons aussi que le problème (P) est relié à certains problèmes de géométrie Riemannienne. Voir [12], [14].

L'objectif de ce travail est de comprendre l'effet de l'exposant p sur les solutions.

Dans un premier temps, nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la méthode des sous et sur solutions et en appliquant quelques principes du maximum.

Ensuite, on a étudié le comportement asymptotique de la solution par rapport à p ($p \to 1^+$ et $p \to \infty$). Nous avons détaillé les papiers de [3] et [4].

Le cas le plus délicat est certainement quand $p \to \infty$. Ici, la solution du problème (P) converge vers v solution du problème suivant

$$\text{(Q)} \qquad \begin{cases} -\Delta v = a\chi_{\{v<1\}} v & \text{dans } \Omega \\ \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où χ_D est la fonction caractéristique du domaine D.

Le problème (Q) est appelé un problème à frontière libre puisque les inconnues du problème (Q) sont la solution v et une partie du domaine Ω.

Pour étudier le problème (Q) qui possède une non linéarité discontinue dans le second membre, nous utilisons l'approche des inégalités variationnelles.

Cette technique nous permet de montrer l'existence, l'unicité de la solution du problème (Q). Nous invitons le lecteur à regarder le livre de Kinderlehrer et Stampacchia [10] pour un panorama complet.

Le manuscrit est organisé de la façon suivante.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les outils nécessaires utilisés dans ce mémoire.

Le deuxième chapitre examine l'existence et l'unicité des solutions positives du problème (P).

Dans le troisième chapitre, nous nous étudions le comportement asymptotique des solutions par rapport à l'exposant $p > 1$.

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons à l'existence et l'unicité de la solution d'un problème à frontière libre obtenu dans le cas o*ù* $p \to \infty$.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion.

Préliminaires 1

Ce chapitre rappelle quelques notions d'analyse non-linéaire nécéssaires au developpement de ce mémoire.

1.1 Les espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$, $(1 \leq N < \infty)$ et $k \in \mathbb{N}$.

On note par $\mathbb{C}^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω.

Soit $0 < \alpha < 1$, on note par

$$\mathbb{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in \mathbb{C}(\Omega);\ \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty \right\},$$

et

$$\mathbb{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in \mathbb{C}^1(\Omega);\ Du \in \mathbb{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \right\}.$$

Définition 1.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq p < \infty$, on appelle espace de Lebesgue*

$$\mathbb{L}^p(\Omega) = \left\{ h : \Omega \to \mathbb{R},\ \ h \ \ mesurable \ \ et \ \ \int_{\Omega} |h|^p dx < \infty \right\}.$$

On lui muni de la norme suivante,

$$\|h\|_{\mathbb{L}^p} = \left[\int_{\Omega} |h(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}},$$

dite la norme dans les espaces de Lebesgue.

Définition 1.2 *Pour $p = \infty$, on a*

$$\mathbb{L}^{\infty}(\Omega) = \left\{ h : \Omega \to \mathbb{R},\ h \ mesurable \ et \ \exists \ c \ une \ constante \ telle \ que \ |h(x)| \leq c \ p.p \ sur \ \Omega \right\}.$$

Notons par

$$\|h\|_{\mathbb{L}^\infty} := \|h\|_\infty = \inf\{c, \quad |f(x)| \leq c \ \ p.p \ \ sur \ \ \Omega\}.$$

Pour avoir plus de détails sur les espaces $\mathbb{L}^p$, consulter [1], [2].

Maintenant, on désigne par $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev définit comme suit

$$\mathbb{W}^{m,p}(\Omega) = \Big\{u \in \mathbb{L}^p(\Omega), D^\alpha u \in \mathbb{L}^p(\Omega), \forall \alpha \ \ telque \ \ |\alpha| \leq m\Big\},$$

où α est un multi-indice et $D^\alpha u$ est une dérivée partielle de u au sens faible (au sens des distributions), c'est à dire

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

On munit l'espace $\mathbb{W}^{m,p}$ de la norme suivante

$$\|u\|_{\mathbb{W}^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{\mathbb{L}^p}^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \\ \max\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{\mathbb{L}^\infty} & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

qui est un espace de Banach.

On note souvent $\mathbb{H}^m(\Omega)$ l'espace $\mathbb{W}^{m,2}(\Omega)$. On a alors,

$$\mathbb{H}^m(\Omega) = \Big\{u \in \mathbb{L}^2(\Omega), D^\alpha u \in \mathbb{L}^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, avec \ \ |\alpha| \leq m\Big\},$$

qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant

$$< u, v >_{\mathbb{H}^m} = < u, v >_{\mathbb{L}^2} \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, \ D^\alpha v)_{\mathbb{L}^2}.$$

On désigne par $\mathbb{C}_0^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de $\mathbb{C}^k(\Omega)$ à support compact, pour tout entier $k \geq 0$.

Définition 1.3 *Soit $1 \leq p < \infty$, on désigne par $\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de l'espace $\mathbb{C}_0^k(\Omega)$ dans $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$.*

$$\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega) : \ \ u = Du = \cdots D^{m-1}u = 0 \ \ sur \partial\Omega\}.$$

L'espace $\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$.

En particulier, pour $p = 2$, on note

$$\mathbb{H}_0^m(\Omega) = \mathbb{W}_0^{m,2}(\Omega)$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $\mathbb{H}^m(\Omega)$.

Définition 1.4 *On définit l'espace $\mathbb{W}_{loc}^{m,p}(\Omega)$ comme suit*

$$\mathbb{W}_{loc}^{m,p}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \text{pour tout compact} \quad \Omega' \subset\subset \Omega, \quad u \in \mathbb{W}^{m,p}(\Omega')\}.$$

Corollaire 1.1 (Inégalité de Poincaré) *Soit Ω un ouvert borné et $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et de p) telle que*

$$\|u\|_{\mathbb{L}^p} \leq C\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^p}, \ \ \forall u \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Injections de Sobolev

On a les injections continues suivantes

Théorème 1.1 *i) Si $mp < N$, alors on a $\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{\frac{Np}{N-mp}}(\Omega)$.*

ii) Si $0 \leq k < m - \frac{N}{p} < k+1$, alors on a $\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega})$, avec $\delta = m - \frac{N}{p} - k$.

Pour les injections compactes, on a le résultat suivant

Théorème 1.2
i) Si $mp < N$, $q < \frac{Np}{N-mp}$, alors $\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \hookrightarrow \mathbb{L}^q(\Omega)$.

ii) Si $0 \leq k < m - \frac{N}{p} < k+1$, alors $\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \hookrightarrow \mathbb{C}^{k,\mu}(\overline{\Omega})$, avec $\mu < m - \frac{N}{p} - k$.

Remarque 1.1 *Ces injections dépendent de la régularité de l'ouvert Ω.*
Autrement dit, si l'ouvert Ω est de frontière lipschitzienne continue, alors on peut remplacer l'espace $\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega)$ par $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$.

Théorème 1.3 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) *Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathbb{L}^p$, $h_n \longrightarrow h$ p.p dans Ω, avec h dans $\mathbb{L}^p$.*
Supposons qu'il existe une fonction $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ positive dans $\mathbb{L}^p$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |h_n| \leq g \quad p.p \quad dans \ \ \Omega.$$

Alors

$$h_n \longrightarrow h \ \ dans \ \ \mathbb{L}^p.$$

Pour un panorama complet, nous invitons le lecteur à voir [9], [11] et [15].

1.2 Le principe de maximum classique

Le principe de maximum joue un rôle trés important dans la recherche des résultats d'existence des solutions pour les EDP.
Considérons l'opérateur suivant

$$Tu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b(x)D_i u + c(x)u.$$

Avec $[a^{ij}]$ est une matrice symétrique, b^i et c sont des fonctions dans Ω, $D_i u$=u_{x_i} et $D_{ij}u = u_{x_i x_j}$.

L'opérateur T est dit elliptique s'il existe Γ, $\gamma > 0$, telle que

$$\Gamma(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \gamma(x)|\xi|^2, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad x \in \Omega.$$

Maintenant, on a le résultat suivant

Théorème 1.4 (Principe de maximum faible) *Soit T un opérateur elliptique dans Ω (un ouvert borné). On suppose que $u \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, telle que*

$$Tu \geq 0 \quad (ou \quad \leq 0), \ \ c \leq 0.$$

Alors, on a

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+,$$

ou

$$(\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-).$$

rappelons que $u^+ = \max\{u, 0\}$ et $u^- = \min\{u, 0\}$.

Lemme 1.1 (Lemme de Hopf) *[7] On suppose que T est un opérateur elliptique avec $c = 0$ et $Tu \geq 0$ dans Ω, où $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$.*

Soit $x_0 \in \partial\Omega$ telle que

i) u est continue en x_0,

ii) $u(x_0) > u(x)$, pour tout $x \in \Omega$,

iii) $\partial\Omega$ est une frontière régulière (i.e on peut trouver une sphère interieur centrée en x_0).

Alors, on a

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} > 0.$$

Nous définissons aussi l'inégalité suivante.

Théorème 1.5 (Inégalité de Harnack) *Soit T un opérateur elliptique avec des coefficients bornés dans Ω et soit $u \in \mathbb{W}^{2,p}(\Omega)$ telle que*

$$\begin{cases} Tu = 0 & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Alors, pout tout $\Omega' \subset\subset \Omega$ on a le résultat suivant

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega} u,$$

où $C = C(T, \Omega, \Omega')$.

On dit que λ_1 est une valeur propre principale de l'opérateur T, si elle vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} Tu = \lambda_1 u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Théorème 1.6 *Soit l'opérateur T définit précédemment dans Ω, avec une frontière lipschitzienne. les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) Le principe de maximum est vérifié pour T dans Ω .

ii) Il existe une fonction $\varphi \in \mathbb{W}^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, telle que

$$\begin{cases} T\varphi \leq 0 & \text{dans } \Omega \\ \varphi \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

iii)La valeur propre principale λ_1 est strictement positive.

Pour plus de détails sur les démonstrations nous invitons le lecteur à voir [7], [9].

1.3 Méthode des sur et sous solution classique

Une des techniques pour montrer l'existence des solutions et leurs localisations pour les équations différentielles non linéaires est la méthode des sous et sur-solutions.
Rappelons que l'opérateur T est défini comme suit

$$Tu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)Du_i + c(x)u,$$

sous les hypothèses suivantes

les coefficients a^{ij}, b^i, c sont de classe $\mathbb{C}^\alpha$ dans $\overline{\Omega}$, T est strictement elliptique dans Ω (borné) et $\partial\Omega$ est de classe $\mathbb{C}^{2,\alpha}$.
Maintenant, on consédère le problème elliptique aux limites suivant

$$(1.1)\qquad \begin{cases} Tu = f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = \phi(x) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

O*ù* $f \in \mathbb{C}^\alpha(\Omega \times J)$, $J \subset \mathbb{R}$ avec $\alpha \in (0,1)$, et $\phi \in \mathbb{C}^{1,\alpha}(\partial\Omega)$.

Définition 1.5 *Une fonction $\overline{u} \in \mathbb{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ est dite sur-solution du problème* (1.1), *si le problème suivant est vérifié*

$$(1.2)\qquad \begin{cases} T\overline{u} \geq f(x,\overline{u}) & \textit{dans } \Omega \\ \overline{u} \geq \phi & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aussi, avec la même manière pour $\underline{u} \in \mathbb{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ est dite sous-solution du problème (1.1), *si $\underline{u}$ vérifie le problème suivant*

$$(1.3)\qquad \begin{cases} T\underline{u} \leq f(x,\underline{u}) & \textit{dans } \Omega \\ \underline{u} \leq \phi & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, on a les résultats suivants

Théorème 1.7 *Soit $\overline{u}$, $\underline{u} \in \mathbb{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ sur et sous solutions du problème* (1.1) *(respectivement) avec $\underline{u} \leq \overline{u}$ dans Ω.*

Soit l'intervalle $J = [\min_{\overline{\Omega}} \underline{u}(x), \max_{\overline{\Omega}} \overline{u}(x)]$ et soit $f \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega} \times J)$, qui vérifie pour un certain $r > 0$,

$$f(x,z) - f(x,t) \geq -r(z-t) \ \ \forall x \in \overline{\Omega}, \ \ z, \ \ t \in [\underline{u}\ ,\overline{u}] \ \ \textit{et} \ \ z \geq t.$$

Alors, il exsite une solution u du problème (1.1), *qui vérifie*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}, \ \ \textit{dans} \ \ \Omega.$$

Théorème 1.8 *Soient $\overline{u}$, $\underline{u} \in \mathbb{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ sur et sous solutions du problème* (1.1) *(respectivement) avec $\underline{u} \leq \overline{u}$ dans Ω et supposons que $f \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega} \times J)$ avec $J = [\underline{u}\ ,\overline{u}]$.*

Alors le problème (1.1) *a une solution minimale u_* et une solution maximale u^* dans l'intervalle $[\underline{u}\ ,\overline{u}]$.*
Si de plus, on a $c(x) < 0$, $x \in \overline{\Omega}$ et $f(x,s)$ est croissante par rapport à s dans l'intervalle J.
Alors $u_* = u^*$ et le problème (1.1) *a une solution unique dans l'intervalle $[\underline{u}\ ,\overline{u}]$.*

Pour consulter les détails des démonsrations, voir [7].

1.4 Rappel sur les inégalités variationnelles

Dans cette section, nous rappelons la théorie des inégalités variationnelle introduite et développée par G. Stampacchia. Voir [10].

Définition 1.6 *Soit* $\boldsymbol{X}$ *un espace de Banach réflexif avec son dual* $\boldsymbol{X}'$*. On note par* $< .,. >$ *le produit dual entre* $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}'$.

Soit $\mathcal{K} \subset \boldsymbol{X}$ *un ensemble convexe borné et soit* A *un opérateur* $A : \mathcal{K} \to \boldsymbol{X}'$.

L'inégalité $< Au, \xi - u > \geq 0, \forall \xi \in \mathcal{K}$ *est dite inégalité variationnelle.*

Définition 1.7 *Un opérateur monotone* A *est dit strictement monotone si*

$$< Au - Av, u - v >= 0 \ \ implique \ \ que \ \ u = v.$$

Un cas particulier que nous utilisons dans ce mémoire est l'inégalité suivante

Soit $\mathcal{K} = \{v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \ \ v \geq \Psi \ \ dans \ \ \Omega\}$ *où* $\Psi \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ et Ω est un domaine borné.

Pour $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, on a l'inégalité

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\xi - u) dx \geq \int_\Omega f(\xi - u) dx, \ \ \forall \xi \in \mathcal{K}. \tag{1.4}$$

Soit T un opérateur qui vérifie

$$< Tu, v >= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \ \ avec \ \ u, \ \ v \ \ dans \ \ \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Donc, on a le résultat suivant

Théorème 1.9 *[10] Soit* $\mathcal{K} \subset \boldsymbol{X}$ *un ensemble convexe borné.*
Soit $A : \mathcal{K} \to \boldsymbol{X}'$ *est un opérateur monotone et continu dans un sous ensemble de dimension fini.*
Alors il existe $u \in \mathcal{K}$ *telle que*

$$< Tu, \ \ v - u > \geq 0 \ \ \forall v \in \mathcal{K}.$$

Si de plus, l'opérateur T *est strictement monotone alors la solution* u *de l'inégalité variationnelle (1.4) est unique.*

On a un autre résultat important

Théorème 1.10 *[10] Soit u solution de l'inégalité variationnelle* (1.4). *Alors, il existe une mesure de Radon positive μ, telle que*

$$Tu = f + \mu \ \ dans \ \ \Omega,$$

avec

$$supp \ \ \mu \subset \Gamma = \{x \in \Omega : u(x) = \Psi(x)\}.$$

En particulier,

$$Tu = f \ \ dans \ \ \Omega \backslash \Gamma.$$

Remarque 1.2 *Une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$ est une mesure finie sur tout compact de $\mathbb{B}(\mathbb{R}^d)$ où $\mathbb{B}(\mathbb{R}^d)$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$. ($d \geq 1$).*

Donc, tout mesure bornée sur $\mathbb{B}(\mathbb{R}^d)$, ainsi que la mesure de Lebesgue sont des mesures de Radon.

On a le résultat de régularité suivant

Théorème 1.11 *[10] Soit u solution de l'inégalité variationnelle* (1.4), *où la condition suivante*

$$\max(\Delta\Psi - f, 0) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$$

est vérifiée.

Alors, on a $u \in \mathbb{H}^{2,q}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{1,\delta}(\overline{\Omega})$, telle que $\delta = 1 - (\frac{N}{q})$ avec $N < q < \infty$.

Enfin, on a ce résultat

Théorème 1.12 *[10] Soit u est une solution de l'inégalité* (1.4). *On pose h une sur-solution de l'opérateur $T - f$, telle que*

$$h \geq \Psi \ \ dans \ \ \Omega, \ \ et \ \ h \geq 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega \ \ (dans \ \ \mathbb{H}^1(\Omega)).$$

Par conséquent, on a

$$u \leq h \ \ dans \ \ \Omega.$$

Pour plus de détails, voir [10].

Existence et unicité des solutions positives de l'équation logistique 2

2.1 Introduction

Ce chapitre est concacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions positives du problème logistique suivant

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = au - b(x)u^p & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 1)$ est un domaine borné régulier, $b(x) \geq 0$ est une fonction continue dans $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$, a et p sont des constantes réelles avec $p > 1$.

Rappellons que le problème (P), apparait dans beaucoup de modèles mathématiques issus de la biologie. Voir [4].

Nous remarquons aussi que le problème (P) est relié à certains problèmes de la géométrie Riemannienne. Par exemple, quand $N \geq 3$ et $P = \frac{N+2}{N-2}$, Kazdan et Warner ont étudié le problème (P). Voir [12].

Nous commençons par donner un lemme technique qui nous sera utile dans la suite.

Lemme 2.1 *Soit $\Psi \in L^\infty(\Omega)$. Nous notons par $\lambda_1(\Psi)$ la première valeur propre du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u + \Psi u = au & \textit{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous avons

1) *Si $\Psi_1 \leq \Psi_2$, alors $\lambda_1(\Psi_1) \leq \lambda_1(\Psi_2)$.*
2) *Si $\Psi_n \longrightarrow \Psi$ dans $L^\infty(\Omega)$, alors $\lambda_1(\Psi_n) \longrightarrow \lambda_1(\Psi)$.*

Démonstration. Pour démontrer 1), nous utilisons le théorème 1.5 qui assure l'existence d'une fonction $\varphi > 0$ avec $\varphi \in W^{2,q}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, vérifiant le problème

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + \Psi_1\varphi - \lambda_1(\Psi_1)\varphi = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sur} \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

D'autre part, sachant que $\Psi_1 \leq \Psi_2$, alors on a

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + \Psi_2\varphi - \lambda_1(\Psi_1)\varphi \geq 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sur} \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

D'aprés le théorème 1.5, on peut trouver une valeur propre principale positive λ, telle que

$$-\Delta\varphi + \Psi_2\varphi - \lambda_1(\Psi_1)\varphi - \lambda\varphi = 0. \tag{2.1}$$

Comme

$$-\Delta\varphi + \Psi_2\varphi = \lambda_1(\Psi_2)\varphi,$$

alors, en remplaçant dans (2.1), on obtient

$$\lambda_1(\Psi_2)\varphi - \lambda_1(\Psi_1)\varphi - \lambda\varphi = 0.$$

Donc, on a

$$\lambda = \lambda_1(\Psi_2) - \lambda_1(\Psi_1).$$

Ainsi

$$\lambda_1(\Psi_2) > \lambda_1(\Psi_1).$$

Remarquons que si $\Psi_1 = \Psi_2$ alors $\lambda_1(\Psi_1) = \lambda_1(\Psi_2)$.

Maintenant, pour montrer 2), nous notons par φ_n et φ deux fonctions propres normalisées correspondantes à $\lambda_1(\Psi_n)$ et $\lambda_1(\Psi)$ (respectivement), et qui vérifient

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n = -\Psi_n\varphi_n + \lambda_1(\Psi_n)\varphi_n & \text{dans} \ \ \Omega \\ \varphi_n = 0 & \text{sur} \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = -\Psi\varphi + \lambda_1(\Psi)\varphi & \text{dans} \quad \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sur} \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Puisque $\Psi_n \longrightarrow \Psi$ alors pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Psi - 1 \leq \Psi_n \leq \Psi + 1.$$

Le résultat démontré en 1), nous permet de conclure que

$$\lambda_1(\Psi - 1) \leq \lambda_1(\Psi_n) \leq \lambda_1(\Psi + 1).$$

Comme les fonctions propres sont dans $L^\infty(\Omega)$, alors $-\Psi_n\varphi_n + \lambda_1(\Psi_n)\varphi_n$ est borné dans $L^\infty(\Omega)$ independament de n.

Par conséquent, la suite $\{\varphi_n\}_n$ est bornée dans $\mathbb{W}^{2,q}(\Omega)$, pour tout $q > 1$, et en utilisant le théorème 1.2, la suite $\{\varphi_n\}_n$ est bornée aussi dans $\mathbb{C}^1(\Omega)$.
Par suite, on a $\varphi_n \longrightarrow \varphi_0$ dans $\mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$.

On en déduit aussi que

$$\lambda_1(\Psi_n) \longrightarrow \lambda^* \ \ quand \ \ n \to \infty.$$

Ainsi, on a

$$-\Psi_n\varphi_n + \lambda_1(\Psi_n)\varphi_n \longrightarrow -\Psi\varphi_0 + \lambda^*\varphi_0 \ \ dans \ \ \mathbb{L}^\infty(\Omega).$$

Alors, on peut écrire le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_0 = -\Psi\varphi_0 + \lambda^*\varphi_0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \varphi_0 = 0 & \text{sur} \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Le principe de maximum (voir théorème 1.3) nous permet de conclure que $\varphi_0 > 0$ dans Ω.
Par suite, λ^* représente la valeur propre principale de l'opérateur $\Delta - \Psi$, c'est à dire que $\lambda^* = \lambda_1(\Psi)$.

D'aprés l'unicité des fonctions propres principales, la fonction φ_0 doit être l'unique fonction propre positive normalisée φ.
Ainsi

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi.$$

Enfin, $\lambda_1(\Psi_n) \longrightarrow \lambda_1(\Psi)$. □

2.2 Existence des solutions

Dans cette section, nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution positive du problème (P).

Définition 2.1 *Une solution positive du problème* (P) *est présenté comme une fonction* $u \in \mathbb{W}^{2,q}(\Omega)$ *pour tout* $(q > 1)$ *vérifiant ce problème.*

Nous avons le résultat suivant

Théorème 2.1 *Si* $a \leq \lambda_1$*, alors le problème* (P) *n'a pas de solutions positives.*
Si $a > \lambda_1$*, alors le problème* (P) *admet une solution positive.*

Démonstration. On note par φ la fonction propre associée à λ_1, qui vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda_1\varphi & \text{dans } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On suppose que (P) admet une solution positive, qu'on note par u.
Multiplions le problème (P) par φ et on intègre sur Ω, alors on a

$$-\int_\Omega \Delta\varphi u dx = a\int_\Omega \varphi u dx - \int_\Omega b(x)u^p\varphi dx,$$

donc, on a

$$\lambda_1\int_\Omega \varphi u dx = a\int_\Omega \varphi u dx - \int_\Omega b(x)u^p\varphi dx.$$

Anisi,

$$a\int_\Omega \varphi u dx - \int_\Omega b(x)u^p\varphi dx < a\int_\Omega \varphi u dx.$$

On déduit que $a > \lambda_1$.
Ainsi pour $a \leq \lambda_1$ on n'a pas de solution positive.

Maintenant, supposons que $a > \lambda_1$.

Alors on va construire une sous-solution notée v et une sur-solution notée w.

Remarquons que pour un $\epsilon > 0$, la fonction $v := \epsilon\varphi$ est solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta(\epsilon\varphi) = \lambda_1(\epsilon\varphi) := f_1(\epsilon\varphi) & \text{dans } \Omega \\ \epsilon\varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En posant $f(u) = au - b(x)u^p$, $x \in \Omega$.
Alors on remarque que pour un $\epsilon > 0$,

$$f_1(\epsilon\varphi) < f(\epsilon\varphi).$$

Ainsi, v est une sous-solution du problème (P).

D'autre part, on a

$$-\Delta u = au - b(x)u^p \leq au - \min_{\overline{\Omega}} b(x)u^p,$$

alors,

$$\leq [a - \min_{\overline{\Omega}} b(x)u^{p-1}]u = f_2(u).$$

Ainsi, si on pose $w = M$ avec $M > 0$, alors sous la condition

$$M^{p-1}\min_{x\in\overline{\Omega}} b(x) - a < 0,$$

on peut conclure que w est une sur-solution.

Par conséquent, d'aprés le théorème 1.6 (du préliminaires) et les théorèmes de régularité des espaces $\mathbb{L}^p$, on conclut que $u \in \mathbb{W}^{2,q}(\Omega)$, $(\forall q > 1)$.

D'o*ù* $u \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$. □

2.3 Unicité des solutions

Cette partie concerne l'unicité des solutions positives démontrées précédement, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.2 *Si $a > \lambda_1$, alors le problème* (P) *admet une solution positive unique .*

Démonstration. Supposons que (P) a une solution positive u, on peut écrire (P) comme suit

$$\begin{cases} \Delta u - [b(x)u^{p-1}]u + au = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Par conséquent, on a $a = \lambda_1(b(x)u^{p-1})$ et d'aprés la partie *1*) du Lemme *2.1*, on déduit que $a > \lambda_1(0) = \lambda_1$.

Par absurde, supposons qu'il existe deux solutions u_1 et u_2 de (P).
Soit u_* la solution minimale (son existence est assuré d'aprés le théorème 1.7) du problème (P), vérifiant

$$u_* \leq u_1 \ \ et \ \ u_* \leq u_2.$$

D'aprés le lemme 1.1, on conclut que

$$\lambda_1(bu_*^{p-1}) \leq \lambda_1(bu_1^{p-1}) \ \ et \ \ \lambda_1(bu_*^{p-1}) \leq \lambda_1(bu_2^{p-1}).$$

D'autre part, on a $\lambda_1(bu_*^{p-1}) = \lambda_1(bu_i^{p-1}) = a$, avec $i = 1, 2$ et ceci est une contradiction.

D'o*ù*, l'unicité de la solution positive u. □

Remarque 2.1 *Il y a une autre méthode pour démontrer le théorème* (2.2) *en utilisant un raisonnemen par absurde.*

Supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions positives différentes du problème (P) *(avec $a > \lambda_1$).*
Par le lemme de Hopf sur $\partial\Omega$, on a

$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} < 0$ *et* $\frac{\partial u_i}{\partial \nu} < 0$ *où ν présente la normale extèrieure de $\partial\Omega$ et $i = 1, 2$.*

Sachant que u_* *est la solution minimale, elle vérifie*

$$u_* \leq u_i, \;\; avec \;\; (i = 1, 2).$$

D'autre part, on sait que u_1, u_2 *et* u_* *vérifient les équations suivantes*

$$-\Delta u_i = a u_i - b(x) u_i^p, \; i = 1, 2. \tag{2.5}$$

Et

$$-\Delta u_* = a u_* - b(x) u_*^p. \tag{2.6}$$

En multipliant l'équation (2.6) *par* u_i, *et l'équation* (2.5) *par* u_* *et integrant sur* Ω. *Alors la différence entre les deux implique que*

$$\int_\Omega b(x) u_* u_i [u_*^{p-1} - u_i^{p-1}] dx = 0. \tag{2.7}$$

Comme $u_* \leq u_i$ $(i = 1, 2)$ *et l'équation* (2.7) *est valable si* $u_* = u_i$ $(i = 1, 2)$ *qui est une contradiction (car* u_1 *et* u_2 *sont différents par hypothèse).*

Ainsi la solution positive u est unique.

Comportement asymptotique des solutions positives de l'équation logistique 3

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier le comportement asymptotique de la solution positive de l'équation logistique. Nous supposons que Ω est un domaine borné régulier. Alors, on est concerné par le problème suivant

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = au - b(x)u^p & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}
$$

On rappelle la dépendance continue de la solution du problème (P) par rapport à la constante a.
On note par u_a la solution du problème (P). Alors, on a

$$
\begin{array}{cccc} u_a & : & (\lambda_1, \infty) & \rightarrow & \mathbb{C}(\overline{\Omega}) \\ & & a & \mapsto & u_a \end{array}
$$

La fonction u_a est une fonction continue strictement croissante, telle que

$$
\lim_{a \to \lambda_1^+} u_a = 0, \quad \textit{dans } \overline{\Omega},
$$

et

$$
\lim_{a \to \infty} u_a = \infty, \quad \textit{dans tout compact de } \Omega.
$$

Pour plus de détails, voir [4] et [8].

Maintenant, on veut étudier dans ce chapitre la dépendance de la solution u par rapport à l'exposant p. $(p > 1)$

Pour cela, on note par $\lambda_1(\Psi)$ la première valeur propre du problème suivant

$$
\begin{cases} -\Delta u + \Psi u = au & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}
$$

Remarquons que $\lambda_1(0) = \lambda_1$.

On définit par $\lambda(\alpha) := \lambda_1(\alpha b)$.
Alors la fonction $\lambda(\alpha)$ est strictement croissante avec $\lambda(\alpha) \longrightarrow \infty$ *quand* $\alpha \to \infty$.

Ainsi, pour $a > \lambda_1$ il y a un unique $\alpha > 0$ telle que

$$a = \lambda_1(\alpha b). \tag{3.1}$$

D'autre part, on note par U_α la fonction propre normalisée positive, qui vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta U_\alpha + \alpha b U_\alpha = a U_\alpha & \text{dans } \Omega \\ \\ U_\alpha = 1 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

3.2 Comportement asymptotique de la solution quand p tend vers 1^+

Notons par u_p la solution positive du problème (P). Alors nous allons étudier le comportement de u_p sous les trois conditions : $a < \lambda_1(b)$, $a > \lambda_1(b)$ et $a = \lambda_1(b)$.

Théorème 3.1 *Si $a < \lambda_1(b)$, alors u_p converge uniformement vers 0 dans Ω quand $p \longrightarrow 1^+$. De plus, on a*

$$\begin{cases} (p-1)\ln \|u_p\|_\infty \longrightarrow \ln \alpha & \textit{dans } \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}), \\ \\ \textit{et} \\ \frac{u_p}{\|u_p\|_\infty} \longrightarrow U_\alpha & \textit{dans } \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}), \end{cases} \tag{3.3}$$

avec α et U_α données par (3.1) *et* (3.2) *(respectivement).*

Démonstration. Soit $M_p = \|u_p\|_\infty = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u_p(x)$, ce maximum est atteint dans Ω en un point noté x_p.

D'aprés le principe du maximum voir (le théorème 1.3), on a

$$-\Delta M_p = aM_p - b(x)M_p^p \geq 0,$$

ceci nous donne la condition suivante

$$M_p^{p-1} \leq \frac{a}{\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} b}. \tag{3.4}$$

Nous allons étudier le comportement quand $p \longrightarrow 1^+$, pour cela, on choisit une suite $p_n \longrightarrow 1^+$. On utilise pour la suite les notations suivantes

$$u_n = u_{p_n} \ \ , \ \ M_n = M_{p_n} \ \ , \ \ \alpha_n = M_{p_n}^{p_n - 1} \ \ et \ \ w_n = \frac{u_{p_n}}{M_{p_n}}.$$

Remarquons que u_{p_n} vérifie

$$-\Delta u_{p_n} = a u_{p_n} - b u_{p_n}^{p_n}.$$

On divise par $M_{p_n} > 0$, alors on obtient

$$-\Delta \frac{u_{p_n}}{M_{p_n}} = a \frac{u_{p_n}}{M_{p_n}} - M_{p_n}^{p_n - 1} b \frac{u_{p_n}^{p_n}}{M_{p_n}^{p_n}}.$$

Ainsi

$$-\Delta w_n = a w_n - M_{p_n}^{p_n - 1} b w_n^{p_n}.$$

D'aprés la condition (3.4), on déduit que $-\Delta w_n$ est borné dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$.
Le théorème 1.2 permet d'assurer que la suite $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée dans $\mathbb{W}^{2,q}(\Omega)$ $(\forall q > 1)$.

Donc $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite qu'on note par w, avec $w \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$.

De la même manière, on a

$$\alpha_n = M_{p_n}^{p-1} \longrightarrow \alpha, \ quand \ p_n \to 1^+.$$

Ceci implique que w est solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta w = (a - \alpha b) w & \text{dans } \ \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \ \partial\Omega \\ \|w\|_\infty = 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Alors $a = \lambda_1(\alpha b)$, où α donné par (3.1) et $w_n \longrightarrow U_\alpha$ donné dans (3.2).
Puisque $a < \lambda_1(b)$, alors $\lambda(\alpha b) < \lambda_1(b)$ et le lemme 2.1 implique que

$$\alpha b < b,$$

donc, on a

$$0 < \alpha < 1.$$

Maintenant, on sait que $\lim_{p\to 1^+} M_p^{p-1} = \alpha$, alors on a

$$\lim_{p\to 1^+} (p-1) \ln M_p = \ln \alpha. \tag{3.6}$$

Par conséquent, $M_p \longrightarrow 0$ *quand* $p \to 1^+$, alors

$$u_p \underset{p \to 1^+}{\longrightarrow} 0.$$

□

Passons à un autre résultat quand $p \to 1^+$.

Théorème 3.2 *Si $a > \lambda_1(b)$, alors $u_p \longrightarrow \infty$ uniformement dans tout sous-ensemble compact dans Ω, quand $p \to 1^+$. Le résultat (3.3) aussi vérifié.*

Démonstration. Sachant que $a > \lambda_1(b)$, et $a = \lambda_1(\alpha b)$, alors on a

$$\lambda_1(\alpha b) > \lambda_1(b).$$

D'aprés le lemme 2.1, on obtient

$$\alpha b > b,$$

ainsi

$$\alpha > 1 \;\; (car \;\; b \;\; est \;\; strictement \;\; positive).$$

Et d'aprés (3.6), on a $M_p \underset{p \to 1^+}{\longrightarrow} \infty$.
Il reste à démontrer que même $u_p \underset{p \to 1^+}{\longrightarrow} \infty$, pour cela on pose $V = \beta U_\alpha$ avec β un nombre trés grand quelconque et U_α est une solution du problème (3.2).

Vérifions que V est une sous-solution du problème (P).
En effet, on remarque que V vérifie le problème suivant

$$-\Delta V - aV = -\alpha b V,$$

alors, on déduit que

$$-\Delta V - aV + bV^p = b(V^p - \alpha V). \tag{3.7}$$

Pour connaitre le signe du second membre de (3.7), on traite deux cas.
Premièrement, on considère les $x \in \Omega$ qui vérifiant $V(x) \leq 1$, donc on a

$$V^{p-1}(x) \leq 1 \;\; alors \;\; V^p(x) \leq V(x).$$

Ceci implique que

$$-V^p(x) \geq -V(x).$$

On ajoute le terme αV, ainsi

$$\alpha V - V^p \geq (\alpha - 1)V > 0.$$

D'autre part, pour les $x \in \Omega$ vérifiant $V(x) \geq 1$, sachant que $V^p \underset{p \to 1^+}{\longrightarrow} V$, alors

$$\alpha V - V \geq \alpha - 1 > 0.$$

Donc, pour tout $p \in (1, 1+\epsilon)$, où $\epsilon = \epsilon(\beta)$, la fonction V est une sous-solution du problème (P), c'est à dire vérifie

$$u_p > \beta U_\alpha.$$

Comme β est trés grand, alors on a

$$u_p \underset{p \to 1^+}{\longrightarrow} \infty,$$

ce qui termine la démonstation. □

Le dernier résultat concernant le comportement asymptotique de la solution positive u_p quand $p \to 1^+$ est le théorème suivant.

Théorème 3.3 *Si $a = \lambda_1(b)$, alors $u_p \underset{p \to 1^+}{\longrightarrow} cU_1$ dans $\mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$ avec U_1 est une solution du problème suivant*

$$(3.8) \qquad \begin{cases} -\Delta U_1 + bU_1 = aU_1 & \textit{dans } \ \Omega \\ U_1 = 0 & \textit{sur } \ \partial\Omega \\ \|U_1\|_\infty = 1, \end{cases}$$

où $c = \exp\left(\frac{\int_\Omega bU_1^2 \ln U_1 dx}{\int_\Omega bU_1^2 dx}\right)$.

Démonstration. Sachant que $a = \lambda_1(b)$ alors $\alpha = 1$.
On pose $w_p = \frac{u_p}{M_p}$, donc on a

$$(3.9) \qquad \begin{cases} -\Delta w_p = a w_p - M_p^{p-1} b w_p^p & \text{dans } \Omega \\ w_p = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On multiplie l'équation (3.9) par U_1, on obtient

$$-\Delta w_p U_1 = a w_p U_1 - M_p^{p-1} b w_p^p U_1.$$

On intègre par parties sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta U_1 w_p dx = \int_\Omega (a w_p - M_p^{p-1} b w_p^p) U_1 dx.$$

Comme $-\Delta U_1 = -bU_1 + aU_1$, alors $-\Delta U_1 = (a-b)U_1$.

Par conséquent, on a

$$\int_\Omega (a-b) U_1 w_p dx = \int_\Omega (a w_p - M_p^{p-1} b w_p^p) U_1 dx,$$

qui implique que

$$\int_\Omega b(w_p - M_p^{p-1} w_p^p) U_1 dx = 0.$$

Maintenant, on va ajouter et supprimer le terme $bw_p^p U_1$, et divisons sur $p-1$, alors on a

$$\int_\Omega \frac{M^{p-1}-1}{p-1} b w_p^p U_1 dx = -\int_\Omega \frac{1-w_p^{p-1}}{p-1} b w_p U_1 dx. \tag{3.10}$$

Sachant que $w_p \underset{p\to 1^+}{\longrightarrow} U_1$ dans $\mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$, appliquons le lemme de Hopf pour déduire que $\frac{\partial U_1}{\partial \nu} < 0$ dans $\partial\Omega$ (c'est à dire $\frac{\partial U_1}{\partial \nu} \neq 0$), ce qui nous permet de dire que

$$\frac{w_p}{U_1} \underset{p\to 1^+}{\longrightarrow} 1 \ \ uniformement \ \ dans \ \ \overline{\Omega},$$

ainsi, on a

$$\| \ln w_p - \ln U_1 \|_\infty = o(1).$$

Quand $p \to 1^+$, on a

$$\left| \frac{1-w^{p-1}}{p-1} \right| = \left| \frac{1-\exp((p-1)(\ln U_1 + o(1)))}{p-1} \right| \to |\ln U_1|\,,$$

dans $\overline{\Omega}$.

Ainsi,

$$\left| \int_\Omega \frac{1-w^{p-1}}{p-1} b w_p U_1 dx \right| \underset{p\to 1^+}{\longrightarrow} \left| \int_\Omega b U_1^2 \ln U_1 \right|, \ \ (\text{car} \ \ w_p \longrightarrow U_1).$$

Donc, d'aprés (3.10), on a

$$\lim_{p\to 1^+} \int_\Omega \frac{M^{p-1}-1}{p-1} b w_p^p U_1 dx = \int_\Omega b U_1^2 \ln U_1 dx.$$

Par conséquent

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{M_n^{p-1}-1}{p-1} = \frac{\int_\Omega b U_1^2 \ln U_1 dx}{\int_\Omega b U_1^2 dx}. \tag{3.11}$$

On pose

$$c = \lim_{p\to 1^+} M_p, \ \ alors \ \ \ln c = \frac{\int_\Omega b U_1^2 \ln U_1 dx}{\int_\Omega b U_1^2 dx},$$

et posons

$M_* = \liminf_{p \to 1^+} M_p$ et $M^* = \limsup_{p \to 1^+} M_p$.

Pour montrer que $M_* > 0$ et $M^* < \infty$, on utilise un raisonnement par absurde. Supposons que

$$M_n := M_{p_n} \longrightarrow 0 \;\; et \;\; M_n := M_{p_n} \longrightarrow \infty.$$

Alors, pour un $\epsilon > 0$, et un n assez grand. On peut dire que

$$\frac{M_n^{p_n - 1} - 1}{p-1} \leq \frac{\epsilon^{p-1} - 1}{p-1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ln \epsilon.$$

De même, pour n assez grand et $M > 0$, on a

$$\frac{M_n^{p_n - 1} - 1}{p-1} \geq \frac{\epsilon^{p-1} - 1}{p-1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ln M.$$

Ceci est une contradiction avec (3.11).

On a alors $0 < M_* \leq M^* < \infty$.

Donc, d'aprés les propriétés de la limite supérieure, on peut déduire que

$$\ln(M_* + \epsilon) \geq \frac{\int_\Omega bU_1^2 \ln U_1}{\int_\Omega bU_1^2 dx},$$

et

$$\ln(M_* - \epsilon) \leq \frac{\int_\Omega bU_1^2 \ln U_1}{\int_\Omega bU_1^2 dx}.$$

Par conséquent,

$$M_* = M^* = c = \exp\left(\frac{\int_\Omega bU_1^2 \ln U_1}{\int_\Omega bU_1^2 dx}\right).$$

Comme $w_p \longrightarrow U_1$ et $w_p = \frac{u_p}{M_p}$

Alors

$$u_p \underset{n \to 1+}{\longrightarrow} cU_1.$$

□

3.3 Comportement asymptotique de la solution quand p tend vers l'infini

Nous supposons dans cette section que les mèmes hypothèses du cas $p \to 1+$, (c'est à dire on a $b(x) > 0$ dans $\overline{\Omega}$, et $a > \lambda_1$) sont vérifiées.

Nous définissons un nouveau problème dit problème à frontière libre donné par

$$
(3.12) \qquad \begin{cases} -\Delta u = a\chi_{\{u<1\}}u & \text{dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}
$$

où a est une constante, et χ est la fonction caractéristique suivante

$$
\chi_D = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D \\ \\ 0 & \text{si } x \notin D. \end{cases}
$$

Maintenant, on donne le théorème qui concerne le comportement asymptotique de la solution du problème (P), quand $p \to \infty$.

Théorème 3.4 *Soit u_p la solution du problème* (P), *alors $u_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$ dans $\mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$, où v est l'unique solution du problème* (3.12).

Démonstration. On suit les mêmes étapes mentionnés dans la démonstration du théorème 3.1, on a

$$
M_p = \|u_p\|_\infty = \max_{x\in\overline{\Omega}} u_p(x),
$$

et

$$
(3.13) \qquad M_p^{p-1} \leq \frac{a}{\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} b}.
$$

Soit $\{p_n\}$ une suite qui tend vers l'infini, quand $n \to \infty$, et on utilise les mêmes notations précédentes, c'est à dire

$$
u_n = u_{p_n} \ , \ \ M_n = M_{p_n} \ , \ \ \alpha_n = M_{p_n}^{p_n-1} \ \ et \ \ w_n = \frac{u_{p_n}}{M_{p_n}},
$$

et que w_n satisfait le problème suivant

$$
(3.14) \qquad \begin{cases} -\Delta w_n = aw_n - \alpha_n b w_n^{p_n} & \text{dans } \Omega \\ \\ w_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}
$$

Par conséquent, $aw_n - \alpha_n b w_n^{p_n}$ est borné dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ independament de n, alors la suite $\{w_n\}$ est aussi borné dans $\mathbb{W}^{2,q}(\Omega)$, (pour tout $q > 1$).

Et notons que les théorèmes des injections de Sobolev nous permet de conclure que la suite $\{w_n\}$ est compact dans $\mathbb{C}^1(\Omega)$, donc $w_n \longrightarrow w$ dans $\mathbb{C}^1(\Omega)$.

On remarque qu'on peut écrire l'équation (3.14) avec une autre manière, c'est à dire comme suit

$$- \Delta w_n = a w_n - b u_n^{p_n - 1} w_n \quad dans \quad \Omega. \tag{3.15}$$

Et d'aprés l'inégalité (3.13), on peut déduire que

$$u_n^{p_n-1} \leq \frac{a}{\min\limits_{x \in \overline{\Omega}} b}. \tag{3.16}$$

Par suite, on peut trouver ξ telle que $b u_n^{p_n-1} \longrightarrow \xi$ faiblement dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (d'aprés le théorème 1.1), vérifiant

$$0 \leq \xi \leq \|b\|_\infty \frac{a}{\min\limits_{x \in \overline{\Omega}} b}.$$

Si on passe à la limite dans le problème (3.15), on obtient le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta w = (a - \xi) w & \text{dans } \Omega \\ \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

Notons que $(a - \xi) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$.

D'aprés l'inégalité de Harnack, on a $w(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$.

D'autre part, on a

$$M_n \leq \left(\frac{a}{\min\limits_{x \in \overline{\Omega}} b} \right)^{\frac{1}{p_n - 1}} \longrightarrow 1.$$

Montrons que $M_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$. En utilisons le raisonnement par absurde, posons $\liminf\limits_{n \to \infty} M_n \leq 1$ et que $\limsup\limits_{n \to \infty} M_n < 1$.

Soit $\epsilon > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$M_n \leq 1 - \epsilon.$$

On remplace dans (3.16), on obtient

$$u_n^{p_n - 1} \leq (1 - \epsilon)^{p_n - 1}.$$

Donc $u_n^{p_n - 1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi $\xi = 0$.

Comme $\xi = 0$ alors le problème (3.15) devient comme suit

$$\begin{cases} -\Delta w = a w & \text{dans } \Omega \\ \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.18}$$

qui nous implique que $a = \lambda_1$, mais c'est une contradiction avec notre hypothèse ($a > \lambda_1$).
Par conséquent, on a

$$M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

alors

$$u_n \longrightarrow w \;\; dans \;\; \mathbb{C}^1(\Omega).$$

D'autre part, soit l'ensemble $\Omega' := \{x \in \Omega, \;\; w(x) < 1\}$.

Pour tout $x \in \Omega'$ et pour tout n assez grand, on peut trouver $\delta > 0$ vérifiant

$$u_n(x) < 1 - \delta,$$

qui implique que

$$(u_n(x))^{p_n - 1} < (1-\delta)^{p_n - 1}.$$

Donc

$$(u_n(x))^{p_n - 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, on déduit que $\xi = 0 \;\; dans \;\; \Omega'$.

Maintenant, pour l'autre partie de l'espace, c'est à dire dans $\Omega \backslash \Omega'$ on a $w = 1$, qui implique que $\Delta w = 0$, alors

$$a = \xi \;\; dans \;\; \Omega \backslash \Omega'.$$

Par suite, on peut dire que w satisfait le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta w = a\chi_{\{w<1\}} w & \text{dans } \Omega \\ \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.19}$$

Alors, (3.19) admet une solution unique faible dans $\mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$, si $a \geq \lambda_1$. Nous notons cette solution par v.

Enfin, $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$ c'est le comportement asymptotique de la solution positive

u_p quand $p \to \infty$. □

Existence des solutions d'un problème à frontière libre

4

4.1 Introduction

Rappelons que la solution u_p du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = au - b(x)u^P & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

est unique.

Quand $p \to \infty$, on a montré que $u_p \longrightarrow v$ où v est solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = a\chi_{\{u<1\}}u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où Ω est un domaine borné régulier dans $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 2$, a est une constante et χ est la fonction caractéristique, telle que

$$\chi_D = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

Le problème (4.1) s'appelle problème à frontière libre.

4.2 Problème à frontière libre

On va rappeler tout d'abord un problème classique d'équations aux dérivées partielles. Il s'agit de chercher une fonction u vérifiant le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = h & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

où Ω est un ouvert borné régulier (donné) de $\mathbb{R}^N$, f et h sont deux fonctions données.

Un bon choix des fonctions f et h dans des espaces convenables implique l'existence d'une solution unique u vérifiant (4.2).

Donc, pour un problème à frontière libre, il peut être défini comme étant un problème des équations aux dérivées partielles dont les inconnues sont

* Une fonction, solution de l'équation qui est bien définie sur l'espace considéré.

* Une frontière d'une partie du domaine dans laquelle la fonction inconnue vérifie une condition supplémentaire. On appelle cette frontière inconnue par "frontière libre".

Ainsi, un problème géneral de frontière libre peut être formulé de la manière suivante.

Étant donnée deux fonctions h et h_0, on cherche à résoudre le problème suivant

$$(4.3) \qquad \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = h_0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u = h & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$ avec Γ_0 est une frontière donnée. On doit trouver donc la fonction u définie sur un domaine Ω, et aussi la frontière libre Γ.

En général, il n'y a pas de résultat d'existence, d'unicité et de régularité des solutions de type (Γ, u).

Pour plus de détails, consulter [10] et [16].

4.3 Existence et unicité de la solution faible

Définition 4.1 *On dit qu'une solution faible du problème* (4.1) *est une fonction u telle que $u \in \mathbb{W}^{2,q}(\Omega) \cap \mathbb{L}^{\infty}(\Omega)$ vérifiant le problème* (4.1).

Le résultat suivant assure l'existence et l'unicité de solution du problème (4.1).

Théorème 4.1
1. *Si $a < \lambda_1$, alors le problème* (4.1) *n'a pas de solution.*
2. *Si $a \geq \lambda_1$, alors le problème* (4.1) *admet une solution unique.*

Démonstration. Commençons par 1), on procède par absurde, pour cela supposons que le problème (4.1) a une solution qu'on note par u et que $a < \lambda_1$.

Sachant que $a\chi_{\{u<1\}}$ est dans $\mathbb{L}^{\infty}(\Omega)$, donc d'aprés les théorèmes de régularité elliptique on a $u \in \mathbb{W}^{2,q}(\Omega) \cap \mathbb{L}^{\infty}(\Omega)$, pour tout $(q > 1)$.

L'inégalité de Harnack nous permet de déduire que $u > 0$.
Soit $\varphi > 0$ la fonction propre associée à λ_1 qui vérifie le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\varphi = \lambda_1\varphi & \text{dans } \Omega \\ \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Multiplions l'équation dans le problème (4.4) par u et faisons une intégration par partie sur Ω, on obtient

$$-\int_{\Omega} \Delta\varphi u dx = \int_{\Omega} \lambda_1 \varphi u dx,$$

implique que,

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi\nabla u dx = \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi u dx,$$

alors,

$$-\int_{\Omega} \Delta u\varphi dx = \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi u dx.$$

On a $\lambda_1 \int_{\Omega} \varphi u dx > 0$ et aussi que

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)\varphi dx = \int_{\Omega} (a\chi_{\{u<1\}} u)\varphi dx,$$

par majoration, on obtient

$$\int_{\Omega} (a\chi_{\{u<1\}} u)\varphi dx \leq a \int_{\Omega} \varphi u dx.$$

Par conséquent,

$$\lambda_1 \int_{\Omega} \varphi u dx \leq a \int_{\Omega} \varphi u dx,$$

donc, $\lambda_1 \leq a$. Le problème (4.1) n'a pas de solution si $\lambda_1 > a$.

Maintenant, on va passer au cas $\lambda_1 = a$. Ici, on a $\chi_{\{u<1\}} = 1$.

En effet,

$$a \int_{\Omega} \varphi u dx = a \int_{\Omega} \chi_{\{u<1\}} \varphi u,$$

d'où,

$$\chi_{\{u<1\}} = 1.$$

D'autre part, on a u solution du problème (4.1) et comme $\chi_{\{u<1\}} = 1$, donc u vérifie le problème suivant

$$
\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u = au & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{4.5}
$$

qui présente un problème à valeur propre, telle que u est la fonction propre normalisée unique associée à λ_1.
Ainsi, u est une solution unique du problème (4.1).

D'autre part, en appliquant le théorème 6.19 de [13] pour φ une fonction propre normalisée unique positive associée à λ_1, on déduit que $\nabla\varphi \neq 0$ dans un ensemble de mesure positive, qui implique que

$$\chi_{\{u<1\}} = 1 \quad \textit{presque partout dans} \quad \Omega.$$

En effet, si $\nabla\varphi = 0$ dans un ensemble de mesure positive, alors $\varphi = 0$ presque partout dans un ensemble de mesure positive, (contradiction !).

Il nous reste le cas où $a > \lambda_1$, pour cela on va utiliser la technique des inégalités variationnelles (pour un bref panorama, nous invitons le lecteur à voir section 1.5 du chapitre préliminaires).

On pose

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),\ u \leq 1 \quad \textit{presque partout dans} \quad \Omega\}.$$

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, on définit l'inégalité variationnelle suivante

$$
\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)dx \geq \int_\Omega f(v-u)dx, \quad \forall v \in \mathcal{A}, \tag{4.6}
$$

qui a une solution unique $u \in \mathcal{A}$, d'aprés le théorème 1.8.

On définit encore l'opérateur solution suivant,

$$u = T(f),$$

avec

$$
\begin{array}{rcccl} T_a & : & \mathbb{L}^2(\Omega) & \to & \mathbb{L}^2(\Omega) \\ & & f & \mapsto & T_a(f) = T(af). \end{array}
$$

Propriété 4.1 *L'opérateur solution T vérifie les propiétés suivantes*

i) $T : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ est complètement continue.

ii) Si $f \in \mathbb{L}^q(\Omega)$*, alors* $T(f) \in \mathbb{W}^{2,q}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{1,\nu}(\Omega)$*, avec* $\nu = \frac{q-N}{q}$ *et* $q > N$.

iii) Si $f \geq 0$ *dans* Ω*, alors on a* $T(f) \geq 0$.

iv) Si $g_1 \leq g_2$ *dans* Ω*, alors* $T(g_1) \leq T(g_2)$ *dans* Ω.

v) Si $f \geq 0$ *et* $(-\Delta)^{-1}f \leq 1$ *dans* Ω*, alors on a* $T(f) = (-\Delta)^{-1}f$.

Démonstration. On commence par *i*), pour cela il suffit de montrer que l'opérateur T est borné, c'est à dire vérifie l'inégalité suivante

$$\|T(f_1) - T(f_2)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq C\|f_1 - f_2\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{4.7}$$

Soient $u_1 = T(f_1)$, $u_2 = T(f_2)$.
Appliquons (4.6) pour u_1 et u_2, on obtient

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla(u_2 - u_1)dx \geq \int_\Omega f_1(u_2 - u_1)dx \\ \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2)dx \geq \int_\Omega f_2(u_1 - u_2)dx. \end{cases} \tag{4.8}$$

On multiplie les deux inégalités dans (4.8) par (-1), on trouve

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla(u_1 - u_2)dx \leq \int_\Omega f_1(u_1 - u_2)dx \\ -\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2)dx \leq -\int_\Omega f_2(u_1 - u_2)dx. \end{cases} \tag{4.9}$$

Maintenant, on va additionner ces deux inégalités, alors on a

$$\int_\Omega (\nabla u_1 - \nabla u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2)dx \leq \int_\Omega (f_1 - f_2)(u_1 - u_2)dx.$$

Donc

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx \leq \int_\Omega (f_1 - f_2)(u_1 - u_2)dx.$$

Par conséquent

$$\|u_1 - u_2\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq \|f_1 - f_2\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

D'aprés l'inégalité de Poincaré (voir corollaire 1.1), on déduit qu'il existe $C > 0$, telle que

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}.$$

Alors, on a

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq C\|f_1 - f_2\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Ainsi,
$$\|T(u_1) - T(u_2)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\|f_1 - f_2\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

D'o*ù* la continuité de T dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Passons à *ii*), remarquons que u est une solution de l'inégalité (4.6) si et seulement si $w_1 = -u$ solution de l'inégalité suivante

(4.10)
$$\int_\Omega \nabla w_1 \cdot \nabla(v - w_1)dx \geq \int_\Omega (-f)(v - w_1)dx, \forall v \in \mathcal{K}' = \{v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) : v \geq -1\}.$$

On écrit (4.6) pour $(-u)$, on obtient

$$\int_\Omega \nabla(-u) \cdot \nabla(v - (-u))dx \geq \int_\Omega f(v - (-u))dx, \forall v \in \mathcal{A}, \tag{4.11}$$

qui implique l'inégalité (4.10). Ainsi $w_1 = -u$ solution de (4.10).

D'aprés le résultat de régularité elliptique (le théorème 1.10), on conclut que la solution $w_1 \in \mathbb{W}^{2,q}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{1,\nu}(\overline{\Omega})$, avec $f \in \mathbb{L}^q(\Omega)$ (pout tout $q > N$) et $\nu = 1 - (\frac{N}{q})$.

La propriété iii) est un cas particulier de iv), en effet $T(f_1) = 0$ si $f_1 = 0$.

On pose $u_i = -T(g_i)$, avec $i = 1,\ 2$, d'aprés la démonstration de ii), on déduit que u_i sont des solutions de (4.6), prenons $f = g_i,\ \ pour\ \ i = 1,\ 2$.

Maintenant, soit $\delta \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ telle que $\delta \geq 0$.

L'inégalité (4.11) s'écrit sous la forme suivante (on prend $w_1 = u_1$, $f = g_1$ et $v = u_1 + \delta$), on a

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla(\delta)dx \geq \int_\Omega (-g_1)\delta dx \geq \int_\Omega (-g_2)\delta dx.$$

Alors d'aprés le théorème 1.6, u_1 est une sur-solution de l'opérateur $-\Delta + g_2$ et le théorème 1.11 implique que $u_1 \leq u_2$.

Ainsi $T(g_1) \leq T(g_2)$.

D'aprés la définition de l'opérateur T on déduit v).

$\square$

Preuve du théorème 4.1
La démonstration du théorème 4.1 est basée sur les trois lemmes suivants

Lemme 4.1 *u est une solution unique de* (4.1) *si et seulement si u est un point fixe positive de T_a dans $\mathcal{A}$.*

Démonstration. Pour l'implication directe, comme $u \in \mathcal{A}$ il suffit de vérifier l'inégalité suivante

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)dx \geq \int_\Omega au(v-u)dx, \forall v \in \mathcal{A}.$$

Rappelons que si u solution faible du problème (4.1), donc pour tout $\varphi \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, on a

$$-\Delta u\varphi = a\chi_{\{u<1\}}u\varphi.$$

On intègre sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta u\varphi dx = a\int_\Omega \chi_{\{u<1\}}u\varphi.$$

Encore, par une intégration par parties, on a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi dx = a\int_\Omega \chi_{\{u<1\}}u\varphi.$$

Si on prend $\varphi = v - u$, donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)dx &= a\int_\Omega u(v-u)dx + a\int_\Omega (\chi_{\{u<1\}} - 1)u(v-u)dx,\\ &= a\int_\Omega u(v-u)dx + a\int_{\{u=1\}}(1-v)udx.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)dx \geq \int_\Omega au(v-u)dx.$$

Ainsi, u présente un point fixe positive de T_a dans $\mathcal{A}$.

Pour l'autre implication, on suppose que u est un point fixe pour T_a dans $\mathcal{A}$.

Remarquons que $0 \leq u \leq 1$ et que $au \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$, appliquons le théorème 1.9 à $\omega = -u$, nous avons

$$-\Delta\omega = -au + \mu, \quad dans \;\; \Omega,$$

avec μ est la mesure de Radon, telle que

$$\sup(\mu) \subset \{\omega = -1\} = \{u = 1\}.$$

Ainsi

$$-\Delta u = au - \mu, \quad dans \;\; \Omega, \tag{4.12}$$

d'aprés la régularité de u, on a $u \in \mathbb{L}^q(\Omega)$, pour tout $q > 1$.

Si $\|u\|_{\mathbb{L}^\infty} < 1$, alors μ est de support vide et le problème (4.12) devient

$$-\Delta u = au,$$

qui implique une contradiction.

Donc $\{u = 1\}$ a une mesure positive et donc par l'application du théorème 6.19 de [13], on a

$$-\Delta u = 0 \quad p.p \quad dans \quad \Omega.$$

Par conséquent,

$$\mu = au - \Delta u = a \quad p.p \quad dans \quad \{u = 1\}.$$

Si $u < 1$ et sachant que $\mu = 0$, alors

$$\mu = a\chi_{\{u<1\}},$$

et on a

$$\begin{aligned} -\Delta u &= au - a\chi_{\{u<1\}} \\ &= a\chi_{\{u<1\}}u, \quad dans \Omega. \end{aligned}$$

D'o*ù*, u est une solution faible de (4.1).

□

Lemme 4.2 *L'opérateur T_a a un point fixe minimale positive dans $\mathcal{A}$.*

Démonstration. Soit u solution de (4.1), telle que $a > \lambda_1$.
Rappelons que d'aprés le lemme 1, l'opérateur T_a a un point fixe positive dans $\mathcal{A}$.

On pose u un point fixe positive quelconque de l'opérateur T_a et d'aprés l'inégalité de Harnack, on a $u > 0$, telle que $u \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$ (d'aprés les théorèmes de régularité elliptique).

Par hypothèse $u = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $u < 1$ proche de $\partial\Omega$.

Donc, on peut appliquer le lemme de Hopf qui implique que $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ sur $\partial\Omega$, *où* ν définit la normale extérieure de $\partial\Omega$.

Maintenant, soit φ est la fonction propre normalisée associée à λ_1, et ϵ un nombre positif assez petit.

Utilisant la méthode des sous et sur-solution (voir section 1.4 du chapitre préliminaires), on déduit que $u > \epsilon\varphi$, où $\epsilon\varphi$ est une sous-solution.

Posons aussi $u_1 := (\frac{a}{\lambda_1})\epsilon\varphi$.
Alors, on a

$$-\Delta u_1 = -\Delta\bigg((\frac{a}{\lambda_1})\epsilon\varphi \bigg).$$

Sachant que, $-\Delta\epsilon\varphi = \lambda_1\epsilon\varphi$, on déduit que

$$-\Delta u_1 = a\epsilon\varphi.$$

Par conséquent, d'aprés la propriété (iv) (voir propiété 4.1), on a

$$T_a(\epsilon\varphi) = u_1, \ \ et \ \ T_a(u) \geq T_a(\epsilon\varphi).$$

Aussi, par réccurence, on déduit que la suite $\{(T_a)^n(\epsilon\varphi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, de plus elle est majorée alors la suite $\{(T_a)^n(\epsilon\varphi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Ainsi, on a

$$\lim_{n\to\infty}(T_a)^n(\epsilon\varphi) = \omega_\epsilon,$$

Cette limite ω_ϵ présente un point fixe pour T_a, telle que

$$\epsilon\varphi \leq \omega_\epsilon \leq u.$$

Sachant que $u > 0$, alors $\omega_\epsilon > 0$.
Si on prend $u = 1$, et d'aprés la propriété (iv) voir (propriété 4.1), on a

$$T_a(1) \leq 1, \ \ et(T_a)^n(\epsilon\varphi) \leq 1, \ \ \text{pour tout} \ \ n \geq 1,$$

qui implique que ω_ϵ est un point fixe pour l'opérateur T_a.

Par suite, montrons que ω_ϵ ne depend pas de ϵ, pour cela soit $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_0$.

On a, $(T_a)^n(\epsilon_1\varphi) \leq (T_a)^n(\epsilon_2\varphi)$ (d'aprés la propriété (iv)).

Comme les deux suites $\{(T_a)^n(\epsilon_1\varphi)\}$ et $\{(T_a)^n(\epsilon_2\varphi)\}$ sont croissantes majorées donc sont convergentes vers ω_{ϵ_1} et ω_{ϵ_2} (respectivement), avec $\omega_{\epsilon_1} \leq \omega_{\epsilon_2}$.

D'autre part, ϵ_0 est assez petit, avec un petit raisonnement par récurrence pour $n_* > 0$, on déduit que

$$(\frac{a}{\lambda_1})^1\epsilon\varphi < (\frac{a}{\lambda_1})^2\epsilon\varphi < \cdots < (\frac{a}{\lambda_1})^{n_*}\epsilon\varphi < 1.$$

Donc, on a

$$\epsilon_0 \leq \epsilon_1(\frac{a}{\lambda_1})^{n_*}.$$

Sachant que $T_a(\epsilon_1\varphi) = (\frac{a}{\lambda_1})\epsilon_1\varphi$, alors on obtient

$$(T_a)^n(\epsilon_1\varphi) = (\frac{a}{\lambda_1})^{n_*}\epsilon_1\varphi,$$

impliquant que,

$$(T_a)^n(\epsilon_1\varphi) \geq \epsilon_0\varphi > \epsilon_2\varphi.$$

Pour tout $n \geq 1$, on peut déduire que

$$(T_a)^{n+n_*}(\epsilon_1\varphi) \geq (T_a)^n(\epsilon_2\varphi).$$

Tout ça nous permet de conclure que $\omega_{\epsilon_1} \geq \omega_{\epsilon_2}$.
Ainsi $\omega_{\epsilon_1} = \omega_{\epsilon_2}$ et ω ne depend pas de ϵ.

On pose $\omega_\epsilon = \omega_*$, donc ω_* est un point fixe minimal de T_a dans $\mathcal{A}$. □

On a montré l'existence de la solution u du problème (3.12), maintenant on donne le résultat d'unicité.

Lemme 4.3 *Le problème* (4.1) *a une solution unique.*

Démonstration. D'aprés les lemmes 4.1 et 4.2, l'opérateur T_a a un point fixe dans $\mathcal{A}$.

Soit ω_1 et ω_2 sont des points fixe de l'opérateur T_a, telle que $\omega_1 \neq \omega_2$.
On pose $F_i = \{\omega_i < 1\}, \ \ \forall i = 1, 2$, avec $F_1 \subseteq F_2$.
Alors, on a les problèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\omega_1 = a\chi_{F_1}\omega_1 & \text{dans} \quad \Omega \\ \omega_1 = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.13}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\omega_2 = a\chi_{F_2}\omega_2 & \text{dans} \quad \Omega \\ \omega_2 = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.14}$$

D'autre part, on multiplie (4.13) par ω_2 et on fait une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} a\int_F \chi_{F_1}\omega_1\omega_2 dx &= \int_F \nabla\omega_1 \cdot \nabla\omega_2 dx, \\ &= a\int_\Omega \chi_\Omega\omega_1\omega_2 dx, \end{aligned}$$

alors, on a

$$\int_\Omega (\chi_{F_2} - \chi_{F_1})\omega_1\omega_2 dx = 0.$$

Comme $\chi_{F_2} - \chi_{F_1}$ est négative et ω_1, ω_2 sont positives telle que ils sont dans $\mathbb{W}^{2,q}(\Omega)$, *pour tout* $q > 1$, on conclut que $\chi_{F_2} = \chi_{F_1}$, presque parout dans Ω.
Sachant que $F_1 \backslash F_2$ est négligable, on a le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\omega_1 = a\omega_1 & \text{dans} \quad F_1 \\ \Delta\omega_1 = 0 & \text{sur} \quad \Omega\backslash F_1, \end{array} \right. \tag{4.15}$$

et,

$$\begin{cases} -\Delta\omega_2 = a\omega_2 & \text{dans} \quad F_2 \\ \Delta\omega_1 = 0 & \text{sur} \quad \Omega\backslash F_2. \end{cases} \tag{4.16}$$

Maintenant, on pose $\omega = \omega_2 - \omega_1$, le problème devient comme suit,

$$\begin{cases} -\Delta\omega = a\omega & \text{dans} \quad F_1 \\ \\ \Delta\omega = 0 & \text{sur} \quad \Omega\backslash F_1. \end{cases} \tag{4.17}$$

Remarquons que dans $\Omega\backslash F_1$, on a

$$\omega_1 = \omega_2 = 1,$$

implique que,

$$\omega = 0, \ \ dans \ \ \Omega\backslash F_1$$

alors, on déduit le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta\omega = a\omega & \text{dans} \quad \Omega \\ \omega = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.18}$$

qui admet ω comme une solution positive et unique.

Donc, $a = \lambda_1$ (car le problème (4.18) n'est autre qu'un problème à valeurs propre) et ceci est une contradiction.

Ainsi, ω est un point fixe unique. □

Ainsi les trois lemmes précédents impliquent que le problème (4.1) admet une solution unique, si $a \geq \lambda_1$. □

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudier le problème elliptique suivant

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = au - b(x)u^P & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

L'objectif est de comprendre le comportement asymptotique des solutions positives par rapport à l'exposant p.

Le cas le plus intéressant est lorsque $p \to \infty$ o*ù* on obtient que la solution du probléme (P) converge vers la solution du problème suivant

$$(Q) \qquad \begin{cases} -\Delta v = a\chi_{\{v<1\}}v & \text{dans } \Omega \\ \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce problème dit problème à frontière libre.

C'est trés intéressant d'étudier la généralisation du problème, c'est à dire

$$\begin{cases} -\Delta v = a\chi_{\{v<1\}}f(v) & \text{dans } \Omega \\ \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

o*ù* f est une non linéarité donnée.

Bibliographie

[1] R. Adams, Sobolev Spaces , Academic Press, (1975).

[2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Edition Masson, Paris , (1987).

[3] E.N. Dancer and Y. Du, On a free boundary problem arising from population biology, Indiana Univ. Math. J, 52 (2003), 51-68.

[4] E.N. Dancer,Y. Du and l. Ma, Asymptotic behavior of positive solutions of some elliptic problems, *Pacific J.Math.* V 210, N2, (2003), 215-228.

[5] E.N. Dancer, Y.Du and l. Ma, Effects of certain degeneraties in the predator-prey model, *SIAM J. Math. Anal.* 34 (2002), 292-314.

[6] M.A. Del Pino, Positive solutions of a semilinear ellptic equations on a compact manifold, *Nonlinear Analysis,* 22 (1994), 1423-1430.

[7] Y. Du, *Order Structure and Topological Methods in Nonlinear Partial Differential Equations,* Vol. 1 Maximum Principle and Applications, World Scientific Publishing, 2006.

[8] J. M. Fraile, P. Koch Medina, J. Lopez-Gomez and S. Merino, *Elliptic eigenvalue problems and underbounded of positive solutions of a semilinear ellptic equation*, J. Diff. Eqns, 127 (1996), 295-319.

[9] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, (2001).

[10] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and thier Applications*, Academic Press, New York, (1980).

[11] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critique et applications aux problèmes elliptiques,* Springer- Verlarg France. Paris, (1993).

[12] J.L. Kazdan, F.W. Warner, Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure, *J. Diff. Geom,* 10 (1975), 113-134.

[13] E.H. Lieb, M. Loss, *Analysis.* Amer. Math. Soc, Providence, (1997).

[14] L. Ma, Conformal deformations on a noncompact Riemannian manifold, *Math. Ann,* 295 (1993), 75-80.

[15] V.G. Maz'ja, *Sobolev spaces , Springer, Berlin, (1985).*

[16] R. Monneau, Méthodes géométriques pour les problèmes à frontières libres, Séminaires et Congrès 17, (2004), 113-148.

[17] T. Ouyang, On the positive solutions of semilinear equation $-\Delta u + \lambda u - hu^p = 0$ on the compact manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc,* 331 (1992), 503-527.

Résumé

Ce mémoire de master s'intéresse à l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique des solutions positives du problème logistique. On utilise la méthode des sous et sur solutions et la technique des inégalités variationnelles. Le comportement asymptotique des solutions fait apparaitre un problème à frontière libre qu'il faut l'étudier.

Mots clés : Problème logistique, solution positive, sous solution, comportement asymptotique.

Abstract

This master's thesis focuses on the existence, uniqueness and asymptotic behavior of positive solutions to the logistic problem. We use the method of lower and upper solutions and the variational inequalities technics. The asymptotic behaviour of the solutions reveals a free-frontier problem that needs to be studied.

Keywords : Logistical problem, positive solution, lower solution, asymptotic behavior.

ملخص

وتركز أطروحة الماستر هذه على وجود الحلول الإيجابية للمشكلة اللوجستية وتفردها وسلوكها غير العرضي. ونحن نستخدم أسلوب الحلول العلوية و السفلية وأسلوب التفاوتات المتباينة. ويكشف السلوك غير العرضي للحلول عن مشكلة الحدود الحرة التي تحتاج إلى دراسة.

الكلمات المفتاحية : المشكلة اللوجستية ، الحل الإيجابي ، الحل السفلي ، السلوك اللاإعراضي.