



République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Physique



Laboratoire de physique théorique

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master en Physique

Option: Physique des Plasmas

Thème

***Modélisation et simulation numérique 2D de
deux torches plasma en interaction avec un pion***

Présenté par :

Mr. Seghiri Abdelmadjid

Le mercredi 27 Juin 2018

Devant le jury composé de MM.

- | | |
|-----------------------------|--------------|
| - Dr. Bedrane Zeyneb | Président |
| - Dr. Ameur Djilali | Encadreur |
| - Dr. Dib Joanna | Co-encadreur |
| - Pr. Liani Bachir | Examineur |

Année universitaire : 2017-2018

Je dédie ce travail

A tous ceux qui me sont chers

A mes chers grand- parents

A mes chers parents

A mes chères sœurs

A mon cher frère

A toute ma famille

A mes chers amis

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique Théorique, sous la direction de Monsieur Djilali Ameer, ainsi que Madame Joanna Dib.

Mesremerciements, avant tout, à DIEU tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années d'étude.

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur Ameer pour son suivi et son énorme soutien, qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de la période du stage. Je tiens à remercier également mon co-encadreur Madame Dib pour le temps qu'elle m'a consacré et pour les précieuses informations qu'elle m'a prodigué avec intérêt et compréhension.

Ma reconnaissance va également à Madame Zeyneb Bedrane qui a bien voulu présider le jury de ce mémoire, je lui adresse mes plus vifs remerciements.

Je tiens à remercier Monsieur Bachir Lianide bien vouloir examiner ce travail et de nous avoir suivis tout au long de notre cursus de Master en tant que chef de formation.

Table des matières

Introduction7

Chapitre I : Généralités sur les plasmas

I-1 Historique et définition d'un plasma	8
I-2 Propriétés des plasmas	9
I-3 Equilibre thermodynamique	11
I-3-1 Equilibre thermodynamique complet	11
I-3-2 Equilibre thermodynamique local (ETL)	13
I-3-3 Propriétés thermodynamiques	13
I-3-4 Propriétés de transport	14
I-4 Classification des plasmas	17
I-5 Torches à plasma	17
I-5-1 Définition	17
I-5-2 Torches plasmas à arc non transférée	18
I-5-3 Torches plasmas à arc transférée	18

Chapitre II : Modélisation des écoulements de plasma

II-1 Généralité sur les équations de Navier-Stokes	19
II-2 Les conditions aux limites et initiales	20
II-2-1 Les conditions initiales	20
II-2-2 Les conditions aux limites	20
II-3 Les modèles simplifiés de Navier-Stokes	20

Chapitre III : Méthodes numériques

III-1 Introduction	23
III-2 Nature des équations	23
III-3 Méthode de Différences finis	24
III-4 Méthode des éléments finis	24
III-5 Méthode des volumes finis	

Chapitre IV : Modélisation de la turbulence	
VI-2 Régime Laminaire	27
VI-3 Régime turbulent	29
VI-4 Modélisation de la turbulence dans un plasma	29
VI-4-1 Les méthodes Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS)	30
VI-4-2 Large Eddy Simulation (LES)	37
Chapitre V : Position du problème et résultats numériques	
V-1 Modèle d'équations	38
V-2 Hypothèses du problème physique	39
V-3 Domaine de calcul et maillage	40
V-4 Discussion des résultats	42
V-4-1 Champs de vitesse	42
V-4-2 Champs de température	44
Conclusion et Perspectives	47
Annexe	48
Références	50

Liste des figures

Figure 1 Les quatre états de la matière	8
Figure 2 Exemples d'un état de plasma	9
Figure 3 Classification des plasmas selon la température et la densité électronique	10
Figure 4 Schéma présentant l'écoulement de Couette	15
Figure 5 Classification des formes de plasma selon la température et la densité électronique	17
Figure 6 Torche plasma à arc non transféré pour le gaz plasmagène (Ar,H ₂)	18
Figure 7 Torche plasma à arc transféré	18
Figure 8 Evolution de l'écoulement laminaire et turbulent dans une conduite cylindrique	28
Figure 9 Domaine de calcul avant et après le maillage	40
Figure 10 Définition de la zone « haute température » pour la modélisation de l'écoulement plasmagène.	41
Figure 11 Le champ de vitesse de l'écoulement (m/s)	43
Figure 12(a) Variation de la température le long de la surface de pion (en K)	44
Figure 12 (b) Champ de température de l'écoulement (en K)	44
Figure 13 Champ de variation de nombre de Prandtl	45
Figure 14 La variation de la chaleur spécifique en fonction de la température	48
Figure 15 La variation de la viscosité μ en fonction de la température T	49
Figure 16 La variation de l'enthalpie h en fonction de la température T	49

Liste des Tableaux

Tableau 1 Valeurs des constantes du modèle RNG k- ϵ	32
Tableau 2 Constante du modèle RSM	34
Tableau 3 Paramètres définis pour la modélisation de l'écoulement plasmagène	42

Introduction

Dans notre étude, on s'est intéressé à la simulation d'un écoulement de gaz plasmagène dans deux torches de plasma remplaçant l'écoulement dans les boosters d'une fusée.

Dans le chapitre I, on introduit les notions fondamentales des plasmas, puis on parle de leurs propriétés, ensuite on aborde l'équilibre thermodynamique local et complet ensuite les propriétés thermodynamiques et du transport, et enfin les types des torches plasmas.

Dans le chapitre II, on fait un rappel sur les équations de Navier-Stokes et leurs modèles simplifiés nécessaires pour la modélisation des problèmes physiques tels que : les fluides réels compressibles, les fluides réels incompressibles, les fluides parfaits compressibles et les fluides parfaits incompressibles.

Le chapitre III, expose les différentes méthodes numériques nécessaires pour résoudre un problème lié aux équations différentielles partielles (EDP) et qui sont essentiellement: la méthode des différences finis, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis.

Dans le chapitre IV, nous regardons le phénomène de la turbulence en exposant les différents modèles mathématiques qui se trouvent dans la littérature tels que :

- 1) Les méthodes Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS)
 - Modèle $k-\varepsilon$
 - Modèle RNG $k-\varepsilon$
 - Modèle des contraintes différentielles de Reynolds (RSM)
 - Modèle $k-\omega$
- 2) Large Eddy Simulation (LES)

Le chapitre V expose notre modèle mathématique utilisé, la méthode numérique exploitée et les résultats obtenus ainsi que l'explication des ces derniers.

Enfin, la conclusion de ce travail ainsi que ses perspectives sont présentées.

Chapitre I

Généralités sur les plasmas

I-1- Historique et définition d'un plasma

Le plasma constitue le quatrième état de la matière et a été découvert en 1879. Il a fait l'objet de plusieurs recherches et études et se trouve dans diverses applications, tels que la fabrication des écrans plats ou dans les boosters des fusées. Le terme « *Plasma* » a été introduit pour la première fois en 1928 par le physicien américain « Irving Langmuir » lorsqu'il observait le comportement d'un gaz ionisé dans un tube à décharge [1]. Depuis 1901, G. Marconi avait observé la réflexion des ondes sur ce qu'il pensait être l'atmosphère mais qui est en réalité l'ionosphère [2]. En laboratoire, les chercheurs ont continué ses études jusqu'à ils ont réussi à réaliser le phénomène de décharge. En 1955, des travaux plus récents ont été appréciés pour étudier les interactions entre plasma et surfaces, afin de traiter des surfaces en mécanique ou en micro-électronique en employant le plasma [2].

Plus précisément, le plasma est un gaz partiellement ou totalement ionisé et globalement neutre contrairement à un gaz où le rapport de particules chargées est très négligeable par rapport à celles des espèces neutres.

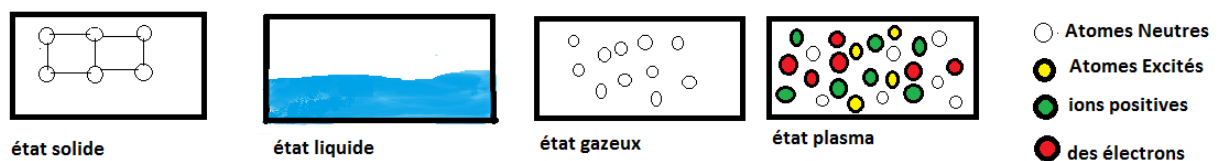


Figure 1. Les quatre états de la matière

Le fait d'augmenter la concentration de l'espèce chargée influe considérablement sur le mouvement des particules chargées. Autrement dit, si la densité ionique et électronique est suffisamment importante par rapport à celle des neutres, on obtient une neutralité macroscopique stable dans un volume beaucoup plus petit que la taille du gaz.

Par ailleurs, on peut dire que le plasma est un milieu constitué d'ions, d'électrons et de particules neutres et ausside photons produits par des particules, on parle alors de plasmas lumineux [2].Il existe dans la nature plusieurs type de plasmas tels que les couronnes solaires, les flammes, les aurores boréales, les éclaires... etc. En outre, il existe aussi les plasmas de laboratoire dits aussi industriels comme les propulseurs, les torches à plasma,...etc[2].

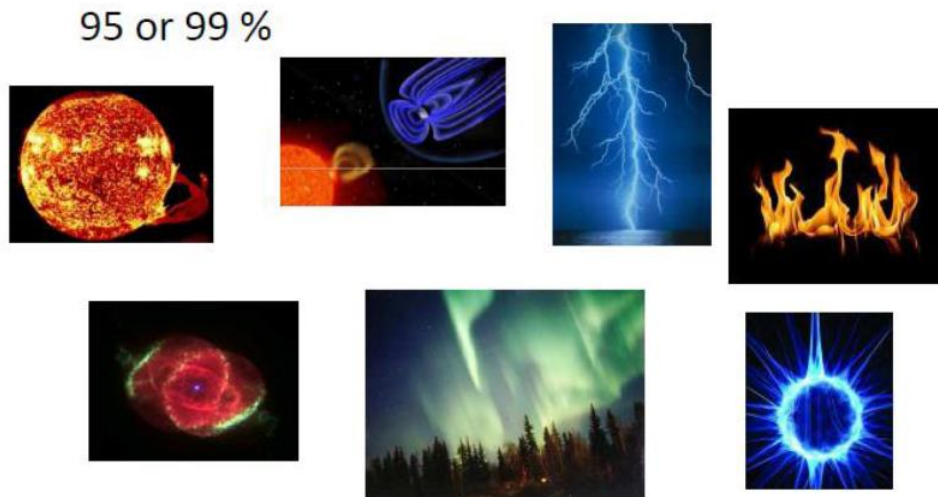


Figure 2. Exemples d'un état de plasma [3]

I-2- Propriétés des plasmas

Comme tous les états physiques de la matière, le plasma est un état caractérisé par certains paramètres spécifiques tels que :

a) Densité des espèces

On décrit un plasma en spécifiant la densité des ions ou des électrons souvent exprimée en cm^{-3} ou m^{-3} . Considérons des ions ayant une charge $+Z.e$ avec Z le nombre atomique, alors la densité ionique est obtenue par la condition de neutralité [4] suivante:

$$N_e \cdot e = N_i \cdot Z \cdot e \Rightarrow N_i = \frac{N_e}{Z}$$

où

- N_e est la densité électronique,
- N_i est la densité ionique,
- e représente la charge électronique avec $e=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

b) Température

Dans un milieu plasmagène, il faut distinguer entre la température électronique notée T_e et la température ionique notée T_i [5].

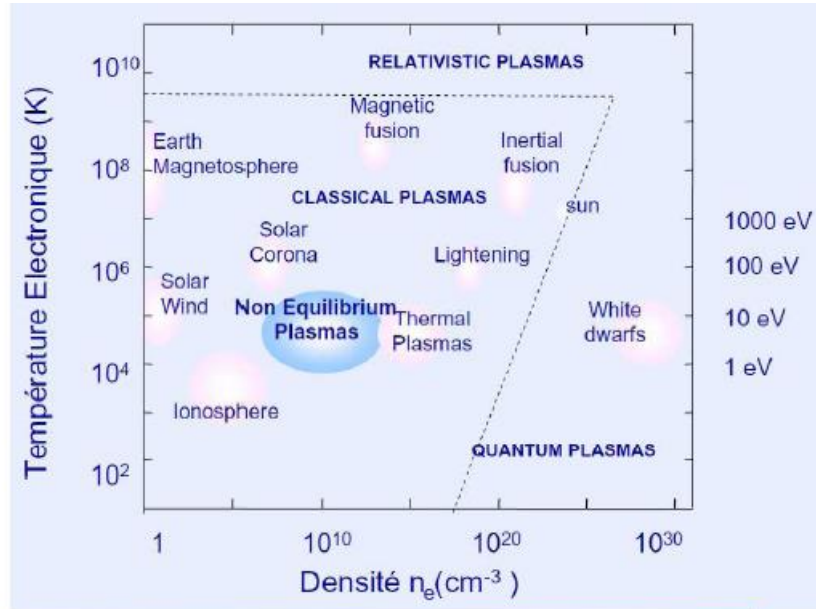


Figure 3. Classification des plasmas selon la température et la densité électronique[4]

c) Degré d'ionisation

Lorsqu'on applique un champ électrique assez intense à un gaz, ce dernier se transforme d'un milieu isolant à celui d'un conducteur, ce qui mène à la production d'un gaz ionisé contenant N_e électrons, N_i ions et N neutres (atomes ou molécules) par unité de volume. Dans le cas d'un gaz macroscopiquement neutre on a[3] :

$$N_e = N_i$$

Le degré d'ionisation d'un gaz est défini par:

$$\alpha = \frac{N_e}{N + N_i}$$

On distingue les cas suivants:

- Si $\alpha < 10^{-4}$ alors le plasma possède un comportement faiblement ionisé.
- Si $10^{-4} < \alpha < 10^{-2}$ alors le plasma possède un comportement fortement ionisé
- Si $\alpha = 1$ ainsi le plasma est considéré complètement ionisé.

I-3 Equilibre thermodynamique

Dans un plasma, il existe deux types d'équilibre thermodynamique:

I-3-1 Equilibre thermodynamique complet

En absence des gradients de la température et de pression, le plasma atteint un équilibre thermodynamique complet, autrement dit les différentes espèces du plasma possèdent la même température, connu sous le *théorème de l'équipartition*. Par suite, chaque processus est contrebalancé par son processus inverse, tels que l'ionisation et la recombinaison, l'excitation et désexcitation [3].

En équilibre thermodynamique complet, certaines lois sont vérifiées, on cite:

a) Loi de Maxwell

La loi de Maxwell vérifie la loi de distribution des vitesses qui permet de déterminer le nombre de particule dN d'une espèce donnée, pour une vitesse comprise entre v et $v+dv$ à une température fixe. La loi de Maxwell est donnée par l'équation suivante [3]:

$$\frac{d^3N}{N} = \left(\frac{m}{2 \cdot \pi \cdot k_B \cdot T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot \pi \cdot k_B \cdot T}} \cdot 4 \cdot \pi \cdot v^2 dv$$

avec m la masse de la particule et k_B la constante de Boltzmann.

b) Loi de Boltzmann

Soit un système constitué par des particules en équilibre thermodynamique à une température T , ainsi la distribution canonique de Boltzmann sert à déterminer les populations des différents niveaux d'énergie. La loi de Boltzmann est donnée par la relation [3] suivante:

$$\frac{N_i}{N} = \frac{g_i}{Q^{int}} e^{-\frac{E_i}{k_B \cdot T}}$$

avec N_i , E_i et g_i représentent respectivement la densité de population, le poids statistique et l'énergie associée au niveau « i ». N et Q^{int} représentent respectivement la densité totale et la fonction de partition interne de l'espèce considérée telle que:

$$Q^{int} = \sum_{i=0}^n g_i \cdot e^{-\frac{E_i}{k_B \cdot T}}$$

c) Loi de Saha

Elle détermine le degré d'ionisation d'un plasma [3]:

$$\frac{N_e \cdot N_i}{N_0} = 2 \cdot \frac{Q_i^{int}}{Q_0^{int}} e^{-\frac{E_i - \Delta E}{k_B \cdot T}}$$

avec

- N_e représente la densité électronique,
- N_i représente la densité ionique,
- N_0 représente la densité de l'atome neutre,
- Q_i^{int} représente la fonction de partition de l'ion,
- Q_0^{int} représente la fonction de partition de l'atome,
- \hbar est la constante de Planck,
- E_i représente le potentiel de l'ionisation de l'espèce considérée,
- ΔE est l'abaissement du potentiel d'ionisation dû à la présence des particules qui chargées sous effets des champs électriques, son expression est donnée par:

$$\Delta E = \frac{(Z + 1) \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \lambda_D}$$

d) Loi de Guldberg–Waage

Cette loi détermine une relation entre la densité d'une molécule AB et celles des atomes A et B et est donnée par la relation [3]:

$$\frac{N_A N_B}{N_{AB}} = \frac{Q_A^{int} Q_B^{int}}{Q_{AB}^{int}} \left(\frac{m_A m_B}{m_{AB}} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_{AB} - \Delta E_{AB}}{k_B \cdot T}}$$

avec

- Q_A^{int} représente la fonction de partitions de A,
- Q_B^{int} représente la fonction de partitions de B,
- Q_{AB}^{int} représente la fonction de partitions de AB,
- E_{AB} est l'énergie de dissociation,
- ΔE_{AB} représente l'abaissement de potentiel de cette énergie de dissociation.

e) Loi de Planck

Selon le principe de l'équilibre des processus élémentaires sur le plasma, le rayonnement émis par le plasma est totalement absorbé, ainsi le plasma se comporte comme un corps noir, et par suite la distribution spectrale de rayonnement est donnée alors par la loi de Planck [3] :

$$B_{\lambda}^0(T) = \frac{2 \cdot \hbar \cdot c^2}{\lambda^5} \left(e^{\frac{\hbar \cdot c}{\lambda \cdot k_B \cdot T}} - 1 \right)^{-1}$$

avec

- B_{λ}^0 la luminance spectrale d'un corps noir à une température T,
- c la célérité de la lumière, elle vaut : $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,
- \hbar la constante de Planck.

I-3-2 Equilibre thermodynamique local

En présence des gradients de température dans certaines régions, l'équilibre thermodynamique devient difficilement réalisable dans le cas d'un plasma thermique ou un d'arc. Par conséquent, certains paramètres intensifs telle que la température contrôlent les échanges à l'intérieur du système et avec son extérieure. Ce type d'équilibre constitue le cas de notre étude.

I-3-3 Propriétés thermodynamiques

Les propriétés thermodynamique d'un gaz sont souvent la composition, l'enthalpie et la capacité calorifique.

a) La composition

La composition ou bien la fraction molaire d'un composant x_i est égale au rapport d'une quantité de matière n_i de ce composant sur le nombre totale de quantité de la matière n_{tot} du mélange. Elle est donnée par la relation suivante :

$$x_i = \frac{n_i}{n_{tot}}$$

b) L'enthalpie (h)

L'enthalpie est reliée à l'énergie d'un système thermodynamique. Elle est déterminée en calculant la somme de l'énergie interne de système physique considéré et le travail fourni par ce même système (P.V) :

$$h = U + P.V / W = P.V$$

avec

- h l'enthalpie exprimée en Joule,
- U l'énergie interne de système,
- P la pression,
- V le volume.

c) Capacité calorifique (c_p)

La capacité calorifique sert à déterminer le pouvoir d'un corps à absorber ou à récupérer de l'énergie par l'intermédiaire d'un échange de chaleur au cours d'une transformation pendant laquelle sa température varie, autrement dit elle constitue un apport d'énergie fourni à un corps pour augmenter sa température d'un Kelvin, son unité est [J/K]. Elle est considérée comme une grandeur extensive, i.e. plus la quantité de la matière est importante, plus la capacité calorifique est aussi.

On distingue deux types de la capacité calorifique: la capacité calorifique à pression constante et la capacité calorifique à volume constant. On s'intéresse à celle d'une pression constante correspondant à une quantité de chaleur absorbée par le corps considéré à une pression constante. Elle s'exprime en [J/K] et est exprimée par la relation suivante:

$$c_p = \left(\frac{dh}{dT}\right)_p$$

I-3-4 Propriétés de transport

Un gaz hors équilibre constitue un siège de flux net de particules portant avec elles des propriétés macroscopiques attachés telles que la quantité de mouvement, la masse et l'énergie. On distingue alors un transport de ces quantités qui résulte de l'existence d'hétérogénéité spatiale des grandeurs caractéristiques du gaz telles que la température,

la pression et la densité, ou de la présence des forces extérieures gérées ou aussi de celle des forces électriques appliquées sur les espèces chargées [5].

a) La viscosité (μ)

La viscosité caractérise le transport de la quantité de mouvement dû à la présence d'un gradient de vitesse. Autrement dit, la viscosité est associée à la résistance existée dans un sens inverse au mouvement d'un fluide.

En appelant la viscosité dynamique « μ » du fluide, le coefficient de proportionnalité est donné par la relation ci-dessous [6]:

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{U_0}{H}$$

avec

- F la force appliquée aux parois par le fluide, exprimée en [N],
- A la surface, exprimée en [m²],
- μ la viscosité dynamique, exprimée en [Pa.s],
- U_0 la vitesse du fluide, exprimée en [m.s⁻¹],
- H la hauteur séparant deux parois parallèles.

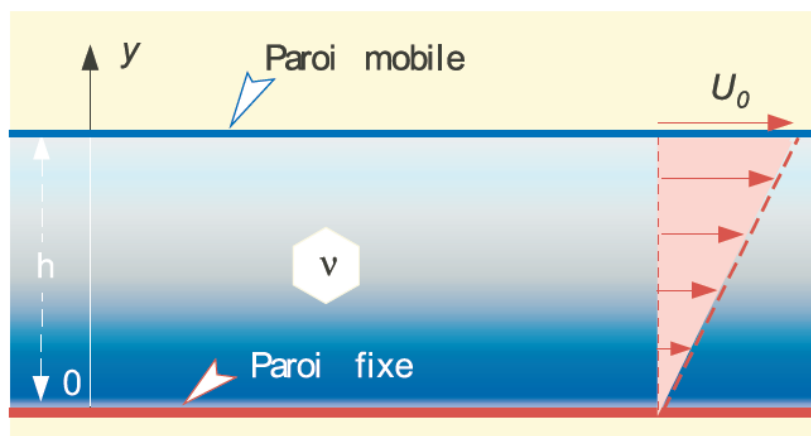


Figure 4. Schéma présentant l'écoulement de Couette[6]

On distingue encore la viscosité cinématique définie par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

avec

- μ la viscosité dynamique, exprimée en [Pa.s],
- ρ la masse volumique, exprimée en [kg.m⁻³],
- ν la viscosité cinématique, exprimée en [m².s⁻¹].

b) Conductivité thermique et Conductivité électrique

La conductivité thermique caractérise le flux d'énergie thermique sous l'effet d'un gradient de température et la conductivité électrique définit le flux des espèces chargées sous l'effet d'un champ électrique [5].

c) Diffusion

Elle représente le flux de particules sous l'effet d'un gradient de concentration appelé aussi la diffusion ordonnée, ou sous l'effet d'un gradient de température dit la diffusion thermique [5].

I-4 Classification des plasmas

La masse des électrons présents dans le plasma est plus faible que celle des ions et on a $m_{ion} \approx 1836.m_e$ [4], ce qui fait que les électrons sont plus réactifs que les ions. On distingue trois catégories de plasma [3] classifiées selon la température et la densité électroniques:

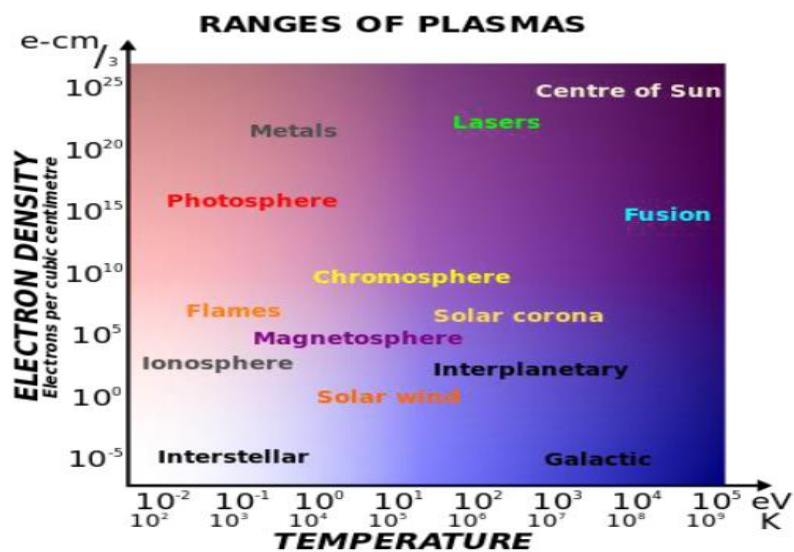


Figure 5. Classification des formes de plasma selon la température et la densité [3]

a) **Plasma froids hors équilibre**

Ce type de plasma est en équilibre thermodynamique local et caractérisé par un degré d'ionisation inférieur à 10^{-4} . De ce fait le plasma est partiellement ou faiblement ionisé et peu dense, de sorte que les électrons libres ont une température élevée de l'ordre de 30 000 K [5]. Les plasmas froids sont souvent utilisés dans les traitements de surface et l'élaboration des matériaux nouveaux ...etc.

b) **Plasma chaud**

Ce type de plasma est en équilibre thermodynamique complet et caractérisé par un degré d'ionisation égal à l'unité, d'où le plasma est totalement ionisé et très chaud. Les plasmas chauds constituent la majorité de l'Univers et leur température est assez élevée.

c) **Plasma thermique**

Ce sont des plasmas relativement denses et leur état est très proche de l'équilibre thermodynamique local [5]. Ils sont produits par des décharges d'arc ou bien des décharges radiofréquences ainsi que par des torches à couplage inductifs. Les plasmas thermiques sont principalement employés dans des appareils de coupe électrique, dans le traitement métallurgique et le traitement thermique [3].

Dans notre étude, nous utiliserons des torches à arc soufflé considérés comme étant des plasmas thermiques.

I-5 Torche à plasma

I-5-1 Définition

Les torches à plasma, appelés aussi les générateurs à arc ou les chalumeaux à plasma, sont des générateurs constitués de deux électrodes alimentés en courant alternatif ou courant continu. L'arc produit par la torche est stabilisé grâce à un champ magnétique, par rotation des électrodes ou par effet aérodynamique afin d'obtenir un meilleur fonctionnement. On distingue dans les applications industrielles deux types des torches à plasma [3] :

- Les torches à plasma à arc non transféré ou soufflé.
- Les torches à plasma à arc transféré.

I-5-2 Torches plasmas à arc non transféré

Ce type des torches contient deux électrodes : la cathode et l'anode qui est percé par un trou central servant de la tuyère d'éjection de la colonne de plasma. D'autre part, autour de la cathode se trouve un gaz injecté traversant la tuyère anodique. Ce type des torches permet d'obtenir une colonne plasma à une température supérieure à 10 000 K [3].

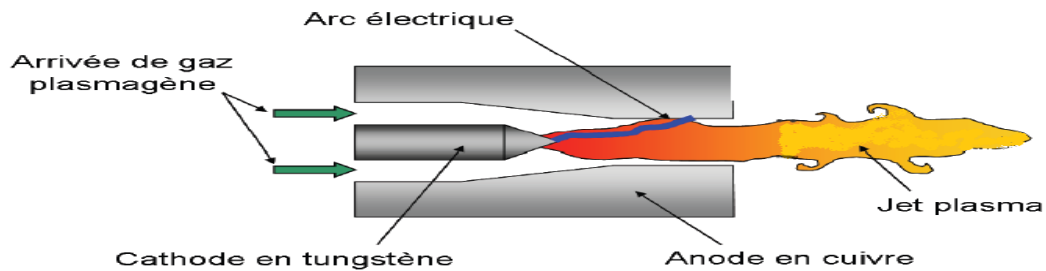


Figure 6. Torche plasma à arc non transféré (soufflé) pour le gaz plasmagène (Ar, H₂)[7].

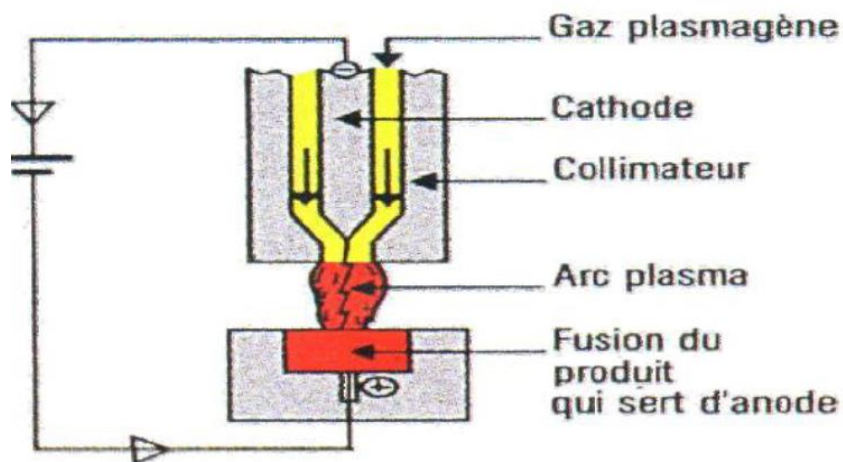


Figure 7. Torche plasma à arc transféré [3]

I-5-3 Torches à plasma à arc transféré

Ce type de torches ne contient qu'un seul genre d'électrode chaude ou froide. L'arc afflue entre l'électrode interne et un corps conducteur en contact avec une contre électrode [3].

Chapitre II

Modélisation des écoulements de plasma

II-1 Généralités sur les équations de Navier-Stokes

En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires qui décrivent le mouvement d'un fluide dans l'approximation des milieux continus. Elles gouvernent de nombreux phénomènes d'écoulement de fluides. Les équations de Navier-Stokes sont décrites par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho\vartheta = 0 \rightarrow eq. \text{continuité} \\ \rho \frac{dU}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial(\mu S_{ij})}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial(\mu\vartheta)}{\partial x_i} \rightarrow eq. \text{dynamique} \\ \rho \frac{d}{dt} \left(c_v T + \frac{U_i U_i}{2} \right) = \rho U_i F_i - \frac{\partial(p U_i)}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial(\mu S_{ij} U_i)}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial(\mu\vartheta U_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \rightarrow eq. \text{énergie} \end{array} \right.$$

La vitesse, la pression, la masse volumique et la température sont considérées comme des inconnues principales dans les équations de Navier-Stokes. μ , λ et c_v sont respectivement la viscosité dynamique, la conductivité thermique et la chaleur spécifique à volume constant du fluide. Le tenseur de vitesse de déformation S_{ij} est donné par la relation[6] :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{avec} \quad \vartheta = \frac{\partial U_k}{\partial x_k}$$

Lorsqu'on applique une contrainte de cisaillement à un fluide quelconque, celui-ci se déforme. La viscosité d'un fluide est en quelque sorte la capacité de ce dernier à résister plus au moins à cette déformation. Contentons nous ici de rappeler que c'est Newton qui a le premier décrit mathématiquement la viscosité, la définissant comme étant la variation de la quantité de mouvement des particules d'un fluide en écoulement laminaire par unité de surface. Cette variation est physiquement interprétée comme résultant de la dissipation d'énergie qui entraîne l'interaction entre éléments du fluide macroscopiquement distants.

II-2 Les conditions initiales et les conditions aux limites

II-2-1 Les conditions initiales

Sauf dans le cas d'un mouvement stationnaire, la détermination d'un champ d'écoulement à un instant t nécessite la connaissance des valeurs $U_i(x_j, t_0)$, $p(x_j, t_0)$, $\rho(x_j, t_0)$ et $T(x_j, t_0)$ qui sont respectivement les valeurs initiales de la vitesse, la pression, la masse volumique et la température de l'écoulement sur $[t_0, +\infty[[$ [6].

II-2-2- Les conditions aux limites

Soit Ω le domaine de l'écoulement de frontière constitué d'une paroi solide. Les conditions imposées sur la paroi solide prennent en considération le champ de vitesse ou de température de la manière suivante[6] :

- Les vitesses sont égales aux points de coïncidence des interfaces fluide/solide.
- La conduction de la chaleur au sein d'un fluide en contact avec une paroi sous déséquilibre thermique peut être considérée soit égale à la température de la paroi imposée ou au flux de chaleur au contact fluide /solide imposé.

II-3- Les modèles simplifiés de Navier-Stokes

En mécanique des fluides, l'étude de l'écoulement d'un fluide se repose sur la résolution des équations de Navier-Stokes souvent applicables pour des milieux continus. Les équations de Navier-Stokes prennent différentes formes selon le modèle de fluide étudié[6].

On distingue quatre modèles simplifiés des fluides selon des hypothèses proposées : fluide réel compressible, fluide réel incompressible, fluide parfait compressible et fluide parfait incompressible.

a) Fluide réel compressible

C'est le cas d'un fluide visqueux newtonien et un conducteur de la chaleur au sens de Fourier. Dans ce modèle, λ , μ , c_p et c_v sont considérés comme étant des constantes et les équations de Navier-Stokes s'écrivent[6] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0 \rightarrow eq. \text{continuité} \\ \rho \frac{dU_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[\frac{\partial^2 U_i}{x_j x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_l} \right) \right] \rightarrow eq. \text{dynamique} \\ \rho c_v \frac{dT}{dt} = -p \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \phi_v + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \rightarrow eq. \text{énergie} \end{array} \right.$$

avec

- c_v la chaleur spécifique à volume constant,
- Φ_v le taux de dissipation par viscosité conformément à relation.

b) Fluide réel incompressible

Ce modèle est caractérisé par une masse volumique constante. Les équations de Navier-Stokes s'écrivent sous la forme[6] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \rightarrow eq. \text{continuité} \\ \rho \frac{dU_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \rightarrow eq. \text{dynamique} \\ \rho c_v \frac{dT}{dt} = \phi_v^i + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \rightarrow eq. \text{énergie} \end{array} \right.$$

avec

$$\phi_v^i = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_j} + \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \right)^2$$

c) Fluide parfait compressible

Contrairement aux fluides réels compressibles, ce genre de fluide est considéré non visqueux et non conducteur de la chaleur, $\mu = \lambda = 0$. Les équations de Navier-Stokes s'écrivent [6] :

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \rightarrow eq. \text{continuité} \\ \rho \frac{dU_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \rightarrow eq. \text{dynamique} \\ \rho c_v \frac{dT}{dt} = -p \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \rightarrow eq. \text{énergie} \end{cases}$$

d) Fluide parfait incompressible

Dans ce modèle, on a $\lambda=\mu=0$ et les équations de Navier-Stokes s'écrivent[6] :

$$\begin{cases} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \rightarrow eq. \text{continuité} \\ \rho \frac{dU_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \rightarrow eq. \text{dynamique} \end{cases}$$

Chapitre III

Méthodes Numériques

III-1 Introduction

Les modèles mathématiques décrivant des problèmes physiques se présentent sous la forme de systèmes d'équations différentielles reliant des fonctions inconnues (vitesse, pression, température) à leurs dérivées partielles. Des conditions initiales et des conditions aux limites sont en outre imposées afin de compléter le modèle. La solution de certaines équations peut parfois être obtenue analytiquement, toutefois cela n'est pas possible dans la plupart des cas. Pour remédier à ce problème, on a recours au calcul d'une fonction approchée au moyen de méthodes numériques en recherchant la valeur des fonctions inconnues en un maximum de points : on parle alors de la discrétisation.

Ainsi, les méthodes numériques de discrétisation consistent à résoudre un système d'équations algébriques au lieu de résoudre un système d'équations différentielles muni de ces conditions aux limites. Ceci est envisageable grâce aux progrès récents de l'informatique.

Les méthodes les plus fréquentes pour résoudre ce type d'équations sont :

- la méthode des différences finies,
- la méthode des volumes finis,
- la méthode des éléments finis,
- la méthode spectrale.

III-2 Nature des équations

Soit l'équation

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi = G$$

La détermination de type de l'EDP dépend de la nature son discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$ [12] :

- Si $\Delta > 0$, l'équation est dite hyperbolique,
- Si $\Delta = 0$, l'équation est dite parabolique,

- Si $\Delta < 0$, l'équation est dite elliptique.

III-3 Méthode de Différences finies

La méthode des différences finies consiste à résoudre des équations aux dérivées partielles, par l'approximation de dérivées par des différences finies en subdivisant le domaine d'étude en un nombre bien déterminé de nœuds et en exprimant la fonction solution du domaine par un développement limité en série de Taylor en chacun des nœuds. Ainsi, le système d'équations différentielles se transforme en un système d'équations algébriques pour chaque nœud.

Cette méthode possède plusieurs avantages telles que la simplicité, la facilité du calcul des dérivées et un faible coût de calcul. Cependant elle présente une limitation de la géométrie des domaines de calcul à cause de la rigidité du maillage outre les difficultés de prise en compte des conditions aux limites et les non-linéarités.

III-4 Méthode des éléments finis

Dans la méthode des éléments finis, en se plaçant dans un cadre fonctionnel adéquat, les modèles physiques, posés à l'origine sous formes d'équations aux dérivées partielles avec conditions limites, peuvent être écrits sous une forme plus générale, la forme faible sous des formes intégrales qui permettra d'utiliser des outils d'analyse particulièrement puissants conduisant à la solution exacte en minimisant ces intégrales. Elle est basée sur la subdivision du domaine d'étude en régions élémentaires, ensuite à calculer la fonction inconnue sur chacun de ces éléments par une approximation polynomiale.

A l'heure actuelle, la méthode des éléments finis occupe une place de premier plan dans le monde du calcul scientifique puisqu'elle repose sur des bases mathématiques solides et des progrès considérables, aussi bien théoriques que pratiques. La méthode des éléments finis demeure une méthode très robuste et souple pour la résolution des équations aux dérivées partielles surtout dans les géométries complexes. Cependant, sa mise en œuvre est assez compliquée puisque la résolution du système algébrique correspondant nécessite une place mémoire assez importante et par suite un temps de calcul à cause du processus d'inversion des matrices.

III-5 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est basée sur la subdivision de l'intégration des équations décrivant un modèle physique sur des volumes élémentaires chacun entourant un nœud principal limité par des nœuds voisins. Elle est souvent employée dans la discrétisation spatiale des lois de conservation. L'équation différentielle est en fait intégrée dans chaque volume élémentaire fini où la fonction inconnue est représentée par une fonction d'approximation entre deux nœuds consécutifs. Le résultat de discrétisation de l'intégrale donne une équation algébrique qui est constituée par les valeurs nodales.

Soit une loi de conservation d'une grandeur physique ω dans une maille de volume Ω , faisant introduire un flux $F(\omega)$ et un terme source $S(\omega)$. On a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \omega \, d\Omega + \int_{\Omega} \text{div } F(\omega) \, d\Omega = \int_{\Omega} S(\omega) \, d\Omega$$

Soit Σ la surface de la maille et n sa normale extérieure. Le théorème d'Ostrogorski nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \omega \, d\Omega + \oint_{\Sigma} F(\omega) \cdot n \, d\Sigma = \int_{\Omega} S(\omega) \, d\Omega$$

L'intégrale $\oint_{\Sigma} F(\omega) \cdot n \, d\Sigma$ indique la somme des flux traversant chaque face de la maille. On supposera à présent que le flux est invariant sur chaque face, ainsi l'intégrale se conduit à une somme discrète sur chaque face de la maille :

$$\oint_{\Sigma} F(\omega) \cdot n \, d\Sigma = \sum_{\text{face de la maille}} F_{\text{face}} \cdot n_{\text{face}} \cdot \Sigma_{\text{face}}$$

où $F_{\text{face}} = F(\omega_{\text{face}})$ représente le flux numérique sur la face considérée [11].

On considère une loi de conservation d'une grandeur physique $u(x,y,t)$ où x et y sont les deux directions spatiales. Le domaine de calcul est divisé en mailles. Dans ce cas, le terme $\oint_{\Sigma} F \cdot n \, d\Sigma$ désigne une circulation sur un contour d'une maille élémentaire et ce dernier terme servira à calculer le bilan des flux traversant chaque face de la maille grâce à la discrétisation spatiale. La méthode d'approximation des flux numériques en fonction de l'inconnue discrète définit le schéma numérique. On supposera à présent que la grandeur physique ω est invariante dans chaque maille et est égale à une valeur approchée de sa moyenne sur la maille

ou une valeur centrale. D'autre part, la dérivée par rapport au temps est calculée à l'aide d'une méthode numérique d'intégration des équations différentielles telles que les méthodes de Runge-Kutta, Euler explicite ou encore les méthodes implicites en faisant intervenir un pas de temps d'intégration Δt . Soit $\Delta\omega$ l'incrément de la grandeur ω entre deux itérations temporelles successives et on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \omega d\Omega = \Omega \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_{maille} = \Omega \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Et la loi de conservation discrétisée avec la méthode des volumes finis s'écrit sous la forme suivante :

$$\Omega \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \sum_{faces} F_{face} \cdot n_{face} \Sigma_{face} = \Omega S$$

Néanmoins, cette méthode autorise l'utilisation de volumes de forme quelconque et des géométries assez complexes. Plusieurs codes de simulation numérique en mécanique des fluides emploient essentiellement cette méthode, on cite Fluent, CFX ou autre [11].

Chapitre VI

Modélisation de la turbulence

A l'aide des expériences menées par Reynolds en 1883 portant sur l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique rectiligne, Reynolds a montré l'existence de trois régimes d'écoulement : laminaire, transitoire et turbulent caractérisés par le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{v d}{\nu}$$

avec

- ρ la masse volumique exprimée en kg.m^{-3} ,
- η la viscosité dynamique exprimée en $\text{Pa.s} = \text{Kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$,
- ν la viscosité cinématique exprimée en $\nu = \frac{\eta}{\rho} \text{Kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$,
- d le diamètre de la conduite,
- v la vitesse moyenne de fluide.

On distingue trois types de l'écoulement :

- Si $Re < 2000$, alors le régime de l'écoulement est dit laminaire.
- Si $2000 < Re < 3000$, alors le régime de l'écoulement est dit transitoire.
- Si $Re > 3000$, alors le régime de l'écoulement est dit turbulent [14].

Dans les équations de Navier-Stokes, le nombre de Reynolds mesure le poids relatif des termes visqueux et inertiel.

VI-1 Régime Laminaire

Soit un tube cylindrique horizontal de rayon R et de longueur L traversé par un écoulement d'un fluide en régime laminaire. Lorsque le fluide traverse le tube, sa vitesse augmente jusqu'à atteindre une valeur stationnaire au bout d'une certaine distance appelée, longueur d'entrée l_E :

$$\frac{l_E}{d} = 0.0065 Re$$

où d représente le diamètre de la conduite. Le développement progressif de la couche limite conduit à une augmentation de la vitesse centrale assurant la conservation de débit entraînant par la suite un gradient longitudinal de la pression.

Le profil de la vitesse prend la forme parabolique suivante[14] :

$$U(r) = U_{max} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

avec

- $U_{max} = 2U_{entrée}$,
- R étant le rayon de la conduite horizontale.

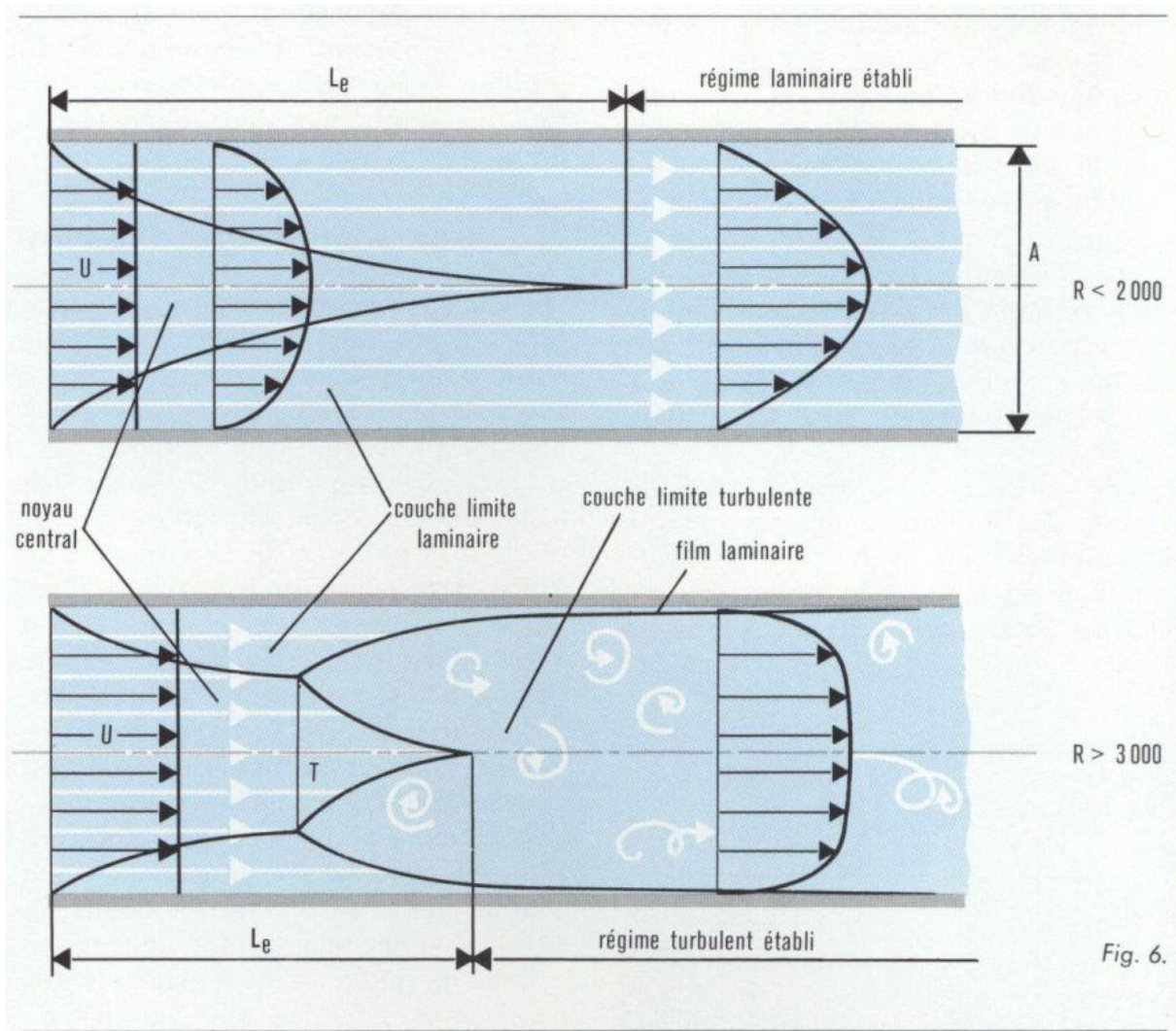


Figure 8. Evolution de l'écoulement laminaire et turbulent dans une conduite cylindrique[19].

VI-2 Régime turbulent

Lorsque le mouvement des particules fluides est irrégulier et que les fluctuations aléatoires de la vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide, on parle d'un écoulement turbulent [14]. On a :

$$\frac{l_E}{D} = 1.5^4 \sqrt{Re}$$

et la distance de point de transition est :

$$\frac{l_\tau}{D} \approx \frac{10^5}{Re}$$

Le profil de vitesse peut être approximativement représenté par une loi de puissance décrite par la fonction suivante :

$$U(r) = U_{max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n$$

avec $6 \leq n \leq 10$ et dépend du nombre de Reynolds et $U_{max} = 1,2 U_{entrée}$.

VI-3 Modélisation de la turbulence dans un plasma

Un régime turbulent se distingue par la présence de variations de l'écoulement. Quand le nombre de Reynolds augmente, le rapport entre la taille des plus grands et plus petits tourbillons devient de plus en plus important. La description la plus précise de la turbulence est composée de la résolution de l'ensemble des échelles du spectre par la simulation numérique direct (DNS). Cependant, cette approche nécessite un nombre de points de l'ordre de $Re^{3/4}$ par direction ce qui fait que cette approche est avantageuse dans l'industrie.

La plupart des travaux de simulation portant sur les procédés de projection par plasma sont basées sur la modélisation d'une partie ou de la totalité des échelles de la turbulence. Les simulations de jet plasma se servent d'un modèle de turbulence, tel que le modèle RANS (approche Reynolds Averaged Navier Stokes) ou le modèle LES (Large Eddy Simulation). Cependant la turbulence concernant les jets plasma n'est pas suffisamment développée.

VI-4-1 Modèle de Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS)

Le principe de cette approximation est basé sur les caractéristiques moyennes de l'écoulement et on s'intéresse à la décomposition de Reynolds où tous les champs se décomposent en un champ moyen et un champ fluctuant de moyenne nulle.

$$\rho(x, t) = \overline{\rho(x, t)} + \rho'(x, t)$$

La décomposition de Reynolds conduit à l'équation de Reynolds sur les champs moyens dépendant des fluctuations de vitesse non résolus. La modélisation de Reynolds des champs macroscopiques de vitesse, pression, température et concentration conduit à la résolution suivante pour les champs moyens[15] :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \otimes \bar{u} \right) = -\nabla \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho k \right) + \nabla \cdot ((\mu + \mu_t)(\nabla \bar{u} + \nabla^t \bar{u})) + \rho \bar{f}$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{T} \right) = \nabla \cdot ((\lambda + \lambda_t) \nabla \bar{T})$$

$$\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{\chi} = \nabla \cdot ((D + D_t) \nabla \bar{\chi})$$

où les variables μ_t, λ_t, D_t modélisent les efforts de la turbulence sur les transferts moyens de quantité de mouvement, de chaleur et d'espèces avec :

- ρ la masse volumique exprimée en kg.m^{-3} ,
- u la vitesse exprimée en m.s^{-1} ,
- T la température exprimée en K ,
- t le temps exprimé en s ,
- k l'énergie cinétique turbulente moyenne exprimée en $\text{m}^2.\text{s}^{-2}$,
- c_p la chaleur spécifique à pression constante exprimée en $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$,
- μ la viscosité dynamique exprimée en Pa.s ,
- μ_t la viscosité turbulente exprimée en Pa.s ,
- λ la conductivité thermique exprimée en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$,
- χ le coefficient de compressibilité isotherme exprimé en Pa^{-1} ,
- D le coefficient de diffusion moléculaire exprimé en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$.

a) Modèle k-ε standard

Grâce à sa simplicité, ce modèle est le plus employé. Les travaux de modélisation des procédés de projection thermique emploient généralement le modèle k-ε [15].

La viscosité turbulente est exprimée par la relation :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

où ε est le taux de dissipation visqueuse de l'énergie turbulente moyenne k.

Les deux équations de fermeture sont données par :

-Equation de transport de l'énergie cinétique turbulente « k »

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k \overline{U_i})}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}_2 + \underbrace{G_k}_3 - \underbrace{\rho \varepsilon}_4$$

où

- Le terme 1 représente terme convectif,
- Le terme 2 représente terme diffusif,
- Le terme 3 représente taux de production,
- Le terme 4 représente taux de dissipation.

-Equation de transport du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente « ε »

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \varepsilon \overline{U_i}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k) - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Le terme de production G_k s'écrit sous la forme :

$$G_k = -\rho \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_j} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}$$

avec

$$\mu_t = \mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\lambda_t = c_p \frac{\mu_t}{Pr_t}$$

$$D_t = \frac{\mu_t}{\rho Sc_t}$$

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i \partial u_i}{\partial x_j \partial x_j}}$$

G_k est le terme de production d'énergie cinétique turbulente et $\sigma_k=1, \sigma_\varepsilon=1.3, C_{\varepsilon 1}=1.44, C_{\varepsilon 2}=1.92, C_\mu=0.09$ sont des constantes de ce modèle[16]. Pr_t représente le nombre de Prandtl et Sc_t le nombre de Schmidt.

b) Modèle RNG k- ε

Ce modèle a été développé par le groupe de renormalisation de Yakhot et Smith en 1992. Il est basé sur l'estimation de la constante $C_{\varepsilon 1}$ qui est renommée par $C_{\varepsilon 1}'$ dans l'équation de dissipation. Un nouvel terme η apparaît dans l'équation de dissipation qui la rend moins diffusive.

$$C_{\varepsilon 1}' = C_{\varepsilon 1} - \frac{\eta \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right)}{1 + \beta \eta^3}$$

avec

$$\eta = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{p}{\eta_t}}$$

Les constantes du modèle « RNG k- ε » sont résumées dans le tableau suivant :

C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_ε	η_0	β
0.085	1.42	1.68	0.7179	4.38	0.015

Tab 1. Valeurs des constantes du modèle RNG k- ε

Ce modèle se distingue principalement du modèle standard dans l'équation de taux de la dissipation turbulente de l'énergie. Le modèle « RNG » fournit une faible viscosité turbulente, autrement dit une production de turbulence k faible et un taux de

dissipation ε élevé que le modèle standard, dans le cas des écoulements caractérisés par des contraintes élevés. Les deux versions de modèle « k- ε » « Standard » et « RNG » sont souvent employés dans l'étude des écoulements loin des parois[16].

c) Modèle des contraintes différentielles de Reynolds (RSM)

Le modèle RSM (Reynolds Stress Model) se base sur la même décomposition de Reynolds que précédemment. Ce modèle emploie une équation de transport non plus sur les variables k et ε , mais sur chaque composante du tenseur de Reynolds[17].

Ce modèle vise à déterminer les contraintes de Reynolds selon leur propre équation de transport. D'autre part, puisque le concept de la viscosité turbulente n'est pas pris en considération, ce modèle nécessite un calcul des contraintes $\overline{u_i u_j}$ d'une manière individuelle.

Ces équations se sont servies pour arriver à une fermeture du système d'équation de Reynolds moyennées pour le transport de la quantité de mouvement :

➤ Equation de transport des contraintes de Reynolds

Ces équations sont illustrées comme suivant :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho U_k \overline{u_i u_j})}_1 \\ &= - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} [\rho \overline{u_i u_j u_k} + p(\delta_{kj} u_i + \delta_{ik} u_j)]}_2 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} [\mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j})]}_3 \\ & \quad - \underbrace{\rho [\overline{u_i u_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}]}_4 + \underbrace{p (\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i})}_5 - \underbrace{2\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k}}_6 \end{aligned}$$

- 1 est le terme de convection,
- 2 est le terme de diffusion turbulente,
- 3 est le terme de diffusion moléculaire,
- 4 est le terme de production de contraintes,
- 5 est le terme de pression taux de déformation,
- 6 est le terme de dissipation.

Si le problème est stationnaire et sans transfert thermique et en tenant compte du fait que l'effet de Buyancy et de compressibilité sont nuls, on obtient :

$$D_{T,ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} \right)$$

L'équation de pression-taux de dissipation s'écrit sous la forme :

$$\phi_{ij} = \phi_{ij,1} + \phi_{ij,2} + \phi_{ij,\omega}$$

avec

- $\phi_{ij,1} \equiv -C_1 \rho \frac{\varepsilon}{k} [\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} f_{ij} k] \rightarrow$ Terme lent
- $\phi_{ij,2} \equiv -C_2 [(P_{ij} + C_{ij}) - \frac{2}{3} f_{ij} (P - C)] \rightarrow$ Terme rapide
- $\phi_{ij,\omega} \equiv C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_i u_k} n_j n_k - \frac{3}{2} \overline{u_j u_k} n_i n_k \right) \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon d} +$
 $C_2' (\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,2} n_j n_k - \frac{3}{2} \phi_{jk,2} n_i n_k)$
- $C_1' = \frac{C_\mu^{3/2}}{K}$
- $\Phi_{ij,\omega}$ représente le terme d'amortir la fluctuation.

Les constantes de ce modèle sont représentées dans le tableau ci-dessous :

C_1	C_2	P	C	C_1'	C_2'	C_μ	K
1.8	0.6	1.68	0.7179	0.5	0.3	0.09	0.4187

Tab 2. Constantes du modèle RSM.

où K représente la constante de Von Karman

Les valeurs de l'énergie k sont obtenues à l'aide des conditions aux limites pris des parois.

Le tenseur de dissipation est modélisé selon la relation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} (\rho \varepsilon)$$

La dissipation a été déterminée à partir d'une équation à peu près semblable à celle du modèle k-ε :

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{1}{2} [P_{ij}] \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

avec $\sigma_k=1.0$, $C_{\varepsilon 1}=1.44$ et $C_{\varepsilon 2}=1.92$.

Si la turbulence est supposée isotrope, on peut écrire :

$$\overline{u_i u_j} = \frac{3}{2} k \text{ si } i = j$$

et

$$\overline{u_i u_j} = 0 \text{ si } i \neq j$$

d) Modèle k- ω

La structure du modèle k- ω ressemble à celle du modèle k- ε . Ce modèle dérive des équations de transport. L'une des deux c'est celle pour l'énergie cinétique de turbulence k et l'autre pour le taux de dissipation spécifique ω défini par le rapport entre ε et k.

L'originalité de l'énergie cinétique k et le taux de dissipation ω résulte des équations de transport suivantes[17] :

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \omega u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega - S_\omega$$

avec

- G_k la production d'énergie cinétique turbulence par les gradients de vitesse moyenne,
- G_ω la production de ω ,
- Γ_k et Γ_ω les coefficients de diffusions de k et ω ,
- Y_k et Y_ω les dissipations de k et ω dues à la turbulence,
- S_k et S_ω les termes de sources.

Les coefficients Γ_k et Γ_ω sont les nombres de Prandtl pour k et ω respectivement et μ_t est la viscosité turbulence.

$$\mu_t = a^* \frac{\rho k}{\omega}$$

Pour les faibles nombres de Reynolds, un nombre a^* est utilisé tenant en compte de la diminution de la viscosité turbulente[16] :

$$a^* = a^*_\infty \left[\frac{a^*_0 + \frac{Re_t}{R_k}}{1 + \frac{Re_t}{R_k}} \right]$$

avec $Re = \frac{\rho k}{\mu \omega}$, $R_k = 6$, $a^*_0 = \frac{\beta_i}{3}$ et $\beta_i = 0.072$.

Les termes de production G_k et G_ω sont donnés respectivement par :

$$G_k = -\overline{\rho u_i' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

et

$$G_\omega = a \frac{\omega}{k} G_k \text{ Avec : } a = \frac{a_\infty}{a^*} \left(\frac{a_0 + \frac{Re_t}{R_\infty}}{1 + \frac{Re_t}{R_k}} \right), R_\omega = 2.95$$

La dissipation de k due à la turbulence est donnée par :

$$Y_B = \rho B^* f_B \cdot k \omega$$

avec

$$f_{B^*} = \begin{cases} 1 & \chi_k \leq 0 \\ \frac{1 + 680 \chi_k^2}{1 + 400 \chi_k^2} & \chi_k > 0 \end{cases}$$

$$\chi_k = \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

$\beta^* = \beta_i^* (1 + \zeta^* F(M_t))$ où $F(M_t)$ est la fonction de compressibilité

$$\beta_i^* = \beta_\infty^* \left(\frac{\frac{4}{15} + \left(\frac{Re}{R_\beta}\right)^4}{1 + \left(\frac{Re_t}{R_b}\right)^4} \right)$$

$$C^* = 1.5, R_\beta = 8 \text{ et } \beta_\infty = 0.09$$

La dissipation de ω due à la turbulence est donnée par :

$$Y_\omega = \rho \beta_i f_\beta \omega^2$$

avec

$$f_{\beta} = \frac{1 + 70\chi\omega}{1 + 80\chi\omega}$$

$$\chi\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}S_{ki}}{(\beta_{\infty}^*\omega)^3} \right|$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

VI-4-2 Large Eddy Simulation (LES)

La simulation des grandes structures (LES) est une approximation intermédiaire hybride basée sur une résolution partielle des petits et grands tourbillons [16]. En fait, si les grands tourbillons diffèrent entre eux selon les géométries, leur structure change selon le type d'écoulement considéré, contrairement aux petits tourbillons. Le principe de cette consiste à calculer le mouvement tridimensionnel et instationnaire des gros tourbillons de l'écoulement considéré.

La modélisation est caractérisée par un traitement statistique basée sur les équations de base. Les grands tourbillons résultent d'un écoulement moyen et dépendent de ce dernier. En outre, ils sont anisotropes, de longue durée de vie et compliqués à modéliser. Cependant, les petits tourbillons, se distinguent par un caractère plus universel et tendent vers l'isotropie. De plus, leur durée de vie est courte et ils sont plus simples à modéliser.

Les simulations numériques caractérisées par des nombres de Reynolds élevés utilise un découpage des fluctuations tourbillons qui rend possible de ne calculer que les grandes structures énergétiques et modéliser les petites structures de caractère plus universel.

Malgré qu'elle soit une technique encore en cours de développement [16], cette approche est efficace dans certain cas, surtout lorsque les modèles classiques de type k- ϵ échouent.

Chapitre V

Position du problème et résultats numériques

V-1 Modèle d'équations

Le milieu considéré est un milieu continu, ce qui nous permet d'utiliser légalement les équations de Navier-Stokes :

➤ Conservation de la masse

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} = -\text{div}(\rho \vec{v})$$

Le terme de droite dans l'équation de conservation de masse représente le terme de transport de la matière.

➤ Conservation du mouvement

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = -\text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) - \overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g} + \text{div} \vec{\tau}$$

Le premier terme de droite de l'équation de conservation du mouvement correspond au transport convectif. Le second terme de droite représente les forces de pression, le troisième représente celles de gravité et enfin le quatrième correspond aux contraintes visqueuses. Le taux τ s'exprime en fonction de la viscosité.

➤ Conservation des espèces

$$\frac{\partial \rho X_i}{\partial t} = -\text{div}(\rho X_i \vec{v}) + \text{div}(\rho D_{ij} \overrightarrow{\text{grad}} X_i)$$

Le X_i du membre à gauche dans l'équation de conservation des espèces représente la fraction massique de l'espèce i (ici c'est l'argon Ar et l'hydrogène H₂). Le D_{ij} dans le deuxième terme de divergence à droite est le coefficient de diffusion binaire de i dans j ou de j dans i .

➤ **Conservation de l'énergie**

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = -\text{div}(\rho h \vec{v}) + \text{div} \left[\frac{\kappa}{C_p} \overrightarrow{\text{grad}} h \right] + S_{rad} + S_{vol}$$

où h est l'enthalpie spécifique exprimée en J/kg et κ la conductivité thermique du mélange. Le premier terme de droite dans l'équation précédente représente le transport convectif et le second terme, représente la conduction tandis que les termes S représentent les termes sources.

V-2 Hypothèses du problème physique

- L'écoulement est supposé permanent et stationnaire, impliquant que toutes les quantités des équations de Navier-Stokes se conservent par rapport au temps.
- Le plasma est considéré comme un fluide incompressible autrement dit sa masse volumique ρ est constante.
- Le modèle de turbulence utilisé est le modèle « Standard k- ϵ ».
- Le gaz plasmagène traité est constitué de l'Ar et de H₂. Une équation de conservation d'espace est ajoutée aux équations de Navier-Stokes.
- Les propriétés thermodynamiques telles que la capacité thermique, l'enthalpie et la masse volumique, ainsi que celles de transport telles que la viscosité dynamique et la conductivité thermique, du gaz plasmagène sont déterminées par les lois des mélanges exprimées en fonction de la température en utilisant les données tabulées dans la référence [22].

V-3 Domaine de calcul et maillage

On subdivise le domaine de calcul en deux sous-domaines: le premier correspond à la partie interne de la torche plasma qui est caractérisé par une haute température, et le second inclut la chambre d'essai ainsi que la cible.

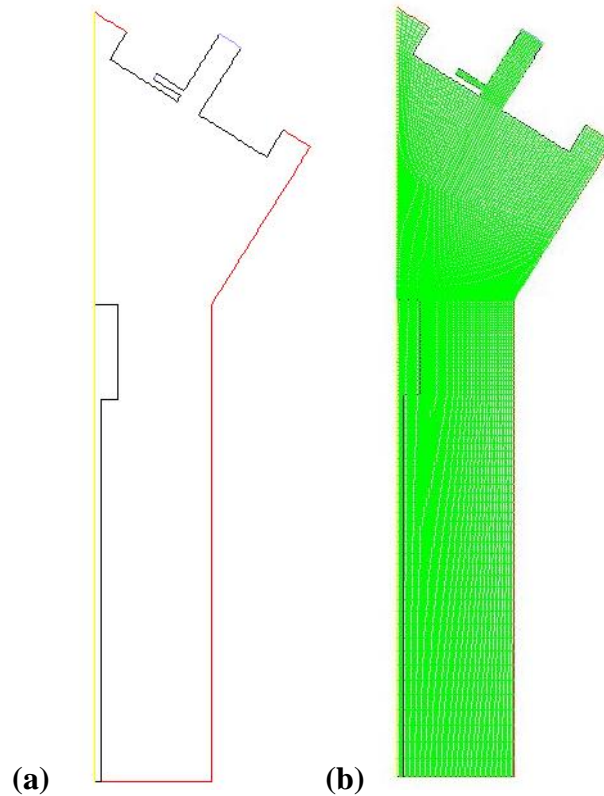


Figure 9. Domaine de calcul avant(a) et après maillage(b).

La zone de calcul s'étend latéralement jusqu'aux parois de la chambre afin de favoriser la convergence des calculs pour limiter le nombre de frontières libres. Les seules frontières libres définies incluent la zone se trouvant au-dessus des torches et la partie basse de la chambre.

Sur la partie supérieure du maillage, la pression est celle du domaine (50 kPa), si le fluide est rentrant alors que sur la partie inférieure, une dépression de 100 Pa est imposée pour une température de 300 K.

Enfin une symétrie située à la limite gauche du domaine permet de tenir compte implicitement de la deuxième torche plasma. À la totalité, le domaine de calcul contient plus de 30000 mailles avec un raffinement au niveau des parois de la cible pour plus de précision de calcul au voisinage des parois.

Le plasma est formé à partir de la conversion de l'énergie électrique en énergie thermique dans les gaz plasmagènes (Argon et Hydrogène).

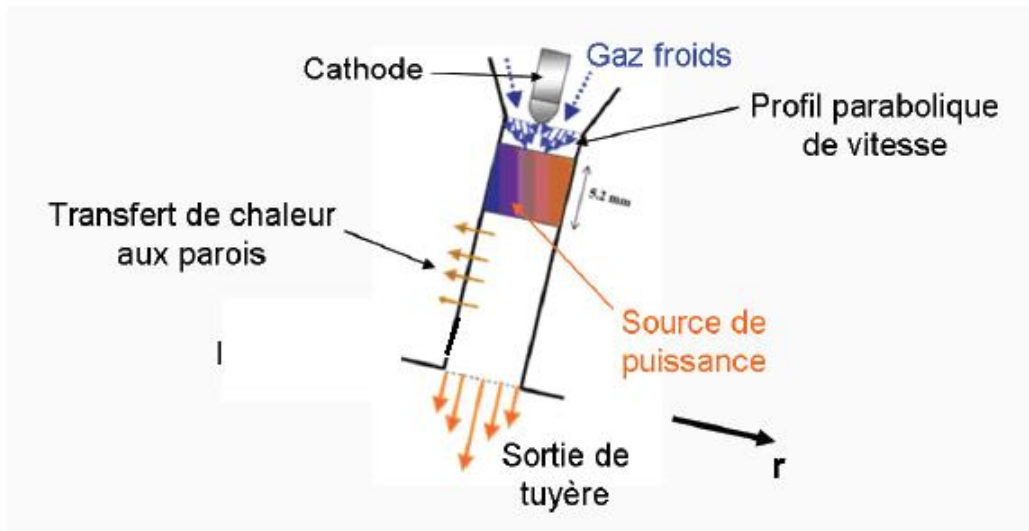


Figure 10. Définition de la zone « haute température » pour la modélisation de l'écoulement plasmagène[7].

L'écoulement des gaz plasmagènes est initialisé par l'injection au niveau de la pointe de la cathode du mélange gazeux plasmagène à une température uniforme de 300 K et avec un profil de vitesse parabolique décrit sous la forme suivante:

$$v(r) = v_{max} \left(1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right)$$

avec

- r_0 le rayon de la tuyère,
- v_{max} la vitesse maximale d'entrée est fixée à 24 m/s.

Les grandeurs caractéristiques définies pour la modélisation de l'écoulement plasma et les données relatives à différentes parois du domaine de calcul sont résumées dans le tableau suivant:

<i>Paramètres de la torche plasma</i>	Diamètre de tuyère	8 mm
	Mélange plasmagène	45 l/min d'Ar 25 l/min d'H2
<i>Paramètre de la chambre d'essai</i>	Pression dans la chambre	50 kPa

Tab3. Paramètres définis pour la modélisation de l'écoulement plasmagène.

V-4 Discussion des résultats

V-4-1 Champs de vitesse

La figure ci-dessous montre le champ de champ de vitesse de l'écoulement plasma produit par les torches.

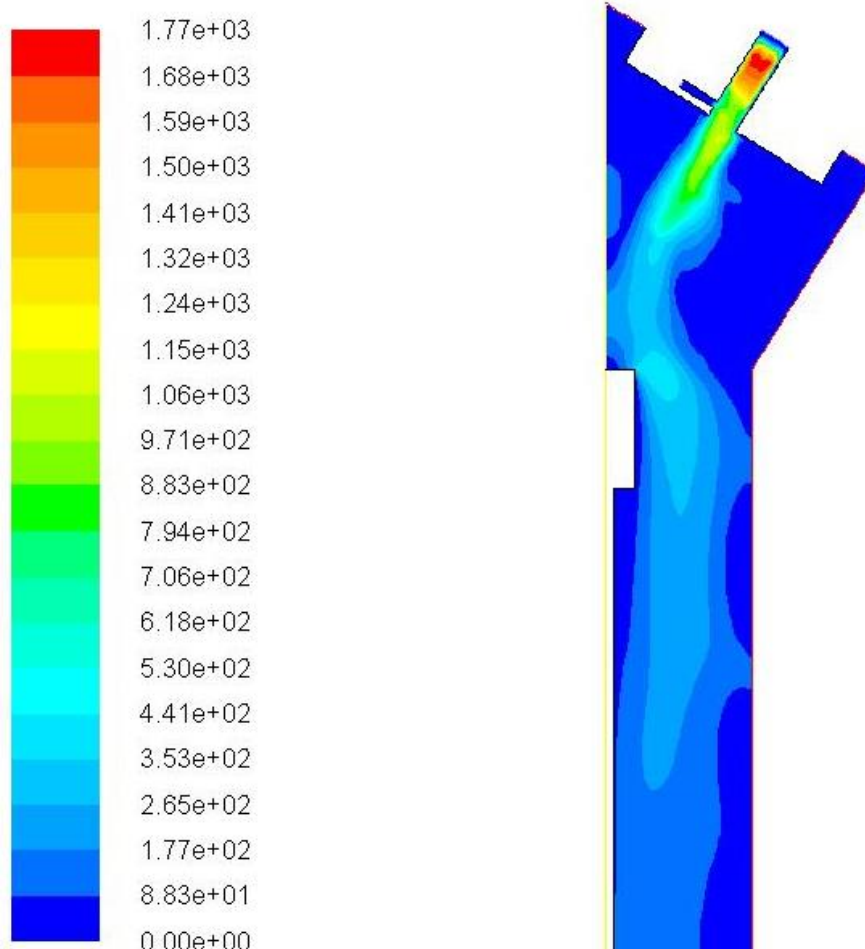


Figure 11. Le champ de vitesse de l'écoulement (m/s).

La figure 11, représentant le champ des vitesses dans le domaine de calcul, montre que la vitesse de l'écoulement plasmagène voisine les 1200 m/s dans les torches. Cette vitesse élevée permet d'injecter les futures particules d'alumine dans l'écoulement plasmagène. A l'approche de la cible la vitesse de l'écoulement plasmagène diminue jusqu'à 1000 m/s autour de la cible et s'annule sur la paroi du pion.

En remarque aussi que l'angle supérieur de la cible crée des poches (sillage) ré-accélération (500 m/s) l'écoulement. Le nombre de Reynolds maximal dans le domaine est de l'ordre de 4000.

V-4-2 Champs de température

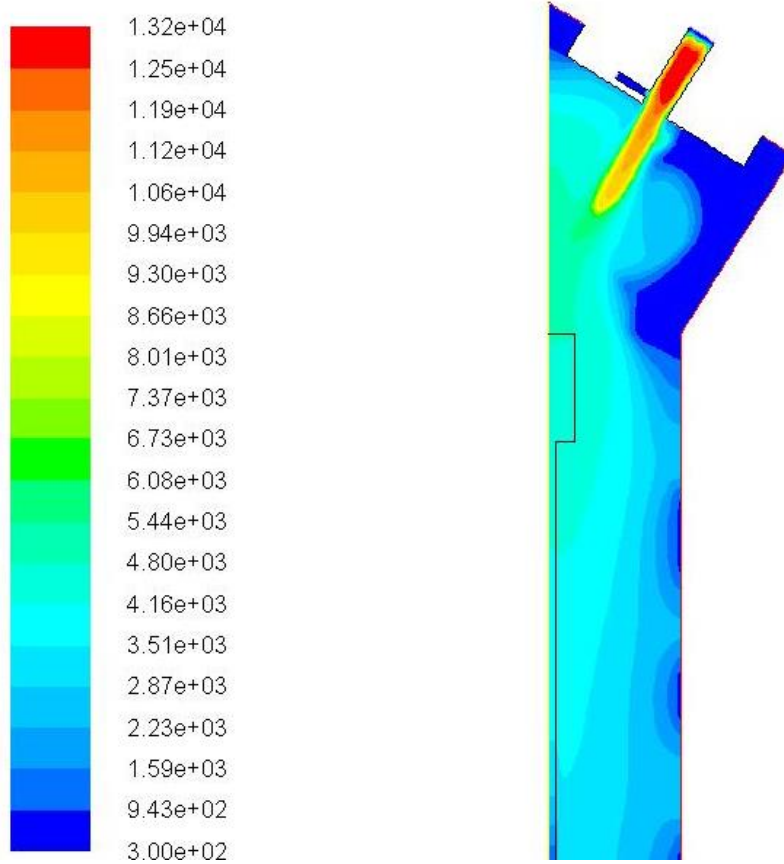


Figure 12.(b) Variation de la température le long de la surface du pion (en K).

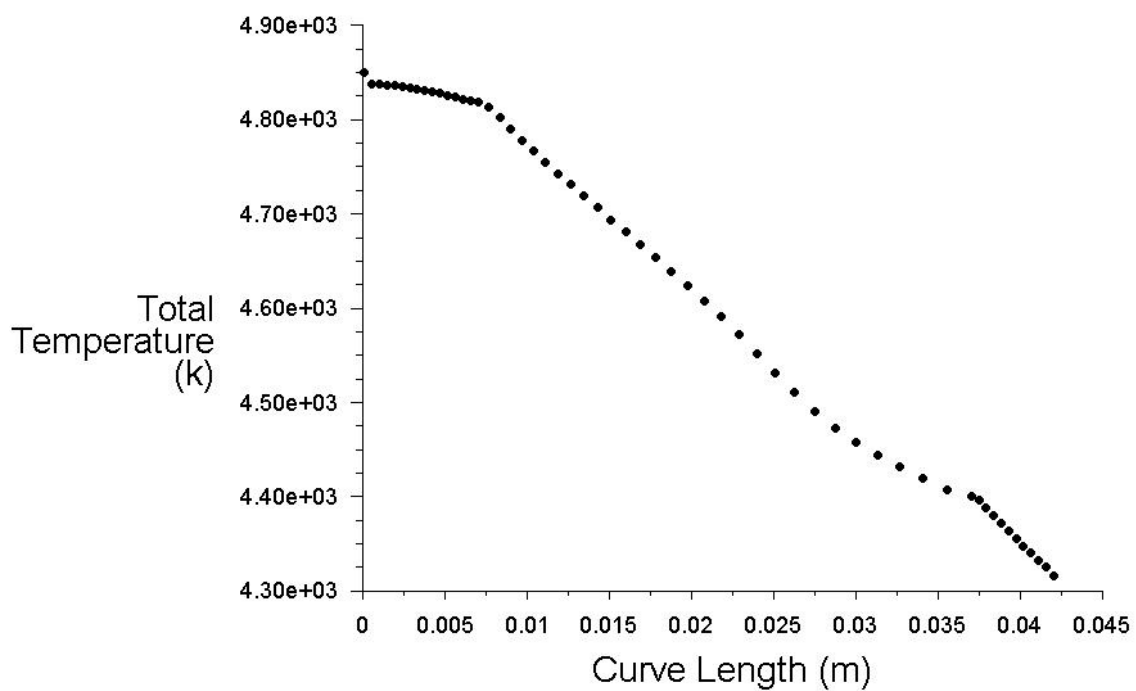


Figure 12.(a) Champs de température de l'écoulement (en K).

Les plus hautes températures sont atteintes dans et à la sortie des torches plasmagènes et diminuent progressivement mais restent relativement élevée (7000K~8000K) sur l'axe d'attaque des torches. Plus on s'éloigne de cet axe et plus la température diminue.

La figure 12.(a)représente le champ de température de l'écoulement dans le domaine de calcul et montre qu'en sortie de la tuyère, la température de l'écoulement atteint des valeurs allant jusqu'au 13200 K. Au milieu de l'enceinte la température de l'écoulement reste très chaude avec des valeurs autour de 10000 K et est représentée sous forme de jet.

Plus on s'éloigne de la sortie de la tuyère plus les isothermes tendent à s'élargir. A travers la surface horizontale du pion, la température reste presque constante (4850 K) comme le montre la figure 12.(b), puis subit une diminution progressive jusqu'à la valeur 4300 K.

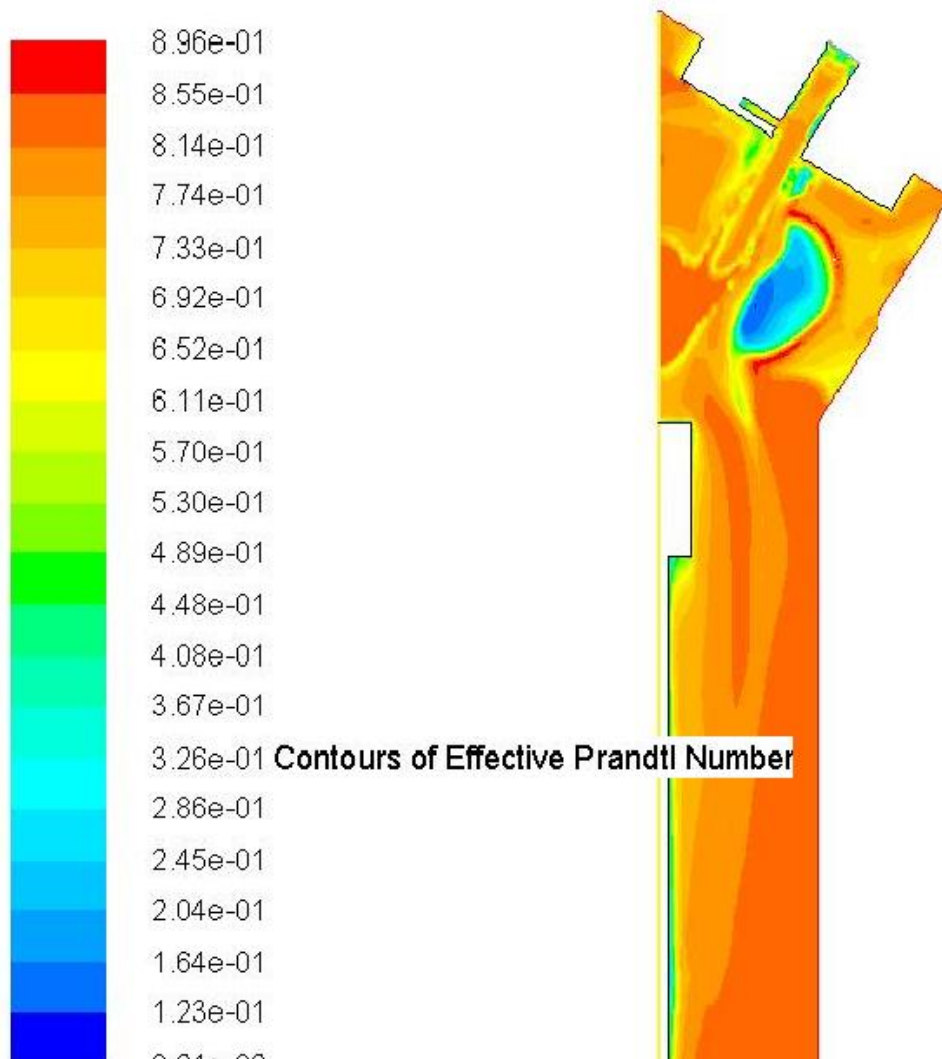


Figure 13.Champs de variation du nombre de Prandtl.

On remarque d'après la figure 13 que le nombre de Prandtl varie entre 8.10^{-2} et 8.10^{-1} et reste relativement faible et inférieur à l'unité, ce qui indique que les phénomènes thermiques représentés par la conduction thermique, sont plus rapides que les phénomènes hydrodynamiques.

Ce résultat important montre aussi que le profil de vitesse a peu d'effet sur le profil de température.

Conclusion et Perspectives

L'objectif de notre travail est d'améliorer un outil numérique qui nous permet de simuler un écoulement plasmagène des deux torches plasma. Par souci de temps, les phénomènes radiatifs dus au rayonnement émis par le plasma étaient négligés et peuvent représenter une perspective de ce travail afin de raffiner les résultats obtenus.

Un accent particulier a été porté sur le raffinement du maillage ainsi que sur le modèle de turbulence, ce qui a permis d'extraire des résultats importants et comparatifs concernant les phénomènes thermodynamiques et les phénomènes hydrodynamiques.

Une autre perspective de ce travail est la prise en compte de l'injection des particules et leurs collisions avec la cible. Ce dernier, et malgré la difficulté qu'il représente au niveau de la modélisation représente un intérêt important tant industriel qu'académique.

En fin, les résultats obtenus étaient dans le cas d'un seul mélange avec une composition fixe. On envisage par la suite élargir cette étude pour plusieurs mélanges.

Annexe

a) Chaleur spécifique

- De 10 000 K à 20 000 K : le premier pic correspond à la dissociation des atomes d'Ar qui gagnent un apport d'énergie grâce aux collisions inélastiques entre eux.
- De 20 000 K à 30 000 K : le deuxième pic correspond à l'ionisation des atomes du système grâce aux collisions élastiques entre les atomes d'Ar et les e^- existant dans le plasma.

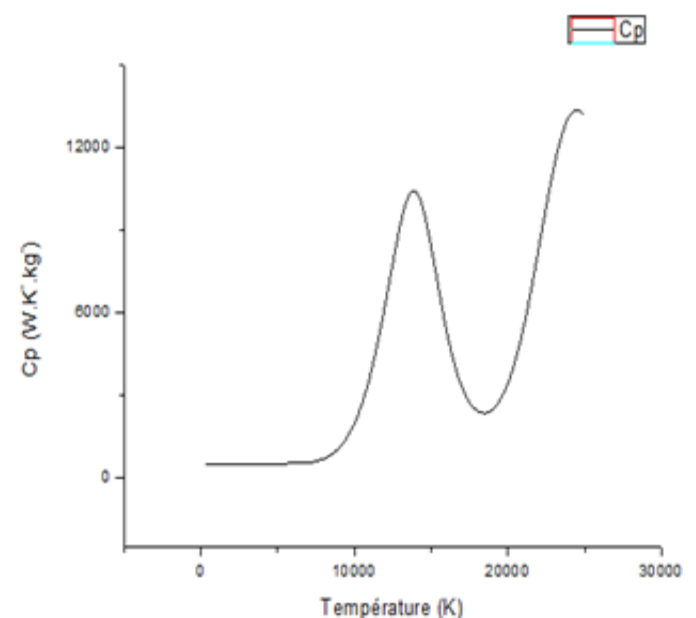


Figure 14. La variation de la chaleur spécifique c_p en fonction de la température T.

b) Viscosité

Quand la température du milieu (plasma d'Argon) augmente, les ions Ar^+ et Ar^{++} apparaissent donc les forces de frottement deviennent de plus en plus importantes (le frottement des ions d'Ar avec les parois des torches) et par conséquent le milieu devient de plus en plus visqueux.

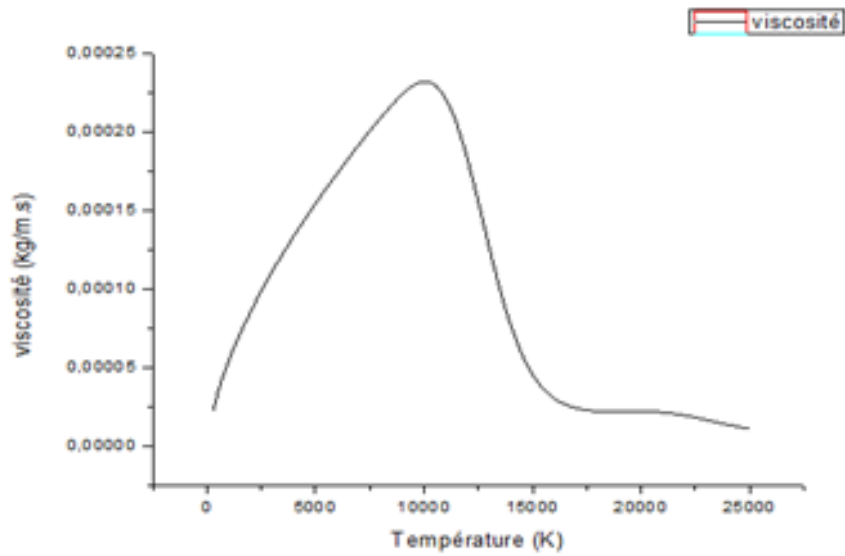


Figure 15. La variation de la viscosité μ en fonction de la température T.

c) Enthalpie

La figure 20 ci-dessous représente l'augmentation de l'enthalpie en fonction de la température et ça revient à la chaleur dégagée pendant les deux processus (dissociation et ionisation) produits par les collisions élastiques et inélastiques dans le plasma.

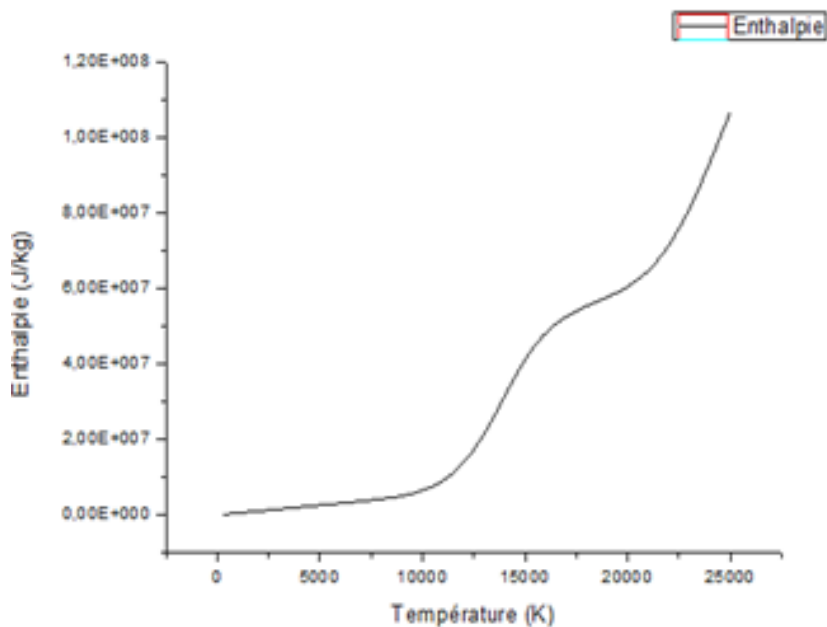


Figure 16. La variation de l'enthalpie h en fonction de la température T.

Références

- [1] F. Ghaleb (2013), Calcul de la courbe de Paschen et la tension de claquage pour les décharges à gaz rare, Université des sciences et de la technologie d'Oran Mohammed Boudiaf.
- [2] L. Rezeau et G. Belmont (2007), Quelques propriétés des plasmas.
- [3] A. Zirar (2016), Etude de la projection thermique par plasma d'arc, Université Abou Bakr Balkaïd-Tlemcen.
- [4] P. Tardiveau Enseignant Chercheur au Laboratoire de Physique des Gaz et des Plasmas (2012), Physique des plasmas.
- [5] N. Ikhlef (2010), Modélisation Numérique d'une installation convertisseur-Plasma d'induction en vue d'une commande optimale, Université de Batna.
- [6] P. Chassaing, Mécanique des fluides, Eléments d'un premier parcours, 3^{ème} édition revue et augmenté, CÉPADUÈS-ÉDITIONS, Toulouse-France.
- [7] E. Milone (2009), Ablation physico-chimique d'une composite « fibre de Carbone-résine phénolique » sous impact des gouttes d'alumine, Université Limoge.
- [8] J. Roupie (2013), Contribution à l'étude de l'émission électronique sous impact d'électrons de basse énergie ($\leq 1\text{keV}$) : application à l'aluminium, Université de TOULOUSE.
- [9] R. Laurent (2006), Différence finies pour la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides.
- [10] E. Goncalves (2005), Méthodes, Analyse et calculs numériques, Institut polytechnique de Grenoble.
- [11] E. Gonçalves (2005), Résolution Numérique, discrétisation des EDP et EDO, Institut national polytechnique de Grenoble.
- [12] J-H. SALAC (2006), Analyse Numérique des équations aux dérivées partielles, Méthodes des éléments finies, polycopié des cours de calcul scientifique CSC 108 et CSC 109.
- [13] E. SAUDRAIS (2012), Cours mécanique des fluides, Ecoulement des fluides réels, CPGE PSI.

- [14] Expérience de Reynolds, les différents types d'écoulement, Académie de Nancy-Metz.
- [15] C.CARUYER (2011), Modélisation des nanomatériaux injectés par voie liquide dans un jet de plasma pour la fabrication des nanostructures, Université de Bordeaux 1.
- [16] A.Zeghib, Comparaison des différents modèles de turbulence d'un écoulement aérodynamique dans un cyclone, université Mantourie- Constantine.
- [17] R.Brahim Belhaouri (2012), Influence des Modèles de turbulence sur la dispersion des gaz polluants, Université Hassiba Benbouali Chlef.
- [18] D.Fedala(2007), Simulation numérique des écoulements internes dans les turbomachines, CAO-DAO des turbomachines PFE-Octobre 2007 ; Manuel de maillage sous Gambit et de simulation sous Fluent-application, Laboratoire d'énergétique et de mécanique des fluides internes, ENSAM, OER de Paris.
- [19] H. Schlichting, Boundary-Layer Theory (New York, 1951, 6^e ed. 1968).
- [20] F.Ben Ettouil (2008), Modélisation rapide du traitement de poudres en projection par plasma d'arc, Université Limoge.
- [21]J. Aubreton, C. Bonnefoi et J.M. Mexmain (1986), calcul de propriétés thermodynamique et des coefficients de transport dans un plasma Ar-O₂ en non-équilibre thermodynamique et à la pression atmosphérique, Université de Limoge.s
- [22]B. PATEYRON, M. F. ELCHINGER et al. (1992), Thermodynamic and transport properties of Ar-H₂ and Ar-He, plasma gases used for spraying at atmospheric pressure. I: Properties of the mixtures. Plasma Chemistry and Plasma Processing, Vol. 12, p. 421-448.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'extraire des résultats prédictifs pour la variation de la vitesse et de la température d'un écoulement issu de deux torches plasma et son interaction avec un pion. L'écoulement de gaz est représenté par l'association de deux torches à plasma d'arc soufflé. L'écoulement est considéré incompressible et stationnaire. Le plasma est en équilibre thermodynamique locale. Vu la contrainte du temps de calcul, le domaine de calcul est pris en 2D. Le gaz plasmagène est constitué de l'argon (Ar) et l'hydrogène (H₂). Le régime d'écoulement est turbulent ($Re \sim 4000$) et est modélisé par le modèle k- ϵ . Les résultats trouvés montrent que le profil de vitesse a peu d'effet sur le profil de température et par conséquent, les phénomènes thermiques représentés par la conduction thermique sont plus rapides que les phénomènes hydrodynamiques.

Abstract

The objective of this thesis is to derive predictive results of the velocity and the temperature variation resulting from plasma eruptions and their interaction with pion. The gas flow is represented by the association of two flared plasma arc fazes. The flow is considered incompressible and stationary. Plasma is in local thermodynamic equilibrium. Given the computation time constraints, the calculation field is considered in 2D. Plasma gas is composed of Argon and Hydrogen (H₂). The flow system is reactive ($Re \sim 4000$) and is modelised by the k- ϵ model. The results found indicate that the velocity profile has little effect on temperature and that the thermal phenomena represented by the thermal conductivity are therefore faster than the hydrodynamic phenomena.

ملخص

الهدف من الأطروحة هو استخلاص النتائج التنبؤية لتغير سرعة و درجة الحرارة تدفق قادم من مشاعل البلازما و تفاعلها مع جسيم مادي. تدفق الغاز ناتج عن اشتراك شعلتين من مشاعل البلازما. نأخذ بعين الاعتبار أن التدفق قابل للامتداد و ذو حركة منتظمة و غير قابل للانضغاط, كما أننا نفرض أن البلازما في توازن حراري محلي, أما مجال الحساب فهو مأخوذ على مستوى اتجاهين 2D. يتكون غاز البلازما من الأرجون Ar و من الهيدروجين H. نظام التدفق مضطرب ($Re \sim 3000$) و هو مصمم على طراز k- ϵ . تظهر النتائج التي تم العثور عليها أن المظهر الجانبي للسرعة له تأثير ضئيل على درجة الحرارة و بالتالي فإن الظواهر الحرارية التي يمثلها التوصيل الحراري أسرع من الظواهر الهيدروديناميكية.