République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Spécialité : Biomathématiques et Modélisation

Mémoire de Master

présenté par

SBIA Manel

Soutenu le : 29 / 09 / 2021

Contrôle optimal d'un système proie-prédateur

Soutenu devant le jury composé de :

M. Mohammed Tarik TOUAOULA	Professeur, Université de Tlemcen	Président
M. Ali MOUSSAOUI	Professeur, Université de Tlemcen	Examinateur
Mme. Zolikha MAHLIA	MCB, ESSAT	Encadreur
M. Didier CLAMOND	Professeur, Université de Nice	Co-Encadreur

Année Universitaire : 2020-2021

Dédicace

Je dédie ce travail à mes parents, ma mère qui était la raison pour laquelle j'ai choisi ce magnifique domaine, mes frères et sœurs pour leurs soutiens et amours, ma grand-mère et tout le reste de ma famille. Merci pour votre amour inconditionnelle.

" Nul ne pourrait compter les lunes qui luisent sur ses toits, ni les mille soleils splendides qui se cachent derrière ses murs."
Khaled Hosseini Mille soleils splendides (2007)

Remerciements

je tiens a remercier le bon DIEU, qui ma donné patience, volonté et santé surtout.

J'adresse ma profonde reconnaissance à Madame mahlia pour sa disponibilité et sa patience . Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

je tiens à témoigner toute ma gratitude à Mr MOUSSAOUI qui a accepté de présider le jury de soutenance.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à Mr.Touaoula pour nous avoir fait l'honneur d'accepter d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Un grand merci également à Mr.Clamond pour accepter a co-encadrer ce travail.

Je tiens à remercier spécialement Mr. Höring pour nous accompagner durant cette nouvelle expérience de Master international.

Un grand merci à tous les professeurs de l'université de Tlemcen pour nous transmettre leur savoir et passion.

je souhaite exprimer ma reconnaissance envers ma famille et mes amis qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel.

un merci spécial a mon grand frère pour être à mes côtés durant la plus grande épreuve dans ma vie, aucun mot peut décrire ma gratitude.

Introduction générale

Le modèle proie-prédateur de Volterra est décrit par le système différentiel.

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 - y_2F(y_1, y_2), \\ y_2' = y_2(-c + dF(y_1, y_2)), \end{cases} \tag{1}$$

où c et d sont des constantes positives, y_1 la densité des proies et y_2 la densité des prédateurs.
La réponse fonctionnelle des prédateurs $F(y_1, y_2)$ qui décrit le comportement des prédateurs vis a vis des proies peut avoir plusieurs types ([8]) :
$F(y_1, y_2) = by_1$, (Holling type I).
$F(y_1, y_2) = \dfrac{by_1}{1 + my_1}$, (Holling type II).
$F(y_1, y_2) = \dfrac{by_1^2}{my_1^2}$, (Holling type III).
$F(y_1, y_2) = \dfrac{by_1^n}{y_2^\lambda + my_1^n}$, (Hassel valey).
$F(y_1, y_2) = \dfrac{by_1}{y_1 + my_2 + n}$, (DeAngelis-Beddington).
Si les proies sont séparées des prédateurs à l'aide d'un contrôle u, $0 \leq u(t) \leq 1$, alors le système contrôlé devient

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 - uy_2F(y_1, y_2), \\ y_2' = y_2(-c + duF(y_1, y_2)). \end{cases} \tag{2}$$

Un problème de contrôle optimal gouverné par ce système différentiel peut être formulé sous la forme

$$\max J(u)$$

$$J(u) = \int_0^T L(t, u(t), y_1(t), y_2(t))dt + \phi(y_1(T), y_2(T)).$$

Ce problème de contrôle optimal a été étudié dans ([12],[2]) pour différents types de F.
Dans ce mémoire, nous allons établir les conditions nécessaires d'optimalité pour un problème de contrôle optimal associé à un système proie-prédateur à trois espèces , voir ([2]). Puis, on propose un problème de contrôle optimal

associé à un système proie-prédateur décrit par un système de Réaction-Diffusion. On montre l'existence d'un contrôle optimal et on le caractérise par un système d'EDP, voir([3]).
Le plan de ce mémoire est comme suit :
Chapitre 1. On présente quelques outils mathématiques utilisés dans ce travail.
Chapitre 2. On établit les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème de contrôle optimal en utilisant le principe de maximum de Pontryagin.
Chapitre 3. Pour le système de réaction-diffusion, on montre l'existence d'un contrôle optimal et on établit les conditions nécessaires d'optimalité.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on cite quelques définitions et théorèmes utils pour la suite de ce mémoire.

1.1 Inégalité de Gronwall

Théorème 1.1 (*voir* [1]) *Soient* Φ *et* ψ *des fonctions continues avec* $\Phi(t) > 0, \psi(t) > 0$ *et* α_1, α_2 *des constantes positives. Supposons que pour* $t_0 \leq t \leq t_0 + a, a > 0$ *:*

$$\Phi(t) \leq \alpha_1 + \alpha_2 \int_{t_0}^{t} \psi(s)\Phi(s)ds.$$

Alors :

$$\Phi(t) \leq \alpha_1 e^{\alpha_2 \int_{t_0}^{t} \psi(s))ds}.$$

1.2 Les espacesL^p

Définition 1.1 (*voir* [5]) *Soit* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p < \infty$, *on pose*

$$L^p(\Omega) := \left\{ g : \Omega \longmapsto \mathbb{R}\ ;\ g \text{ mesurable et } |g|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

On note

$$||g||_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.2 (*voir* [6])
Soit $p \in [1, \infty]$, *l'espace* $L^p(I, X)$ *est l'ensemble des fonctions mesurables* $f : I \to X$ *tel que* $t \to ||f(t)||$ *appartient a* $L^p(I)$. *Pour* $f \in L^p(I, X)$, *on note*

$$||f||_{L^p(I,X)} = \begin{cases} \int ||f(t)||_X^p dt)^{\frac{1}{p}} & si \quad p < \infty, \\ Ess \sup_{t \in I} ||f(t)||_X & si \quad p = \infty. \end{cases}$$

Théorème 1.2 (Inégalité de Hölder)(*voir* [5])
Soit $1 \leq p \leq \infty$, *on désigne par* p' *l'exposant conjugué de* p,
c'est à dire, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Soient* $f \in L^p$ *et* $h \in L^{p'}$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$.
Alors $f.h \in L^1$ *et on a l'inégalité suivante :*

$$\int |fh| \leq ||f||_{L^p} \; ||h||_{L^{p'}}.$$

Définition 1.3 (*voir* [5])
On pose

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \longmapsto \mathbb{R} \; ; \; f \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On note

$$||f||_{L^\infty} = \inf\{C; \; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

1.3 Dérivée directionnelle

Définition 1.4 (*voir* [1]) *Soit* X *un e.v.n,*Ω *un sous ensemble ouvert et non vide de* X, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction,* $a \in \Omega$ *et* $v \in X$. *On appelle dérivée directionnelle de* h *en* a *de direction* v *la limite suivante (si elle existe)*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}[h(a + \lambda v) - h(a)].$$

Cette dérivée (qui est un élément de $\mathbb{R}$*) est notée* $\frac{dh}{dv}(a)$.

1.4 Semi-groupe

Soit X un espace de Banach.

Définition 1.5 (*voir* [9]) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe sur* X *si :*
i) $S(0) = I$.*(l'opérateur identité sur X)*
ii) S(t+s)=S(t)S(s), pour chaque $t, s \geq 0$.

Proposition 1.4.1 (*voir* [9]) *Soit* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *une famille de* C_0 *semi-groupe. Il existe* $\lambda \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tels que* $||S(t)|| \leq Me^{\lambda t}$.

Définition 1.6 *On désigne par* $C([0,T], H)$ *l'espace des fonctions continues sur* $[0,T]$ *à valeurs dans* H *muni de la norme de la convergence uniforme sur* $[0,T]$

$$||u||_{C([0,T],H)} = \max_{0\leq t\leq T} ||u(.,t)||_H.$$

Définition 1.7

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq N\}.$$

Définition 1.8 *On définit l'espace $H^1([0,T],H)$ comme étant l'espace des fonctions u appartenant à $L^2([0,T],H)$ telles que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0,T],H)$.*

Proposition 1.4.2 (*voir* [9]) *Soit X un espace de Banach et $(A, D(A))$ est le générateur d'un C^0- semi-groupe $\{S(t)\}_{t>0}$ sur X.*
Si F est lipschitzienne sur X, alors pour tout $u_0 \in D(A)$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = F(t,u) & (t,x) \in \Omega \times [0,T] \\ u(0,x) = u_0 \end{cases}$$

admet une solution globale pour $u \in W^{1,2}([0,T],X) \cap L^2([0,T],D(A))$. De plus
$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(s)ds.$

1.5 ASCOLI-ARZELA

Théorème 1.3 (*voir* [11]) *Soit (E,d) un espace métrique compact, (F,δ)un espace métrique complet.*
Une partie A de $C(E,F)$ est relativement compacte si et seulement si :

1. A es équicontinue, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall f \in A, \forall y \in E, (d(x,y) \leq \eta) \implies (\delta(f(x), f(y)) < \epsilon)$$

2. Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.

1.6 Convergence faible

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté $\langle .,. \rangle_H$ et de norme associée notée $||.||_H$.

Définition 1.9 (*voir* [7]) *On dit que la suite $\{x_n\}_{n\in N}$ de H converge faiblement vers $x \in H si$*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle_H = \langle x, y\rangle_H \quad \forall y \in H.$$

On note $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 1.6.1 (*voir* [5])
i) Si $x_n \to x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement.
ii) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement et $f_n \to f$ fortement, alors $x_n f_n \rightharpoonup xf$. faiblement.

1.7 Principe de comparaison parabolique

Théorème 1.4 *(voir[10]) Soit $T > 0$ (T peut éventuellement être infini). Considérons une fonction $f = f(t,x,u)$ telle que $f, \dfrac{\partial f}{\partial u} \in C([0,T] \times \bar{\Omega} \times R)$. Soient $\bar{u}$ et $\underline{u}$ dans $C_1^2(]0,T] \times \bar{\Omega}) \cap C([0,T] \times \bar{\Omega})$, vérifiant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} \geq D\Delta \bar{u} + f(t,x,\bar{u}), & t \in [0,T], x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \underline{u}}{\partial t} \leq D\Delta \underline{u} + f(t,x,\underline{u}), & t \in [0,T], x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

et

$$\bar{u}(0,x) \leq \underline{u}(0,x), \quad x \in \Omega.$$

On suppose également que

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial v}(t,x) \leq 0 \leq \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}(t,x), \quad t \in [0,T], x \in \partial\Omega,$$

ou que

$$\bar{u}(t,x) \leq 0 \leq \underline{u}(t,x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Alors $\bar{u} \geq \underline{u}$ dans $]0,T] \times \partial\Omega$, et soit il existe $(t_0,x_0) \in]0,T] \times \bar{\Omega}$ tel que $\bar{u}(t_0,x_0) = \underline{u}(t_0,x_0)$, et alors $\bar{u} \equiv \underline{u}$ dans $[0,t_0] \times \bar{\Omega}$, soit $\bar{u}$ et $\underline{u}$ dans $]0,T] \times \Omega$.

1.8 Principe de maximum de Pontryagin

(voir [1]) On considère le problème de contrôle optimal

$$\min_{u \in U} J(u) \tag{1.2}$$

$$J(u) := -\int_0^T L(u(t), y^u(t))dt - \phi(y^u(T))$$

avec

$$L : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},$$

$$\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},$$

où $y^u(.)$ est l'unique solution de problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,u(t),y(t)) & ,t \in [0,T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.3}$$

avec

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N.$$

Définition 1.10 *L'Hamiltonien associé au problème de contrôle* (1.2)- (1.3) *est la fonction définie par*
$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$$(y, p, u) \to H(y, p, u) = p.f(u, y) + L(u, y).$$

Théorème 1.5 *Soit u^* un contrôle optimal et y^* la solution de* (1.3) *associée, alors*
Il existe une application $p : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ solution du problème adjoint

$$\begin{cases} p'(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial y}(y^*(t), p(t), u^*(t)), \\ p(T) = \nabla\phi(y(T)). \end{cases} \tag{1.4}$$

De plus,
$H(y^*, p, u^*) = \max_U H(y^*, p, u)$

Chapitre 2

Contrôle Optimal d'un système de Lotka-Volterra à trois espèces

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère le système proie prédateur de Lotka-Volterra suivant

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = y_1(a_1 - b_1 y_2 u + c_1 y_3 v) \\ y_2' = y_2(-a_2 + b_2 y_1 u) \\ y_3' = y_3(a_3 - b_3 y_1 v), \quad t \in [0, T], \end{array}\right. \tag{2.1}$$

avec les conditions initiales

$$y_1(0) = y_1^0, y_2(0) = y_2^0, y_3(0) = y_3^0, \tag{2.2}$$

où y_1 représente la densité des herbivores, y_2 la densité des carnivores et y_3 la quantité des plantes.

Les coefficients a_i, b_i et $c_i (i = 1, 2, 3)$ sont des constantes positives avec

a_1 : taux de croissance des herbivores.

b_1 : taux de prédation sur les herbivores du à la chasse des carnivores.

c_1 : taux de croissance des herbivores par unité des plantes consommées.

a_2 : taux de mortalité des carnivores.

b_2 : taux de croissance des carnivores par unité des herbivores consommés.

a_3 : taux de croissances des plantes.

b_3 : taux des plantes consommé par les herbivores.

Les variables de contrôle sont u et v où u est le coefficient d'interaction entre les carnivores et les herbivores et v est le coefficient d'interaction entre les plantes.

Comme l'interaction entre les proies et les prédateurs peut conduire à une diminuation de l'effectif de la population, on propose de maximiser la population totale à la fin de l'intervalle de temps $[0,T]$, donc notre problème de contrôle optimale est défini par

$$\min_{U}\{-y_1(T)-y_2(T)-y_3(T)\}, \tag{2.3}$$

où le contrôle (u,v) appartient à l'ensemble

$$\begin{aligned} U = \{&(u,v):[0,T]\to\mathbb{R}^2, u,v \ \ mesurables,\\ &0\leq u(t)\leq 1, 0\leq v(t)\leq 1, sur[0,T]\}. \end{aligned}$$

Ce chapitre est organisé comme suit :

Dans la section 2, on montre l'éxistence d'une solution positive et bornée. Dans la section 3, on applique le principe de maximum de Pontryagin pour caractériser le le contrôle optimal. On conclut que le contrôle est bang bang et que les valeurs de u et v dépendent respectivement de signe des fonctions $-b_1p_1+b_2p_2$ et $c_1p_1-b_3p_3$ où (p_1,p_2,p_3) est la solution du système adjoint.

2.1.1 Existence des solutions

Théorème 2.1 *Le problème de Cauchy* (2.1)-(2.2) *admet une solution positive et bornée sur* $[0,T]$.

Preuve

Le théorème de Cauchy Lipschitz assure que le système (2.1)-(2.2) admet une unique solution locale dénie sur un intervalle maximal $[0,T_{max}[$.
On intègre chaque équation du système (2.1)-(2.2) sur l'intervalle $[0,t]$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(t)=y_1(0)e^{(\int_0^t(a_1-b_1y_2u+c_1y_3v)dt)}\\ y_2(t)=y_2(0)e^{(\int_0^t(-a_2+b_2y_1u)dt)}\\ y_3(t)=y_3(0)e^{(\int_0^t(a_3-b_3y_1v)dt)}. \end{array}\right.$$

Comme $y_i^0>0, i=1,2,3$, alors la solution (y_1,y_2,y_3) est positive. On montre maintenant que la solution est bornée. On a

$$y_3(t)=y_3(0)e^{(\int_0^t(a_3-b_3y_1v)dt)}$$

Comme (y_1,y_2,y_3) est positive, alors

$$y_3'\leq a_3y_3.$$

On intègre cette inégalité sur $[0,t]$, on obtient

$$y_3(t)\leq y_3(0)+a_3\int_0^t y_3(s)ds.$$

De cela, l'inégalité de Gronwall implique que

$$y_3(t) \leq y_3(0)e^{a_3 t}.$$

On conclut que

$$y_3(t) \leq c,$$

où c une constante positive.
Comme

$$y_1' \leq a_1 y_1 + c_1 y_3 y_1$$

et y_3 est bornée, l'inégalité de Gronwall implique que

$$y_1(t) \leq c'.$$

Par la même méthode, on montre que y_2 est bornée.
Conclusion
Comme (y_1, y_2, y_3) est bornée sur $[0, T_{max}[$, elle est dénie sur $[0, T]$ tout entier (solution globale).

2.2 Conditions nécessaire d'optimalités

On considère le problème de contrôle optimal

$$\inf_U \{J(y_1, y_2, y_3)\} \tag{2.4}$$

avec

$$J(y_1, y_2, y_3, u, v) = -y_1(T) - y_2(T) - y_3(T).$$

et

$$\begin{aligned} U = \{&(u, v) : [0, T] \to \mathbb{R}^2, u, v \ \ mesurables, \\ &0 \leq u(t) \leq 1, 0 \leq v(t) \leq 1, sur[0, T]\}, \end{aligned}$$

Puisque la solution (y_1, y_2, y_3) est bornée, le théorème 1.2 page 43 dans ([4]) assure l'existence d'un contrôle optimal (u, v) qui appartient à U.

Pour caractériser ce contrôle, on utilise le principe de maximum de Pontryagin .

On note
$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

L'Hamiltonien du problème de contrôle (2.4) est définie par

$$H(p,y,u,v) = p_1y_1(a_1 - b_1y_2u + c1y_3v)+$$
$$p_2y_2(-a_2 + b_2y_1u) + p_3y_3(a_3 + b_3y_1v),$$

où le vecteur adjoint p vérifie le système différentiel

$$\begin{cases} p_1' = -a_1p_1 - y_2u(-b_1p_1 + b_2p_2) - y_3v(c_1p_1 - b_3p_3) \\ p_2' = a_2p_2 - y_1u(-b_1p_1 + b_2p_2) \\ p_3' = -a_3p_3 - y_1v(c_1p_1 - b_3p_3). \qquad t \in [0,T] \end{cases} \tag{2.5}$$

muni des conditions de transversalité

$$p_1(T) = 1, p_2(T) = 1, p_3(T) = 1. \tag{2.6}$$

On réécrit L'Hamiltonien sous la forme

$$H(p,y,u,v) = (-p_1y_1b_1y_2 + p_2y_2b_2y_1)u+$$
$$(p_1y_1c_1y_3 - p_3y_3b_3y_1)v + p_1y_1a_1 - p2y_2a_2 + p_3y_3a_3,$$

Puisque H est linéaire en (u,v) et (y_1,y_2,y_3) est positive, alors

$$u(t) = \{ \begin{array}{ll} 0 & si - p_1b_1 + p_2b_2 < 0 \\ 1 & si - p_1b_1 + p_2b_2 > 0, \end{array} \tag{2.7}$$

et

$$v(t) = \{ \begin{array}{ll} 0 & si \ \ p_1c_1 - p_3b_3 < 0 \\ 1 & si \ \ p_1c_1 - p_3b_3 > 0. \end{array} \tag{2.8}$$

2.3 La forme de contrôle optimal

On se restreint au cas ou $a_3 > a_1$.
Observant que

$$\begin{cases} y_1u(-p_1b_1 + p_2b_2) \geq 0, y_2u(-p_1b_1 + p_2b_2) \geq 0 \\ y_1v(p_1c_1 - p_3b_3) \geq 0, y_3v(p_1c_1 - p_3b_3) \geq 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

D'après (2.5)-(2.6), on a

$$p_1' + a_1p_1 = f(p_1,p_2,p_3) \tag{2.10}$$

avec

$$f(p_1,p_2,p_3) = -y_2u(-b_1p_1 + b_2p_2) - y_3v(c_1p_1 - b_3p_3).$$

On multiplie (2.10) par $e^{-a1(T-t)}$ et on intègre sur $[t,T]$, on obtient

$$\int_t^T (p_1(t)e^{-a_1(T-t)})' = \int_t^T e^{-a_1(T-t)} f(p_1,p_2,p_3)$$

d' où

$$p_1(t) = e^{a_1(T-t)}\{1+\int_t^T [-y_2u(-b_1p_1+b_2p_2)-y_3v(c_1p_1-b_3p_3)](s)e^{-a_1(T-s)}ds\}.$$

Par la même méthode, on trouve

$$p_2(t) = e^{-a_2(T-t)}\{1 + \int_t^T [y_1u(-b_1p_1 + b_2p_2)](s)e^{a_2(T-s)}ds\}.$$

$$p_3(t) = e^{a_3(T-t)}\{1 + \int_t^T [y_1v(c_1p_1 - b_3p_3)](s)e^{p-a_3(T-s)}ds\}.$$

Par suite, on conclut que

$$p_1(t) \geq e^{a_1(T-t)} \geq 1 \ \ , p_2(t) \geq 0, \ \ p_3(t) \geq e^{a_3(T-t)} \geq 1, \ \ t \in (0,T). \quad (2.11)$$

Le Théorème suivant exprime le résultat principal de ce chapitre.

2.3.1 Théorème 1.

Soient $a_3, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3$ et c_1 des constantes positives, (u, v) un contrôle optimal, (y_1, y_2, y_3) la solution d'état associée et p_1, p_2, p_3 les variables adjoints. On obtient donc les cas suivants :

1) Si $-b_1 + b_2 \leq 0$, $c_1 - b_3 \leq 0$, alors $u = v = 0$ sur $[0, T]$ et

$$y_1(t) = y_1^0 e^{a_1 t}, y_2(t) = y_2^0 e^{-a_2 t}, y_3(t) = y_3^0 e^{a_3 t} \quad , t \in [0, T]$$

2) Si $-b_1 + b_2 \leq 0$, $c_1 - b_3 > 0$, dans ce cas , $u = 0$ sur $[0, T]$ et v a au plus une commutation $\theta \in (0, T)$, où θ est un zéro de la fonction $c_1p_1 - b_3p_3$. Si v n'admet aucune commutation, alors $v = 1$ sur $[0, T]$, sinon, le contrôle v est bang-bang avec

$$v(t) = \{ \begin{array}{ll} 0 & sit \in [0, \theta] \\ 1 & sit \in (\theta, T]. \end{array}$$

3) Si $-b_1 + b_2 > 0$, $c_1 - b_3 < 0$, alors u admet au plus une commutation $\tau \in (0, T)$, où τ est un zéro de la fonction $-b_1p_1 + b_2p_2$ et v a au plus un nombre fini de commutation $\theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_n$ dans $[0, T)$, avec $0 \leq \theta_0 < \tau$ et $\tau \leq \theta_1 < ... < \theta_n < T$.
Si u n'admet pas de commutation, alors $u = 1$ sur $[0, T]$. Sinon u est un contrôle de bang-bang avec

$$u(t) = \{ \begin{array}{l} 0, t \in [0, \tau] \\ 1, t \in (\tau, T], \end{array}$$

où τ est donné par $(-b_1p_1 + b_2p_2)(\tau) = 0$.
Si v n'admet aucun point de commutation, alors $v = 0$ sur $[0, T]$. Sinon, v est un contrôle de bang-bang.
Il a une des formes

$$v(t) = \begin{cases} 0, t \in [\theta_n, T] \\ 1, t \in (\theta_{n-1}, \theta_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0, t \in (\theta_1, \theta_2) \\ 1, t \in [0, \theta_1]. \end{cases}$$

si $c_1p_1 - b_3p_3 < 0$ sur $(\tau, \theta_1]$ et $(c_1p_1 - b_3p_3)(\tau) < 0$.

$$v(t) = \begin{cases} 0, t \in [\theta_n, T]. \\ 1, t \in (\theta_{n-1}, \theta_n). \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0, t \in (\theta_1, \theta_2). \\ 1, t \in (\theta_0, \theta_1) \\ 0, t \in [0, \theta_0] \end{cases}$$

si $c_1p_1 - b_3p_3 > 0$ sur $(\tau, \theta_1]$ et $0 < \theta_0 < \tau$.

$$v(t) = \begin{cases} 0, t \in [\theta_n, T] \\ 1, t \in (\theta_{n-1}, \theta_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0, t \in (\theta_1, \theta_2) \\ 1, t \in [0, \theta_0] \end{cases}$$

si $c_1p_1 - b_3p_3 > 0$ sur(τ, θ_1) et $\theta_0 = 0$.

4) $\boldsymbol{-b_1 + b_2 > 0, c_1 - b_3 > 0}$. Alors u a la même forme que le cas **3** et v admet au plus un nombre fini de commutation dans $(0, T)$. Si il n'y a pas de commutation, alors $v = 1$ sur $[0, T]$.
Si $\theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_n$ sont les points de commutation(v est un contrôle bang-bang , alors $0 \leq \theta_0 < \tau$ et $\tau \leq \theta_1 < ... < \theta_n < T$. La fonction v est donnée par

$$v(t) = \begin{cases} 1, t \in [\theta_n, T] \\ 0, t \in (\theta_{n-1}, \theta_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1, t \in (\theta_1, \theta_2) \\ 0, t \in [0, \theta_1], \end{cases}$$

si $c_1p_1 - b_3p_3 < 0$ sur $(\tau, \theta_1]$ et $(c_1p_1 - b_3p_3)(\tau) \leq 0$.

$$v(t) = \begin{cases} 1, t \in [\theta_n, T]. \\ 0, t \in (\theta_{n-1}, \theta_n). \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0, t \in (\theta_1, \theta_2). \\ 1, t \in (\theta_0, \theta_1) \\ 0, t \in [0, \theta_0], \end{cases}$$

si $c_1p_1 - b_3p_3 > 0$ sur $(\tau, \theta_1]$ et $0 < \theta_0 < \tau$

$$v(t) = \begin{cases} 1, t \in [\theta_n, T] \\ 0, t \in (\theta_{n-1}, \theta_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0, t \in (\theta_1, \theta_2) \\ 1, t \in [0, \theta_1], \end{cases}$$

si $c_1p_1 - b_3p_3 > 0$ sur (τ, θ_1) et $\theta_0 = 0$.

5) $\boldsymbol{-b_1 + b_2 > 0, c_1 = b_3}$. Alors le problème peut se réduire au cas **3** et **4**, selon le signe de $l = a_3 - a_1 - (-b_1 + b_2)y_2(T)$.

Preuve

Nous avons les cas suivants :

1) $\boldsymbol{-b_1 + b_2 < 0, c_1 - b_3 < 0}$

Dans ce cas, on a

$-b_1p_1(T) + b_2p_2(T) < 0$ et $c_1p_1(T) - b_3p_3(T) < 0$.

Par continuité, cela implique qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $-b_1p_1(t) + b_2p_2(t) < 0$ et $c_1p_1(t) - b_3p_3(t) < 0$. pour $(T - \epsilon, T]$.

Selon (2.10)-(2.8), nous avons

$$u(t) = v(t) = 0, \forall t \in (T - \epsilon, T],$$

et par conséquent, le système (2.5)-(2.6) devient

$$\begin{cases} p_1' = -a_1p_1 \\ p_2' = a_2p_2 \\ p_3' = -a_3p_3 & t \in (T - \epsilon, T] \\ p_i(T) = 1, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{2.12}$$

Cela donne

$$p_1(t) = e^{a_1(T-t)}, p_2(t) = e^{-a_2(T-t)}, p_3(t) = e^{a_3(T-t)}, \tag{2.13}$$

pour $t \in (T - \epsilon, T]$.

Puisque $(-b_1p_1 + b_2p_2)' = a_1b_1p_1 + a_2b_2p_2 > 0$ sur $(T - \epsilon, T]$, donc $-b_1p_1 + b_2p_2$ est croissante dans $(T - \epsilon, T]$.

Par continuité, on conclut que $-b_1p_1 + b_2p_2 < 0$ sur $[0, T]$ et $u(t) = 0, \forall t \in$

$[0,T]$.
De même , pour $a_3 > a_1$ et $c_1 < b_3$, nous avons
$(c_1p_1 - b_3p_3)' = -c_1a_1p_1 + b_3a_3p_3 > 0$ sur $(T-\epsilon, T]$ donc, $c_1p_1 - b_3p_3 < 0$ sur $[0,T]$ et $v(t) = 0, \forall t \in [0,T]$.
Pour $u(t) = v(t) = 0$, le système (2.1)-(2.2) implique que la solution optimale est donnée par

$$y_1(t) = y_1^0 e^{a_1 t}, y_2(t) = y_2^0 e^{-a_2 t}, y_3(t) = y_3^0 e^{a_3 t} \quad , t \in [0,T] \tag{2.14}$$

2) $\boldsymbol{-b_1 + b_2 < 0, c_1 = b_3}$
Comme $-b_1p_1(T) + b_2p_2(T) < 0$, $\exists \epsilon_1 > 0$ tel que $-b_1p_1(t) + b_2p_2(t) < 0$ sur $(T-\epsilon_1, T]$.
D'où $u(t) = 0$ sur $(T-\epsilon_1, T]$.
Dans ce cas le système adjoint (2.5) prend la forme

$$\begin{cases} p_1' = -a_1p_1 - y_3v(c_1p_1 - b_3p_3) \\ p_2' = a_2p_2 \\ p_3' = -a_3p_3 - y_1v(c_1p_1 - b_3p_3), \quad t \in (T-\epsilon_1, T] \end{cases} \tag{2.15}$$

On intégre les deux dernières équations sur (t,T) et on utilise (2.6), on obtient

$$(c_1p_1 - b_3p_3)(t) = b_3(p_1 - p_3)(t) = -b_3 \int_t^T [a_3p_3 - a_1p_1 + b_3v(y_3 - y_1)(-p_1 + p_3)](s)ds.$$

Quand $t \to T$, nous avons

$$-a_3p_3 + a_1p_1 + b_3v(y_3 - y_1)(p_3 - p_1) \to -a_3 + a_1 < 0.$$

Par conséquent, il existe un voisinage $(T-\epsilon_2, T]$ tel que $a_3p_3(t) - a_1p_1(t) < 0$ sur $(T-\epsilon_2, T]$.
Si on prend $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$, nous avons $-b_1p_1 + b_2p_2 < 0$ et $c_1p_1 - b_3p_3 < 0$ sur $(T-\epsilon, T]$.
En suivant le même raisonnement du cas précédent, on trouve que $u(t) = v(t) = 0$ sur $[0,T]$ et y_1, y_2, y_3 sont données par (2.14).

3) $\boldsymbol{-b_1 + b_2 < 0, c_1 - b_3 > 0}$
Donc, $-b_1p_1(T) + b_2p_2(T) < 0$ et $c_1p_1(T) - b_3p_3(T) > 0$.
Par conséquent, il existent $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$ tels que $-b_1p_1(t) + b_2p_2(t) < 0$ sur $(T-\epsilon_1, T]$ et $c_1p_1(t) - b_3p_3(t) > 0$ sur $(T-\epsilon_2, T]$.
Par suite, $u = 0, v = 1$ sur $[T-\epsilon, T]$.
Le système adjoint (2.5) devient

$$\begin{cases} p_1' = -a_1p_1 - y_3(c_1p_1 - b_3p_3) \\ p_2' = a_2p_2 \\ p_3' = -a_3p_3 - y_1(c_1p_1 - b_3p_3), \quad t \in (T-\epsilon, T] \end{cases} \tag{2.16}$$

On pose

$$\theta = inf\{t \in [0,T], (c_1p_1 - b_3p_3)(s) > 0, \forall s \in [0,T]\}.$$

Si $\theta = 0$, alors $c_1p_1(t) - b_3p_3(t) > 0$ sur $[0,T]$ et $v = 1, \forall t \in [0,T]$.
De plus $(-b_1p_1 + b_2p_2)' = -b_1(-a_1p_1 - y_3(c_1p_1 - b_3p_3) + b - 2(a_2p_2) > 0$. sur $]T - \epsilon, T]$
Comme $(-b_1p_1+b_2p_2)$ est croissante et négative sur $(T-\epsilon, T]$, par continuité, on conclut que $-b_1p_1(t) + b_2p_2(t) < 0, \forall t \in [0,T]$ et $u(t) = 0$ sur $[0,T]$.
Si $\theta > 0$, alors $(c_1p_1 - b_3p_3)(t) > 0, \forall t \in [\theta, T], v(t) = 1, \forall t \in [\theta, T]$ et

$$c_1p_1(\theta) - b_3p_3(\theta) = 0. \tag{2.17}$$

Puisque $-b_1p_1 + b_2p_2$ est négative et croissante sur $(T-\epsilon, T]$, par continuité, on conclut que $-b_1p_1 + b_2p_2 < 0, \forall t \in (\theta, T]$.
Maintenant sur l'intervalle $(\theta, T]$, nous avons $u = 0, v = 1, -b_1p_1 + b_2p_2 < 0, c_1p_1 - b_3p_3 > 0$. Donc, le système adjoint (2.17) est applicable sur $]\theta, T]$.
Puisque $-b_1p_1 + b_2p_2$ est négative et croissante sur $(\theta, T]$, par continuité, on obtient, $-b_1p_1 + b_2p_2 < 0$ sur $(\theta - \epsilon_1, T]$.
D'où, $-b_1p_1 + b_2p_2 < 0$ sur $]\theta - \epsilon_1, \theta]$.
Par suite, $u = 0$ sur$]\theta - \epsilon_1, \theta]$.
Pour trouver v sur $]\theta - \epsilon_1, \theta]$, on étudie la monotonie de $c_1p_1 - b_3p_3$.
Puisque $u = 0$, le système adjoint (2.5) peut être écrit sous la forme

$$\begin{cases} p_1' = -a_1p_1 - y_3v(c_1p_1 - b_3p_3) \\ p_2' = a_2p_2 \\ p_3' = -a_3p_3 - y_1v(c_1p_1 - b_3p_3), \end{cases} \tag{2.18}$$

pour $t \in (\theta - \epsilon_1, \theta)$.
Donc
$(c_1p_1 - b_3p_3)' = -a_1c_1p_1 + a_3b_3p_3 + v(c_1p_1 - b_3p_3)(c_1y_3 - b_3y_1)$.
On utilise (2.17), on obtient
$(c_1p_1 - b_3p_3)(t) = \int_t^\theta (a_1c_1p_1 - a_3b_3p_3)(s)ds + \int_t^\theta (v(s)(c_1p_1 - b_3p_3)(s)(c_1y_3 - b_3y_1)(s)$.
Puisque
$(c_1p_1 - b_3p_3)(s) \to 0$, $(a_1c_1p_1 - a_3b_3p_3)(s) \to b_3(a_1 - a_3)p_3(\theta)$,
quand $s \to \theta$, il s'en suit que $c_1p_1 - b_3p_3 < 0$ sur $(\theta - \epsilon_1, \theta)$. Ainsi, $v = 0$ sur$(\theta - \epsilon_1, \theta)$.
D'où, sur $(\theta - \epsilon_1, \theta)$, nous avons $u = 0$ et $v = 0$ et le système adjoint prend la forme (2.12). On peut appliquer le premier cas pour obtenir $u(t) = v(t) = 0$ sur $[0, \theta]$.
Par conséquent, $u = 0$ sur $[0,T]$ et v admet au plus une commutation $\theta \in [0,T]$.

$$v(t) = \{ \begin{array}{lll} 0 & si & t \in [0,\theta] \\ 1 & si & t \in (\theta, T]. \end{array} \tag{2.19}$$

4)$b_1 = b_2, c_1 - b_3 < 0$

Donc, $\exists \epsilon_2 > 0$ tel que $(c_1p_1 - b_3p_3)(t) < 0, \forall t \in [T-\epsilon_2, T]$.
Dans ce cas, $v = 0$ sur $[T-\epsilon_2, T]$ et le système adjoint prend la forme

$$\begin{cases} p_1' = -a_1p_1 - y_2u(-b_1p_1 + b_2p_2) \\ p_2' = a_2p_2 - y_1u(-b_1p_1 + b_2p_2) \\ p_3' = -a_3p_3, \end{cases} \tag{2.20}$$

pour $t \in [T-\epsilon_2, T]$. Puisque
$(-b_1p_1 + b_2p_2)' = b_1[(a_1p_1 + a_2p_2) + b_1u(y_2 - y_1)(p_2 - p_1)]$,
on a donc
$[-b_1p_1(t) + b_2p_2(t)] = \int_t^T -b_1[(a_1p_1 + a_2p_2)(s)ds - \int_t^T b_1u(y_2 - y_1)(p_2 - p_1)(s)ds$.
Puisque $-b_1(a_1p_1 + a_2p_2) < 0$ et $b_1u(y_2 - y_1)(p_2 - p_1)(T) = 0$, on peut trouver un voisinage $(T-\epsilon_1, T]$ tel que $-b_1p_1(t) + b_2p_2(t) < 0$ sur $(T-\epsilon_1, T]$.
Soit $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Par suite, $(c_1p_1 - b_3p_3)(t) < 0$ et $(-b_1p_1 + b_2p_2)(t) < 0$ sur $(T-\epsilon, T]$.
Par conséquent, $u = v = 0$ sur $(T-\epsilon, T]$ et le système adjoint (2.20) prend la forme (2.12).
On peut suivre le même raisonnement du premier cas pour conclure que $u = v = 0$ sur $[0, T]$.

5)$b_1 = b_2, c_1 = b3$.

On intègre le systéme (2.5)-(2.6), on trouve

$(-b_1p_1 + b_2p_2)(t) = b_1(-p_1 + p_2)(t) = b_1 \int_t^T [-a_1p_1 - a_2p_2 + b_1u(y_2 - y_1)(p_1 - p_2) - b_3y_3v(p_1 - p_3)](s)ds$.
Puisque $-a_1p_1 - a_2p_2 \to -a_1 - a_2$, $p_1 - p_2 \to 0$, et $p_1 - p_3 \to 0$ quand $s \to T$, il existe un ϵ_1 tels que $(-b_1p_1 + b_2p_2)(t) < 0 \ \ \forall t \in (T-\epsilon_1, T]$. Donc $u(t) = 0$ sur $(T-\epsilon_1, T]$.
Par la même méthode, on déduit qu'il existe un voisinage $(T-\epsilon_2, T]$ tel que $(c_1p_1 - b_3p_3)(t) < 0, \forall t \in (T-\epsilon, T]$.
Par conséquent, $v = 0$ sur $(T-\epsilon_2, T]$.
Soit $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$. On a donc $u = v = 0, \forall t \in (T-\epsilon, T]$.
On continue par le même raisonnement du premier cas pour conclure que $u = v = 0$ sur $[0, T]$.

6)$b_1 = b_2, c1 - b_3 > 0$.

il exist un ϵ_2 tel que $c_1p_1 - b_3p_3 > 0$ sur $(T-\epsilon_2, T]$ .Soit

$$\theta = inf\{t \in [0, T], (c_1p_1 - b_3p_3)(s) > 0 \forall s \in [0, T]\}.$$

Alors $v(t) = 1, \forall t \in [\theta, T]$ et

$$(c_1p_1 - b_3p_3)(\theta) > 0.$$

En utilisant le systéme adjoint, on déduit que
$(-b_1p_1+b_2p_2)(t) = b_1(-p_1+p_2)(t) = -b_1\int_t^T[a_1p_1+a_2p_2+b_1u(y_1-y_2)(p_1-p_2)+y_3(c_1p_1-b_3p_3)](s)ds$.
Donc, $-b_1p_1+b_2p_2<0$ sur un voisinage $(T-\epsilon_1,T]$ et $u=0$ sur $(T-\epsilon_1,T]$.
On répète le même raisonnement du 3^{me} cas pour conclure que $u=0$ sur $[0,T]$ et v admet au plus une commutation θ. Si $\theta>0$, alors

$$v(t)=\{\begin{array}{ll}0 & sit\in[0,\theta]\\ 1 & sit\in(\theta,T].\end{array}$$

Si $\theta=0$, alors $v=1$ sur $[0,T]$.

7) $-b_1+b_2>0, c_1-b_3<0$.
Donc, il exist $\epsilon>0$ tel que $-b_1p_1+b_2p_2>0$ et $c_1p_1-b_3p_3<0$ sur $(T-\epsilon,T]$.
Dans ce cas $u=1$, $v=0$ sur $(T-\epsilon,T]$.
On pose

$$\tau=inf\{t\in[0,T],(-b_1p_1+b_2p_2)(s)>0,\forall s\in(t,T]\}$$

On a donc $u(t)=1$ sur $[\tau,T]$ et

$$(b_1p_1+b_2p_2)(\tau)=0. \tag{2.21}$$

On fait le même raisonnement que les cas précédants, on obtient
$(-b_1p_1+b_2p_2)'=[a_1b_1p_1+a_2b_2p_2+u(b_1y_2-b_2y_1)(-b_1p_1b_2p_2)+b_1vy_3(c_1p_1-b_3p_3)]\forall t\in[0,T]$.
On utilisant (2.9), (2.11)et (2.28), on obtient que $-b_1p_1+b_2p_2$ est croissante dans un voisinage de τ. Si $t<\tau$ avec t proche de τ, on a $(-b_1p_1+b_2p_2)(t)<0$.

- Si $(c_1p_1-b_3p_3)(\tau)<0$, c'est le 4^{eme} cas on remplaçant T par τ, on déduit que $u=v=$ sur $[0,\tau]$.
- Si $(c_1p_1-b_3p_3)(\tau)=0$, c'est le 5^{eme} cas (on remplaçant T par τ), cela donne $u=v=0$ sur $[0,\tau]$.
- Si $(c_1p_1-b_3p_3)(\tau)>0$, c'est le 6^{eme} cas, donc on conclue que $u=0$ sur $[0,\tau]$ et v admet au plus une commutation $\theta_0\in[0,\tau)$ tel que

$$v(t)=\{\begin{array}{l}0,t\in[0,\theta_0)\\ 1,t\in(\theta_0,T].\end{array} \tag{2.22}$$

Si v n'admet pas de commutation on a $v=1$ sur $[0,\tau]$

Alors le contrôle u admet au plus une commutation $\tau\in[0,T)$ donnée par (2.28). Si $\tau>0$, u est donné par

$$u(t)=\{\begin{array}{l}0,t\in[0,\tau]\\ 1,t\in(\tau,T].\end{array} \tag{2.23}$$

Si $\tau=0$, on a donc $u=1$ sur $[0,T]$.
Maintenant, on doit montrer que v a un nombre finis de commutations dans

$[\tau, T]$, pour cela, on pose $z = -b_1p_1 + b_2p_2$et $w = c_1p_1 - b_3p_3$, avec (z, w, p_1) solution du système suivant :

$$\begin{cases} z' = [a_2 + u(b_1y_2 - b_2y_1)]z + vb_1y_3w + (a_1 + a_2)b_1p_1 \\ w' = -c_1y_2uz + [-a_3 + v(b_3y_1 - c_1y_3)]w + (a_3 - a_1)c_1p_1 \\ p_1' = -y_2uz - y_3vw - a_1p_1. \end{cases} \tag{2.24}$$

On a $c_1p_1 - b_3p_3 < 0$ sur l'intervalle $[\tau, T]$ où $c_1p_1 - b_3p_3$ a un nombre fini de zéros dans un sous intervalle $[\tau, T]$, dans la première situation $v = 0$, sur $[\tau, T]$, on utilisant la discussion précédente on trouve $v = 0$ sur $[0, T]$, si la deuxième situation est vérifiée, soient $\theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_n$ les zéros de $c_1p_1 - b_3p_3$ dans $[\tau, T]$, alors v est un contrôle de bang-bang et il a l'une des formes suivantes
Si $c_1p_1 - b_3p_3 < 0$ sur $(\tau, \theta_1]$ et $(c_1p_1 - b_3p_3)(\tau) < 0$, on a

$$v(t) = \begin{cases} 0, t \in [\theta_n, T] \\ 1, t \in (\theta_{n-1}, \theta_n) \\ .... \\ 0, t \in (\theta_1, \theta_2) \\ 1, t \in [0, \theta_1]. \end{cases} \tag{2.25}$$

Si $c_1p_1 - b_3p_3 > 0$ sur $(\tau, \theta_1]$ et $0 < \theta_0 < \tau$, on a

$$v(t) = \begin{cases} 0, t \in [\theta_n, T]. \\ 1, t \in (\theta_{n-1}, \theta_n). \\ .... \\ 0, t \in (\theta_1, \theta_2). \\ 1, t \in (\theta_0, \theta_1) \\ 0, t \in [0, \theta_0] \end{cases} \tag{2.26}$$

Si $c_1p_1 - b_3p_3 > 0$ sur (τ, θ_1) et $\theta_0 = 0$ on a

$$v(t) = \begin{cases} 0, t \in [\theta_n, T] \\ 1, t \in (\theta_{n-1}, \theta_n) \\ .... \\ 0, t \in (\theta_1, \theta_2) \\ 1, t \in [0, \theta_0]. \end{cases} \tag{2.27}$$

8) $-b_1 + b_2 > 0, c_1 - b_3 > 0$.

Il existe $\epsilon > 0$ tel que $-b_1p_1 + b_2p_2 > 0$ et $c_1p_1 - b_3p_3 > 0$ sur $(T - \epsilon, T]$, alors $u = v = 1$ sur $(T - \epsilon, T]$.
On note

$$\tau = inf\{t \in [0, T], (-b_1p_1 + b_2p_2)(s) > 0, \forall s \in (t, T]\}$$

On a donc $u(t) = 1$ sur $[\tau, T]$et

$$(b_1p_1 + b_2p_2)(\tau) = 0. \tag{2.28}$$

Par la même méthode, on remarque que u a au plus une commutation $\tau \in (0, T)$, alors que v a au plus un nombre fini de commutation, $\theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_n$ où θ_i sont des zéros de $c_1p_1 - b_3p_3$ dans $[\tau, T]$ et $\theta_0 \in [0, \tau)$, Si $\tau = 0$, alors $v = 1$ sur $[0, T]$ et si $\tau \in (0, T)$, alors u a la forme (2.25). La fonction v a au plus une commutation $\theta_0 \in [0, \tau)$ qui est donnée par
Si $c_1p_1 - b_3p_3 < 0$, sur $(\tau, \theta_1]$ et $(c_1p_1 - b_3p_3)(\tau) \leq 0$ on a

$$v(t) = \begin{cases} 1, t \in [\theta_n, T] \\ 0, t \in (\theta_{n-1}, \theta_n) \\ .... \\ 1, t \in (\theta_1, \theta_2) \\ 0, t \in [0, \theta_1]. \end{cases} \tag{2.29}$$

Si $c_1p_1 - b_3p_3 > 0$ sur $(\tau, \theta_1]$ et $0 < \theta_0 < \tau$, on a

$$v(t) = \begin{cases} 1, t \in [\theta_n, T]. \\ 0, t \in (\theta_{n-1}, \theta_n). \\ .... \\ 0, t \in (\theta_1, \theta_2). \\ 1, t \in (\theta_0, \theta_1) \\ 0, t \in [0, \theta_0]. \end{cases} \tag{2.30}$$

Si $c_1p_1 - b_3p_3 > 0$ sur (τ, θ_1) et $\theta_0 = 0$, on a

$$v(t) = \begin{cases} 1, t \in [\theta_n, T] \\ 0, t \in (\theta_{n-1}, \theta_n) \\ .... \\ 0, t \in (\theta_1, \theta_2) \\ 1, t \in [0, \theta_1]. \end{cases} \tag{2.31}$$

9) $-\boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2} > \mathbf{0}, \boldsymbol{c_1} = \boldsymbol{b_3}$

Il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que $-b_1p_1 + b_2p_2 > 0$ sur $(T - \epsilon_1, T]$, alors $u = 1$ sur $(T - \epsilon_1, T]$.
Comme
$(c_1p_1 - b_3p_3)' = b_3(a_3p_3 - a_1p_1) - b_3y_2(-b_1p_1 + b_2p_2) + v(b_3)^2(y_1 - y_2)(p_1 - p_3)$ sur $(T - \epsilon_1, T]$.
On fait tendre t vers T, on obtient

$$(c_1p_1 - b_3p_3)'(t) \to t \to Tb_3(a_3 - a_1) - b_3(-b_1 + b_2)y_2(T).$$

La forme de v dépend du signe de cette limite. On note l le nombre réel donné par

$$l = a_3 - a_1 - (-b_1 + b_2)y_2(T) \tag{2.32}$$

-Si $l > 0$, alors $(c_1p_1 - b_3p_3)$ est croissante sur un voisinage de T, c'est le 7^{eme} cas.

-Si $l < 0$, alors $(c_1p_1 - b_3p_3)$ est décroissante sur un voisinage de T, c'est le 8^{eme} cas. La preuve est terminée.

2.4 Conclusion

Si $-b_1 + b_2 \leq 0$,$c_1 - b_3 \leq 0$, alors le nombre maximal d'individus est obtenue si les trois espèces sont complètement séparées.

Si $-b_1 + b_2 \leq 0$, $c_1 - b_3 > 0$, alors le nombre maximal d'individus est obtenue si les carnivores et les herbivores sont complètement séparés, alors que les herbivores et les plantes ne sont pas séparés du tout , ou complètement séparés dans le début (sur l'intervalle $[0, \theta]$ et non séparer dans$(\theta, T]$.)

Si $-b_1 + b_2 > 0$, alors les herbivores et les carnivores sont soit complètement non séparés sur tout l'intervalle $[0, T]$, ou séparés sur $[0, \tau]$ et non séparés sur $(\theta, T]$ ou (θ) est l'unique point de commutation pour u.

Les herbivores et les plantes sont simultanément complètement séparés ou pas, sur un nombre fini de sous intervalle de temps sur $[0, T]$ ou au moins dans un voisinage gauche du temps final T. Si $c_1 > b_3$, alors les herbivores et les plantes sont non séparés du tout que se soit sur l'intervalle $[0, T]$ ou sur un voisinage de T.

Chapitre 3

Contrôle optimal d'un système proie-prédateur avec diffusion

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de contrôle optimal lié au système proie-prédateur suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial t} = \alpha_1 \Delta y_1 + r y_1 (1 - \dfrac{y_1}{k}) - y_2 F(y_1, y_2) \quad \text{dans} \quad Q, \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial t} = \alpha_2 \Delta y_2 + y_2[-d + cF(y_1, y_2)] \quad \text{dans} \quad Q, \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial n}(t,x) = \dfrac{\partial y_2}{\partial n}(t,x) = 0 \quad \text{sur} \partial\Omega \times (0,T), \\ y_1(0,x) = y_1^0(x), y_2(0,x) = y_2^0(x), \quad \text{pour} \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $Q = [0,T] \times \Omega$ et Ω est un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$.
Ici, y_1 représente la densité des proies, y_2 la densité des prédateurs et $\alpha_1, \alpha_2, r, k, c$ et d sont des paramètres positifs.
α_1 et α_2 sont respectivement les coefficients de diffusion des proies et des prédateurs, r est le taux de croissance des proies, c est le taux de croissance des prédateurs, d le taux de mortalité des prédateurs et k est la capacité limite de la population des proies.
La fonction $f(y_1) = ry_1(1 - \frac{y_1}{k})$ est la croissance logistique des proies. La réponse fonctionnelle des prédateurs $F(y_1, y_2)$ représente la densité des proies consommées par un seul prédateur par unité de temps. Elle doit vérifier les conditions suivantes :

(i) $F(y_1, y_2) = y_2 \tilde{F}(y_1, y_2)$, avec $\tilde{F} \in C^1((0,\infty)^2)$;

(ii) $\tilde{F}$ et ses dérivées partielles sont bornées dans un ensemble borné ;

(iii) $F(y_1, y_2) > 0$, $\frac{\partial F}{\partial y_1}(y_1, y_2) > 0$ et $F(y_1, y_2) + y_2 + \frac{\partial F}{\partial y_2}(y_1, y_2) > 0$, pour tout $y_1, y_2 > 0$.

La fonction F peut avoir plusieurs formes comme on a mentionné dans l'introduction .

la réponse numérique des prédateurs $G(y_1, y_2) = -d + cF(y_1, y_2)$ représente la croissance des prédateurs en fonction de celle des proies.

On sépare les proies des prédateurs à l'aide d'un contrôle $u : Q \to R$, $0 \leq u(t,x) \leq 1$ sur Q, alors on multiplie le terme $y_2F(y_1, y_2)$ dans le système par u. On introduit un autre contrôle $v : Q \to R, 0 < a \leq v(t,x) \leq 1$ sur Q, qui représente le coefficient d'interaction des proies. Donc on multiplie le deuxième terme de la croissance logistique des proies par v. La fonction v est strictement positive, cela veut dire que les proies ne peuvent pas être complètement séparées les unes des autres.
Le système contrôlé devient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial t} = \alpha_1 \Delta y_1 + r y_1 (1 - \dfrac{y_1}{k} v) - u y_2 F(y_1, y_2) \quad \text{dans} \quad Q, \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial t} = \alpha_2 \Delta y_2 + y_2[-d + cuF(y_1, y_2)] \quad \text{dans} \quad Q. \end{cases} \tag{3.2}$$

Notre but est de trouver un contrôle optimal (u, v) tel que la densité totale des deux populations soit maximale, donc, notre problème de contrôle optimal est définie par

$$\min_U \{ -\int_\Omega [l_1 y_1(T,x) + l_2 y_2(T,x)] dx - \int_0^T \int_\Omega [k_1 y_1(t,x) + k_2 y_2(t,x)] dt dx \}, \tag{3.3}$$

où le contrôle (u, v) appartient à l'ensemble

$$U = \{(u,v) \in (L^2(Q))^2, 0 \leq u(t,x) \leq 1, 0 < a \leq v(t,x) \leq 1 \;\; dans\ Q\}, \tag{3.4}$$

et l_1,l_2,k_1 et k_2 sont des poids positifs.
Ce chapitre est organisé comme suit :
Dans la section 2, on montre l'existence d'un contrôle optimal. Dans la section 3, on établit les conditions nécessaires d'optimalité.

3.2 L'existence d'un contrôle optimal

D'abord, on admet le théorème suivant qui assure l'existence et l'unicité des solutions du système (3.2)

Théorème 3.1 *soients* $\alpha_1, \alpha_2, r, k, b, c, d, m > 0$ *et* $y^0 = (y_1^0, y_2^0) \in H^2(\Omega)^2$ *tels que* $y_1^0, y_2^0 > 0$ *sur* Ω *et* $\dfrac{\partial y_1^0}{\partial n} = \dfrac{\partial y_2^0}{\partial n} = 0$ *sur* $\partial\Omega$. *Si* $(u,v) \in U$ *et (i)-(iii) sont vérifiées, alors le problème* (3.2) *admet une unique solution* $y = (y_1, y_2) \in H^1([0,T], L^2(\Omega)^2)$, *avec* $(y_1, y_2) \in L^\infty(Q)^2$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$

dans Q et $y=(y_1,y_2)\in L^2([0,T],H^2(\Omega))\cap L^\infty([0,T],H^1(\Omega))$. De plus, il existe $k>0$ indépendant de (u,v) tel que pour $t\in[0,T]$,

$$||\frac{\partial y}{\partial t}||_{L^2(([0,T],L^2(\Omega))^2}+||y||_{L^2([0,T],H^2(\Omega))^2}+||y(t)||_{H^1(\Omega)^2}+||y||_{L^\infty(Q)^2}\leq k. \tag{3.5}$$

3.2.1 Preuve

Ce théorème peut être établi par la méthode des semi-groupes, (voir [9]).

L'existence du contrôle optimal est établie dans le théorème suivant

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses i)-iii), le problème* (3.2)-(3.3) *admet une solution optimale* (y_1^*,y_2^*,u^*,v^*).

3.2.2 Preuve

On pose

$$J(u,v)=-\int_\Omega[l_1y_1(T,x)+l_2y_2(T,x)]dx-\int_0^T\int_\Omega[k_1y_1(t,x)+k_2y_2(t,x)]dtdx. \tag{3.6}$$

Soit $d=\inf_U J(u,v)$. Puisque u,v,y_1,y_2 sont uniformément bornés,
$d=\inf_U J(u,v)<\infty$.
Il existe donc une suite minimisante $(u_n,v_n)\in U$ telle que

$$d\leq J(u_n,v_n)\leq d+\frac{1}{n},\quad \forall n\geq 1. \tag{3.7}$$

Soit (y_{1n},y_{2n}) la solution du système (3.8) correspondante au contrôle (u^n,v^n), elle satisfait donc

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y_{1n}}{\partial t}=\alpha_1\Delta y_{1n}+ry_{1n}(1-\dfrac{y_{1n}}{k}v_n)-u_ny_{2n}F(y_{1n},y_{2n}) & \\ & ,\ (t,x)\in Q,\\ \dfrac{\partial y_{2n}}{\partial t}=\alpha_2\Delta y_{2n}+y_{2n}[-d+cu_nF(y_{1n},y_{2n})] & \\ \dfrac{\partial y_{1n}}{\partial n}=\dfrac{\partial y_{2n}}{\partial n}=0,\quad (t,x)\in\Sigma & \\ y_{1n}(0,x)=y_1^0(x),y_{2n}(0,x)=y_2^0(x),\quad x\in\Omega. & \end{cases} \tag{3.8}$$

De l'inégalité (3.5), on déduit les estimations suivantes

$$||\frac{\partial y_{in}}{\partial t}||_{L^2([0,T],L^2(\Omega))} \leq c, \ \ ||y_{in}||_{L^2([0,T],H^2(\Omega))} \leq c, \ \ ||y_{in}(t)||_{H^1(\Omega)} \leq c, \ \ (3.9)$$

Comme $(y_{1n}, y_{2n}) \in W^{1,2}([0,T], L^2(\Omega))$, donc $(y_{1n}, y_{2n}) \in C([0,T], L^2(\Omega))$.

$||y_{in}||_{C([0,T],L^2(\Omega))} = \sup ||y_n||_{L^2(\Omega)} \leq c||y_{in}||_{L^\infty(Q)} \leq K$
donc $y_{(in)}$ est bornée dans $C([0,T], L^2(\Omega))$.
L'inégalité (3.9) implique que $(y_{in}(t))$ est bornée dans $H^1(\Omega)$ et puisque l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, on déduit que la famille $(y_{in}(t))$ est compacte dans $L^2(\Omega)$.

De plus, l'inégalité (3.9) implique que $(\frac{\partial y_{in}}{\partial t})$ est bornée dans $L^2(Q)$, donc elle est uniformément équicontinue.
Par conséquent, le théorème d'Ascoli-Arzéla implique que la famille (y_{in}) est compacte dans $C([0,T], L^2(\Omega))$.
D'où, $y_{in} \to y_i^*$ dans $L^2(\Omega)$ uniformément par rapport à t, $i = 1, 2$.

Maintenant, montrons que $\Delta(y_{in})$ est borné dans $L^2(Q)$ pour $i = 1, 2$.
On utilisant (3.2), on peut écrire

$$||\alpha_1 \Delta(y_{1n})||_{L^2(Q)} = ||\frac{\partial y_1}{\partial t} - [ry_1(1 - \frac{y_1}{k}v_n) - y_2 u_n F(y_1, y_2)]||_{L^2(Q)},$$

d'où

$$||\alpha_1 \Delta(y_{1n})||_{L^2(Q)} \leq ||\frac{\partial y_{1n}}{\partial t}||_{L^2(Q)} + ||ry_{1n}(1 - \frac{y_{1n}}{k}v_n)||_{L^2(Q)} + ||u_n y_{2n} F(y_{1n}, y_{2n})]||_{L^2(Q)},$$

Comme $\frac{\partial y_{1n}}{\partial t}$ et y_{1n} sont bornées dans $L^2(Q)$, on peut écrire

$$\int_Q (ry_{1n}(1 - \frac{y_{1n}}{k}v_n))^2 dtdx \leq ||y_{1n}||_{l^\infty(Q)} \int_Q (1 - \frac{y_{1n}}{k}v_n)^2 dtdx,$$

comme $v_n \leq 1$, on a

$$||1 - \frac{y_{1n}}{k}v_n||_{L^2(Q)} \leq k.$$

De plus, on utilisant (ii) et le fait que $u_n \leq 1$, on a

$$\int_Q (u_n y_{2n} F(y_{1n}, y_{2n}))^2 \leq \int_Q (u_n y_{2n} c')^2 \leq \int_\Omega c'(y_{2n})^2 \leq c_2,$$

avec c' et c_2 des constantes positives.

On montre par la même méthode que $\Delta(y_{2n})$ est borné dans $L^2(Q)$.
Comme $\Delta(y_{in})$ est borné , $i = 1, 2$, on peut avoir une sous suite qui converge faiblement car $L^2(Q)$ est un espace réflexif.
Soit $\phi \in C_0^\infty(Q)$, on obtient le résultat suivant en effectuant une intégration par partie et en utilisant le fait que $y_{in} \rightharpoonup y_i^*$ dans $L^2(Q)$

$$\int_Q \phi \Delta y_{in} dtdx = \int_Q \Delta\phi y_{in} dtdx \to \int_Q y_i^* \Delta\phi dtdx = \int_Q \phi \Delta y_i^* dtdx.$$

Cela implique que $\Delta y_{in} \rightharpoonup \Delta y_i^*$ dans $L^2(Q)$. D'un autre coté, l'inégalité (2.11) donne

$$y_{in} \rightharpoonup y_i^* \quad \text{dans } L^2([0,T], H^1(\Omega)),$$

$$y_{in} \rightharpoonup y_i^* \quad \text{dans } L^2([0,T], H^2(\Omega)).$$

Maintenant, on montre que

$$y_{2n} F(y_{1n}, y_{2n}) \to y_2^* F(y_1^*, y_2^*) \quad \text{dans} \quad L^2([0,T], L^2(\Omega)). \tag{3.10}$$

On a

$$y_{2n}F(y_{1n}, y_{2n}) - y_2^*F(y_1^*, y_2^*) = y_{2n}F(y_{1n}, y_{2n}) - y_2^*F(y_1^*, y_2^*) - y_{2n}F(y_1^*, y_2^*) + y_{2n}F(y_1^*, y_2^*),$$

q'on peut l'écrire sous la forme

$$y_{2n}F(y_{1n}, y_{2n}) - y_2^*F(y_1^*, y_2^*) = y_{2n}[F(y_{1n}, y_{2n}) - F(y_1^*, y_2^*)] + (y_{2n} - y_2^*)F(y_1^*, y_2^*),$$

Comme on a $y_{in} \to y_i^*$ fortement dans $L^2([0,T], L^2(\Omega))$, (y_{in}) est bornée dans $L^\infty(Q)$ et F est continue, alors

$$y_{2n}F(y_{1n}, y_{2n}) - y_2^*F(y_1^*, y_2^*) \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2([0,T], L^2(\Omega)).$$

Par la même méthode, on montre que $(y_{in})^2 \to (y_i^*)^2$.
Puisque (u_n, v_n) est bornée, alors $u_n \rightharpoonup u^*, v_n \to v^*$ dans $L^2(Q)$.
L'ensemble U est convexe et fermé, il est donc faiblement fermé.
Par conséquent, $(u^*, v^*) \in U$.
On conclut que

$u_n y_{2n} F(y_{1n}, y_{2n}) \rightharpoonup u^* y_2^* F(y_1^*, y_2^*)$
et
$v_n (y_{in})^2 \rightharpoonup v^* (y_i^*)^2$ dans $L^2([0,T], L^2(\Omega))$.

Maintenant, on doit prouver que $(y_1^*, y_2^*, u*, v*)$ vérifie le problème (3.8)
on a

$$\int_Q \frac{\partial y_{1n}}{\partial t}\phi dtdx = \int_Q \alpha_1 \Delta y_{1n}\phi + r y_{1n}(1 - \frac{y_{1n}}{k} v_n)\phi dtdx - \int_Q u_n y_{2n} F(y_{1n}, y_{2n})\phi dtdx,$$

avec $\quad \phi \in C_0^\infty(Q)$.
On fait tendre n vers ∞, on obtient

$$\int_Q \frac{\partial y_1^*}{\partial t}\phi dtdx = \int_Q \alpha_1 \Delta y_1^*\phi + r y_1^*(1 - \frac{y_1^*}{k} v^*)\phi dtdx - \int_Q u^* y_2^* F(y_1^*, y_2^*)\phi dtdx.$$

De même pour la deuxième équation

$$\int_Q \frac{\partial y_{2n}}{\partial t}\phi dtdx = \int_Q \alpha_2 \Delta y_{2n}\phi dtdx + \int_Q y_{2n}[-d + c u_n F(y_{1n}, y_{2n})]\phi dtdx,$$

avec $\quad \phi \in C_0^\infty(Q)$.
On fait tendre n vers ∞, on obtient

$$\int_Q \frac{\partial y_2^*}{\partial t}\phi dtdx = \int_Q \alpha_2 \Delta y_2^*\phi dtdx + \int_Q y_2^*[-d + c u^* F(y_1^*, y_2^*)]\phi dtdx,$$

avec $\quad \phi \in C_0^\infty(Q)$.

On sait que

$$d = \inf_U J(u,v) = \lim_{n\to\infty} J(u_n, v_n),$$

$$J(u_n, v_n) = -\int_\Omega [l_1 y_{1n}(T,x) + l_2 y_{2n}(T,x)]dx - \int_0^T \int_\Omega [k_1 y_{1n}(t,x) + k_2 y_{2n}(t,x)]dtdx,$$

On fait tendre n vers ∞, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n, v_n) = -\int_\Omega [l_1 y_1^*(T,x) + l_2 y_2^*(T,x)]dx - \int_0^T \int_\Omega [k_1 y_1^*(t,x) + k_2 y_2^*(t,x)]dtdx.$$

D'où $\lim_{n\to\infty} J(u_n, v_n) = J(u^*, v^*) = d$.
On conclut que $(u*, v*)$ est un contrôle optimal correspondant a la solution d'état (y_1^*, y_2^*).

3.3 Les conditions nécessaires d'optimalité

Soit $y* = (y_1^*, y_2^*)$ solution de (3.2) correspondant au contrôle optimal (u^*, v^*). Pour obtenir les conditions d'optimalité, on dérive la solution d'état par rapport au contrôle puis on dérive la fonctionnelle objective par rapport au contrôle.
Soit J la fonctionnelle objective et L et ψ les fonctions

$$\begin{cases} L(y) = -k_1 y_1 - k_2 y_2 \\ \psi(y)(T, .) = (-l_1 y_1 - l_2 y_2)(T, .), \end{cases}$$

alors, $J(y) = \int_\Omega \psi(y)(T,x)dx + \int_Q L(y)(t,x)dtdx$.
On réécrit le système (3.2)-(3.3) sous la forme

$$\begin{cases} y'(t) - Ay(t) = F(y, u, v) \\ y(0, x) = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial y}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

$$A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \Delta y_1 \\ \alpha_2 \Delta y_2 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

$$D(A) = \{ \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ \in H^2(\Omega)^2, \frac{\partial y_1}{\partial n} = \frac{\partial y_2}{\partial n} = 0 \ \text{ dans } \ \partial\Omega\}, \tag{3.12}$$

Le système adjoint est de la forme (voir[1])

$$\begin{cases} p'(t) + A^* p(t) = -F_y^*(y^*, u^*, v^*)p + L_y(y^*), \\ p(T) = -\nabla\psi(y^*)(T). \end{cases} \tag{3.13}$$

A^* est l'opérateur adjoint de A et $F_y^* = (\dfrac{\partial f}{\partial y})^t$, où t représente la transposée.
On remplace dans (3.13), on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = -\alpha_1 \Delta p_1 + r p_1 + 2\dfrac{rv^*}{k} y_1^* p_1 - k_1 + u^* y_2^* \dfrac{\partial F}{\partial y_1}(y_1^*, y_2^*)(p_1 - c p_2) \ \text{ dans } \ Q, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial t} = -\alpha_2 \Delta p_2 + d p_2 - k_2 + u^*(p_1 - c p_2)[F(y_1^*, y_2^*) + y_2^* \dfrac{\partial F}{\partial y_2}(y_1^*, y_2^*)] \ \text{ dans } \ Q, \\ \frac{\partial p_1}{\partial n}(t, x) = \ \frac{\partial p_2}{\partial n}(t, x) = 0, \ \text{ sur } \ (0, T) \times \partial\Omega, \\ p_1(T, x) = l_1, \ \ p_2(T, x) = l_2 \ \text{ pour } \ x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.14}$$

Commençons par monter l'existence des solutions de ce problème.

Proposition 3.3.1 *Si* (y_1^*, y_2^*, u^*, v^*) *est la solution optimal du problème* (3.2)-(3.6)*, alors le système adjoint*(3.22) *admet une unique solution* $p = (p_1, p_2) \in H^1([0,T], H)$*, avec* $p_1, p_2 \in L^\infty([0,T], H^1(\Omega)) \cup L^2([0,T], H^2(\Omega))$ *et* $p_1, p_2 \in L^\infty(Q)$.

Preuve.

On fait un changement de variable, on pose $s = T - t$ et $q = (q_1, q_2)$ tel que $q_i(s,x) = p_i(T-s,x) = p_i(t,x), (t,x) \in Q, i = 1,2$. Le problème (3.22) devient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial s} = \dfrac{\partial q_1}{\partial s}(T-s,x) = \alpha_1 \Delta q_1 - rq_1 - 2\dfrac{rv^*}{k} y_1^* q_1 + k_1 - u^* y_2^* \dfrac{\partial F}{\partial y_1}(y_1^*, y_2^*)(q_1 - cq_2) \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial s} = \dfrac{\partial q_2}{\partial s}(T-s,x) = \alpha_2 \Delta q_2 - dq_2 + k_2 - u^*(q_1 - cq_2)[F(y_1^*, y_2^*) + y_2^* \dfrac{\partial F}{\partial y_2}(y_1^*, y_2^*)] \\ \frac{\partial q_1}{\partial n} = \frac{\partial q_2}{\partial n}(t,x) = 0, (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega = \Sigma \\ q_1(0,x) = l_1, \quad q_2(0,x) = l_2. \end{cases} \tag{3.15}$$

Montrons que $f = (f_1, f_2)$ est Lipschitz continue de $[0,T] \times L^2(\Omega)^2 \to L^2(\Omega)^2$,
où

$$f_1(t,q) = -rq_1 - 2\frac{rv^*}{k} y_1^* q_1 + k_1 - u^* y_2^* \frac{\partial F}{\partial y_1}(y_1^*, y_2^*)(q_1 - cq_2),$$

$$f_2(t,q) = dq_2 - k_2 + u^*(q_1 - cq_2)[F(y_1^*, y_2^*) + y_2^* \frac{\partial F}{\partial y_2}(y_1^*, y_2^*)].$$

Soient $q = (q_1, q_2)$ et $q' = (q_1', q_2')$,

$$||f_1(q_1,q_2) - f_1(q_1', q_2')||_{L^2(\Omega)} = ||r(q_1 - q_1') - 2\frac{rv^*}{k} y_1^*(q_1 - q_1') - \\ u^* y_2^* \frac{\partial F}{\partial y_1}(y_1^*, y_2^*)[(q_1 - cq_2) - (q_1' - cq_2')]||_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant (ii) et comme $(y_1^*, y_2^*) \in L^\infty(\Omega)^2$ et $(u^*, v^*) \in U$, on trouve

$$||f_1(q_1,q_2) - f_1(q_1', q_2')||_{L^2(\Omega)} \leq k(||q_1 - q_1'||_{L^2(\Omega)} + ||q_2 - q_2'||_{L^2(\Omega)}).$$

Par la même méthode, on obtient

$$||f_2(q_1,q_2) - f_2(q_1', q_2')||_{L^2(\Omega)} = \leq k_1(||q_1 - q_1'||_{L^2(\Omega)} + ||q_2 - q_2'||_{L^2(\Omega)}),$$

donc $f = (f_1, f_2)$ est lipschitzienne et comme $A : D(A) \times D(A) \to L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ est le générateur d'un C^0 semi-groupe, le théorème 1 implique que le problème (3.15) admet une unique solution $q \in L^2([0,T], D(A))$.La preuve est terminée.

Soit $y^* = (y_1^*, y_2^*)$ la solution d'état correspondante au contrôle (u^*, v^*) et $y^\epsilon = (y_1^\epsilon, y_2^\epsilon)$ la solution correspondante au contrôle (u^ϵ, v^ϵ) où
$u^\epsilon = u^* + \epsilon + u_0$, $v^\epsilon = v^* + \epsilon + v_0$ pour $(u_0, v_0) \in L^2(Q)^2$ choisi tel que $(u^\epsilon, v^\epsilon) \in U$.
On pose $z_i^\epsilon = (y_i^\epsilon, y_i^*)/\epsilon$, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1^\epsilon}{\partial t} = \alpha_1 \Delta z_1^\epsilon + (r - \dfrac{r}{k} v^*(y_1^\epsilon + y_1^*) - u^* y_2^* \dfrac{F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) - F(y_1^*, y_2^*)}{y_1^\epsilon - y_1^*}) z_1^\epsilon - \\ -u^*[F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) + y_2^* \dfrac{F(y_1^*, y_2^\epsilon) - F(y_1^*, y_2^*)}{y_1^\epsilon - y_1^*}] z_2^\epsilon - \dfrac{r}{k} v_0 (y_1^\epsilon)^2 - u_0 y_2^\epsilon F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) \\ \dfrac{\partial z_2^\epsilon}{\partial t} = \alpha_2 \Delta z_2^\epsilon + c u^* y_2^* \dfrac{F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) - F(y_1^*, y_2^*)}{y_1^\epsilon - y_1^*} z_1^\epsilon + [-d + c u^* F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) + \\ + c u^* y_2^* \dfrac{F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) - F(y_1^*, y_2^*)}{y_2^\epsilon - y_2^*}] z_2^\epsilon + c u_0 y_2 \epsilon F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) \text{pour } \ (t,x) \in Q, \\ \dfrac{\partial z_1^\epsilon}{\partial n}(t,x) = \dfrac{\partial z_2^\epsilon}{\partial n}(t,x) = 0, (t,x) \in \Sigma, \\ z_1^\epsilon(0,x) = z_2^\epsilon(0,x) = 0, x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.16}$$

Par le même raisonnement précédent, on trouve que ce problème admet une unique solution $(z_1^\epsilon, z_2^\epsilon)$ qui est bornée dans Q.

Proposition 3.3.2 *. les limites de $z_i = \lim_{\epsilon \to 0} \dfrac{y_i^\epsilon - y_i^*}{\epsilon}$ existent dans $L^2(Q)$, $i = 1, 2$, de plus, elles vérifient le problème suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial t} = \alpha_1 \Delta z_1 + [r - 2\dfrac{r}{k} v^* y_1^* - u^* y_2^* \dfrac{\partial F}{\partial y_1} z_1 - \\ -u^*[F(y_1^*, y_2^*) + y_2^* \dfrac{\partial F}{\partial y_2}] z_2 - \dfrac{r}{k} v_0 (y_1^*)^2 - u_0 y_2^* F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial t} = \alpha_2 \Delta z_2 + c u^* y_2^* \dfrac{\partial F}{\partial y_1} z_1 + [-d + c u^* F(y_1^*, y_2^*) + \\ + c u^* y_2^* \dfrac{\partial F}{\partial y_2}] z_2 + c u_0 y_2^* F(y_1^*, y_2^*) \quad \text{pour} \quad (t,x) \in Q, \\ \frac{\partial z_1}{\partial n}(t,x) = \ \frac{\partial z_2}{\partial n}(t,x) = 0, (t,x) \in \Sigma, \\ z_1(0,x) = z_2(0,x) = 0, x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

De plus, $z_1, z_2 \in L^2([0,T], H^2(\Omega)) \cup L^\infty([0,T], H^1(\Omega))$ et $z_1, z_2 \in L^\infty(Q)$.

Preuve

Soient A l'opérateur définie par (3.11)-(3.12), $Z^\epsilon = (z_1^\epsilon, z_2^\epsilon)^T$,

$$M^\epsilon = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

$$N^\epsilon = \begin{pmatrix} -\frac{r}{k}v_0(y_1^\epsilon)^2 - u_0 y_2^\epsilon F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) \\ cu_0 y_2\epsilon F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} M_{11} = r - \frac{r}{k}v^*(y_1^\epsilon + y_1^*) - u^* y_2^* \frac{F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) - F(y_1^*, y_2^*)}{y_1^\epsilon - y_1^*} \\ M_{12} = -u^* F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) + y_2^* u^* \frac{F(y_1^*, y_2^\epsilon) - F(y_1^*, y_2^*)}{y_1^\epsilon - y_1^*} \\ M_{21} = u^* y_2^* \frac{F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) - F(y_1^*, y_2^*)}{y_1^\epsilon - y_1^*} \\ M_{22} = -d + cu^* F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) + cu^* y_2^* \frac{F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon) - F(y_1^*, y_2^*)}{y_2^\epsilon - y_2^*}. \end{cases}$$

Alors le problème (3.16) peut s'écrire sous la forme du problème de Cauchy suivant

$$\frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} = A(Z^\epsilon) + M^\epsilon Z^\epsilon + N^\epsilon, t \in (0,T), Z^\epsilon(0) = 0. \tag{3.18}$$

On a

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1^\epsilon}{\partial t} = \alpha_1 \Delta y_1^\epsilon + r y_1^\epsilon (1 - \frac{y_1^\epsilon}{k} v_n) - u_n y_2^\epsilon F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon), \\ \qquad \le \alpha_1 \Delta y_1 \epsilon_1 + r y_1^\epsilon, \\ \frac{\partial y_1^\epsilon}{\partial n} = 0, \quad (t,x) \in \Sigma, \\ y_1^\epsilon(0,x) = y_1^0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y_2^\epsilon}{\partial t} = \alpha_2 \Delta y_2^\epsilon + y_2^\epsilon[-d + cu_n F(y_1^\epsilon, y_2^\epsilon)], \\ \qquad \le \alpha_1 \Delta y_1 \epsilon_1 + d m_1 y_1^\epsilon, \\ \frac{\partial y_2^\epsilon}{\partial n} = 0, \quad (t,x) \in \Sigma, \\ y_2\epsilon(0,x) = y_1^0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

On applique le principe de comparaison, on déduit que $0 \le y_1^\epsilon \le Y_1(t,x)$, $0 \le y_2^\epsilon \le Y_2(t,x), \forall (t,x) \in Q$, où Y_1 et Y_2 vérifient les problèmes

$$\begin{cases} \frac{\partial Y_1}{\partial t} = \alpha_1 \Delta Y_1 + r Y_1, \\ \frac{\partial Y_1}{\partial n} = 0, \quad (t,x) \in \Sigma, \\ Y_1(0,x) = Y_1^0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y_2}{\partial t} = \alpha_1 \Delta Y_2 + dm_1 Y_1, \\ \\ \dfrac{\partial Y_2}{\partial n} = 0, \quad (t,x) \in \Sigma, \\ \\ Y_2(0,x) = Y_1^0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

Cela implique que $y_1^\epsilon, y_2^\epsilon$ sont bornées dans Q. On remarque aussi que M^ϵ , N^ϵ sont aussi bornées uniformément par rapport a ϵ.

Soit $\{S(t), t \geq 0\}$ le C^0- semi groupe généré par A, comme $S(t)(0) = 0$, la solution de (3.18) est donnée par

$$Z^\epsilon(t) = \int_0^t S(t-s) M^\epsilon(s) Z^\epsilon(s) ds + \int_0^t S(t-s) N^\epsilon(s) ds. \tag{3.19}$$

D'où

$$\begin{aligned} ||Z^\epsilon||_{L^2(\Omega)} &= || \int_0^t S(t-s) M^\epsilon(s) Z^\epsilon(s) ds + \int_0^t S(t-s) N^\epsilon(s) ds||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \int_0^t ||S(t-s) M^\epsilon(s) Z^\epsilon(s)||_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t ||S(t-s) N^\epsilon(s)||_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Comme $S(t)$ est linéaire et continue et $S(t-s) \leq Me^{m(t-s)}$ (voir préliminaire), on obtient

$$||Z^\epsilon||_{L^2(\Omega)^2} \leq c(\int_0^t ||M^\epsilon Z^\epsilon||_{L^2(\Omega)^2} ds + \int_0^t ||N^\epsilon||_{L^2(\Omega)^2} ds).$$

Comme $M^\epsilon \in L^\infty(Q)$ et N^ϵ est bornée, on trouve

$$||Z^\epsilon||_{L^2(\Omega)^2} \leq c_1 \int_0^t ||Z^\epsilon||_{L^2(\Omega)^2} ds + c_2.$$

Par l'inégalité de Gronwall, on trouve

$$||Z^\epsilon||_{L^2(\Omega)^2} \leq c.$$

On intègre entre 0 et T, on obtient

$$||Z^\epsilon||_{L^2(Q)^2} \leq c.$$

Donc, on a prouvé que z_1^ϵ et z_2^ϵ sont bornées dans $L^2(Q)$ uniformément par rapport a ϵ.On a alors $||y_i^\epsilon - y_i^*||_{L^2(Q)^2} = \epsilon ||z_i^\epsilon||_{L^2(Q)^2} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$, on déduit que

$y_i^\epsilon \to y_i^*$ dans $L^2(Q)$, pour $i = 1, 2$.
On peut écrire le système (3.17) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = A(Z) + MZ + N, t \in (0, T), Z(0) = 0,$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} r - \frac{r}{k}v^* y_1^* - u^* y_2^* \frac{\partial F(y_1^*, y_2^*)}{\partial y_1} & -u^* F(y_1^*, y_2^*) + y_2^* u^* \frac{\partial F(y_1^*, y_2^*)}{\partial y_1} \\ u^* y_2^* \frac{\partial F(y_1^*, y_2^*)}{\partial y_1} & -d + cu^* F(y_1^*, y_2^*) + cu^* y_2^* \frac{\partial F(y_1^*, y_2^*)}{\partial y_1} \end{pmatrix}$$

et

$$N = \begin{pmatrix} -\frac{r}{k}v_0 (y_1^*)^2 - u_0 y_2^* F(y_1^*, y_2^*) \\ cu_0 y_2^* F(y_1^*, y_2^*) \end{pmatrix}$$

La solution de ce système est donnée par

$$Z(t) = \int_0^t S(t-s)M(s)Z(s)ds + \int_0^t S(t-s)N(s)ds. \tag{3.20}$$

De (3.20) de (3.18), on trouve

$$Z^\epsilon(t) - Z(t) = \int_0^t S(t-s)M^\epsilon(s)[Z^\epsilon(t) - Z(t)]ds +$$
$$+ \int_0^t S(t-s)N^\epsilon(s) - N(s) + [M^\epsilon(s) - M(s)]Z(s)ds.$$

Comme $S(t)$ est linéaire, on trouve

$$||Z^\epsilon(t) - Z(t)||_{L^2(\Omega)^2} \leq \int_0^t ||S(t-s)||_{L^2(\Omega)^2} ||M^\epsilon(s)[Z^\epsilon(t) - Z(t)]||_{L^2(\Omega)^2)} ds +$$
$$+ \int_0^t ||S(t-s)||_{L^2(\Omega))} ||\{N^\epsilon(s) - N(s) + [M^\epsilon(s) - M(s)]Z(s)\}||_{L^2(\Omega)^2)} ds.$$

Par la même méthode précédente, on obtient

$$||Z^\epsilon(t) - Z(t)||_{L^2(\Omega)^2} \leq c \int_0^t ||M^\epsilon(s)||_{L^\infty(Q)} ||Z^\epsilon(t) - Z(t)||_{L^2(\Omega)^2} + \int_0^t ||N^\epsilon(s) - N(s)||_{L^2(\Omega)^2} +$$
$$+ ||M^\epsilon(s) - M(s)||_{L^\infty(\Omega)^2} ||Z(S)||_{L^2(\Omega)^2}.$$

Puisque $||M^\epsilon - M||_{L^2(Q)} \to 0$ et $||N^\epsilon - N||_{L^2(Q)} \to 0$, on trouve

$$||Z^\epsilon(t) - Z(t)||_{L^2(\Omega)^2} \leq c \int_0^t ||Z^\epsilon(t) - Z(t)||_{L^2(\Omega)^2} ds + c_1.$$

L'inégalité de Gronwall implique

$$||Z^\epsilon(t) - Z(t)||_{L^2(Q)^2} \leq c.$$

Conclusion
$z_i^\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} z_i$ dans $L^2(Q)^2$, $i = 1, 2$.

Théorème 3.3 *Si* (y_1^*, y_2^*, u^*, v^*) *est une solution optimal de* (3.2)-(3.6), *alors il existe* $p = (p_1, p_2) \in H^1([0, T], H)$ *tel que le système optimal* $(y_1^*, y_2^*, u^*, v^*, p_1, p_2)$ *satisfait le système d'optimalité suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial y_1^*}{\partial t} = \alpha_1 \Delta y_1^* + r y_1^* (1 - \dfrac{y_1^*}{k} v) - u y_2^* F(y_1^*, y_2^*), \\ \dfrac{\partial y_2^*}{\partial t} = \alpha_2 \Delta y_2^* + y_2^* [-d + cuF(y_1^*, y_2^*)], \\ \dfrac{\partial y_1^*}{\partial n}(t, x) = \dfrac{\partial y_2^*}{\partial n}(t, x) = 0, (t, x) \in \Sigma, \\ y_1(0, x) = y_1^0(x), y_2(0, x) = y_2^0(x), x \in \Omega. \end{array} \right. \tag{3.21}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = -\alpha_1 \Delta p_1 + r p_1 + 2\dfrac{rv^*}{k} y_1^* p_1 - k_1 + u^* y_2^* \dfrac{\partial F}{\partial y_1}(y_1^*, y_2^*)(p_1 - c p_2), \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial t} = -\alpha_2 \Delta p_2 + d p_2 - k_2 + u^*(p_1 - c p_2)[F(y_1^*, y_2^*) + y_2^* \dfrac{\partial F}{\partial y_2}(y_1^*, y_2^*)], \\ \frac{\partial p_1}{\partial n}(t, x) = \frac{\partial p_2}{\partial n}(t, x) = 0, (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega = \Sigma, \\ p_1(T, x) = l_1, \quad p_2(T, x) = l_2 \quad dans \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.22}$$

$$u^*(t, x) = \{ \begin{array}{ll} 0 & si p_1 - c p_2 > 0, \\ 1 & si p_1 - c p_2 < 0. \end{array} , \quad v^*(t, x) = \{ \begin{array}{ll} 0 & si p_1 > 0, \\ 1 & si p_1 < 0. \end{array} \tag{3.23}$$

Preuve

On prend $u^\epsilon = u^* + \epsilon u_0$, $v^\epsilon = v^* + \epsilon v_0$ avec $(u_0, v_0) \in L^2(Q)^2$ tel que $0 \leq u^* + \epsilon u_0 \leq 1, 0 < v^* + \epsilon v_0 \leq 1$ sur $[0, T]$. Soit $y^* = (y_1^*, y_2^*)$ la solution d'état correspondante au contrôle (u^*, v^*) et $y^\epsilon = (y_1^\epsilon, y_2^\epsilon)$ la solution correspondante au contrôle (u^ϵ, v^ϵ) choisi tel que $(u^\epsilon, v^\epsilon) \in U$. Par définition du contrôle optimal, on a

$$J(u^*, v^*) \leq J(u^\epsilon, v^\epsilon), \quad \forall \epsilon > 0.$$

On divise par ϵ et passant a la limite quand $\epsilon \to 0$, on obtient

$$1/\epsilon[-\int_{\Omega}[l_1 y_1^*(T,x)+l_2 y_2^*(T,x)]dx - \int_0^T \int_{\Omega}[k_1 y_1^*(t,x)+k_2 y_2^*(t,x)]dtdx +$$
$$+\int_{\Omega}[l_1 y_1^{\epsilon}(T,x)+l_2 y_2^{\epsilon}(T,x)]dx + \int_0^T \int_{\Omega}[k_1 y_1^{\epsilon}(t,x)+k_2 y_2^{\epsilon}(t,x)]dtdx] \geq 0.$$

D'où

$$\int_Q [l_1 z_1(T,x)+l_2 z_2(T,x)]dx + \int_Q (k_1 z_1 + k_2 z_2)dtdx \leq 0. \tag{3.24}$$

On utilise p_1 et p_2 comme fonctions testes dans le système (3.17) et z_1 zt z_2 comme fonctions testes dans le système (3.22), on combine les deux équations, on obtient

$$\int_Q (p_1 z_1)' + (p_2 z_2)' dtdx = \alpha_1 \int_{\partial\Omega}(p_1 \frac{\partial z_1}{\partial n} - z_1 \frac{\partial p_1}{\partial n}) + \alpha_2 dtdx \int_{\partial\Omega}(p_2 \frac{\partial z_2}{\partial n} - z_2 \frac{\partial p_2}{\partial n})dtdx -$$
$$-\frac{r}{k}\int_Q v_0 (y_1^*)^2 dtdx + \int_Q u_0 y_2^* F(y_1^*, y_2^*)(cp_2 - p_1)dtdx - \int_Q (k_1 z_1 + k_2 z_2)dtdx.$$

On utilise la formule de Green et (3.17)-(3.22), on trouve

$$\int_{\Omega}(l_1 z_1 + l_2 z_2)(T,x)dx + \int_Q (k_1 z_1 + k_2 z_2)(t,x)dtdx =$$
$$-\frac{r}{k}\int_Q v_0 (y_1^*)^2 dtdx + \int_Q u_0 y_2^* F(y_1^*, y_2^*)(cp_2 - p_1)dtdx.$$

D'après (3.24), on a

$$-\frac{r}{k}\int_Q v_0 (y_1^*)^2 dtdx + \int_Q u_0 y_2^* F(y_1^*, y_2^*)(cp_2 - p_1)dtdx \leq 0. \tag{3.25}$$

On prend u_0, v_0 tels que $u_0 = -u^* + \tilde{u_0}, v_0 = -v^* + \tilde{v_0}$ avec $(\tilde{u_0}, \tilde{v_0}) \in U$,on a par suite

$$\langle -u^* + \tilde{u_0}, w_1 \rangle_{L^2(Q)} + \langle -v^* + \tilde{v_0}, w_2 \rangle_{L^2(Q)} \geq 0,$$

où $\langle ., . \rangle_{L^2(Q)}$ est le produit scalaire dans $L^2(Q)$ et

$$w_1(t,x) = y_2^* F(y_1^*, y_2^*)(p_1 - cp_2), w_2(t,x) = \frac{r}{k} p_1 (y_1^*)^2.$$

On a donc

$$\int_Q (-u^* + \tilde{u_0}) w_1 dtdx + \int_Q (-v^* + \tilde{v_0}) w_2 dtdx \geq 0.$$

Si on choisit $\tilde{u_0} = 0$, $\tilde{v_0} = v^*$, on a alors $\int_Q -u^* w_1 \geq 0$, c'est a dire $\int_Q u^* y_2^* F(y_1^*, y_2^*)(p_1 - cp_2) \leq 0$,
D'après (iii), si $(p_1 - cp_2) > 0$, alors $u^* = 0$ et si $(p_1 - cp_2) < 0$, alors $u^* = 1$.
Maintenant, on prend $\tilde{u_0} = u^*$ et $\tilde{v_0} = 0$, on obtient
$\int_Q (-v^* + a) \frac{r}{k} p_1 (y_1^*)^2 dtdx \leq 0$.
Si $p_1 > 0$, alors $v^* = a$.
Si $p_1 < 0$, alors $v^* = 1$.
On conclut que (3.23) est vérifié.

Bibliographie

[1] S. Anita, V. Arnautu, V. Capasso, An Introduction to Optimal Control Problems in Life Sciences and Economic, Birkhauser, (2001).

[2] N. Apreutesei, Necessary optimality conditions for a Lotka Volterra three species system, Math. Modelling Nat. Phenomena 1 (2006) ,123 135.

[3] N. Apreutesei,An Optimal Control Problem for a Predator-Prey Reaction-Diffusion System,Math. Model. Nat. Phenom.Vol. 5, No. 6, (2010), pp. 180-195.

[4] V. Barbu. Mathematical methods in optimization of differential systems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1994).

[5] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Masson, Paris, (1983).

[6] T. Cazenave, A. Haraux. An Introduction to Semilinear Evolution Equations. Clarendon Press, (1998).

[7] L.C. Evans, Partial Diferential Equations, (AMS, 1998).

[8] Murray J. D., Mathematical Biology. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, Third Ed., (2002).

[9] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer verlag, (1983).

[10] L. Roques,Modèles de réaction-diffusion pour l'écologie spatiale .Quae. (2013).

[11] L.Schwartz, Analyse1, théorie des ensemble et topologie,(1991).

[12] S. Yosida, An optimal control problem of the prey predator system, Funkcial Ekvac. 25 (1982) 283 293.