République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supèrieur et de la Recherche Scientifique

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Option : Equations aux dérivées partielles

présenté par : Dali Ali Radouane Mokhtar

Soutenu le : 09 septembre 2021

Equations aux dérivées partielles elliptiques non locales : existence et régularité.

Soutenu devant le jury composé de :

M. S. E. Miri	Professeur, Université de Tlemcen	President
M. A. Attar	MCA, Université de Tlemcen	Examinateur
M. B. Abdellaoui	Professeur, Université de Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire :2020-2021

"En mathématiques le mot "évident"
est le mot le plus dangereux."
Eric Temple Bell.

Remerciements

Je tiens a remercier toutes les personnes qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce mémoire.

Je voudrais dans un premier temps remercier, mon encadrant Monsieur le Professeur B.Abdellaoui, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique du département de mathématiques a l'université de Tlemcen et les intervenants professionnels responsables de ma formation, pour avoir assuré la partie théorique de celle-ci.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à

Messieurs les Professeurs S.E. Miri et A. Attar d'avoir accepté de faire partie du jury qui examinera ce modeste travail.

Je remercie mes amis et toute personne m'ayant aidé pendant ces années d'études, merci pour les bons moments qu'on a passé ensemble ...

Mes parents, pour leurs soutien constant et leurs encouragements, et spécialement ma mère pour m'avoir tant aider durant ces 6 ans.

A tous, je présente mes sincères remerciements, mon respect et ma gratitude.

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

Mes chers parents

Ma seur : Chaimaa.

Mon frère : Moncef.

Mes chères amies : Rania et Ikram

Mes collègues et spécialement : Ahlem Abdelouahab et Siham Boukarabila

Table des matières

1 Introduction **5**

2 Outils d'analyse fonctionnelle **7**

2.1 Espaces de Lebesgue L^p 7

2.1.1 Convergence dans les espaces de Lebesgue 8

2.2 Quelques espaces remarquables 9

2.3 Rappel sur le calcul variationnel. 10

3 Espaces de Sobolev fractionnaires **13**

3.1 Espace Potentiel de Bessel et le gradient fractionnaire. 15

3.2 Injections compactes et résultats d'interpolations. 17

4 Problème fractionnaire : cadre variationnel **21**

4.1 Le cadre linéaire. 21

4.2 Problème avec potentiel non-linéaire 22

5 Regularité locale et fractionnaire. **27**

5.0.1 Définition et propriétés principales. 27

5.1 Régularité de la solution u 29

5.2 Régularité du "gradient local" de la solution 31

5.3 Régularité du gradient fractionnaire de u 34

6 Application **37**

Notations

D_Ω	$=$	$(\Omega \times I\!R^N) \cup (\Omega \times C_\Omega)$
C_Ω	$:=$	$I\!R^N \backslash \Omega$
$L^p(\Omega)$	:	Les espaces de Lebesgue.
$L^\infty(\Omega)$	:	L'espace des fonctions essentiellement bornées.
$\|x\|$	:	Le module de x.
$\|\Omega\|$	:	La mesure de Ω.
$\partial\Omega$	:	La frontière de Ω.
$B_r(x_0)$	:	La boule de centre x_0 et de rayon r.
$\|\|u\|\|_{L^p(\Omega)}$	:	La norme de u dans $L^p(\Omega)$.
$\|\|u\|\|_{L^\infty(\Omega)}$	:	La norme de u dans $L^\infty(\Omega)$.
$W^{1,p}(\Omega)$	:	L'espace de Sobolev.
$W^{s,p}(\Omega)$	:	Espaces de Sobolev fractionnaires pour $0 < s < 1$
$C_0^\infty(\Omega)$	:	Les fonctions infiniment dérivables et continues a support compact sur Ω.
$C^{0,\alpha}$	:	L'espace des fonctions Höldériennes sur Ω.
$C^k(\Omega)$	:	Les fonctions de classe k sur Ω.
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	:	L'espace des fonctions Höldériennes de classe k.
$S(\mathbb{R}^N)$	:	L'espace de Schwartz dans $\mathbb{R}^N$.
$\mathcal{F}(u)$	:	La transformée de Fourier de u.
$\mathcal{F}^{-1}(u)$	:	La transformée de Fourier inverse de u.
E'	:	Dual topologique de E.
∇u	:	Gradient de u.
Δu	:	Laplacien de u.
$(-\Delta)^s$	:	Laplacien fractionnaire .
$kerf$	:	Noyau de f. (Kernel)
$\hookrightarrow$	:	Injection continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	:	Injection compacte .
$\Gamma(.)$	:	La fonction Gamma.
PV	:	La valeur principale de Cauchy.
$p.p$	:	Presque partout.

Chapitre 1

Introduction

Le but de notre travail est d'étudier une classe particulière d'équations aux dérivées partielles non locales avec conditions aux bords de type Dirichlet.
Dans notre travail, le terme non local apparait essentiellement dans l'opérateur principal "la diffusion" où il va être représenté par le Laplacien fractionnaire.

Notons que l'étude des équations aux dérivées partielles impliquant le Laplacien fractionnaire a connu un avancement rapide et de plus en plus intéressant au cours de ces dernières années. Cela est dû non seulement à un intérêt mathématique ou théorique de cette classe d'équations, mais aussi au fait que le Laplacien fractionnaire trouve son origine dans plusieurs modèles de la physique, la chimie, biologie et bien d'autres disciplines où le modèle utilisé implique des effets non locaux. Voir par exemple [21] pour l'application en l'élasticité, [16] pour l'étude des flux quasi-géostrophiques, des applications en Mécanique quantique dans [27] et enfin [8, 19] pour les mathématiques financières.

Dans un cadre général, on se contentera de dire que l'équation est non locale lorsque cette équation fait intervenir la valeur de la fonction inconnue a des points différents de l'espace, au même instant. Un exemple simple est donné par l'équation non-locale suivante :

$$u(x) + u(-x) = f(x),$$

qui fait intervenir la valeur de u en x et aussi au point $-x$. Plus généralement, on peut envisager une moyenne des valeurs de u dans un voisinage plus grand de x (considéré comme le point de référence).

Dans ce cas on arrive à une équation plus générale de la forme suivante :

$$(J * u)(x) = \int_{I\!R} J(x - y)u(y)dy = f(x)$$

ou J est un noyau positif vérifiant des conditions adéquates selon le modèle étudié.

Dans notre travail on s'intéresse particulièrement au Laplacien fractionnaire défini principalement par

$$(-\Delta)^s u(x) := C_{N,s} \text{ P.V.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy,\ s \in (0,1),$$

avec

$$C_{N,s} = s.2^{2s}\pi^{-\frac{N}{2}} \frac{\Gamma(\frac{N+2s}{2})}{\Gamma(1-s)},$$

est une constante de normalisation.

Notons que l'intérêt du Laplacien fractionnaire est motivé, Outre sa pertinence mathématique, par le fait qu'il a été récemment utilisé dans un certain nombre d'équations modélisant certains phénomènes concrets.

La définition du Laplacien Fractionnaire trouve son origine dans l'analyse de Fourier. Sachant que si $u \in \mathcal{S}(I\!R^N)$, la classe de Schwartz, alors

$$-\Delta u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2 \mathcal{F}(u)),\ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier et $\mathcal{F}^{-1}$ son inverse. Donc pour $s \in (0,1)$ on aura

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}(u)),\ \xi \in \mathbb{R}^N, s \in (0,1).$$

Comme déjà observé par Riesz dans son article remarquable [31], la définition du Laplacien fractionnaire ne peut pas être donnée par une convolution mais plutôt par une valeur principale et qui donne l'expression citée auparavant.

Dans ce mémoire on s'intéresse à analyser profondément les définitions du Laplacien fractionnaire (deux définitions seront données ultérieurement), les espaces fractionnaires où cet opérateur est bien défini au sens de dualité et enfin étudier des problèmes elliptiques non linéaires avec diffusion fractionnaire. On va aborder la question de la régularité de la solution dans différents contextes. Enfin, nous utiliserons ces résultats de régularité pour traiter un problème non linéaire avec une structure non variationnelle.

Le mémoire est composé de 5 chapitres. Dans le premier chapitre on présente le cadre fonctionnel nécessaire pour aborder notre problème. Les espaces de Sobolev fractionnaires et leurs propriétés sont présentées dans le deuxième Chapitre.

Le cas linéaire sera analysé en détail dans le troisième chapitre. A la fin de celui-ci on abordera un problème non linéaire avec structure variationnelle en utilisant le Théorème du col. On arrive à prouver l'existence d'une solution.

Le chapitre quatre est dédié à présenter des résultats de régularité pour le Laplacien fractionnaire. Ces résultats sont récents et leurs démonstrations sont basées sur les propriétés des intégrales singulières.

Enfin, à la l'aide du Théorème du point fixe de Schauder et en se basant sur les résultats de régularité obtenus ultérieurement, on arrive à prouver dans le dernier chapitre, l'existence d'une solution pour un problème non variationnel.

Chapitre 2

Outils d'analyse fonctionnelle

Dans ce premier chapitre on va présenter les outils nécessaires d'analyse fonctionnelle que l'on va utiliser durant ce travail. La référence principale sera le livre de H. Brezis [14].

2.1 Espaces de Lebesgue L^p

Définition 2.1. *(Espaces de Lebesgue L^p)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $p \in [1, \infty]$. Les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ sont définis par

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \quad ; f \text{ est mesurable et} ||f||_{L^p(\Omega)} < \infty\},$$

où

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx \Big)^{1/p}, \text{ si } p < \infty.$$

Pour $p = \infty$, on a

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \quad ; f \text{est mesurable et } \exists c > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq c \quad , p.p \text{ dans } \Omega\}.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach munis de la norme :

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx \Big)^{1/p} \text{ si } p < \infty$$

et

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = inf\{c > 0, |f(x)| \leq c \quad , p.p \text{ dans } \Omega\}.$$

Notons que l'espace $L^p(\Omega)$ est :
• Un espace séparable pour tout $1 \leqslant p < +\infty$.
• Un espace de réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.
• Si $1 \leq p < \infty$, alors le dual de L^p est $L^{p'}$ ou $p' = \frac{p}{p-1}$.

2.1.1 Convergence dans les espaces de Lebesgue

On commence par le Théorème de la convergence monotone très utilisé dans les applications.

Théorème 2.1. ***(Convergence monotone de Beppo Levi)***
Soit $(f_n)_n$ *une suite croissante de fonctions positives* $\in L^1(\Omega)$ *tel que* $\sup_n \int_\Omega f_n < \infty$. *Alors* $(f_n)_n$ *converge p.p sur* Ω *vers une fonction* f *qui est finie de plus* $f \in L^1(\Omega)$ *et*

$$||f_n - f||_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Dans le cas où la suite n'est pas monotone, on a le résultat suivant :

Lemme 2.1. *(Lemme de Fatou)*
Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions positives telle que* $f_n \in L^1(\Omega)$ *et* $||f_n||_{L^1(\Omega)} \leq C$. *On suppose que* $f_n \to f$ *p.p dans* Ω. *Alors* $f \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Comme application, on obtient le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Théorème 2.2. ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)***
Soit $(f_n)_n$ *une suite des fonctions de* $L^1(\Omega)$. *On suppose que :*
- $f_n(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω.
- *Il existe une fonction positive* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour chaque* n, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *p.p sur* Ω.

Alors,

$$f \in L^1(\Omega) \quad et \quad ||f_n - f||_{L^1} \to 0.$$

Enfin on a le Théorème de convergence de Vitali. Commençons par quelques définitions.

Définition 2.2. (Equi-Intégrabilité dans L^p **)** *Soit* X *un ensemble mesurable de* $\mathbb{R}^N$ *et* $1 \leq p < \infty$. *On dit que la suite* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$ *est equi-intégrable* **ssi :** *pour chaque* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $E \subset X$ *avec* $|E| < \delta$, *on a*

$$\int_E |f_n(x)|^p dx \leq \varepsilon \text{ pour tout } n.$$

On a le Théorème suivant qui complète en quelque sens le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Théorème 2.3. (Théorème de Vitali) *Soit* X *un ensemble de mesure de Lebesgue finie dans* $\mathbb{R}^N$. *Soit* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $L^1(X)$ *qui vérifie les deux conditions suivantes :*

1. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque-partout vers* f *dans* X.

2. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est equi-intégrable.*
Alors, $\{f_n\}_n$ *converge fortement vers* f *dans* $L^1(X)$*.*

Comme application directe du théorème précédent, on obtient le résultat suivant

Propriété 2.1. *Soit* $\{f_n\}_n \subset L^p(E,T,\mu)$ *une suite bornée où* $1 < p < \infty$*,* $\mu(E) < \infty$ *et* $\Omega \in E$*. On suppose que* $f_n \to f$ *p.p. dans* Ω*. Alors* $f_n \to f$ *fortement dans* $L^q(E,T,\mu)$ *pour tout* $q < p$*.*

Notons que si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, on a l'inégalité de Hölder suivante :

$$\int_\Omega |f|.|g| \le ||f||_{L^p(\Omega)}.||g||_{L^{p'}(\Omega)}.$$

2.2 Quelques espaces remarquables

Définition 2.3. *Soit* $f : \Omega \to I\!\!R$ *une fonction mesurable. On définit sa fonction de distribution par* $\lambda_f : [0,\infty[\to [0,\infty]$ *:*

$$\lambda_f(\alpha) = \mu\{x : |f(x)| > \alpha\}.$$

Définition 2.4. *(Les espaces de Marcinkiewicz(*L^p *faibles)) :*
Pour $0 < p < \infty$*, l'espace des fonctions* L^p *faible sur* Ω *noté par* $L^p_w(\Omega) = L^p_w(\Omega,\mu)$ *est l'ensemble des fonctions mesurables* μ *p.p telles que pour une constante* $C > 0$*, on a*

$$\lambda_f(\alpha) \le \frac{C}{\alpha^p} \quad \forall \alpha > 0.$$

L'espace faible $L^\infty_w(\Omega) = L^\infty(\Omega)$ *par définition coïncide avec* $L^\infty(\Omega)$*.*

On note

$$||f||_{L^p_w(\Omega)} = \inf\{C > 0 : \lambda_f(\alpha) \le \frac{C}{\alpha^p}\}.$$

Notons que $||f||_{L^p_w(\Omega)}$ n'est pas une norme, c'est une quasi-norme, elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire mais elle vérifie :

$$||f+g||_{L^p_w(\Omega)} \le A(||f||_{L^p_w(\Omega)} + ||g||_{L^p_w(\Omega)})$$

Pour $A > 0$.

Définition 2.5. *(Espace de Schwartz) L'espace de Schwartz* $S(I\!\!R^N)$ *est l'espace des fonctions* φ *indéfiniment différentiables sur* $I\!\!R^N$ *vérifiant :*

$$\sup_{x\in I\!\!R^N} |x^\alpha||D^\beta\varphi(x)|^k < \infty \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^N, k \in \mathbb{N},$$

où $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_N^{\alpha_N}$ *et* $D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial^{\beta_N}}{\partial x_N^{\beta_N}}$*.*

Définition 2.6. *(Espace des distributions tempérées)*
L'espace des distributions tempérées est le dual topologique de $S(\mathbb{R}^N)$ et il est noté $S'(\mathbb{R}^N)$.

2.3 Rappel sur le calcul variationnel.

Définition 2.7. *(La différentiabilité au sens de Fréchet)*
Soient E, F deux espaces vectoriels normées et f une application de E dans F. On dit que f est différentiable en $a \in E$ (au sens de Fréchet) s'il existe une application linéaire continue $L : E \to F$ telle que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0 \qquad \forall h \in E$$

L est appelée la différentielle de f en a et se note $L = \mathrm{d}f(a)$.

Définition 2.8. *(La différentiabilité au sens de Gateaux)*
Soient E, F deux espaces vectoriels normés et f une application d'un ouvert U de E à valeurs dans F. On dit que f est différentiable au sens de Gateaux au point a de U s'il existe une application linéaire continue $L : E \to F$ telle que, $\forall$ v de E :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = L(v).$$

L est appelée la différentielle de f (au sens de Gateaux) en a.

Comme on va chercher des solutions de notre problème sous la forme des points critique d'une certaine fonctionnelle d'Energie, on aura besoin du Théorème de Lax-Milgram.

Théorème 2.4. ***(Lax-Milgram)***
Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v) =< \varphi, v > \qquad \forall v \in H$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété suivante :

$$u \in H \ et \ \frac{1}{2}a(u, u)- < \varphi, u >= \min_{v\in H} \frac{1}{2}a(v, v)- < \varphi, v >$$

Pour chercher les points critique d'une fonctionnelle différentiable on utilise souvent le théorème du col.

Théorème 2.5. *(Théorème du Col)*
Soient X un espace de Banach et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonctionnelle différentiable vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0) = 0$ et que :
- *il existe $R > 0$ et $a > 0$ tel que si $||u|| = R$ alors $J(u) \geq a$.*
- *il existe $u_0 \in X$ et $a > 0$ tel que $||u_0|| > R$ et $J(u_0) < a$.*

alors J possède une valeur critique c telle que $c \geq a$, Plus précisément, si on pose :

$$B := \{\varphi([0,1]); \varphi \in C([0,1], X), \varphi(0) = 0, \varphi(1) = u_0\}$$

et :

$$c := \inf_{\varphi \in B} \max_{t \in [0,1]} J(\varphi(t)),$$

alors c est une valeur critique de J, et $c \geq a$

Pour la condition de Palais-Smale, on a la définition suivante.

Définition 2.9. *(Condition de Palais-Smale)*
Soient X un espace de Banach et $J : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 si $c \in \mathbb{R}$. On dit que J vérifie la condition de palais-smale (au niveau c), si toute suite $(u_n)_n$ de X telle que :

$$J(u_n) \to c \ dans\ \mathbb{R} \qquad et \qquad J'(u_n) \to 0 \ dans\ X'$$

on peut extraire une sous suite $\{u_n\}_k$ convergente

Enfin on a le Théorème de point fixe de Schauder qui sera l'outil principal dans ce mémoire.

Théorème 2.6. *(Théorème de Point fixe de Schauder)*
Soit X un espace normé et E un sous ensemble de X convexe fermé non vide. Soit $T : E \to X$ une application continue de E dans X telle que $T(E) \subset E$ soit relativement compact. Alors T admet un point fixe dans X.

Chapitre 3

Espaces de Sobolev fractionnaires

Nous introduisons dans ce chapitre le cadre fonctionnel naturel (les espaces fractionnaires) où l'on va placer notre problème. Nous donnons aussi quelques propriétés fondamentales de ces espaces fonctionnels. Dans l'ensemble de ce chapitre et le reste de ce mémoire et pour simplifier la présentation de nos résultats, nous utiliserons la notation

$$\mathcal{D}_\Omega = (I\!R^N \times I\!R^N) \setminus (C_\Omega \times \mathcal{C}_\Omega)$$

Une première approche pour définir les espaces de Sobolev fractionnaires est d'utiliser la transformée de Fourier dans l'espace $\mathcal{S}(I\!R^N)$.

Définition 3.1. *(Transformée de Fourier)*
On définit la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(I\!R^N)$ par :

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{I\!R^N} e^{-i\xi\, x}\, \varphi(x)\, dx.$$

La transformée de Fourier inverse est définie par :

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{I\!R^N} e^{i\xi\, x}\, \varphi(x)\, dx.$$

La transformée de Fourier est un opérateur linéaire ayant les propriétés suivantes :

- Si $\varphi \in \mathcal{S}(I\!R^N)$, alors $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(I\!R^N)$.
- $\mathcal{F}(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j})(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$.
- Si $f, g \in S(I\!R)$: $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\, \mathcal{F}(g)$.

Par conséquent, on déduit que

$$\mathcal{F}(-\Delta u) = |\xi|^2 \mathcal{F}(u).$$

Donc pour $0 < s < 1$, on définit le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ comme un opérateur donné par le multiplicateur de Fourier $|\xi|^{2s}$. Autrement dit, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\mathcal{F}((-\Delta)^s u)(\xi) = |\xi|^{2s}\mathcal{F}(u)(\xi).$$

En utilisant la transformée de Fourier inverse d'une distribution tempérée homogène, on peut trouver l'expression du laplacien fractionnaire en tant qu'opérateur intégral. Plus précisément, si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$(-\Delta)^s u(x) := a_{N,s} \text{ P.V.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy, \qquad s \in (0,1), \tag{3.1}$$

où

$$a_{N,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}} d\xi \right)^{-1} = 2^{2s-1}\pi^{-\frac{N}{2}} \frac{\Gamma(\frac{N+2s}{2})}{|\Gamma(-s)|}. \tag{3.2}$$

Pour $u \in \mathcal{S}(I\!R)$, d'une manière équivalente on peut définir le Laplacien fractionnaire par la formule

$$(-\Delta)^s u = -\frac{1}{2} \int_{I\!R^N} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{||y||^{N+2s}} dy, \quad \forall x \in I\!R^N.$$

Notons également qu'il existe une autre approche basée sur la théorie des semi-groupes. voir [24] pour plus de détails.

Dans le cas général, on a la définition suivante.

Définition 3.2. *Soit $\Omega \subset I\!R^N$ un domaine borné et $s \in (0,1)$. Pour tout $p \in [1,\infty)$, nous définissons l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ par*

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy < \infty \right\}.$$

$W^{s,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni par la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous renvoyons le lecteur à [20] pour plus de détails et de propriétés des espaces fractionnaires de Sobolev.

Définition 3.3. *Si $p = 2$, alors $W^{s,2}(\Omega)$, noté aussi $H^s(\Omega)$, est un espace de Hilbert, son produit scalaire est donné par :*

$$\forall u, v \in H^s(I\!R^N)$$

$$< u, v >_{H^s(I\!R^N)} = \int_{I\!R^N} u(x)v(x)dx + \int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} \frac{(u(x) - u(y)).(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy.$$

De plus si $u \in H^s(I\!R^N)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi = \frac{a_{N,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy; \tag{3.3}$$

pour $p \in [1, \infty)$, nous définissons l'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$ comme

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{s,p}(I\!R^N) : u = 0 \text{ in } I\!R^N \setminus \Omega \right\}.$$

C'est un espace de Banach doté de la norme

$$\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} := \left(\iint_{D_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \right)^{1/p},$$

où

$$D_\Omega := (I\!R^N \times I\!R^N) \setminus (C_\Omega \times C_\Omega) = (\Omega \times I\!R^N) \cup (C_\Omega \times \Omega).$$

Pour le cas $s = 1$, on a la propriété suivante :

Proposition 3.1. *:*
Soit $p \in [1, +\infty)$ et $s \in (0, 1)$. on considère Ω un ouvert de $I\!R$ de classe $C^{0,1}$ avec des frontières régulières. Alors :

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C ||u||_{W^{1,p}(\Omega)},$$

où C est une constante positive qui dépend de N, s, p. En particulier, on déduit que $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$.

Afin de prouver les résultats de régularité de type Calderón-Zygmund pour l'équation fractionnaire de Poisson, nous utiliserons alors la relation entre l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(I\!R^N)$ et l'espace potentiel de Bessel défini ci-dessous.

3.1 Espace Potentiel de Bessel et le gradient fractionnaire.

Définition 3.4. *Soit $s \in (0, 1)$. Pour tout $p \in [1, \infty)$, l'espace potentiel de Bessel $L^{s,p}(I\!R^N)$ est défini par*

$$L^{s,p}(I\!R^N) := \left\{ u \in L^p(I\!R^N) \text{ tel que } u = (I - \Delta)^{-\frac{s}{2}} f \text{ avec } f \in L^p(I\!R^N) \right\}.$$

C'est un espace de Banach muni par la norme

$$|||u|||_{L^{s,p}(I\!R^N)} := \|u\|_{L^p(I\!R^N)} + \|f\|_{L^p(I\!R^N)}.$$

Pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$, en nous basant sur [32, 30], on peut définie *le gradient fractionnaire d'ordre s* comme vecteur champ $\nabla^s : I\!R^N \to \mathbb{R}$ donné par

$$\nabla^s\phi(x) := \int_{I\!R^N} \frac{\phi(x)-\phi(y)}{|x-y|^s}\frac{x-y}{|x-y|}\frac{dy}{|x-y|^N}, \quad \forall\, x \in I\!R^N. \tag{3.4}$$

Puis

a) Ayant à l'esprit le *gradient fractionnaire d'ordre s* introduit dans (3.4), rappelons que dans [36, Théorème 2] et [32, Théorème 1.7], il est prouvé que

$$\begin{aligned} L^{s,p}(I\!R^N) &:= \left\{u \in L^p(I\!R^N) \text{ tel que } |\nabla^s u| \in L^p(I\!R^N)\right\} \\ &= \left\{u \in L^p(I\!R^N) \text{ tel que } |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u| \in L^p(I\!R^N)\right\}. \end{aligned}$$

aux normes équivalentes

$$|||u|||_{L^{s,p}(I\!R^N)} := \|u\|_{L^p(I\!R^N)} + \|\nabla^s u\|_{L^p(I\!R^N)} \simeq \|u\|_{L^p(I\!R^N)} + \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|_{L^p(I\!R^N)}.$$

b) Remarquons aussi que dans le cas où s est un entier et $1 < p < \infty$, par [6, Théorème 7.63, (f)] on sait que $L^{s,p}(I\!R^N) = W^{s,p}(I\!R^N)$. Différemment, dans le cas $s \in (0,1)$, les deux espaces précédents ne coïncident pas. Cependant, pour tout $0 < \epsilon < s$ et tout $1 < p < \infty$, par [6, Théorème 7.63, (g)], il s'ensuit que $L^{s+\epsilon,p}(I\!R^N) \subset W^{s,p}(I\!R^N) \subset L^{s-\epsilon,p}(I\!R^N)$ avec inclusions continues.

C) De [35] et [6], nous savons que $L^{s,p}(I\!R^N) \subset W^{s,p}(I\!R^N)$ si $p > 2$ et $W^{s,p}(I\!R^N) \subset L^{s,p}(I\!R^N)$ si $p < 2$.

Un autre "gradient non local" peut également être défini par

$$\mathbb{D}_s(u)(x) = \left(\frac{a_{N,s}}{2}\int_{I\!R^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dy\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

alors

$$\lim_{s\to 1^-}(1-s)\mathbb{D}_s^2(u(x)) = |\nabla u(x)|^2, \quad \forall\, u \text{ dans } \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{3.6}$$

Comme il a été prouvé dans [36], si $p > \frac{2N}{N+2s}$, alors l'espace potentiel de Bessel $L^{s,p}(I\!R^N)$ peut aussi être défini comme l'ensemble des fonctions $u \in L^p(I\!R^N)$ telles que $\mathbb{D}_s(u) \in L^p(I\!R^N)$. L'espace $L^{s,p}(\Omega)$ peut être muni des normes équivalentes

$$|||u|||_{L^{s,p}(I\!R^N)} = \|u\|_{L^p(I\!R^N)} + \|\mathbb{D}_s(u)\|_{L^p(I\!R^N)}.$$

L'inégalité de Sobolev suivante dans $L^{s,p}(I\!R^N)$ est prouvée dans [6].

Théorème 3.1. *Supposons que $u \in L^{s,p}(I\!R^N)$ et $sp < N$, alors*

$$S_1||u||_{L^{p_s^*}(I\!R^N)} \le \|\nabla^s u\|_{L^p(I\!R^N)},$$

et

$$S_2||u||_{L^{p_s^*}(I\!R^N)} \le \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|_{L^p(I\!R^N)},$$

où $p_s^* = \frac{pN}{N-ps}$.

Dans un cadre plus général, on a l'inégalité suivante.

Proposition 3.2. *(Inégalité de Gagliardo-Nirenberg fractionnaire.)*
Soit $u \in L^p(I\!R^N)$ *telle que* $(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \in L^r(I\!R^N)$ *avec* $r \geq 1$ *et* $p \geq 1$.
Alors $\exists C > 0$ *:* $C = C(N, s, r, p)$ *telle que*

$$\|u\|_{L^q(I\!R^N)} \leq C \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|^{\theta}_{L^r(I\!R^N)} \|u\|^{1-\theta}_{L^p(I\!R^N)}$$

où $q, \theta \in \mathbb{R}$ *satisfaisant :* $0 \leq \theta \leq 1$, $1 \leq q < \infty$ *et*

$$\frac{1}{q} = \theta(\frac{1}{r} - \frac{s}{N}) + \frac{1-\theta}{p}.$$

Si $\Omega \subset I\!R^N$, on définit l'espace $L^{s,p}_0(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions $u \in L^{s,p}(I\!R^N)$ avec $u = 0$ dans $I\!R^N \backslash \Omega$.

D'après le lemme 1 dans [36], si $p > \frac{2N}{N+2s}$ et Ω est un domaine borné, alors pour tout $u \in L^{s,p}_0(\Omega)$

$$C_1 \||u\||_{L^{s,p}(I\!R^N)} \leq \|\mathbb{D}_s(u)\|_{L^p(I\!R^N)} \leq C_2 \|u\|_{L^{s,p}(I\!R^N)},$$

où C_1, C_2 sont des constantes positives dépendant uniquement de Ω, N, s et p.

En conséquence on obtient que

1. Si Ω est un domaine borné, alors on peut munir $L^{s,p}_0(\Omega)$ des normes équivalentes $\|\nabla^s u\|_{L^p(I\!R^N)}$ ou $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^p(I\!R^N)}$.
2. Si Ω est un domaine borné et $p > \frac{2N}{N+2s}$, alors on peut équiper $L^{s,p}_0(\Omega)$ aussi de la norme équivalente $\|\mathbb{D}_s(u)\|_{L^p(I\!R^N)}$.

3.2 Injections compactes et résultats d'interpolations.

Pour les injections compactes entre $W^{s,p}(\Omega)$ et $L^q(\Omega)$, on a le résultat de Rellich-Kondrachov suivant :

Théorème 3.2. *(Les inclusions compactes fractionnaire de Rellich-Kondrachov)*
Soit $s \in (0,1)$ *et* Ω *un domaine Lipschitzien borné de* $I\!R^N$*. Alors :*
Si $N > sp$*, alors l'injection* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(I\!R^N)$ *est compact pour tout* $q \in [1, p^*_s]$.
Si $N = sp$*, alors l'injection* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(I\!R^N)$ *est compact pour tout* $q \in [1, +\infty[$.
Si $N < sp$*, alors l'injection* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ *est compact avec* $\alpha := \frac{ps-N}{p}$.

Introduisons les nombres réels $0 \leq s_1 \leq \eta \leq s_2 \leq 1$ et $1 \leq p_1, p_2, p \leq \infty$ et supposons que

$$\eta = \theta s_1 + (1-\theta)s_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2} \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1. \tag{3.7}$$

De plus, introduisons la condition

$$s_2 = p_2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{p_1} \leq s_1. \tag{3.8}$$

Lemme 3.1. [15, Théorème 1] *Supposons que* (3.7) *soit valide et que* (3.8) *n'est pas vérifiée. Alors, pour chaque* $\theta \in (0,1)$, *il existe une constante* $C = C(s_1, s_2, p_1, p_2, \theta) > 0$ *tel que*

$$\|w\|_{W^{\eta,p}(I\!R^N)} \leq C \|w\|^{\theta}_{W^{s_1,p_1}(I\!R^N)} \, |w\|^{1-\theta}_{W^{s_2,p_2}(I\!R^N)}, \quad \forall\, w \in W^{s_1,p_1}(I\!R^N) \cap W^{s_2,p_2}(I\!R^N)\,.$$

L'inégalités de Hardy fractionnaire sera utilisée pour prouver l'optimalité des résultats d'existence et de régularité.

Théorème 3.3. *Soit* $\Omega \subset I\!R^N$ *un domaine régulier borné et supposons que* $sp < N$. *Alors il existe une constante positive* $C = C(s,p,N,\Omega)$ *telle que pour tout* $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$C \int_\Omega \frac{|\phi(x)|^p}{\delta^{ps}(x)}\, dx \leq \iint_{D_\Omega} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\, dxdy. \tag{3.9}$$

Si $0 \in \Omega$, *on a l'inégalité de Hardy pour le potentiel singulier en zéro*

$$\Lambda \int_{I\!R^N} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps}}\, dx \leq \iint_{D_\Omega} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\, dxdy. \tag{3.10}$$

ou $\Lambda = \Lambda(s,p,N)$ *est une constante universelle donnée par*

$$\Lambda := \inf \left\{ \frac{\displaystyle\iint_{D_\Omega} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\, dxdy}{\displaystyle\int_\Omega \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps}} dx} : \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \setminus \{0\} \right\}, \tag{3.11}$$

De plus le poids $|x|^{-ps}$ *est optimal au sens que, pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$\inf \left\{ \frac{\displaystyle\iint_{D_\Omega} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\, dxdy}{\displaystyle\int_\Omega \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps+\varepsilon}} dx} : \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \setminus \{0\} \right\} = 0.$$

Démonstration. Notons que, pour $\phi \in \mathcal{C}^\infty(I\!\!R^N)$, en définissant $\phi_r(x) = \phi(rx)$, il en découle alors

$$|\nabla^s \phi_r(x)| = r^s |\nabla^s \phi(rx)|.$$

Ainsi

$$\frac{\displaystyle\iint_{D_\Omega} \frac{|\phi_r(x) - \phi_r(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\, dxdy}{\displaystyle\int_{I\!\!R^N} \frac{|\phi_r(x)|^p}{|x|^{ps}} dx} = \frac{\displaystyle\iint_{D_\Omega} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\, dxdy}{\displaystyle\int_{I\!\!R^N} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps}} dx}.$$

En utilisant un argument de dilatation, nous pouvons prouver que Λ_Ω défini dans (3.11) ne dépend pas de Ω et alors $\Lambda(\Omega) = \Lambda(I\!\!R^N) = \Lambda$.

Pour prouver la seconde partie de la proposition, on considère que $\epsilon > 0$ est fixé et on suppose par l'absurde que pour $\Omega \subset I\!\!R^N$, on a

$$\Lambda_\epsilon(\Omega) := \inf \left\{ \frac{\displaystyle\iint_{D_\Omega} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\, dxdy}{\displaystyle\int_\Omega \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps+\varepsilon}} dx} : \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \setminus \{0\} \right\} > 0. \tag{3.12}$$

Notons que pour tout $B_r(0) \subset \Omega$

$$0 < \Lambda_\epsilon(\Omega) \leq \Lambda_\epsilon(B_r(0)). \tag{3.13}$$

De plus, remarquons que pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_r(0))$ nous avons que

$$\int_{B_r(0)} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps+\epsilon}} dx \geq \frac{1}{r^\epsilon} \int_{B_r(0)} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps}} dx. \tag{3.14}$$

D'où

$$0 < \Lambda_\epsilon(\Omega) \leq \Lambda_\epsilon(B_r(0)) \leq r^\epsilon \Lambda(B_r(0)) = r^\epsilon\ L(B_r(0)).$$

Pour $r \to 0$, on obtient une contradiction et le résultat s'ensuit. $\square$

Chapitre 4

Problème fractionnaire : existence et cadre variationnel

Le but de ce chapitre est d'étudier les problème elliptiques avec diffusion fractionnaire de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (-\Delta)^s u & = & f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{dans } (I\!R^N \setminus \Omega) \end{array} \right. \tag{4.1}$$

ou Ω est un domaine borné de $I\!R^N$, $s \in (0,1)$ et f une fonction donnée vérifiant des hypothèses à préciser ultérieurement.

Il est à noter que sous des conditions adéquates, on peut chercher les solutions du problème (4.1) comme des points critiques de la fonctionnelle d'énergie J définit par

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \int_{I\!R^N} F(x,u)dx, u \in W_0^{s,2}(\Omega)$$

où $F(x,t) = \int_0^t f(x,\sigma)d\sigma$.

4.1 Le cadre linéaire.

Pour le cas ou f dépend seulement de x, on peut appliquer le Théorème de Lax-Milgram. Plus précisément on a le résultat suivant.

Théorème 4.1. *Soit Ω est un domaine borné de $I\!R^N$ et $s \in (0,1)$. On suppose que f est une fonction mesurable tel que $f \in L^\sigma(\Omega)$,où $\sigma \geq \frac{2N}{N+2s}$. Alors le problème*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (-\Delta)^s u & = & f(x) & \textit{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \textit{dans } (I\!R^N \setminus \Omega) \end{array} \right. \tag{4.2}$$

admet une solution unique $u \in H_0^s(\Omega)$, de plus u réalise le minimum global de la fonctionnelle J donnée par

$$J(u) = \frac{C_{N,s}}{2} \int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \int_{I\!R^N} f(x)u(x)dx, u \in H_0^s(\Omega).$$

Démonstration. Soit la forme bilinéaire a définit sur $H_0^s(\Omega) \times H_0^s(\Omega)$ par

$$a(u,v) = \frac{C_{N,s}}{2} \int_\Omega \int_\Omega \frac{(u(x)-u(y)).(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy.$$

Il est clair que si $u, v \in H_0^{s}(\Omega)$, alors

$$\begin{array}{rcl} |a(u,v)| & \leq & \frac{C_{N,s}}{2} \int_\Omega \int_\Omega |\frac{|u(x)-u(y)||v(x)-v(y)|}{|x-y|^{N+2s}}| dxdy \\ & \leq & \frac{C_{N,s}}{2}.||u||_{H_0^s}.||v||_{H_0^s}; \end{array}$$

Donc a est continue.
Comme

$$a(u,u) = \frac{C_{N,s}}{2} \int_\Omega \int_\Omega \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = ||u||^2_{H_0^s},$$

alors a est coercive.
Soit maintenant $L(v) = \int_\Omega f(x).v(x)dx$. On voit aisément que L est linéaire. Par l'inégalité de Hölder on déduit que si $v \in H_0^s(\Omega)$, alors

$$|L(v)| \leq \int_\Omega |f(x).v(x)|dx \leq ||v||_{L^{2_s^*}(\Omega)} ||f||_{L^{(2_s^*)'}(\Omega)}.$$

Comme $(2_s^*)' = \frac{2N}{N+2s}$ et Ω est borné, on déduit que $||f||_{L^{(2_s^*)'}(\Omega)} < \infty$. Donc par l'inégalité de Sobolev fractionnaire on obtient que

$$|L(v)| \leq C||f||_{L^\sigma(\Omega)} ||v||_{H_0^s(\Omega)}.$$

Comme conclusion on affirme que L est une forme linéaire continue sur $H_0^s(\Omega)$.

D'après le Théorème de Lax-Milgram on obtient l'existence d'un élément unique $u \in H_0^s(\Omega)$ tel que u est la solution faible unique de problème (4.2). De plus u est le minimum global de l'énergie J définie par

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) = \frac{C_{N,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \int_{\mathbb{R}^N} f(x)u(x)dx.$$

□

4.2 Problème avec potentiel non-linéaire

On considère maintenant le cas où $f(x,\sigma) = |\sigma|^{p-1}\sigma + \lambda h$,avec $p < 2_s^* - 1$, $\lambda > 0$ et $h \gneqq 0$. Plus précisément on considère le problème général

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u & = & |u|^{p-1}u + \lambda.h & \text{sur } \Omega \\ u & = & 0 & \text{dans } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \end{cases} \tag{4.3}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $s \in (0,1), 1 < p < 2_s^* - 1$, $h \in L^m(\Omega)$ pour $m \geq \frac{2N}{N+2s}$. Notre but est d'utiliser les arguments variationnels pour prouver l'existence d'une solution au moins pour λ petit. Comme $1 < p \leq 2_s^* - 1$, le problème admet une structure variationnelle, les solutions de (4.3) sont obtenues comme des points critiques de la fonctionnelle d'énergie J définie par

$$J_\lambda(u) = \frac{C_{N,s}}{2}\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \frac{1}{p+1}\int_{I\!R^N}|u|^{p+1}(x)dx - \lambda\int_\Omega h(x).u(x)dx,$$

où $u \in W_0^{s,2}(\Omega)$. Le résultat d'existence pour ce cas est donné par le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Soit $s \in (0,1)$ et $\Omega \subset I\!R^N$ un domaine borné. Supposons que $0 < p < 2_s^* - 1$ et que $m \geq \frac{2N}{N+2s}$. Alors il existe $\lambda^* > 0$ telle que si $\lambda < \lambda^*$, alors le problème (4.3) admet une solution $u \in W_0^{s,2}(\Omega)$. De plus u est un point critique de J_λ.*

Démonstration. Comme $m \geq (2_s^*)' = \frac{2_s^*}{2_s^*-1} = \frac{2N}{N+2s}$ et $p+1 < 2_s^*$, alors la fonctionnelle d'énergie J_λ est bien définie. Il est clair que les solutions faibles de (4.3) sont les points critiques de J_λ.

Le cas $0 < p < 1$ s'obtient par minimisation globale. Donc on considère le cas $1 < p < 2_s^* - 1$ qui est plus pertinent.

Notre but est d'appliquer le théorème du col (Mountain pass) pour la fonctionnelle J_λ. On commence par démontrer que J_λ vérifie les conditions géométriques pour λ petit.

Notons que $J(0) = 0$. Pour $||u||_{W_0^{s,2}(\Omega)} = r$, on a par l'inégalité de Sobolev

$$\int_{I\!R^N}|u|^{p+1}(x)dx \leq C.(\int_{I\!R^N}|u|^{2_s^*}dx)^{\frac{p+1}{2_s^*}} \leq C.r^{p+1}.$$

D'autre part, par dualité, on déduit que

$$|\int_{I\!R} h(x).u(x)dx| \leq ||u||_{W_0^{s,2}(\Omega)}||h||_{L^{\frac{2N}{N+2s}}(\Omega)} \leq ||h||_{L^{\frac{2N}{N+2s}}(\Omega)}r.$$

Donc pour $||u||_{W_0^{s,2}(\Omega)} = r$, il résulte que

$$J_\lambda(u) \geq C_1r^2 - C_2.r^{p+1} - \lambda.C_3r \text{ pour } r \geq 0.$$

On pose $A(r,\lambda) = C_1r^2 - C_2.r^{p+1} - C_3\lambda r$. Pour $\lambda = 0$ on a $A(r,0) = C_1r^2 - C_2.r^{p+1}$. Donc Il existe $0 < r_0 < \overline{r} = (\frac{C_1}{C_2})^{\frac{1}{p-1}}$, tel que $A(r_0) \geq \alpha > 0$. Donc par continuité, on déduit l'existence de $\lambda^* > 0$ tel que si $\lambda < \lambda^*$, alors $A(r_0,\lambda) > \frac{\alpha}{2}$.

Donc on a prouver qu'il existe $r_0 > 0$ et $\lambda < \lambda^*$, telles que si $||u||_{W_0^{s,2}(\Omega)} = r_0$, alors $J_\lambda(u) \geq \frac{\alpha}{2}$.

Soit maintenant $w = t.v \in W_0^{s,2}(\Omega)$ où $||v|| = 1$, alors $||w|| = t||v|| = t \to \infty$ quand $t \to \infty$. Donc pour $t >> 0$ très grand, $||w|| >> r$. De plus on a

$$\lim_{t\to+\infty} J_\lambda(tv) = -\infty.$$

Donc pour t très grand on a $||w|| >> r$ et $J_\lambda(w) << 0$. Donc J_λ vérifie les conditions géométriques du théorème de col.

Il reste à prouver que J_λ vérifie la condition de Palais-Smale.
Soit $\{u_n\}_n$ une suite de $W_0^{s,2}(\Omega)$ telle que :

$$J_\lambda(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad J'(u_n) \to 0 \text{ dans } H^{-s}(\Omega).$$

avec $H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))'$.
On commence d'abord par montrer que $\{u_n\}_n$ est bornée. On a

$$< J'_\lambda(u_n), u_n >= C.||u_n||^2_{W_0^{s,2}} - \int_\Omega |u_n|^{p+1}(x)dx - \lambda \int_\Omega h(x).u_n(x)dx.$$

Par soustraction, il résulte que

$$J_\lambda(u_n) - \frac{1}{p+1} < J'_\lambda(u_n), u_n >= (\frac{C}{2} - \frac{C}{p+1})||u_n||^2_{W_0^{s,2}} - \lambda(1 - \frac{1}{p+1}) \int_{I\!R^N} h(x).u_n(x)dx.$$

Notons que pour n grand,

$$|J_\lambda(u_n)| + \frac{1}{p+1}||J'_\lambda(u_n)||.||u_n|| \leq \widehat{C} + \varepsilon ||u_n||_{W_0^{s,2}},$$

avec ε petit. Donc

$$\frac{C(p-1)}{2.(p+1)}||u_n||^2_{W_0^{s,2}} - C||u_n||^2_{W_0^{s,2}} \leq \widehat{C} + \varepsilon ||u_n||_{W_0^{s,2}}.$$

Donc

$$||u_n||^2_{W_0^{s,2}} \leq \widetilde{C} + \overline{C}||u_n||_{W_0^{s,2}}.$$

Par conséquent on déduit que $\{u_n\}_n$ est une suite bornée de $W_0^{s,2}(\Omega)$ qui est un espace réflexif.
Donc il existe une sous suite notée $\{u_n\}_n$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{s,2}$.
Par le théorème de Rellich-Kondrachov fractionnaire, à une sous suite on déduit que $u_n \to u$ fortement dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, 2_s^*)$. En particulier pour $q = p+1$. Donc

$$\int_\Omega |u_n - u|^{p+1} dx \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Notons que $(-\Delta)^s u_n \xrightarrow{n\to\infty} (-\Delta)^s u$ au sens de dualité. Alors pour $v \in W_0^{s,2}(\Omega)$, on obtient que

$$\begin{aligned} < J'_\lambda(u_n), v >&= \int_\Omega (-\Delta)^s u_n.v - \int_\Omega |u_n|^{p-1}.u_n.v - \lambda \int_\Omega h.u_n.v \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega (-\Delta)^s u.v - \int_\Omega |u|^{p-1}.u.v - \lambda \int_\Omega h.u.v = 0. \end{aligned}$$

Donc $J'_\lambda(u) = 0$. D'autre part on a

$$\begin{aligned} &< J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u > \\ = &\int_\Omega (-\Delta)^s (u_n - u).(u_n - u) - \int_\Omega (|u_n|^{p-1}.u_n - |u|^{p-1}.u).(u_n - u) - \lambda \int_\Omega h.(u_n - u)^2 \\ &= ||u_n - u||^2_{w_0^{s,2}} + o(1) \end{aligned}$$

Comme $< J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u >= o(1)$, il résulte que $||u_n - u||^2_{W_0^{s,2}(\Omega)} = o(1)$. D'où la condition de Palais-Smale est vérifiée.

Conclusion : La fonctionnelle J_λ vérifie toutes les hypothèses du théorème du col, donc si l'on pose

$$B := \{\varphi([0,1]); \varphi \in C([0,1], W_0^{s,2}(\Omega)), \varphi(0) = 0, \varphi(1) = w\},$$

et :

$$\widetilde{c} := \inf_{\varphi \in B} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(\varphi(t)),$$

alors $\widetilde{c}$ est une valeur critique de J_λ, et $c \geq \alpha > 0$. Donc il existe $u_0 \neq 0$ telle que $J_\lambda(u_0) = \widetilde{c}$ et $J'_\lambda(u_0) = 0$. Donc u_0 est une solution non triviale de (4.3). $\square$

Chapitre 5

Regularité locale et fractionnaire.

Considérons l'équation de Poisson fractionnaire suivante

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $\Omega \subset I\!R^N$ est un domaine régulier borné et $f \in L^m(\Omega)$ avec $m \geq 1$. L'objectif principal de ce chapitre est d'obtenir des résultats généraux de régularité de type Calderón-Zygmund pour u dans un espace de Sobolev fractionnaire approprié. La preuve du résultat principal sera donnée en plusieurs étapes selon la valeur de m.

5.0.1 Définition et propriétés principales.

Commençons par préciser la notion de solution faible.

Définition 5.1. *On dit que u est une solution faible au problème* (5.1) *si $u \in L^1(\Omega)$, $u \equiv 0 \in C_(\Omega) := I\!R^N \setminus \Omega$ et pour tout $\phi \in \mathbb{X}_s$, nous avons*

$$\int_\Omega u(-\Delta)^s \phi dx = \int_\Omega \phi(x)\, f(x) dx,$$

où

$$\mathbb{X}_s = \Big\{ \phi \in \mathcal{C}(I\!R^N) \,|\, supp(\phi) \subset \overline{\Omega},\ (-\Delta)^s \phi(x) \text{ est définie pour tout point } x$$

$$\text{avec } |(-\Delta)^s \phi(x)| < C \text{ dans } \Omega \Big\}.$$

Pour $\sigma \in \mathbb{R}$, nous définissons

$$T_k(\sigma) = \max(-k, \min(k, \sigma)) \quad \text{et} \quad G_k(\sigma) = \sigma - T_k(\sigma).$$

A partir de [28], [18] et [1] on a le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Supposons que $f \in L^1(\Omega)$, alors le problème (5.1) admet une solution faible unique u qui est obtenue comme limite de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la suite des solutions des problèmes approximant*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_n &= f_n(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ u_n &= 0 \quad \text{dans } I\!R^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

avec $f_n = T_n(f)$. De plus,

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ fortement dans } W_0^{s,2}(\Omega), \quad \forall k > 0, \tag{5.3}$$

$$u \in L^\theta(\Omega), \qquad \forall\, \theta \in \big(1, \frac{N}{N-2s}\big) \tag{5.4}$$

et

$$u \in W_0^{s_1,r}(\Omega), \qquad \forall s_1 < s \text{ et } \forall\, r \in \big(1, \frac{1}{s}\big). \tag{5.5}$$

De plus,

$$u_n \to u \text{ fortement dans } W_0^{s_1,r}(\Omega). \tag{5.6}$$

Le résultat de compacité suivant sera utiliser d'une manière fondamentale dans le dernier chapitre. Voir [3] pour la preuve.

Théorème 5.2. *Soit $s \in (0,1)$,$\Omega \subset I\!R^N$ un domaine borné. Pour $f \in L^1(\Omega)$ et $\theta < \frac{N}{N-s}$, on considère l'opérateur linéaire $T : L^1(\Omega) \to W_0^{s,\theta}(\Omega)$, où $T(f) = u$ est la solution faible unique du problème (5.1). Alors T est compact.*

Soit $\mathcal{G}_s(x,y)$ la fonction de Green associée au laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$, alors $\mathcal{G}_s(x,y)$ résout le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)_y^s \mathcal{G}_s(x,y) &= \delta_x \quad \text{si } y \in \Omega, \\ \mathcal{G}_s(x,y) &= 0 \quad \text{si } y \in I\!R^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{5.7}$$

où $x \in \Omega$ est fixe.

Notons que si u est solution de (5.1), alors

$$u(x) = \int_\Omega \mathcal{G}_s(x,y) f(y) dy.$$

Soit Ω un domaine régulier borné de $I\!R^N$, puisque, en général, nous n'avons pas de formule explicite pour la solution de problème (5.1), on va utiliser les propriétés de la fonction de Green pour montrer des estimations sur u.

Commençons par le résultat suivant prouvé dans [9], [10] et [17].

Lemme 5.1. *Supposons que $s \in (0,1)$, alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_s(x,y) &\simeq \frac{1}{|x-y|^{N-2s}} \left(\frac{\delta^s(x)}{|x-y|^s} \right) \left(\frac{\delta^s(y)}{|x-y|^s} \right) \\ &\simeq \frac{1}{|x-y|^{N-2s}} \left(\frac{\delta^s(x)\delta^s(y)}{|x-y|^{2s}} \right) \end{aligned} \tag{5.8}$$

en particulier nous avons

$$\mathcal{G}_s(x,y) \le C_1 \min\{\frac{1}{|x-y|^{N-2s}}, \frac{\delta^s(x)}{|x-y|^{N-s}}, \frac{\delta^s(y)}{|x-y|^{N-s}}\}. \tag{5.9}$$

De plus pour $x \in \Omega$ on a

$$|\nabla_x \mathcal{G}_s(x,y)| \le C_2 \mathcal{G}_s(x,y) \max\{\frac{1}{|x-y|}, \frac{1}{\delta(x)}\}. \tag{5.10}$$

Par conséquent, pour tout $x, y \in \Omega$,

$$|\nabla_x \mathcal{G}_s(x,y)| \le \frac{C_3}{|x-y|^{N-2s+1}\delta^{1-s}(x)}. \tag{5.11}$$

Si $s > \frac{1}{2}$, alors $|\nabla_x \mathcal{G}_s(x,y)| \in L^1(\Omega \times \Omega)$.

Enfin rappelons le résultat suivant sur les intégrales singulières, prouvé dans le livre de Stein [35].

Lemme 5.2. [35, Theorem I, Section 1.2, Chapter V] Soit $0 < \lambda < N$ et $1 \le p < \ell < \infty$ tels que $\dfrac{1}{\ell} + 1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{\lambda}{N}$. Pour $g \in L^p(I\!R^N)$, on définit la nouvelle fonction

$$h(x) = \int_{I\!R^N} \frac{g(y)}{|x-y|^\lambda} dy.$$

Alors

$a)$ h est bien définie et on a

$b)$ Si $p > 1$, alors $\|h\|_{L^\ell(I\!R^N)} \le c_{p,q}\|g\|_{L^p(I\!R^N)}$.

$c)$ Si $p = 1$, alors $\big|\{x \in \mathbb{R}^N \,|h(x) > \sigma\}\big| \le \left(\dfrac{A\|g\|_{L^1(I\!R^N)}}{\sigma}\right)^\ell$.

5.1 Régularité de la solution u

Dans cette section on va étudier la régularité de u en fonction de celle de f. Rappelons que u est donnée par la formule

$$u(x) = \int_\Omega \mathcal{G}_s(x,y) f(y) dy.$$

Alors on a le résultat suivant.

Théorème 5.3. *Supposons que $f \in L^m(\Omega)$ avec $m \ge 1$ et soit u la solution unique du problème* (5.1)*, alors*

1. *Si $m = 1$, alors $u \in L^r(\Omega)$, $\dfrac{u}{\delta^s} \in L^\sigma(\Omega)$ pour tout $r < \frac{N}{N-2s}, \sigma < \frac{N}{N-s}$. De plus on a*

$$||u||_{L^r(\Omega)} + ||\frac{u}{\delta^s}||_{L^\sigma(\Omega)} \le C(\Omega, s, N)||f||_{L^1(\Omega)}.$$

2. *Si* $1 < m < \frac{N}{2s}$, *alors* $u \in L^{\frac{mN}{N-2ms}}(\Omega)$, $\dfrac{u}{\delta^s} \in L^{\frac{mN}{N-ms}}(\Omega)$ *et*

$$||u||_{L^{\frac{mN}{N-2ms}}(\Omega)} + ||\frac{u}{\delta^s}||_{L^{\frac{mN}{N-ms}}(\Omega)} \leq C(\Omega, s, N, m)||f||_{L^m(\Omega)}.$$

3. *Si* $m = \frac{N}{2s}$, *alors* $u \in L^r(\Omega)$ *pour tout* $r < \infty$, $\dfrac{u}{\delta^s} \in L^{\frac{mN}{N-ms}}(\Omega)$ *et*

$$||u||_{L^r(\Omega)} + ||\frac{u}{\delta^s}||_{L^{\frac{mN}{N-ms}}(\Omega)} \leq C(\Omega, s, N, m)||f||_{L^m(\Omega)}.$$

4. *Si* $\frac{N}{2s} < m < \frac{N}{s}$, *alors* $u \in L^\infty(\Omega)$, $\dfrac{u}{\delta^s} \in L^{\frac{mN}{N-ms}}(\Omega)$ *et*

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} + ||\frac{u}{\delta^s}||_{L^{\frac{mN}{N-ms}}(\Omega)} \leq C(\Omega, s, N, m)||f||_{L^m(\Omega)}.$$

5. *Si* $m = \frac{N}{s}$, *alors* $u \in L^\infty(\Omega)$, $\dfrac{u}{\delta^s} \in L^p(\Omega)$ *pour tout* $p < \infty$ *et*

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} + ||\frac{u}{\delta^s}||_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, s, N, m)||f||_{L^m(\Omega)}.$$

6. *Si* $m > \frac{N}{s}$, *alors* $u \in L^\infty(\Omega)$, $\dfrac{u}{\delta^s} \in L^\infty(\Omega)$ *et*

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} + ||\frac{u}{\delta^s}||_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega, s, N, m)||f||_{L^m(\Omega)}.$$

Démonstration. Puisque $m \geq 1$, alors on sait que $|u| \in M^{\hat{p}_*}(\Omega)$ avec $\hat{p}_* = \frac{N}{N-2s}$ et

$$||u||_{L^\theta(\Omega)} \leq C(N, q, \Omega)||f||_{L^1(\Omega)},$$

pour tout $\theta < \hat{p}_*$. Rappelons que

$$u(x) = \int_\Omega \mathcal{G}_s(x, y)f(y)dy.$$

Alors par les propriétés du noyau de Green, on déduit que

$$|u(x)| \leq \int_\Omega |\mathcal{G}_s(x, y)||f(y)|dy \leq C \int_\Omega \frac{|f(y)|}{|x-y|^{N-2s}}dy.$$

Soit

$$g(x) = \int_\Omega \frac{\tilde{f}(y)}{|x-y|^{N-2s}}dy$$

où

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{si} \quad x \in \Omega, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{5.12}$$

D'où
$$|u| \le g \text{ dans } \Omega.$$
Puisque $\tilde{f} \in L^m(I\!R^N)$, alors par le lemme 5.2, $g \in L^{\frac{mN}{N-2sm}}(I\!R^N)$ si $m < \frac{N}{2s}$ et en particulier $g \in L^p(\Omega)$ pour tout $p \le \frac{mN}{N-2sm}$. Par conséquent, nous concluons.

Si $m = \frac{N}{2s}$, alors en répétant l'argument ci-dessus avec $m_1 < m$, il résulte que $g \in L^p(\Omega)$ pour tout $p < \infty$.

Supposons que $m > \frac{N}{2s}$, puis en utilisant l'inégalité de Hölder,
$$\int_\Omega \frac{|f(y)|}{|x-y|^{N-2s}} dy \le C(\Omega)||f||_{L^m(\Omega)} \text{ pour tous } x \in \Omega.$$
Donc
$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C||f||_{L^m(\Omega)}.$$
Pour estimer $\frac{u(x)}{\delta^s(x)}$, on utilise le fait que
$$|u(x)| \le \int_\Omega |\mathcal{G}_s(x,y)||f(y)|dy \le C\delta^s(x) \int_\Omega \frac{|f(y)|}{|x-y|^{N-s}} dy.$$
Donc
$$\frac{|u(x)|}{\delta^s(x)} \le C \int_\Omega \frac{|f(y)|}{|x-y|^{N-s}} dy.$$
Ainsi, l'estimation souhaitée est obtenue en appliquant le même argument ci-dessus.

□

5.2 Régularité du "gradient local" de la solution

Dans le cas où $s \in (0, \frac{1}{2})$, on obtient plus de régularité sur u. Le résultat suivant est prouvé dans [5].

Théorème 5.4. *Supposons que $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ et que $f \in L^m(\Omega)$, on pose $v(x) = u(x)\delta^{1-s}(x)$, alors on a*

1. *Si $m = 1$, alors $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < \frac{N}{N-(2s-1)}$ et*
$$||v||_{W_0^{1,q}(\Omega)} \le C(\Omega, s, N, q)||f||_{L^1(\Omega)}.$$
2. *Si $1 < m < \frac{N}{2s-1}$, alors $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q \le \frac{N}{N-m(2s-1)}$ et*
$$||v||_{W_0^{1,q}(\Omega)} \le C(\Omega, s, N, q)||f||_{L^m(\Omega)}.$$
3. *Si $m = \frac{N}{2s-1}$, alors $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < \infty$ et*
$$||v||_{W_0^{1,q}(\Omega)} \le C(\Omega, s, N, q)||f||_{L^m(\Omega)}.$$

4. Si $m > \frac{N}{2s-1}$, alors $|\nabla v| \in L^{\infty}(\Omega)$ et

$$|||\nabla v||_{L^{\infty}(\Omega)} \leq C(\Omega, s, N, m)||f||_{L^{m}(\Omega)}.$$

Démonstration. On utilisant la linéarité de notre problème et sans perte de généralité, on peut supposer que $f \geq 0$. Puisque $m \geq 1$, alors on sait que $|\nabla u| \in M^{p_*}(\Omega)$ avec $p_* = \frac{N}{N-2s+1}$ et

$$||\nabla u||_{L^{\theta}(\Omega)} \leq C(N, q, \Omega)||f||_{L^{1}(\Omega)},$$

pour tout $\theta < p_*$. Il est clair que

$$u(x) = \int_{\Omega} \mathcal{G}_s(x, y) f(y) dy.$$

Ainsi

$$\nabla u(x) = \int_{\Omega} \nabla_x \mathcal{G}_s(x, y) f(y) dy,$$

alors par (5.11), il vient que

$$|\nabla u(x)| \leq \int_{\Omega} |\nabla_x \mathcal{G}_s(x, y)| f(y) dy \leq \frac{C}{\delta^{1-s}(x)} \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2s+1}} dy.$$

Soit

$$g(x) = \int_{\Omega} \frac{\tilde{f}(y)}{|x-y|^{N-2s+1}} dy$$

où

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in \Omega, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{5.13}$$

D'où

$$|\nabla u| \lambda^{1-s} \leq g \text{ dans } \Omega.$$

Puisque $\tilde{f} \in L^m(I\!R^N)$, alors par le lemme 5.2, $g \in L^{\frac{mN}{N-m(2s-1)}}(I\!R^N)$ si $m < \frac{N}{2s-1}$ et en particulier $g \in L^p(\Omega)$ pour tout $p \leq \frac{mN}{N-m(2s-1)}$. Par conséquent, nous concluons.

Si $m = \frac{N}{2s-1}$, alors en répétant l'argument ci-dessus avec $m_1 < m$, il résulte que $g \in L^p(\Omega)$ pour tout $p < \infty$.

Supposons que $m > \frac{N}{2s-1}$, puis en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\int_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2s+1}} dy \leq C(\Omega)||f||_{L^m(\Omega)} \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Donc

$$\left\| |\nabla u| \delta^{1-s} \right\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq C||f||_{L^m(\Omega)}.$$

Rappelons que

$$\nabla u(x) = \int_{\Omega} \nabla_x \mathcal{G}_s(x,y) f(y) dy,$$

puis par le théorème de convergence dominée et le lemme de Vitali et puisque $m > \frac{N}{2s-1}$, alors ∇u est continue dans Ω.

Pour montrer que $|\nabla u|$ est Hölderienne, nous allons prouver que $|\nabla u| \in W^{2s-\gamma-1,l}(\Omega)$ où $0 < \gamma < 2s-1$ et $(2s-\gamma-1)l > N$. Par un argument de dualité similaire à celui utilisé dans [18].

Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, puis

$$|\int_{\Omega} \phi (-\Delta)^s u dx| = |\int_{\Omega} f\phi dx| \leq ||f||_{L^m(\Omega)} ||\phi||_{L^{m'}(\Omega)}.$$

Soit $l = \dfrac{Nm}{N-\gamma m}$ avec $\gamma \in [0,1]$ tel que $\gamma < \min\{(2s-1), \frac{N}{m}\}$. Puisque $m' = \dfrac{l'N}{N-l'\gamma}$, il est clair que $\frac{N}{2s-1} < m < l$.

Maintenant, en utilisant la définition de l et par l'inégalité de Sobolev, il s'ensuit que

$$|\int_{\Omega} \phi (-\Delta)^s u dx| \leq ||f||_{L^m(\Omega)} ||\phi||_{L^{\frac{l'N}{N-l'\gamma}}(\Omega)} \leq C ||f||_{L^m(\Omega)} ||\phi||_{W_0^{\gamma,l'}(\Omega)}$$

Ainsi $(-\Delta)^s u \in W^{-\gamma,l}(\Omega)$ et

$$||(-\Delta)^s u||_{W^{-\gamma,l}(\Omega)} \leq C ||f||_{L^m(\Omega)}.$$

Comme $(-\Delta)^s$ réalise un isomorphisme entre $W^{2s-\gamma,l}(\Omega)$ et $W^{-\gamma,l}(\Omega)$, on conclut que $u \in W^{2s-\gamma,l}(\Omega)$ et

$$||u||_{W^{2s-\gamma,l}(\Omega)} \leq C ||f||_{L^m}.$$

Puisque $2s-\gamma > 1$, alors $|\nabla v| \in W^{2s-\gamma-1,l}(\Omega)$. Maintenant, en utilisant la définition de l, nous arrivons facilement à voir que $(2s-\gamma-1)l > N$. Ainsi par l'inégalité de Morrey fractionnaire, $|\nabla v| \in \mathcal{C}^{0,\sigma}(\Omega)$ avec $\sigma = \frac{N}{(2s-\gamma-1)l}$ □

Remarque 5.1. *Notons que par le Lemme 5.1, on obtient*

$$u(x) \leq C\, \delta^s(x) \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-s}} dy.$$

Par conséquent de lemme 5.2, on obtient que $\dfrac{u}{\delta^s} \in L^{\frac{mN}{N-ms}}(\Omega)$ *et*

$$||\frac{u}{\delta^s}||_{L^{\frac{mN}{N-ms}}(\Omega)} \leq C(\Omega, s, N, m) ||f||_{L^m(\Omega)}.$$

De plus

$$|\nabla(u\delta^{1-s})| = |\delta^{1-s}\nabla u + (1-s)\frac{u}{\delta^s}\nabla\delta| \leq \delta^{1-s}|\nabla u| + (1-s)\frac{u}{\delta^s}|\nabla\delta|,$$

et puisque $|\nabla\delta| = 1$ *p.p. dans* Ω*, alors pour tout* $p \leq \frac{mN}{N-m(2s-1)}$*, on obtient*

$$|\nabla(u\delta^{1-s})|^p \leq C_1\delta^{(1-s)p}|\nabla u|^p + C_2(\frac{u}{\delta^s})^p.$$

D'où

$$\int_\Omega |\nabla(u\delta^{1-s})|^p dx \leq C_1\int_\Omega \delta^{(1-s)p}|\nabla u|^p dx + C_2\int_\Omega (\frac{u}{\delta^s})^p dx.$$

Il est clair que $\frac{mN}{N-m(2s-1)} < \frac{mN}{N-ms}$ *; donc par l'inégalité de Hölder, il s'ensuit que*

$$\left(\int_\Omega |\nabla(u\delta^{1-s})|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = ||u\delta^{1-s}||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C||f||_{L^m(\Omega)}.$$

5.3 Régularité du gradient fractionnaire de u

Pour étudier la régularité du gradient fractionnaire de u, on utilise un résultat récent prouvé dans [2] sur la régularité fractionnaire du noyau de Green. Plus précisément les auteurs dans [2] ont prouvé l'estimation suivante :

Théorème 5.5. *Soient* $s \in (0,1)$ *et* $s \leq t < \min\{1, 2s\}$*. Alors il existe une constante* $C > 0$ *(qui dépend seulement de* N, s, t *et* Ω*) telle que*

$$\left|(-\Delta)_x^{\frac{t}{2}} G_s(x,y)\right| \leq \frac{C}{|x-y|^{N-(2s-t)}}\left(1 + \left|\log|x-y|\right| + |\log\delta(x)| + \frac{|x-y|^{t-s}}{\delta^{t-s}(x)}\right), \quad \text{p. p } x, y \in \Omega,$$

ou $\delta(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

Comme application directe de l'estimation précédente on obtient le résultat de régularité fractionnaire global de type Calderon-Zygmund pour u.

Plus précisément, pour $s \in (0,1)$ et $s \leq t < \min\{1, 2s\}$, on définit

$$r^\star(s,t) := \begin{cases} \infty & \text{si } t = s. \\ \frac{1}{t-s} & \text{si } t > s. \end{cases} \tag{5.14}$$

Dans le cas où $f \in L^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{2s-t}$, nous avons le résultat de régularité globale.

Théorème 5.6. *Soient* $s \in (0,1)$ *et* $s \leq t < \min\{1, 2s\}$*. On considère* u *la solution faible unique du problème* (5.1) *avec* $f \in L^m(\Omega)$ *pour* $m > \frac{N}{2s-t}$*. Alors pour tout* $1 \leq p < r^*(s,t)$*, il existe une constante positive* $C = C(N, s, t, p, m, \Omega)$ *telle que*

$$\|(-\Delta)^{\frac{t}{2}} u\|_{L^p(I\!R^N)} \leq C\|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Ainsi $u \in L^{t,p}(I\!R^N)$ *pour tout* $1 < p < \frac{1}{t-s}$ *et*

$$\|u\|_{L^{t,p}(I\!R^N)} \leq C\|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Pour le cas général, on a besoin de définir quelques constantes additionnelles. Supposons que $s \leq t < \min\{1, 2s\}$ et $1 \leq m < \frac{N}{2s-t}$. On pose

$$m_\star(s,t) := \max\Big\{1, \frac{N}{N+s-N(t-s)} + \varepsilon\Big\}, \tag{5.15}$$

où ε est une constante positive arbitraire. Soit

$$p^\star(m,s,t) := \begin{cases} \frac{mN}{N-ms} & \text{pour } t = s. \\ \min\left\{\frac{mN}{N-ms+mN(t-s)}, \frac{1}{t-s}\right\} & \text{pour } t > s. \end{cases} \tag{5.16}$$

Dans [2], les auteurs ont prouvé le théorème suivant.

Théorème 5.7. *Soit $s \in (0,1)$ et $s \leq t < \min\{1, 2s\}$. Soit u la solution faible de (5.1) avec $f \in L^m(\Omega)$ et $m_\star(s,t) \leq m < \frac{N}{2s-t}$. Alors, pour tout $1 \leq p < p^\star(m,s,t)$, il existe une constante positive $C = C(N,s,t,p,m,\Omega)$ telle que*

$$\|(-\Delta)^{\frac{t}{2}} u\|_{L^p(I\!R^N)} \leq C\,\|f\|_{L^m(\Omega)}\,.$$

Donc $u \in L^{t,p}(I\!R^N)$ pour tout $1 \leq p < p^\star(m,s,t)$ et

$$\|u\|_{L^{t,p}(I\!R^N)} \leq C\|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Comme conséquence directe de la relation entre l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{t,p}(I\!R^N)$ et l'espace potentiel de Bessel $L^{t,p}(I\!R^N)$, nous obtenons la conclusion suivante

Corollaire 5.1. *Soit $s \in (0,1)$, $s \leq t < \min\{1, 2s\}$. Considérons u, la solution du problème 5.1 avec $f \in L^m(\Omega)$. Alors*

1. *Si $m_\star(s,t) \leq m < \frac{N}{2s-t}$, , on a, pour tout $1 < p < p^\star(m,s,t)$, il existe $C = C(N,s,t,m,p,\Omega)$ tel que*

$$\|u\|_{W^{t,p}(I\!R^N)} \leq C\|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

2. *Si $m \geq \frac{N}{2s-t}$, alors, pour tout $1 < p < r^\star(s,t)$, il existe $C = C(N,s,t,m,p,\Omega)$ tel que*

$$\|u\|_{W^{t,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Chapitre 6

Application

On s'intèresse maintenant au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (-\Delta)^s u & = & |u|^{p-1}u + \lambda.h & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{dans } (I\!R \setminus \Omega) \end{array} \right. \qquad (6.1)$$

où Ω est un domaine borné de $I\!R^N$, $s \in (0,1), 1 < p < \infty$, $h \in L^m(\Omega)$ pour $m \geq 1$ a déterminer en fonction de p. Notre but est de trouver des conditions optimales sur λ et g pour prouver l'existence d'une solution pour p libre.

On note $f = |u|^{p-1}u + \lambda.h$, avec $f \in L^\sigma(\Omega)$. Si $1 < p \leq 2_s^* - 1$, le problème admet une structure variationnelle, le problème a été étudié dans le chapitre 2 par l'argument du col. Les solutions de (6.1) sont obtenues comme des points critiques de la fonctionnelle d'énergie J définie par

$$J_\lambda(u) = \frac{C_{N,s}}{2} \int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \frac{1}{p+1} \int_{I\!R^N} |u(x)|^{p+1} dx - \lambda \int_{I\!R} h(x).u(x)dx,$$

où $u \in W_0^{s,2}(\Omega)$. D'après notre étude présentée dans le chapitre 2, pour λ petit, la fonctionnelle J_λ a la géométrie du col et on peut appliquer le Théorème de Ambosetti-Rabinowitz.

Par contre si $p > 2_s^* - 1$, alors J_λ n'est pas définie dans $W_0^{s,2}(\Omega)$ et on a besoin de changer de méthode pour prouver l'existence d'une solution.

Le résultat principal dans ce cas sera le théorème suivant :

Théorème 6.1. *Soit $s \in (0,1)$ et $\Omega \subset I\!R^N$ un domaine borné. Supposons que $1 \leq p$ et que $m > \frac{N(p-1)}{2ps}$. Alors il existe $\lambda^* > 0$ telle que si $\lambda < \lambda^*$, alors le problème* (6.1) *admet une solution $u \in W_0^{s,\sigma}(\Omega)$ pour tous $\sigma < \frac{mN}{N-ms}$.*

on rappel que si $p < 2_s^* - 1$, en peut utilisé des arguments variationnels et on arrive à prouver l'existence d'une solution comme a été prouvé dans le deuxième chapitre.

Démonstration. on suppose dans cette partie que $p \geq 2_s^* - 1$, c'est le cas où on arrive pas à appliquer les arguments variationnels.

On va utiliser le Théorème du point fixe de Schauder.

Soit $1 < q_0 < \frac{N}{N-s}$ fixé. On considère $r > 1$ tel que $pm < r < \frac{mN}{N-2sm}$.

On considère l'équation algébrique suivante :

$$C_1(C(\Omega)l + \lambda||h||_{L^m(\Omega)}) = l^{\frac{1}{p}}$$

où $C_1, C(\Omega)$ sont des constantes universelles qui peuvent dépendre de Ω. Comme $p > 1$, alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que si $0 < \lambda < \lambda^*$, alors l'équation algébrique précédente admet une seule solution l. Fixons les paramètres précédents, et considérons l'ensemble

$$E = \{u \in W_0^{s,q_0}(\Omega) \text{ telle que } ||u||_{L^r(\Omega)} \leq l\}.$$

Alors E est un ensemble convexe et fermé de $W_0^{s,q_0}(\Omega)$.
Il est clair que E est convexe puisque il est définit à l'aide de la norme de L^r. Montrons que E est fermé dans $W_0^{s,q_0}(\Omega)$.

Soit $\{v_n\}_n \subset E$, telle que $v_n \to v$ fortement dans $W_0^{s,q_0}(\Omega)$. Donc $\{v_n\}_n$ est bornée dans $L^r(\Omega)$. En utilisant le Théorème de Rellich-Kondrachov fractionnaire on déduit que $v_n \to v$ fortement dans $L^{q_0}(\Omega)$. Donc à une sous suite notée toujours $\{v_n\}_n$, il résulte que $v_n \to v$ p.p. dans Ω. Par le Lemme de Fatou, il découle que

$$||v||_{L^r(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} ||v_n||_{L^r(\Omega)} \leq C.$$

Donc $v \in L^r(\Omega)$ et par conséquent E est un fermé de $W_0^{s,q_0}(\Omega)$.

Soit maintenant l'opérateur $T : E \to W_0^{s,q_0}(\Omega)$ définit par $T(v) = u$ ou u est la solution du problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = |v|^{p-1}v + \lambda h & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } (I\!R^N \setminus \Omega). \end{cases} \tag{6.2}$$

On va commencer par prouver que T est bien défini. Soit $f = |v|^{p-1}v + \lambda h$, montrons que $f \in L^m(\Omega)$. Par hypothèse $h \in L^m(\Omega)$. Maintenant on a

$$|||v|^{p-1}v||_{L^m(\Omega)} = ||v||^p_{L^{pm}(\Omega)} \leq C(\Omega)||v||^p_{L^r(\Omega)} = C(\Omega)l.$$

Donc $f \in L^m(\Omega)$. Par le Théorème (5.3) on déduit l'existence et l'unicité de u,on peut déduire encore par les résultat de régularité que $u \in W_0^{s,\sigma}(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-s}$, en particulier pour $\sigma = q_0$. Donc T est bien définit.

Montrons maintenant que avec le choix de l, on a $T(E) \subset E$. Effectivement, comme $f \in L^m(\Omega)$, alors $u \in L^{\frac{mN}{N-2ms}}(\Omega)$ et

$$||u||_{L^{\frac{mN}{N-2ms}}(\Omega)} \leq C_1||f||_{L^m(\Omega)}.$$

D'après le calcul précédent on a

$$\begin{aligned} ||f||_{L^m(\Omega)} &\leq |||v|^{p-1}v||_{L^m(\Omega)} + \lambda||h||_{L^m(\Omega)} \\ &\leq C(\Omega)||v||^p_{L^r(\Omega)} + \lambda||h||_{L^m(\Omega)} \\ &\leq C(\Omega)l + \lambda||h||_{L^m(\Omega)}. \end{aligned}$$

d'autre part, et comme $r < \frac{mN}{N-2ms}$, il résulte de l'inégalité de Hölder que

$$||u||_{L^r(\Omega)} \leq C(\Omega)||u||_{L^{\frac{mN}{N-2ms}}(\Omega)}.$$

Donc en combinant les calculs ci-dessus, nous arrivons à montrer que

$$||u||_{L^r(\Omega)} \leq C_1(C(\Omega)l + \lambda||h||_{L^m(\Omega)}) \leq l^{\frac{1}{p}},$$

d'après le choix de l. Donc $u \in E$.

On va prouver maintenant que T est continu.
Soit $\{v_n\}_n \subset E$ une suite de E telle que $v_n \to v$ fortement dans $W^{1,q_0}(\Omega)$. Soient $u_n = T(v_n), u = T(v)$ et $w_n = u_n - u$. D'aprés l'inégalité de Sobolev on déduit que $v_n \to v$ fortement dans $L^a(\Omega)$ pour tous $a \leq \frac{q_0 N}{N-q_0 s}$. En particulier pour $a = q_0$. Comme $\{v_n\}_n \subset E$, alors $||v_n||_{L^r(\Omega)} \leq C$. Comme $r > q_0$, par interpolation on déduit que pour tous $\gamma \in [q_0, r)$, on aura, pour $\theta \in (0,1)$,

$$||v_n - v||_{L^\gamma(\Omega)} \leq ||v_n - v||^{\theta}_{L^r(\Omega)}||v_n - v||^{1-\theta}_{L^{q_0}(\Omega)} \leq C||v_n - v||^{1-\theta}_{L^{q_0}(\Omega)}.$$

Donc pour tout $\gamma \in [q_0, r)$

$$||v_n - v||_{L^\gamma(\Omega)} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Comme

$$\begin{cases} (-\Delta)^s w_n &= |v_n|^{p-1}v_n - |v|^{p-1}v & \text{dans } \Omega \\ w_n &= 0 & \text{dans } (I\!R^n \setminus \Omega), \end{cases}$$

par le fait que

$$|v_n|^{p-1}v_n - |v|^{p-1}v \text{ fortement dans } L^m(\Omega),$$

d'après le Théorème 5.3, il découle que que $w_n \to 0$ fortement dans $W^{s,\sigma}_0(\Omega)$ pour tous $\sigma < \frac{N}{N-s}$, en particulier pour $\sigma = q_0$. Donc T est continu.

Montrons maintenant que T est compact.
Soit $\{v_n\}_n \subset E$ une suite bornée dans $W^{s,q_0}_0(\Omega)$, alors

$$||v_n||_{W^{s,q_0}(\Omega)} \leq c \text{ et } ||v_n||_{L^{r_0}(\Omega)} \leq l.$$

On pose $u_n = T(v_n)$, alors

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_n &= |v_n|^{p-1}v_n + \lambda.h & \text{sur } \Omega \\ u_n &= 0 & \text{dans } (I\!R^N \setminus \Omega) \end{cases}$$

Si on pose $f_n = |v_n|^{p-1}v_n + \lambda.h$, par le même calcul précédent on déduit que $||f_n||_{L^m(\Omega)} \leq c$ pour tout n. D'après le Théorème de compacité 5.2, il s'ensuit que la suite $\{u_n\}_n$ est relativement compacte dans $W^{s,\sigma}_0(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-s}$. En particulier, pour $\sigma = q_0$, on obtient l'existence d'une sous suite notée $\{u_n\}_n$ qui converge fortement dans $W^{s,q_0}_0(\Omega)$. Donc T est compact.

Conclusion :

Comme T est un opérateur continu compact défini de E dans E, avec E un convexe fermé, on déduit par le théorème du point fixe de Schauder que T admet un point fixe dans E. Donc il existe $u \in E$ tel que $T(u) = u$ et par conséquence u est une solution de problème (6.1) avec $u \in W_0^{s,\sigma}(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{mN}{N-ms}$, car $|u|^p + \lambda|h| \in L^m(\Omega)$. □

Remarque 6.1.

1. *Si la fonction $h \gneq 0$, alors on peut prouver l'existence d'une solution positive. Il suffit de considérer le problème*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= u_+^p + \lambda.h & \textit{dans } \Omega \\ u &= 0 & \textit{dans } (I\!R^N \setminus \Omega), \end{cases}$$

   et d'appliquer le principe du maximum.

2. *La condition λ petit, semble être optimale, au moins pour prouver l'existence d'une solution positive. Pour prouver cette affirmation, on considère φ_1 la solution positive de problème*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s \varphi_1 &= \lambda_1.\varphi_1 & \textit{sur } \Omega \\ \varphi_1 &= 0 & \textit{sur } (I\!R^N \setminus \Omega) \\ \textit{tel que } ||\varphi_1||_{L^1} = 1. & & \end{cases}$$

   Soit u une solution positive de problème (4.3), testons alors le problème de u par la fonction φ_1, il résulte que

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx = \int_\Omega u((-\Delta)^s)\varphi_1 dx = \int_\Omega u^p\varphi_1 + \lambda. \int_\Omega h\varphi_1 dx.$$

   Comme $p > 1$, par l'inégalité de Young on déduit que

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \geq \varepsilon \int_\Omega u^p\varphi_1 dx + C(\varepsilon) \int_\Omega \varphi_1 dx.$$

   Choisissons $\varepsilon < 1$ petit, on obtient que

$$\lambda. \int_\Omega h\varphi_1 dx \leq C(\varepsilon) \int_\Omega \varphi_1 dx.$$

   Donc

$$\lambda \leq \frac{C(\varepsilon) \int_\Omega \varphi_1 dx}{\int_\Omega h\varphi_1 dx} = \lambda^*.$$

   Par conséquence, si $\lambda > \lambda^*$, alors le problème (4.3) n'admet pas de solution positive.

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui, A. Attar, R. Bentifour, On the fractional p-laplacian equations with weights and general datum. Adv. Nonlinear Anal. 8(2019), 144-174

[2] B. Abdellaoui, A. J. Fernández, T. Leonori and A. Younes, Global fractional Calderón–Zygmund regularity . https ://arxiv.org/pdf/2107.06535.pdf

[3] B. Abdellaoui, A. J. Fernández, T. Leonori and A. Younes, Deterministic KPZ equations with nonlocal "gradient terms, preprint. 2021

[4] B. Abdellaoui, A. J. Fernandez, Fractional elliptic problem with non local gradient : regularity and existence results. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, page 1-37. DOI :10.1017/prm.2019.60.

[5] B. Abdellaoui, I. Peral, Towards a deterministic KPZ equation with fractional diffusion : the stationary problem. Nonlinearity 31(2018), 1260-1298. (arXiv :1609.04561v4 [math.AP] 21 Apr 2020.)

[6] R. A. Adams, Sobolev spaces. Academic Press, New York, 1975.

[7] D. R. Adams, L. I. Hedberg, Function spaces and potential theory. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 314, 1996.

[8] D. Applebaum, *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **116.** 2009.

[9] K. Bogdan, T. Byczkowski, *Potential theory for the a-stable Schrödinger operator on bounded Lipschitz domain*, Studia Math. **133** (1999), 53-92.

[10] K. Bogdan, T. Jakubowski, *Estimates of the Green Function for the Fractional Laplacian Perturbed by Gradient*, Potential Anal **36** (2012), 455-481.

[11] K. Bogdan, T. Kulczycki, A. Nowak, *Gradient estimates for harmonic and $q-$harmonic funcitons of Symmetric stable processes,* Illinois J. Math. **46** (2002) no 2, 541-556 .

[12] K. Bogdan, T. Kulczycki, M. Kwaśnicki, *Estimates and structure of a-harmonic functions*. Probab. Theory Relat. Fields, **140** (2008), 345-381.

[13] K. Bogdan, B. Dyda, The best constant in a fractional Hardy inequality. Math. Nachrichten 284 (2011), no (5-6), 629-638.

[14] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Universitext 2011.

[15] H. Brezis, P. Mironescu, Gagliardo Nirenberg inequalities and non-inequalities : The full story. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 35(5), (2018), 1355-1376.

[16] L.Caffarelli and A. Vasseur, *Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation.* Ann. of Math., 171(3)1903-1930, 2010.

[17] Z. Chen, R. Song, *Estimates on Green functions and Poisson kernels for symmetric stable process,* Math. Ann. 312, (1998), 465-501.

[18] H. Chen, L. Veron, *Semilinear fractional elliptic equations involving measures*, J. Differential Equations 257 (2014) 1457-1486.

[19] R.Cont and P.Tankov, *Financial modelling with jump processes.* Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[20] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. math. **136** (2012), no. 5, 521-573.

[21] S.Dipierro, G.Palatucci, and E.Valdinoci, *Dislocation dynamics in crystals : a macroscopic theory in a fractional Laplace setting.* Comm. Math. Phys., 333(2) :1061-1105, 2015.

[22] B. Dyda, Fractional calculus for power functions and eigenvalues of the fractional Laplacian. Fract. Calc. Appl. Anal., 15(4), (2012), 536-555.

[23] S.Filippas, L. Moschini, A. Tertikas, Sharp Trace Hardy Sobolev Mazya Inequalities and the Fractional Laplacian. Arch. Rational Mech. Anal. 208 (2013) 109-161.

[24] M. Kwasnicki *Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator*, Journal Fractional Calculus and Applied Analysis https ://doi.org/10.1515/fca-2017-0002

[25] T. Kulczycki, *Gradinet estimates of $q-$ harmonic functions of fractional schrodinger operator*, Potential Analysis **39**, 2013, No. 1, 69-98.

[26] T. Kulczycki, *Properties of Green function of symmetric stable processes.* Probab. Math. Statist., **17**, 2, Acta Univ. Wratislav. No. 2029, 339-364, 1997.

[27] N. Laskin,*Fractional quantum mechanics and lévy path integrals.*Physics Letters A, 268(4) :298-305, 2000.

[28] T. Leonori, I. Peral, A. Primo, F. Soria, *Basic estimates for solution of elliptic and parabolic equations for a class of nonlocal operators*, Discrete and Continuous Dynamical Systems- A, 35 (2015) no 12 6031-6068.

[29] M. Loss, C. Sloane, *Hardy inequalities for fractional integrals on general domains*, Journal of Functional Analysis Vol. 259, No 6, (2010), 1369-1379.

[30] A. C. Ponce, *Elliptic PDEs, measures and capacities. From the Poisson equations to nonlinear Thomas-Fermi problems.* volume 23 of EMS Tracts in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2016.

[31] M. Riesz, *Intégrales de Riemann-Liouville et potenciels*, Acta Sci. Math. Szeged 9 (1938), 1-42.

[32] T.T. Shieh, D. Spector, On a new class of fractional partial differential equations. Adv. Calc. Var., 8(4), (2014), 321-336.

[33] T.T. Shieh, D. Spector, On a new class of fractional partial differential equations II. Adv. Calc. Var. 11(3), (2017), 289-307.

[34] G. Stampacchia, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15** (1965), 189-258.

[35] E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, Princeton N.J. 1970.

[36] E. M. Stein, The characterization of functions arising as potentials. Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 102-104.

[37] E. M. Stein, G. Weiss, Fractional integrals on $n-$dimensional Euclidean space. J. Math. Mech. 7 (1958), 503-514.
1998