République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Option : Equations aux dérivés partielles et applications

présenté par

NEDJRAOUI Yousra

Le lemme de Hopf pour l'opérateur de Schrödinger

Soutenu le : 27 / 09 / 2023 devant le jury composé de :

M. BENSID S.	Professeur , Université de Tlemcen	President
M. BENSEDIK A.	M.C.A , Université de Tlemcen	Examinateur
M. BOUKARABILA Y.	M.C.A, Université de Tlemcen	Encadrant

Année Universitaire : 2022-2023

"En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue".
John Von Neumann

Remerciements

Tout d'abord je remercie Dieu de m'avoir donné le courage pour pouvoir finir ce travail .
Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mon encadrant Mr Boukarabila pour son aide le long de ce travail.
Mes vifs remerciements à Mr Bensid d'avoir bien voulu présider le jury et à Mr Bensedik pour avoir accepter d'examiner ce travail, sans oublier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation et bien sur ma chère famille pour tout son aide et son soutient .

Table des matières

Notations

Ω	:	Un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	:	Le bord du Ω.
$\|x\|$	:	Pour $x \in \mathbb{R}^N$ désigne $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$.
dx	:	La mesure de Lebesgue de la dimension N.
$\|A\|$	:	La mesure de A par rapport à la mesure de Lebesgue de la dimension N, plus précisément $\|A\| = \int_A d\,x$.
$C_0(\Omega)$	:	L'espace des fonctions continues à support compact de Ω.
$C_b(\Omega)$	:	L'ensemble des fonctions continues et bornées de Ω dans $\mathbb{R}$.
$C_0^k(\Omega)$	:	Les fonctions à support compact dans Ω et k fois dérivables sur Ω (i.e.de classe C^k).
$C_0^\infty(\Omega)$	:	Les fonctions infiniment dérivables à support compact dans Ω.
$\mathcal{D}(\Omega)$	:	L'espace $C_0^\infty(\Omega)$.
$\mathcal{D}^{'}(\Omega)$	:	L'espace des distributions sur Ω i.e. le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$.
$M(F)$	:	L'ensemble des fonctions mesurables par rapport à F muni de la tribu considérée dans le contexte.
$M(\Omega)$	:	L'ensemble des fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{M}(A)$	:	L'espace de mesure de Radon sur A ($A \subset \mathbb{R}^N$).
$\mathcal{H}$	:	Un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de norme associé notée $\\| \cdot \\|$.
$\hookrightarrow$	:	L'injection continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	:	L'injection compacte.
$B_r(x)$	:	La boule ouverte (de $\mathbb{R}^N$) de centre x et de rayon r.
ω_N	:	La mesure superficielle de la sphère unité de $\mathbb{R}^N$, i.e. $\displaystyle\int_{\partial B_1(0)} d\sigma(x)$.
$\Gamma(x)$	:	La fonction Gamma définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
χ_A	:	La fonction caractéristique d'un ensemble A.
$[\alpha]$	:	Si $\alpha \in \mathbb{R}$, c'est la partie entière de α.
$[\alpha]$	:	Si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, c'est la longueur du multi indice α, donnée par $\sum_{i=0}^n \alpha_i$.

x^α	:	Désigne $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
$D^\alpha u$	:	La dérivée mixte de u donnée par $\dfrac{\partial^{[\alpha]}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} u$.
$\partial^\alpha u$	:	désigne $D^\alpha u$.
$\subset\subset$	:	inclusion compacte ou forte, Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, si $A \subset\subset \Omega$ alors ceci signifie que A est borné et $\overline{A} \subset \Omega$.
$\sim$	:	si $x, y \in \Omega$ alors $x \sim y$ signifie x est proche de y. Autrement dit, il existe $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\lvert x - y \rvert < \epsilon$.

Introduction

L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la physique quantique comme l'est la loi de Newton en physique classique. On la retrouve pour décrire des phénomènes assez variés que ce soit dans l'optique quantique (propagation d'un faisceau de laser), la physique atomique (supraconductivité, condensation de Bose-Einstein), la technologie électronique (semiconducteurs, transistors ,mémoires), la physique des plasmas, l'astrophysique, la microscopie électronique, la neutronique, la chimie ou encore la biologie,...
Comme exemple, on va regarder la description du transport électronique dans des dispositifs semi-conducteurs de taille nanométrique (MOSFET,RTD,guides d'onde,..). Ces dispositifs sont les composants essentiels de l'industrie électronique d'aujourd'hui. En raison de leur petite taille, atteignant des échelles nanomériques, des effets quantiques commencent à jouer un role important, comme l'effet tunnel, les interférances, la quantification, etc. Les modèles classiques (équation de Newton entre autres) ne sont plus valables et l'approche quantique (équation de Schodinger) devient nécessaire.
Dans cette approche l'évolution des particules (électrons ou protons) dans un champ électrique se laisse décrire à l'aide de l'équation de Shrodinger

$$ih\psi_{tt}(t,x) = -\frac{h^2}{2m}\Delta_x\psi(t,x) + q\,\tilde{V}(t,x)\psi(t,x), \tag{1}$$

où $\psi_E(t,x)$ est la fonction d'onde correspondante à la particule d'énergie E,q la charge élémentaire, h la constante de Planck réduite, m la masse de l'électron (ou proton), $\tilde{V}$ le potentiel électrique, qui s'écrit sous la forme $\tilde{V} = \tilde{V}_e + \tilde{V}_s$ somme d'un potentiel extérieur donné $\tilde{V}_e$ et d'un potentiel "autoconsistant" $\tilde{V}_s$, solution de l'équation de Poisson

$$-\Delta_x\tilde{V}(t,x) = qn(t,x) = \int f(E)|\,\psi_E(t,x)|^2 dE,$$

où f est une statistique de distribution des particules d'énergie E et n leur densité. La signification physique de la fonction d'onde repose sur le fait suivant : la probabilité de trouver un électron d'énergie E à l'instant t dans

le volume dx autour de la position x est donnée par $|\psi_E(t,x)|^2$.
Cherchons une solution de (1) sous la forme

$$\psi(t,x) = \alpha\, e^{z\,t}\, u(x)$$

où $\alpha = 2m\,h^{-2}$ et z un nombre complexe (fixe) qui vérifie $i\,h\,\alpha\,z^2 = -1$, alors on récupère l'équation suivante sur u

$$-\,\Delta u + V\,u = 0 \tag{2}$$

où $V = \alpha q\tilde{V} + 1$. Ce qui donnera une équation elliptique en u, nommé équation de Schrodinger linéaire. On rencontre assez fréquemment dans la nature des situations où le potentiel V est singulier et le second membre contient une source, ainsi on est ramené rapidement à étudier mathématiquement des équations du type

$$\begin{cases} -\Delta u \, + V\,u &= \; f \qquad \text{dans} \qquad \Omega, \\ \qquad\quad\; u &= \; 0 \qquad \text{sur} \qquad \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

où V est une positive localement intégrable. Dans ce mémoire on focalise sur le lemme de Hopf relié à l'équation (3). Sauf si c'est mentionné autrement, on considère toujours $f \in L^\infty(\Omega)_+$ et $V \in L^1_{loc}$ positive.

Ce mémoire comporte quatre chapitres :

Chapitre 1 : On rappelle quelques notions sur les espaces fonctionnels tels que l'espace de Lebesgue, de Sobolev classique, et on discute sur les différences entre les fonctions harmoniques et s-harmoniques, on termine ce Chapitre par mentionner quelques propriétés ...

Chapitre 2 : On étudie l'existence de solutions du problème de Dirichlet impliquant l'opérateur de Schrödinger $-\,\Delta\, +\, V$ pour un potentiel V appartenant à différents espaces. Finalement, on donne certains résultats de comparaison relié à l'équation (3).

Chapitre 3 : On donne différents sens à la dérivée normale qui seront utils pour le chapitre suivant.

Chapitre 4 : D'abord on énonce le lemme de Hopf classique. Puis on donne le Lemme de Hopf relié à l'équation de Schrodinger (3).

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces de Lebesgue L^q

Définition 1.1. *[1] Considérons un espace mesuré positif* (F, Σ, ν)*. Soit* $q \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq q < \infty$ *; on définit*

$$L^q(F, \Sigma, \nu) = \left\{ g : F \to \mathbb{R} / \quad \Sigma \text{ mesurable et } \|g\|_{L^q} < \infty \right\},$$

où

$$\|g\|_{L^q} = \left[\int_F |g(x)|^q d\nu(x) \right]^{\frac{1}{q}}.$$

$$L^\infty(F, \Sigma, \nu) = \left\{ g \in M(F) / \quad (\exists A > 0) \quad \nu\{x \in F \quad |g(x)| > A\} = 0 \right\}.$$

On note

$$\|g\|_\infty = \inf \left\{ A \geq 0 / \quad |\nu \{x \in F \quad |g(x)| > A\} = 0| \right\}.$$

Si Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ alors par défaut il est muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue. Sauf si mentionné autrement, les espaces définis précédemment seront notés par $L^q(F)$ ou simplement L^q.

Définition 1.2 (L^q_{loc})**.** *On définit,*

$$L^q_{loc}(\Omega) = \left\{ g : \Omega \to \mathbb{R} / \quad \text{mesurable et pour chaque compact} \, K \subset \Omega; \ \int_K |g(x)|^q \, dx < \infty \right\},$$

et,

$$L^\infty_{loc}(\Omega) = \left\{ g \in M(\Omega) / \quad \text{pour chaque compact } K \subset \Omega; \ g \cdot \chi_K \in L^\infty(\Omega) \right\}.$$

Si $d\nu(x) = V(x)\,dx$; où $V(\cdot)$ est une fonction mesurable positive alors on définit

Définition 1.3 (**Espaces de Lebesgue à poids**). *Lorsque* $d\nu(x) = V(x)dx$ *; où* $V(\cdot)$ *est une fonction mesurable positive et* $1 \le q < \infty$. *Alors,*

$$L^q(\Omega, V) = \left\{ g : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}/ \quad \int_\Omega |g(x)|^q \, V(x)dx < \infty \right\},$$

$$L^\infty(\Omega, V) = \left\{ g \in \mathcal{M}(\Omega)/ \quad \exists K > 0 \ t.q. \ |g(x)| \leqslant K \ , \nu. \ p.p. \ x \in \Omega \right\}.$$

(Rappelons que $|g(x)| \le K, \nu.p.p.x \in \Omega$ *signifie* $\nu\{x \in \Omega; |g(x)| > K\} = 0$.*)*

Un cas particulièrement important pour l'étude du problème (3) est lorsque $V \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Théorème 1.1 (**Inégalité de Hölder**). *Soient* $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$ *avec* $1 \le p \le \infty$ *et* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Alors $f.g \in L^1$ *et*

$$\int | fg | \le \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q} .$$

On note souvent $q = p'$ *et on a* $q' = \dfrac{p}{p-1}$ *(*$q = \infty$ *si* $p = 1$*).*

Théorème 1.2 (**Convergence dominée dans** L^p). *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* L^p $(1 \le p < \infty)$*telle que :*
i) $f_n \to f$ *p.p.*
ii) $\exists F \in L^p$ *telle que* $| f_n | \le F$ *presque partout pour tout* $n \in \mathbb{N}$
Alors $f_n \to f$ *dans* L^p *ie* $\int |f_n - f|^p \, d\nu \to 0$ *quand* $n \to \infty$.

1.2 Distributions et mesures de Radon

Définition 1.4 (Distribution). *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Une distribution* T *est une forme linéaire sur l'espace* $C_0^\infty(\Omega)$ *qui vérifie la condition de continuité suivante :*
Pour tout compact K *de* Ω, *il existe* $p \in \mathbb{N}$ *et* $C > 0$ *tels que pour tout* $g \in C_0^\infty(\Omega)$ *à support dans* K ,

$$|T(g)| \le C \sup_{x \in K, |\alpha| \le p} | \partial^\alpha g(x) | \, , \text{avec } \partial^\alpha g = \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x_1^{\alpha_1} .. \partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{1.1}$$

L'espace des distributions est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 1.5 (Ordre d'une distribution)**.** *Si dans la définition précédente l'entier p ne dépend pas du compact K alors on définit l'ordre de la distribution T ; Ord(T) comme étant le plus petit p pour lequel* (1.1) *est satisfaite.*

Définition 1.6 (Support d'une distribution)**.** *Une distribution T est une nulle sur un ouvert U si on a*

$$\forall \phi \in C_0^\infty(U),\ \langle T, \phi\rangle = 0$$

Le support d'une distribution T est le plus petit fermé K tel que T est nulle sur $\Omega \setminus K$.

Définition 1.7 (Dérivée au sens de distribution)**.** *Toute distribution T est dérivable et sa dérivée $D^\alpha T$ est une distribution définie par*

$$(\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad < D^\alpha T, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \phi > .$$

Définition 1.8 (solution au sens des distributions)**.** *Une fonction u est dite solution au sens de distribution de l'équation*

$$-\Delta u + g(u) = f$$

si,

$$\begin{cases} \bullet u \in L^1_{loc}(\Omega), & \\ \bullet g(u) \in L^1_{loc}(\Omega), & \\ \bullet \big(\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)\big) & \displaystyle\int_\Omega u\,(-\Delta\phi)\,dx + \int_\Omega g(u)\,\phi\,dx = \int_\Omega f(x)\,\phi(x)\,dx. \end{cases}$$

Définition 1.9 (Mesure de Radon)**.** *Une mesure de Radon est une forme linéaire continue sur l'espace $C_0(\Omega)$.*

Le fameux Théorème de Riesz permet aussi d'identifier une mesure de Radon à l'espace de Banach des fonctions définies sur la tribu de Lebesgue ; $\Sigma-$ additive régulière et fini sur les compactes.

Définition 1.10 (Mesure de Dirac)**.** *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle mesure de Dirac en $x_0 \in X$, la mesure notée δ_{x_0} définie sur $\mathcal{A}$ par $(B \in \mathcal{A})$*

$$\delta_{x_0}(B) = \begin{cases} 1 & si \quad x_0 \in B, \\ 0 & \quad sinon \end{cases}.$$

Le support de cette mesure est réduit au singleton $\{x_0\}$.

Propriété 1.1 (**Inégalité de Kato**). *[6] Soit $u \in L^1(\Omega)$ tel que $\Delta u \in L^1(\Omega)$ alors on a*

$$\Delta u^+ \geq \chi_{\{u>0\}}\, \Delta u, \qquad \textit{au sens des distributions de } \Omega.$$

On a besoin de la version suivante de l'inégalité de Kato

Propriété 1.2 (Inégalité de Kato pour l'opérateur de Schrödinger). *[9]*

On considère $f \in L^\infty(\Omega)$ et $V \in L^1_{loc}(\Omega)_+$. On note par u_f la solution du problème[1]

$$\begin{cases} -\Delta u + V\,u & = & f & \quad dans \quad & \Omega, \\ u & = & 0 & \quad sur \quad & \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

Alors on a,

$$\int_\Omega u_f^+ \leq \int_{\{u_f>0\}} f \cdot u_1. \tag{1.3}$$

(on notera plus tard $\xi_1 := u_1$ la solution du (1.2) quand $f = 1$.)

1.3 Points de Lebesgue

Définition 1.11 (Point de Lesbegue). *On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit f une fonction intégrable (ou localement intégrable). On dit qu'un point $x \in \Omega$ est un point de Lebesgue de f si*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{|B(x,\epsilon)|} \int_{B(x,\epsilon)} f(y)\, dy = f(x). \tag{1.4}$$

(Dans cette formule les $\epsilon > 0$ considérés sont ceux qui vérifie $B(x,\epsilon) \subset \Omega$.)

Lemme 1.1. *Soit f une fonction continue sur Ω. Alors n'importe quel point $x \in \Omega$ est un point de Lebesgue.*

Preuve : On considère $x \in \Omega$. Soit $\eta > 0$ tel que $B(x,\eta) \subset\subset \Omega$. Soit $0 < \epsilon < \eta$. D'après la formule de moyenne des fonctions continues il existe $\xi = \xi_\epsilon \in B(x,\epsilon)$ tel que

$$\frac{1}{|B(x,\epsilon)|} \int_{B(x,\epsilon)} f(y)\ dy = f(\xi).$$

Donc, si $\epsilon \to 0$, on a $\xi \to x$ et par continuité de $f(\cdot)$, $f(\xi) \to f(x)$, ainsi,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{|B(x,\epsilon)|} \int_{B(x,\epsilon)} f(y)\ dy = f(x).\square$$

1. L'existence et l'unicité seront exposées en Chapitre 2.

1.4 Fonctions harmoniques, sur-harmoniques et sous-harmoniques

Définition 1.12. .

(i) [Fonction harmonique]
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $u \in C^2(\Omega)$. La fonction u est dite harmonique sur Ω si $\Delta u = 0$ dans Ω.

(ii) [Fonction sous-harmonique]
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $u \in C^2(\Omega)$. La fonction u est dite sous-harmonique sur Ω lorsque $-\Delta u \leq 0$ dans Ω.

(iii) [Fonction sur-harmonique]
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $u \in C^2(\Omega)$. La fonction u est dite sur-harmonique sur Ω lorsque $-\Delta u \geq 0$ dans Ω.

1.5 Espaces de Sobolev

Dans cette section on va présenter l'espace de Sobolev d'ordre entier.
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $p \in [1, +\infty]$.

Définition 1.13. *On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \quad / \quad (\forall i)(\exists g_i \in L^p(\Omega)), \int_\Omega u \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi \ = \ -\int_\Omega g_i \varphi \ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \right\};$$

on note par $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} := g_i$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ on définit par récurrence les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par

$$\begin{cases} W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega). \\ W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) \backslash (\forall i)(\exists g_i \in W^{m-1,p}(\Omega)), \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi \ = \ -\int_\Omega g_i \varphi \ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \Big\}; \end{cases}$$

$W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :
$\star$ pour $1 \leqslant p < +\infty$:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big\|_{L^p}.$$

De même l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p} + \sum_{[\alpha]=1}^{N} \left\|D^\alpha u\right\|_{L^p}.$$

Théorème 1.3. ***(Injection continue des espaces de Sobolev)****[1]*

1. *Si $n > mp$ alors :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \ \textit{pour} \, p \leqslant q \leqslant \frac{np}{n-mp}.$$

2. *$n = mp$:*
   - *Si $p > 1$ alors :*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \ \textit{pour } p \leqslant q < +\infty.$$

   - *Si $p = 1$ (donc $n = m$) alors :*

$$W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^n).$$

3. *Si $n < mp$ alors :*
   - *Pour $\frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ et j satisfait $(j-1)p < n < jp$, on a :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda}(\mathbb{R}^n) \qquad \textit{pour tout } 0 < \lambda \leqslant j - \frac{n}{p}.$$

   - *Pour $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$ et $m \geqslant j = \frac{n}{p} + 1$ on a :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^{m-\frac{n}{p}-1,\lambda}(\mathbb{R}^n) \quad \forall \lambda < 1.$$

1.6 Régularité dans les espaces L^p

Proposition 1.1 (Régularité L^p)**.** *[7] Considérons le problème*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \qquad \textit{dans} \qquad \Omega, \\ \quad u &= 0 \qquad \textit{sur} \qquad \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^p(\Omega)$.

Si $f \in L^p$ avec $1 < p < \infty$ alors $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.2 (Régularité hölderienne)**.** *[7] Considérons u une solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \qquad \textit{dans} \qquad \Omega, \\ \quad u &= 0 \qquad \textit{sur} \qquad \partial\Omega \end{cases}$$

Si $f \in C^{0,\theta}(\Omega)$; $0 < \theta < 1$; alors $u \in C^{2,\theta}(\Omega)$.

1.6.1 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.14. *[1] Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel, supposons que*
- $L(.)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que $v \to L(v)$ est linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que

$$| L(v) | \leq C \parallel v \parallel \quad pour\ tout v \in \mathcal{H}$$

- $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{H}$ c'est-à-dire $v_1 \to a(v_1, \cdot)$ et $v_2 \to a(\cdot, v_2)$ sont des formes linéaires de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$. En plus,

- $a(.,.)$ est ***continue*** *,c'est-à-dire qu'il existe $C_1 > 0$ tel que*

$$| a(v_1, v_2) | \leq \ C_1 \parallel v_1 \parallel \parallel v_2 \parallel \quad pour\ tout v_1, v_2 \in \mathcal{H};$$

-$a(.,.)$ est ***coercive*** *,c'est-à-dire qu'il existe une constante β telle que*

$$a(v, v) \geq \beta \parallel v \parallel^2 \quad pour\ tout\ v \in \mathcal{H}$$

Théorème 1.4. ***(Lax Milgram)****[1]*
Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}'$, il existe un et un seul $u \in \mathcal{H}$ telle que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisée par :

$$\frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in \mathcal{H}} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Définition 1.15 (Formule d'intégration par parties (avec normale intérieure))**.**
Soient $u, v \in \mathcal{H}$

$$\int_\Omega \Delta u \ \cdot v \, dx \ = \ - \int_\Omega \nabla u(x) \, \nabla v(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, v(x) dS$$

où ∇u est le vecteur gradient de u , n le vecteur normal intérieur,
et $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$

1.7 Fonction de Green et noyau de Poisson

Définition 1.16 (Fonction de Green). *[6], [10], [11]. .*
Étant donné $x \in \Omega$. Soit u_x la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcllc} -\Delta u & = & \delta_x & dans & \Omega, \\ u & = & 0 & sur & \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1.5}$$

avec δ_x *est la distribution de Dirac. La fonction de Green* $G(x,y)$ *du laplacien est définie par* $G(x,y) = u_x(y)$.

Proposition 1.3 (Propriétés)**.** *[7] On définit,*

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{N(N-2)\omega_N} & |x-y|^{2-N} & N \geq 3 \\ \\ \frac{1}{2\pi} & \log|x-y| & N = 2. \end{cases} \tag{1.6}$$

La fonction de Green du laplacien Dirichlet $G(\cdot,\cdot)$ *vérifie,*

a) Si $\Omega = \mathbb{R}^N$ *alors*

$$G(x,y) = F(x,y). \tag{1.7}$$

b) Plus généralement, pour un domaine Ω *quelconque on a*

$$G(x,y) \sim F(x,y) \ si\, x \sim y.$$

c) $G(x,y) = G(y,x)$.

d) Soit ψ *la solution de*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & dans & \Omega, \\ u &= 0 & sur & \partial\Omega. \end{cases}$$

avec f *suffisamment régulière. En utilisant une intégration par parties, on exprime* ψ *en terme de* $G(\cdot,\cdot)$ *de la manière suivante,*

$$\psi(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy.$$

Définition 1.17 (**Noyau de Poisson**)**.** *[6] .*
Soit $x \in \partial\Omega$, *on définit* $P(x,\cdot)$ *la solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta w &= 0 & dans & \Omega, \\ w &= \delta_x & sur & \partial\Omega \end{cases} \tag{1.8}$$

avec δ_x *est la distribution de Dirac. Le noyau de Poisson* P *représente la solution du problème* (1.8) *et il est utilisé pour résoudre les problèmes de Dirichlet de la forme :*

$$\begin{cases} -\Delta w &= 0 & dans & \Omega, \\ w &= g & sur & \partial\Omega \end{cases} .$$

La solution de cette équation s'écrit

$$w(y) = \int_{\partial\Omega} P(x,y)g(x)dS(x)$$

Proposition 1.4. *[6]*

Étant donnée u une solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \qquad \textit{dans} \qquad \Omega, \\ \quad u &= \mu \qquad \textit{sur} \qquad \partial\Omega \end{cases}.$$

où $f \in L^1(\Omega)$, $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Alors la solution u admet la représentation suivante :

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} P(x,y)\mu(y)dS_y.$$

Chapitre 2

Existence de solution

Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de montrer l'existence d'une solution u du problème .

$$\begin{cases} -\Delta u + V\,u &= f \qquad \text{dans} \qquad \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{sur} \qquad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $f \in L^\infty(\Omega)$ et $V \in L^1_{loc}(\Omega)_+$. On note que Ω est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^N$.

On partage l'étude en deux parties, $V \in L^\infty(\Omega)$ et $V \in L^1_{loc}(\Omega)$. Noter que le cas $V \in L^\infty(\Omega)$ est un cas particulier du cas $V \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Notation : On note u_f la solution du problème (2.1).

2.1 Existence de solution pour $V \in L^\infty$

Considérons le problème (2.1) avec $f \in L^\infty$ et $V \in L^\infty_+$.

Lemme 2.1. *Le problème* (2.1) *admet une solution unique* $u \in H^1_0(\Omega)$*.*

Démonstration. Chercher une solution faible du problème (2.1) est équivaut à la recherche d'une fonction $u \in H^1_0(\Omega)$ qui vérifie :

$$(\forall v \in H^1_0(\Omega)) \quad \int_\Omega \nabla u(x)\,\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega V(x)\cdot u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx.$$

Pour $u, v \in H^1_0(\Omega)$ on note

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\,\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega V(x)\cdot u(x)\,v(x)dx,$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx.$$

-Tout d'abord notez que $L(.)$ est une forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$. En effet, pour $u \in H_0^1(\Omega)$ et par application de l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\mid L(v) \mid &= \mid \int_\Omega f(x)\, v(x) dx \mid . \\
&\leq \int_\Omega \mid f(x)\, v(x) \mid dx \\
&\leq \sqrt{|\Omega|} \parallel f \parallel_\infty (\int_\Omega \mid v(x) \mid^2)^{\frac{1}{2}}. \\
&\leq C \cdot \sqrt{|\Omega|} \parallel f \parallel_\infty \cdot \parallel v \parallel_{H_0^1(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Ce qui montre la continuité de $L(.)$.
Montrons que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue et coercive,
-Notez que a est une forme bilinéaire symétrique.
- Continuité : Soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\mid a(u,v) \mid &= \mid \int_\Omega \nabla u(x)\, \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega V u(x)\, v(x) dx \mid \\
&\leq (\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2)^{\frac{1}{2}}.(\int_\Omega \mid \nabla v \mid^2)^{\frac{1}{2}} + (\int_\Omega \mid Vuv \mid). \\
&\leq (\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2)^{\frac{1}{2}}.(\int_\Omega \mid \nabla v \mid^2)^{\frac{1}{2}} + \|V\|_{L^\infty}(\int_\Omega \mid u \mid^2)^{\frac{1}{2}}.(\int_\Omega \mid v \mid^2)^{\frac{1}{2}}. \\
&\leq \|u\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1} + C \cdot \|u\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1} \\
&\leq (1+C)\|u\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

- Coercivité : Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$a(v,v) = \int_\Omega \mid \nabla v \mid^2 + \int_\Omega V v^2$$

Puisque $V \geq 0$ alors $a(v,v) \geq \|v\|_{H_0^1}^2$ Donc, $a(\cdot,\cdot)$ est coercive.
D'après le Théorème de Lax-Milgram , le problème (2.1) admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$. □

Lemme 2.2. *Sous les mêmes hypothèses que Lemme 2.1,* $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Démonstration. Si on note $g(x) = f(x) - V(x) \cdot u(x)$ alors u est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u &= g \qquad \text{dans} \quad \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

En tenant compte de l'injection $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ on déduit que $g \in L^{2^*}$. Si on note $q_0 := q = 2^*$ alors par la Théorie de régularité L^p (voir Proposition 1.1) ; $u \in W^{2,q} \cap W_0^{1,q}$. Si $2q < N$ alors $W^{2,q} \hookrightarrow L^{q**}$, ce qui implique que $g \in L^{q^{**}}$, si on note $q_1 = q^{**}$ alors comme précédemment (remplacer q par q_1) $u \in W^{2,q_1} \cap W_0^{1,q_1}$ si $2q_1 < N$. On peut répéter l'argument précédent jusqu'à atteint un exposent q_k tel que $q_k \cdot 2 > N$ ou bien $2 \cdot q_k = N$. Dans le cas $2q_k > N$ alors par les injections des espaces de Sobolev on déduit $u \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$, avec $\theta \in (0,1)$. Sinon, dans le cas $2 \cdot q_k = N$ alors $u \in W^{1,p}$ pour tout $p \in [1, \infty[$, ce qui entraine que $u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$. En particulier, $g \in L^\infty$, ce qui implique par la régularité L^p que $u \in C^1(\overline{\Omega})$. $\square$

2.2 Existence de solution pour $V \in L^1_{loc}$

Proposition 2.1. *Etant donnée $V \geq 0$; $V \in L^1_{loc}$. Si $f \in L^\infty$ alors le problème* (2.1) *admet une solution unique.*

Démonstration. On définit

$$E = H_0^1(\Omega) \cap L^2(V\,dx).$$

Notez que l'espace E est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$< u, v >_E := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \; + \int_\Omega u \cdot v \cdot V(x)\, dx.$$

La norme issue de ce produit scalaire est

$$\|u\|_E := \sqrt{\|u\|^2_{H_0^1} \; + \; \|u\|^2_{L^2(V\,dx)}}.$$

(Voir la définition de $\|\cdot\|_{L^2(V\,dx)}$ en préliminaires.)

On dit que u est une solution du problème (2.1) si

$$\begin{cases} u \in E \\ \big(\forall v \in E\big) \qquad \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega V(x)\, u(x)\, v(x) dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx. \end{cases}$$

Puisque $u, v \in E$ alors

$$\Big|\int_\Omega V(x)\, u(x)\, v(x)\, dx\Big| \leq \Big(\int_\Omega u^2\, V(x)\, dx\Big) \cdot \Big(\int_\Omega v^2\, V(x)\, dx\Big) < +\infty,$$

ce qui montre que la formulation variationnelle précédente est bien définie.

Pour $u, v \in E$ on note

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\, \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega V(x) \cdot u(x)\, v(x) dx,$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx.$$

-Notez que $L(.)$ est une forme linéaire continue sur E. En effet, pour $u \in E$ et par application de l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\mid L(v) \mid &= \mid \int_\Omega f(x)\, v(x) dx \mid . \\
&\leq \int_\Omega \mid f(x)\, v(x) \mid dx \\
&\leq \sqrt{|\Omega|} \parallel f \parallel_\infty (\int_\Omega \mid v(x) \mid^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \cdot \sqrt{|\Omega|} \parallel f \parallel_\infty \cdot \parallel v \parallel_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C \cdot \sqrt{|\Omega|} \parallel f \parallel_\infty \cdot \parallel v \parallel_E .
\end{aligned}$$

Ce qui montre la continuité de $L(.)$.

Montrons que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue et coercive,

-Notez que $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique, en plus elle est bilinéaire.

- Continuité : Soient $u, v \in E$

$$\begin{aligned}
\mid a(u,v) \mid &= \mid \int_\Omega \nabla u(x)\, \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega V u(x)\, v(x) dx \mid \\
&\leq (\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2)^{\frac{1}{2}}.(\int_\Omega \mid \nabla v \mid^2)^{\frac{1}{2}} + (\int_\Omega \mid Vuv \mid). \\
&\leq (\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2)^{\frac{1}{2}}.(\int_\Omega \mid \nabla v \mid^2)^{\frac{1}{2}} + \|V\|_{L^\infty}(\int_\Omega \mid u \mid^2)^{\frac{1}{2}}.(\int_\Omega \mid v \mid^2)^{\frac{1}{2}}. \\
&\leq \|u\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1} + C \cdot \|u\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1} \\
&\leq (1 + C)\|u\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1} \\
&\leq (1 + C) \cdot \|u\|_E \cdot \|v\|_E.
\end{aligned}$$

- Coercivité : Pour $u \in E$, on a

$$a(v,v) = \int_\Omega \mid \nabla v \mid^2 + \int_\Omega V v^2 = \|v\|_E,$$

d'où la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$.
D'après le Théorème de Lax-Milgram , le problème (2.1) admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$. □

2.3 Principe de comparaison

Le but de cette section est de donner quelques outils de comparaison concernant l'équation (2.1).

Lemme 2.3. *[5] Soit u solution du problème (2.1) avec $f \in L^1(\Omega)$.
si $f \geq 0$ presque partout dans Ω alors $u \geq 0$ presque partout dans Ω.*

Démonstration. En effet, comme u est une solution de (2.1) alors
$\Delta u = Vu - f$ et

$$(\forall \zeta \in C_0^1(\overline{\Omega})) \quad \int_\Omega \zeta \Delta u dx = \int_\Omega \zeta (Vu - f) dx$$

D'après la formule de divergence et sachant que ζ et u s'annulent sur $\partial\Omega$

$$\int_\Omega \zeta \Delta u dx = \int_\Omega u \Delta \zeta dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \zeta dx$$

On applique l'inégalité de Kato qui stipule que

si $w \in L^1(\Omega), h \in L^1(\Omega, d_{d\Omega} dx)$ et $\nu \in M(\partial\Omega)$ satisfont à

$$\forall \zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) \quad - \int_\Omega w \Delta \zeta dx = \int_\Omega h \zeta dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \zeta}{\partial n} d\nu,$$

alors pour tout $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, $\zeta \geq 0$

$$- \int_\Omega w^+ \Delta \zeta dx \leq \int_{w \geq 0} h \zeta dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \zeta}{\partial n} d\nu^+.$$

Il suffit de prendre $w = -u, h = Vu - f$ et $\nu = 0$, on obtient alors pour tout $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, $\zeta \geq 0$

$$- \int_\Omega w^+ \Delta \zeta dx \leq \int_{w \geq 0} h \zeta dx \leq 0$$

$h \leq 0$ puisque V et f sont négatives et $u \leq 0$ dans l'ensemble $\{w \geq 0\}$,

on déduit alors que $w^+ = (u)^+ = 0$.

Donc $-u = -(-u)^-$ ou $u = (-u)^- \geq 0$ presque partout dans Ω. □

Lemme 2.4 (lemme de comparaison). *[5] Soient V_1 et $V_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ deux fonctions positives telles que $V_1 \leq V_2$ presque partout dans Ω.*

Soit $u_i \in L^1(\Omega) \cap L^1(\Omega, d_{\partial\Omega} dx)$ i=1,2 deux fonctions positives telles que

$$\forall \zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) \qquad -\int_\Omega (u_1 - u_2)\Delta\zeta dx + \int_\Omega (V_1 u_1 - V_2 u_2)\zeta dx = 0$$

alors $u_1 \leq u_2$ presque partout dans Ω.

On applique l'inégalité de Kato avec $w = u_1 - u_2$, $h = -V_1 u_1 + V_2 u_2$ et $\nu = 0$. $h \leq 0$ puisque $V_1 \leq V_2$ et $h = -V_1 w - u_2(V_{\_}V_1)$ dans la partie $\{w \geq 0\}$

On obtient alors

$$\forall \zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega}), \zeta \geq 0 \qquad -\int_\Omega w^+ \Delta\zeta dx \leq \int_{w \geq 0} h\zeta dx \leq 0$$

on déduit que $w^+ = 0$, donc $w = -w^-$ d'où $u_1 \leq u_2$ presque partout dans Ω

.

Chapitre 3

Sens de la dérivée normale pour l'équation de Schrödinger

Introduction

Considérons l'équation de Schrödinger,

$$\begin{cases} -\Delta u + V u &= f & \text{dans} & \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur} & \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $f \in L^\infty(\Omega)$ et $V \in L^1_{loc}(\Omega)_+$.

Lorsque $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ la solution du problème (3.1) n'est pas nécessairement C^1, donc la dérivée normale ponctuelle risque de ne pas être définie en tous les points du $\partial\Omega$. Le but de ce chapitre est de donner plusieurs sens de la dérivée normale et surtout le plus adapté pour énoncé le Lemme de Hopf pour l'équation (3.1).

En utilisant la représentation en termes du noyau de Green, le bon représentant de la fonction u noté û vérifie

$$\text{û}(x) = \int_\Omega G(x,y)(-\Delta u(y))dy \quad \text{pour chaque}\, x \in \Omega. \tag{3.2}$$

Formellement, pour $x \in \partial\Omega$

$$\frac{\partial \text{û}}{\partial n}(x) = \int_\Omega P(x,y)(-\Delta u(y))dy. \tag{3.3}$$

Avec $P(\cdot,\cdot)$ dénote le noyau de Poisson du $-\Delta$ sur Ω. L'intégrale (3.3) peut exploser pour certains potentiels V, ce qui empêche d'utiliser cette formule pour tous les points $x \in \partial\Omega$. Soit ζ_1 solution de 3.1 pour $f \equiv 1$, On définit

$$\mathcal{N} = \left\{ x \in \partial\Omega : \frac{\partial\widehat{\zeta_1}}{\partial n}(x)(\text{au sens classique}) \text{ existe et } \zeta_1 \text{ vérifie } (3.3) \right\}.$$

Cet ensemble $\mathcal{N}$ nous assure un terrain où la solution du problème 3.1 admet une dérivée normale au sens classique des points de $\partial\Omega$ qui nous sera nécessaire pour montrer le lemme de Hopf .

3.1 Dérivée normale comme une distribution

Considérons l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u &= \mu \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

où μ est une mesure de Radon sur Ω. Pour une présentation des équations à donnée L^1 ou plus généralement des mesures, le lecteur est invité a consulter [6], [10] et [11].

Il est bien connu que la solution de l'équation (3.4) n'est pas nécessairement $C^1(\overline{\Omega})$ ni même pas $C^1(\Omega)$. Ainsi la dérivée normale n'est pas défini au sens classique.

L'objectif de cette partie est de donner quelques définitions de la dérivée normale pour les équations elliptiques à donnée L^1 ou plus généralement des mesures.

On définit

$$\mathbb{X} := \{u \in W^{1,1}(\Omega)/\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)\}.$$

Définition 3.1. *Considérons $u \in \mathbb{X}$ et notons $\mu := \Delta u$. La dérivée normale de u sur $\partial\Omega$ est la distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ définie par :*

$$\langle T, \xi \rangle := \int_\Omega \xi \, d\mu + \int_\Omega \nabla u \, \nabla \xi \, dx \qquad (\forall \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,). \tag{3.5}$$

Notons cette distribution $\dfrac{\partial u}{\partial n}$.

Proposition 3.1. *$Supp(T) \subset \partial\Omega$.*

Démonstration. Soit $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dont le support est inclus dans $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$, il est clair que $\langle T, \xi \rangle = 0$, puisque $\xi = |\xi| = 0$ dans Ω.

Si maintenant ξ a un support inclus dans Ω alors $\int_\Omega \nabla v \, \nabla \xi = -\int_\Omega \xi d\mu$ et donc $\langle T, \xi \rangle = 0$. □

Proposition 3.2. *Si $u \in \mathbb{X} \cap W_0^{1,1}(\Omega)$ alors la dérivée normale définie précédemment (Définition 3.1) est identifiable ç une fonction intégrable sur $\partial\Omega$. En plus, elle vérifie*

$$\|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}. \tag{3.6}$$

La preuve originale est dans [2], on adapte ici la version détaillée dans [4].

Démonstration. On note par λ la mesure de Radon tel que $-\Delta u = \lambda$. On sépare la démonstrations en deux cas.

Cas 1 : La fonction u est régulière sur un voisinage du bord. Ainsi $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ est une fonction régulière sur le bord. Soient u_1 la solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda^+ \text{ dans } \Omega, \\ u_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et u_2 celle de :

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = \lambda^- \text{ dans } \Omega, \\ u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

donc $u = u_1 - u_2$.

La mesure λ est régulière au voisinage du bord, ses parties positive et négative λ^+ et λ^- (respectivement) sont des fonctions continues lipschitziennes près du $\partial\Omega$. Par la suite u_1 et u_2 sont de classe C^2 près du $\partial\Omega$. Par le principe du maximum $u_1 \geq 0$ dans Ω , $u_2 \geq 0$ dans Ω, d'où :

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

De même,

$$\frac{\partial u_2}{\partial n} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Il en résulte que :

$$\int_{\partial\Omega} |\frac{\partial u_1}{\partial n}| dS = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial n} dS = \int_{\Omega} \lambda^+;$$

parallèlement,

$$\int_{\partial\Omega} |\frac{\partial u_2}{\partial n}| dS = \int_{\Omega} \lambda^-.$$

On déduit ainsi l'estimation (3.6) pour ce cas,

$$\int_{\partial\Omega} |\frac{\partial u}{\partial n}| \leq \int_{\Omega} (\lambda^+ + \lambda^-) = \int_{\Omega} |\Delta u|.$$

Cas 2 : Le cas général. On procède par approximation.

Soit $(\psi_k) \subset C_0^\infty(\Omega)$ qui vérifient :

(i) $0 \leq \psi_k \leq 1$ dans $\overline{\Omega}$,

(ii) $\psi_k(x) = 1$ si $d(x, \partial\Omega) \geq \dfrac{1}{k}$,

(iii) $\psi_k(x) = 0$ si $d(x, \partial\Omega) \leq \dfrac{1}{k^2}$.

On considère $\lambda_k = \psi_k \, \lambda = \psi_k(-\Delta u)$. La suite $\{\lambda_k\}_k$ est une suite de mesures de Radon dans Ω dont chaque élément a un support strictement inclus dans Ω. En plus $\{\lambda_k\}$ converge fortement au sens des mesures vers λ, en effet,

$$\begin{aligned}\|\lambda - \psi_k\lambda\|_{\mathcal{M}(\Omega)} &= \int_\Omega d[(1-\psi_k)\,\lambda]_+ + \int_\Omega d[(1-\psi_k)\,\lambda]_-,\\ &= \int_\Omega (1-\psi_k)\, d\lambda_+ + \int_\Omega (1-\psi_k)\, d\lambda_-,\\ &= \int_\Omega (1-\psi_k)\, d|\lambda|,\end{aligned}$$

donc, par application du théorème de convergence dominée, on conclut :

$$\lambda_k \to \lambda \text{ fortement dans } \mathcal{M}(\Omega). \tag{3.7}$$

Pour $k \geq 1$, soit u_k l'unique solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k & \text{dans } \Omega,\\ u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega.\end{cases} \tag{3.8}$$

Noter que (voir [3],ou [6]) $u_k \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < N/(N-1)$. D'où :

$$(\forall \eta \in C^1(\overline{\Omega})) \quad \int_\Omega \nabla\eta . \nabla u_k \to \int_\Omega \nabla\eta . \nabla u. \tag{3.9}$$

Par multiplication de (3.8) par $\eta \in C^1(\overline{\Omega})$:

$$\int_\Omega \nabla u_k . \nabla \eta - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial n} \eta dS = \int_\Omega \eta \lambda_k.$$

Lorsqu'on fait tendre $k \to \infty$, et utilisant(4.2) ainsi que (3.7), on obtient

$$\int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u_k}{\partial n} \to \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial n} \quad \forall \phi \in C^1(\partial\Omega). \tag{3.10}$$

La fonction u_k est harmonique au voisinage du $\partial\Omega$, donc régulière. À partir du résultat du premier cas appliqué à $u_i - u_j$,

$$\|\frac{\partial u_i}{\partial n} - \frac{\partial u_j}{\partial n}\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \|\lambda_i - \lambda_j\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Comme $\lambda_k \to \lambda$ fortement dans $\mathcal{M}(\Omega)$, la suite $(\frac{\partial u_k}{\partial n})_k$ est une suite de Cauchy dans $L^1(\partial\Omega)$, par conséquent la convergence faible dans devient forte. Autrement dit :

$$\frac{\partial u_k}{\partial n} \to \frac{\partial u}{\partial n} \text{ fortement dans } L^1(\partial\Omega),$$

avec l'estimation :

$$\|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \|\lambda\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

□

3.2 Dérivée normale ponctuelle

Dans cette section, on donne une définition ponctuelle de la dérivée normale .

Soit $(V_k)_k$ une suite croissante de fonctions positives et bornées telles que $\lim_{k\to+\infty} V_k = V$

Proposition 3.3. *Soit u une solution du problème 2.1 avec $f \in L^\infty(\Omega)$. On note u_k la solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u_k + V_k\, u_k = f & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad u_k = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.11}$$

Alors

(i) $u_k \to u$ *et* $V_k u_k \to V u$ *dans* $L^1(\Omega)$ *et presque partout dans* Ω

(ii) $(\frac{\partial u_k}{\partial u})$ *est uniformément bornée dans* $\partial\Omega$

(iii) $(\frac{\partial u_k}{\partial u})$ *converge ponctuellement vers une fonction* $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tel que* $g = \frac{\partial u}{\partial n}$ *presque partout dans* $\partial\Omega$ *et*

pour tout $N < p \leq \infty$

$$\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C\|f\|_{L^1(\Omega)}$$

avec une constante C dépendante de p et de Ω.
En plus, si $f \geq 0$ presque partout dans Ω alors $g \geq 0$ presque partout dans $\partial\Omega$

Remarque : La fonction $g(\cdot)$ est appelée la dérivée normale ponctuelle de la fonction u. Elle sera noté dans la suite par

$$\frac{\widehat{\partial u}}{\partial n}(a) := g(x) \text{ pour chaque } a \in \partial\Omega. \tag{3.12}$$

Démonstration. Il suffit de démontrer la proposition pour f positive puisque dans le cas général , $f = f^+ - f^-$ en utilisant l'unicité de la solution et la linéarité de l'opérateur de Schrödinger ,on obtient le résultat :
$u_k$et u sont positives d'après le lemme 2.3 et vérifient

$$\begin{cases} -\Delta\left(u_k - u\right) + \left(V - V_k\right)u &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u_k - u &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.13}$$

alors ;d'après l'estimation donnée pour les solutions du problème de Dirichlet ([1] [Théorème IX.25]) on a :

$$\| \left(u_k - u\right) \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \parallel (V - V_k)u \parallel_{L^1(\Omega)}$$

Sachant que $\lim_{k\to+\infty} V_k = V$ presque partout dans $\partial\Omega$, et d'après le théorème de convergence dominée , on déduit que $\lim_{k\to+\infty} u_k = u$ dans $L^1(\Omega)$.

La suite (u_k) est décroissante, en effet, d'après le lemme de comparaison 2.4 u_k et u_{k+1} vérifient :

$$\begin{cases} -\Delta\left(u_{k+1} - u_k\right) + V_{k+1}u_{k+1} - V_k u_k &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u_{k+1} - u_k &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.14}$$

$\forall \zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega \left(u_{k+1} - u_k\right)\Delta\zeta\, dx + \int_\Omega \left(V_{k+1}u_{k+1} - V_k u_k\right)\zeta\, dx = 0$$

Ainsi,

$$u_k \in W^{2,p}(\Omega) \quad \text{pour} \quad 1 < p < \infty$$

Et d'après la proposition 2.2 , $u_k \in C^1(\overline{\Omega})$

Soit $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ la solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta w &= \mid f \mid \quad \text{dans } \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.15}$$

d'après le principe du maximum faible :

$$| u_k | \leq w \text{ p.p sur } \Omega$$

.

En plus,

$$\| w \|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C \| \Delta w \|_{L^p(\Omega)} = C \| f \|_{L^p(\Omega)}$$

Où $C > 0$ dépend de p et de Ω.

Comme $| u_k | < w$, on a aussi $\left| \dfrac{\partial u_k}{\partial n} \right| \leq \frac{\partial w}{\partial n}$ sur $\partial\Omega$.

On déduit que,

$$\left\| \frac{\partial u_k}{\partial n} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|w\|_{L^1(\overline{\Omega})} \leq Cf\|_{L^p(\Omega)}$$

Comme $0 \leq g \leq \dfrac{\partial u_k}{\partial n}$ sur $\partial\Omega$ alors

$$\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

$\square$

On définit la dérivée normale de u par

$$\frac{\widehat{\partial u}}{\partial n}(a) \quad = \quad g(a) = \lim_{k \to +\infty} \frac{\partial u_k}{\partial n}(a) \quad \forall a \in \Omega \tag{3.16}$$

3.3 Dérivée normale sur l'ensemble Σ

Considérons le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + Vu = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \qquad\quad u = \delta_a & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.17}$$

où δ_a est la distribution de Dirac.

Définition 3.2 (Ensemble exceptionnel Σ)**.** *L'ensemble exceptionnel Σ associé à l'opérateur $-\Delta + V$ est l'ensemble des points a de $\partial\Omega$ tels que le problème 3.17 n'admet pas de solution distributionnelle .*

$\Sigma = \{ \, a \in \partial\Omega \, : \,$ *Le problème 3.17 n'admet pas de solution distriutionnelle* $\}$

Lemme 3.1. *Soit $V \in L^q(\Omega)$ pour $q > N$, alors le problème :*

$$\begin{cases} -\Delta u + Vu = 0 & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \qquad\quad u = \mu & \textit{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.18}$$

admet une solution distributionnelle pour tout $\mu \in M(\partial\Omega)$.
En particulier : $\Sigma = \emptyset$

Démonstration. Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions régulières sur $\partial\Omega$ qui convergent faiblement vers μ. On peut considérer cette suite de sorte que (voir [6]) :

$$\| g_k \|_{L^1(\partial\Omega)} \longrightarrow \| \mu \|_{M(\partial\Omega)} .$$

Et soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions distributionnelles du problème

$$\begin{cases} -\Delta v_k + V_k v_k = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad v_k = g_k & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.19}$$

Cette suite (v_k) est construite à partir du produit de convolution de μ avec une suite de Mollifiers .
On considère l'ensemble $w \Subset \Omega(\overline{w} \subset \Omega)$, on a d'après la proposition 3.3

$$\| v_k \|_{W^{1,1}(w)} \leq C_1(\| v_k \|_{L^1(\Omega,d_{\partial\Omega},dx)} + \| g_k \|_{L^1(\partial\Omega)})$$

Pour une constante $C_1 > 0$ dépendante de w.
Alors on peut extraire une sous suite de $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers v presque partout dans Ω.
D'un autre côté ,comme $q' < \frac{N}{N-1}$, on déduit d'après la proposition 3.3

$$\| v_k \|_{L^{q'}(\Omega)} \leq C_2(\| v_k \|_{L^1(\Omega,d_\partial\Omega,dx)} + \| g_k \|_{L^1(\partial\Omega)})$$

où $C_2 > 0$ dépendant de q' et Ω .
Comme solution distributionnelle du problème 2.1, v_k satisfait l'équation :

$$\int_\Omega v_k(-\Delta\zeta + V\zeta)dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\zeta}{\partial n} g_k d\sigma$$

Enfin, en faisant tendre k vers l'infini dans la dernière équation ;
On obtient

$$\int_\Omega v(-\Delta\zeta + V\zeta)dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\zeta}{\partial n} d\mu$$

Alors v est une solution distributionnelle du problème 3.18. Ceci est vrai pour toute mesure $\mu \in M(\partial\Omega)$, ainsi $\Sigma = \emptyset$.

□

3.4 Dérivée normale classique de l'équation de Schrödinger

Avant de donner le Théorème principale dans cette section, on a besoin des Lemmes clés suivants qui ont leurs propres utilités.

Proposition 3.4. *Soit u_f une solution du problème (3.1) avec $f \in L^\infty_+(\Omega)$, telle que u_f admet une dérivée normale classique au point $a \in \partial\Omega$ et satisfait la formule de Poisson. Si u_g est une autre solution du problème (3.1) avec une donnée dans $g \in L^\infty_+(\Omega)$, telle que $u_g \leq u_f$ p.p dans Ω , alors $\widehat{u}_g$ admet une dérivée normale classique au point $a \in \partial\Omega$ qui satisfait la formule de Poisson.*

Démonstration. pour u_g une solution vérifiant

$$u_g(y) \quad = \quad \int_\Omega G(a,y)\,(f - Vu_g)\,dy$$

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{G(a+tn,y)}{t}\,(f - Vu_g(y))\,dy = \int_\Omega P(a,y)(f - Vu_g(y))dy$$

Soit $(\varepsilon_k)_k$ une suite décroissante de nombres positifs convergeant vers zéro pour tout $y \in \Omega$, on pose

$$g_k(y) = \frac{G(a+\varepsilon_k n, y)}{\varepsilon_k},$$

Ainsi

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega g_k(y)(Vu_f(y))dy = \int_\Omega P(a,y)(Vu_f(y))dy$$

ou bien,

$$\|g_k(\cdot)\|_{L^1(\Omega;Vdx)} \longrightarrow \|P(a,.)\|_{L^1(\Omega;Vdx)}$$

On conclut

$$g_k(.)u_f \longrightarrow P(a,.)u_f \text{dans} L^1(\Omega;Vdx)$$

et puisque $u_g \leq u_f$ on déduit par convergence dominée que $g_k u_g \longrightarrow P(a,.)u_g$ dans $L^1(\Omega;Vdx)$ et on déduit que $\widehat{u_g}$ admet une dérivée normale classique au point a.

lorsque $\varepsilon_k \longrightarrow 0$, on a

$$g_k(y) = \frac{G(a+\varepsilon_k n, y)}{\varepsilon_k} \longrightarrow P(a,y)$$

□

Lemme 3.2. *Soit u une solution du problème* (3.1) *avec une donnée f dans* $L^\infty(\Omega)$*, alors*

$$\forall a \in \partial\Omega \quad \limsup_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\hat{u}(a+\varepsilon n)}{\varepsilon} \leq \widehat{\frac{\partial u}{\partial n}}(a) \leq \int_\Omega P(a,y)(f - Vu)dy \qquad (3.20)$$

Démonstration. La suite $(u_k)_k$ de solutions du problème 3.1 est décroissante et converge vers û.
$\Delta u_k = f + V_k u_k$ est borné car f,V_k et u_k sont bornés et $V_k u_k \longrightarrow Vu$, d'après le lemme de Fatou, on a

$$P(a,y)\,(f - Vu)\,dy \;\leq\; \liminf_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega P(a,y)\,(f - V_k u_k)dy$$

La suite $\left(\frac{\partial u_k}{\partial n}\right)_k$ est bornée , alors $\forall a \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{\partial u}{\partial n}}(a) &= \lim_{k \to +\infty} \frac{\partial u_k}{\partial n}(a). \\
&= \lim_{k \to +\infty} \int_\Omega P(a,y)(f - V_k u_k) \\
&\leq \int_\Omega P(a,y)(f - Vu).
\end{aligned}$$

En faisant tendre k vers l'infini dans l'inégalité , on obtient le résultat cherché

$$\limsup_{\varepsilon \longrightarrow +0} \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}\,(a + \varepsilon n) \;\leq\; \frac{\partial u_k}{\partial n}\,(a) \quad \forall a \in \partial\Omega$$

□

On arrive maintenant au Théorème principale de ce Chapitre.

Théorème 3.1. *Pour chaque* $f \in L^\infty_+(\Omega) \setminus \{0\}$ *la solution u du problème* (3.1) *admet une dérivée normale classique au point* $a \in \partial\Omega$ *qui satisfait* (3.3) *si et seulement si* $a \in \mathcal{N}$.

Démonstration. (i) ($\Longrightarrow$) On suppose que pour tout f dans $L^\infty(\Omega)$, la solution u de 3.1 admet une dérivée normale classique au point $a \in \partial\Omega$ et vérifie

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial n}(a) = \int_\Omega P(a,y).\Big(-\Delta u(y)\Big)\,dy.$$

On construit une suite de solutions qui converge vers ζ_1
Pour $\varepsilon > 0$, on note v_ε la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon + V\, v_\varepsilon &= \chi_{\{u>\varepsilon\cdot c\}} \qquad \text{dans} \quad \Omega, \\ v_\varepsilon &= 0 \qquad\qquad\ \ \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Ensuite, on a

$$\begin{cases} -\Delta(\varepsilon v_\varepsilon - u) + V\,(\varepsilon v_\varepsilon - u) &= \varepsilon\chi_{\{u>\varepsilon c\}} - f \qquad \text{dans} \quad \Omega, \\ \varepsilon v_\varepsilon - u &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de Kato (1.3) (lemme 4.3 Orsina et Ponce) [9]

$$\int_\Omega (\varepsilon v_\varepsilon - u)^+ \leq \int_{\{\varepsilon v_\varepsilon - u > 0\}} (\varepsilon.\chi_{\{u>\varepsilon c\}} - f).\zeta_1$$

Puisque $f \geq 0, \zeta_1 \geq 0$, alors

$$\int_\Omega (\varepsilon v_\varepsilon - u)^+ \leq \varepsilon \int_{\{\varepsilon v_\varepsilon - u > 0\}} \zeta_1 \chi_{\{u>\varepsilon c\}}(y)dy,$$

ce qu'on peut aussi l'écrire

$$\int_\Omega (\varepsilon v_\varepsilon - u)^+ \leq \varepsilon \int_\Omega \zeta_1 \chi_{\{c\varepsilon<u<\varepsilon v_\varepsilon\}}(y)dy \tag{3.21}$$

Puisque $0 \leq \chi_{\{u>\varepsilon c\}} \leq 1$ alors

$$0 \leq v_\varepsilon \leq \zeta_1 \leq \|\zeta_1\|_\infty \tag{3.22}$$

On prend $c = \| \zeta_1 \|_{L^\infty}$, alors on a

$$\{c\varepsilon < u(y) < \varepsilon v_\varepsilon(y)\} \subset \{\| \zeta_1 \|_{L^\infty} < v_\varepsilon(y)\},$$

donc l'ensemble $\{c\varepsilon < u(y) < \varepsilon v_\varepsilon(y)\}$ est négligeable (ceci est conséquence de (3.22))

Finalement (3.21) donne

$$\int_\Omega (\varepsilon v_\varepsilon - u)^+ \leq 0.$$

Donc

$$\varepsilon v_\varepsilon - u \leq 0 \quad p.p.$$

Soit (ε_j) une suite décroissante convergeant vers zéro on a

$$0 < \chi_{\{u>\varepsilon_j c\}} \leq 1 \, (\in L^\infty)$$

D'après la proposition 3.4, $\widehat{v_\varepsilon}$ admet une dérivée normale au point a qui satisfait (3.3), donc :

$$\frac{\partial \widehat{v_\varepsilon}}{\partial n}(a) = \int_\Omega P(a,y)\Big(\chi_{\{u>\varepsilon_j c\}} - V v_{\varepsilon_j}\Big)(y)dy.$$

Notez que $u > 0 \in \Omega$. On a ainsi,

$$\chi_{\{u>\varepsilon_j c\}} \xrightarrow{j\to\infty} 1 \quad \text{p.p.sur} \quad \Omega$$

par le Théorème de convergence dominée de Lebesgue cette convergence est satisfaite aussi dans L^1 i.e.

$$\chi_{\{u>\varepsilon_j c\}} \xrightarrow{j\to\infty} 1 \quad L^1(\Omega).$$

Par les estimations apriori ceci implique $v_{\varepsilon_j} \longrightarrow \zeta_1$ dans $L^1(\Omega)$.

Reste le passage à la limite dans l'intégrale

$$\frac{\partial \widehat{v_\varepsilon}}{\partial n}(a) = \int_\Omega P(a,y)\Big(\chi_{\{u>\varepsilon_j c\}} - V v_{\varepsilon_j}\Big)(y)dy.$$

Puisque ε_j est décroissante alors $\chi_{\{u>\varepsilon_j c\}}$ est croissante. D'où par le Lemme 2.4 ; la suite v_{ε_j} est croissante.

Finalement en appliquant le Théorème convergence monotone de Levi

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} \frac{\partial \widehat{v_{\varepsilon_j}}}{\partial n}(a) &= \int_\Omega P(a,y)\left(1 - V\zeta_1(y)\right)dy. \\ &= \frac{\partial \widehat{\zeta_1}}{\partial n}(a)\end{aligned}$$

Enfin, on déduit que $\dfrac{\partial \widehat{\zeta_1}}{\partial n}$ existe et que :

$$\frac{\partial \widehat{\zeta_1}}{\partial n}(a) = \int_\Omega P(a,y)(f - V\zeta_1)dy$$

(ii) ($\Longleftarrow$) On a $a \in \mathcal{N}$ alors

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial n}(a) = \int_\Omega P(a,y)(f - V\zeta_1)dy$$

Soit u solution de 3.1 pour f dans $L^\infty(\Omega)$, on a presque partout dans Ω :

$$u \leq \zeta_{\|f\|_{L^\infty(\Omega)}} = \| f \|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \zeta_1$$

Alors, d'après la proposition 3.4, u admet une dérivée normale classique au point $a \in \partial\Omega$ et satisfait la formule de Poisson . $\square$

Chapitre 4

Lemme de Hopf pour l'équation de Schrödinger

Introduction

Dans ce chapitre, on énonce le lemme de Hopf classique et on l'applique pour l'équation de Schrödinger .

4.1 Lemme de Hopf classique

Commençons d'abord par le Lemme de Hopf dans le cadre classique .

Théorème 4.1 (Lemme de Hopf classique)**.** *(Lemme 3.4 [7] et Lemme 4.6 [8])*
Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ et L un opérateur uniformément elliptique tel que $Lu \leq 0$ dans Ω et $c \geq 0$.
L vérifie :

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n} a^{ij}(x) D_{ij}u + cu, \qquad a^{ij} = a^{ji}$$

avec , les fonctions a^{ij}, c sont continues .il existe un point $a \in \partial\Omega$ tel que :

(i) u est continue en a
(ii) $u(a) \geq u(x)$ pour tout $x \in \Omega$
(iii) $\partial\Omega$ satisfait la condition de la boule ouverte intérieure au point a (il existe une boule ouverte B telle que $B \subset \Omega$ (avec $a \in \partial B(\Omega)$)).

Alors, si la dérivée normale de u existe au point a on a :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(a) > 0$$

Démonstration. On adapte la preuve pour $L = -\Delta + c$ et on prendra pour simplifier $B = B_O(R)$ et $u(a) > 0$

Pour tout $x \in B_R(O)$, on définit la fonction auxiliaire v avec α positif qu'on va choisir par la suite

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-\alpha\,|x|^2} - e^{-\alpha R^2} \\ &= e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2} \quad \text{avec } r = \mid x \mid \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Lv &= e^{-\alpha r^2}\,(2\,\alpha\,N - 4\,\alpha^2\,r^2) + c(e^{-\alpha\,|x|^2} - e^{-\alpha R^2}) \\ &\leq e^{-\alpha r^2}\,(2\,\alpha\,N - 4\,\alpha^2\,r^2 + c) \end{aligned}$$

Dans $A = B_R(O) - B_\rho(O)$ avec $0 < \rho < R$, on choisit α assez grand tel que $Lv \leq 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $w = u(x) - u(a) + \varepsilon v(x)$.

Puisque u est continue en a alors $\exists\, \varepsilon > 0$ assez petit tel que :

$$w(x) \leq 0 \quad \text{sur} \quad \partial B_\rho(O)$$

aussi

$$w(x) \leq 0 \quad \text{sur} \quad \partial B_R(O)$$

car $v \equiv 0$ dans $B_R(O)$

Alors, $L\,(w(x)) \leq cu(a) \leq 0$ et $w(x) \leq 0$ sur ∂A

D'après le principe du maximum faible ([7]) :

$$w(x) \leq 0 \quad \text{dans}\, A \quad \text{et} \quad w(a) = 0$$

Alors,

$$\frac{\partial w}{\partial n}(a) \geq 0$$

c.à.d ,

$$\frac{\partial u}{\partial n}(a) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial n}(a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(a) = \nabla v(a) \overrightarrow{n}(a) = -2\,\alpha\,\langle\, \frac{a}{R}.\, e^{-\alpha R^2}, \frac{a}{R}\,\rangle$$

on a ,

$$2\,\alpha\,\langle\,\frac{a}{R}.\,e^{-\alpha R^2},\,\frac{a}{R}\,\rangle\;=\;2\,\alpha\,\varepsilon\,e^{-\alpha R^2}R>0$$

alors

$$-\varepsilon\frac{\partial v}{\partial n}(a)>0$$

on déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial n}(a)>0$$

□

4.2 Lemme de Hopf pour l'équation de Schrödinger

Commençons par exprimer le Lemme de Hopf par la dérivée normale ponctuelle .
Considérons le même problème :

$$\begin{cases} -\Delta u+V\,u &= f \qquad \text{dans} \qquad \Omega, \\ \qquad\quad u &= 0 \qquad \text{sur} \qquad \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

Proposition 4.1. *Soit u une solution de 4.1 pour une donnée $f\in L^\infty(\Omega)$ positive mais non identiquement nulle. Alors pour tout point $a\in\partial\Omega$ on a*

$$\frac{\widehat{\partial u}}{\partial n}(a)>0\iff a\notin\Sigma \tag{4.2}$$

Démonstration. (i) ($\Longleftarrow$)
Soit $a\in\partial\Omega$ tel que $a\notin\Sigma$, et soit ϕ_a solution distributionnelle de 3.17 avec $\mu=\delta_a$, et qui vérifie pour tout $f\in L^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega\phi_a f\,dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\widehat{\partial\zeta_f}}{\partial n}d\mu \tag{4.3}$$

avec ζ_f solution de 4.1.
D'une part, étant une solution distributionnelle, ϕ_a vérifie :

$$\phi_a\geq 0\ \text{p.p dans}\,\Omega$$

En effet, il suffit de prendre $f = \chi_{\{\phi_a<0\}}$
alors d'un côté $\int_\Omega \phi_a f = \int_{\{\phi_a<0\}} \phi_a < 0$ et d'un autre côté

$$\int_{\partial\Omega} \widehat{\frac{\partial\zeta_f}{\partial n}} d\delta_a \geq 0$$

car

$$\int_{\partial\Omega} \widehat{\frac{\partial\zeta_f}{\partial n}} d\delta_a = \widehat{\frac{\partial\zeta_f}{\partial n}}(a) \geq 0$$

vu que ζ_f sol de 4.1 est positive puisque $f \geq 0$ (cf lemme 2.3).

D'autre part,

$$\int_{\partial\Omega} \widehat{\frac{\partial\zeta_f}{\partial n}} d\delta_a \quad = \quad \widehat{\frac{\partial\zeta_f}{\partial n}}(a) \quad = \quad \widehat{\frac{\partial u}{\partial n}}(a)$$

Puisque ϕ_a et f sont positives p.p dans Ω alors,

$$\int_\Omega \phi_a f dx \quad > 0$$

On déduit,

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial n}}(a) \quad > 0$$

(ii) $(\Longrightarrow)$

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial n}}(a) > 0 \quad \Longrightarrow \quad a \notin \Sigma$$

On montre la contraposée :

$$a \in \Sigma \quad \Rightarrow \quad \{\widehat{\frac{\partial u}{\partial n}}(a) < 0 \quad ou \quad \widehat{\frac{\partial u}{\partial n}}(a) = 0\}$$

D'après la proposition 4.2 [5], il existe une mesure positive λ de $M(\Omega)$ telle que la solution distributionnelle ϕ_a est aussi solution distributionnelle du problème 3.17 avec la donnée $\delta_a - \lambda$ et comme $\phi_a \geq 0$ alors

$$\delta_a - \lambda \geq 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

(D'après le principe du maximum inverse pour les mesures voir [5])

Donc $\exists\beta$, $0 \leq \beta \leq 1$ tel que $\lambda = \beta \cdot \delta_a$

⋆ Si $\beta \neq 1$:
on a le problème

$$\left\{\begin{array}{rcllr} -\Delta u + V\,u & = & 0 & \text{dans} & \Omega, \\ u & = & \delta_a - \lambda & \text{sur} & \partial\Omega \end{array}\right. \tag{4.4}$$

en remplaçant par la valeur de λ

$$\left\{\begin{array}{rcllr} -\Delta u + V\,u & = & 0 & \text{dans} & \Omega, \\ u & = & \delta_a(1-\beta) & \text{sur} & \partial\Omega \end{array}\right. \tag{4.5}$$

Alors $\phi_a/(1-\beta)$ sera solution du problème 3.17. Contradiction avec $a \in \Sigma$.

⋆ $\beta = 1 \Rightarrow \lambda = \delta_a$ et,

$$\int_\Omega \phi_a(-\Delta\zeta + V\zeta)\,dx = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$$

en prenant $\zeta = \theta$ qui vérifie

$$\left\{\begin{array}{rcllr} -\Delta\theta & = & 1 & \text{dans} & \Omega, \\ \theta & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega \end{array}\right. \tag{4.6}$$

$\theta \geq 0$ pp sur Ω (principe du maximum faible)

On déduit que

$$\int_\Omega \phi_a(1 + V\theta)\,dx = 0$$

$$0 \leq \int_\Omega \phi_a\,dx \;\leq\; \int_\Omega \phi_a(1+V\theta)\,dx = 0$$

alors

$$\int_\Omega \phi_a\,dx \;=\; 0$$

et comme $\xi_a \geq 0$, on a $\phi_a = 0$ p.p dans Ω.

D'après la formule 4.3, on obtient :

$$\widehat{\frac{\partial\zeta_f}{\partial n}}(a) = 0 \quad \forall f$$

□

Théorème 4.2. *Soit u une solution du problème 4.1 pour une donnée $f \in L^\infty(\Omega)$ positive , $f \not\equiv 0$. Alors ,*

$$\Big(\forall a \in \mathcal{N}\Big) \qquad \frac{\partial\widehat{u}}{\partial n}(a) > 0 \iff a \notin \Sigma$$

Démonstration. D'après le théorème 3.1,
$\dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial n}$ existe sur $\mathcal{N}$ et satisfait la formule de Poisson

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial n}(a) = \int_{\Omega} P(a,y)(f - Vu)(y)dy$$

En appliquant la proposition 3.4

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial n}(a) \le \limsup_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\hat{u}(a+\varepsilon n)}{\varepsilon} \le \frac{\widehat{\partial u}}{\partial n}(a) \le \int_{\Omega} P(a,y)(f - Vu)(y)dy = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial n}$$

on déduit que $\frac{\partial \widehat{u}}{\partial n} = \frac{\widehat{\partial u}}{\partial n}$ sur $\mathcal{N}$.

Le Théorème 4.2 découle de la proposition 4.1. □

Proposition 4.2. *Si $V \in L^q(\Omega)$ pour un certain $q > N$ on a $\mathcal{N} = \partial\Omega$ et $\Sigma = \emptyset$, alors pour toute solution u du problème 4.1, la dérivée normale de $\widehat{u}$ existe en tout point $a \in \partial\Omega$ et satisfait $\frac{\partial \widehat{u}}{\partial n}(a) > 0$.*

Démonstration. On montre que $\mathcal{N} = \partial\Omega$ et $\Sigma = \emptyset$.

Soit u solution du problème 4.1, pour une donnée $f \in L^{\infty}_{+}(\Omega) \setminus \{0\}$ on a :
Comme $u \in L^{\infty}(\Omega)$, $\Delta u = -Vu + f \in L^q(\Omega)$ (car $Vu \in L^q(\Omega)$) alors $u \in W^{1,2}(\Omega)$.
Le théorème de Morrey-Sobolev [6] assure que : $W^{2,q}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, alors $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ce qui donne

$$\mathcal{N} = \partial\Omega$$

et grâce au lemme 3.1, $\Sigma = \emptyset$. le résultat découle du théorème 4.2. □

Conclusion

Le lemme de Hopf ou principe du maximum de Hopf est un résultat classique et fondamental dans la théorie des e.d.p du second ordre. Dans ce travail, on montre le lemme de Hopf pour les solutions du problème de Dirichlet impliquant l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$ pour différents cas de potentiel positif V et en paticulier le cas singulier $V \in L^1_{loc}(\Omega)$.
On donne une caractérisation intéressante de l'ensemble des points de la frontière de Ω qui assure la validité du lemme de Hopf pour les solutions du problème.

Bibliographie

[1] H.Brezis. *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[2] H.Brezis, A.C.Ponce. *Kato's inequality up to the boundary.* Communications in Contemporary Mathematics. Vol. 10, No. 6 (2008) 1217–1241.

[3] L.Boccardo, T.Gallouët. *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, Journal of Functional Analysis Volume 87, Issue 1, November 1989, Pages 149-169.

[4] Y.O.Boukarabila. *Etude de l'équation harmonique dans un ouvert avec des conditions nonlinéaires de type flux sur le bord*, Thèse de doctorat, 2016, Université de Tours.

[5] A.C.Ponce and N.Wilmet.*The Hopf lemma for the Schrodinger operator* .https ://arxiv.org/abs/2001.03341v1.

[6] A.C.Ponce.*Elliptic PDEs, Measures and Capacities.From the Poisson Equation to Nonlinear Thomas-Fermi Problems.* Book. Tracts in Mathematics 23 , European Mathematical Society. 2017.

[7] D.Gilbarg and N.S.Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order.* Book. Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

Kato's inequality up to the boundary. Commun. Contemp. Math. (2008). 1-22. **87** (1989), 149-169.

[8] L.C.Evans.*Partial Differential Equations.* Book. American Mathematical Society, Providence, R.I., (2010).

[9] L.Orsina and A.C. Ponce. *Hopf potentials for the Schrödinger operator.* Anal. PDE 11(8) : 2015-2047 (2018).

[10] Laurent Veron. *Elliptic Equations Involving Measures.* M. Chipot, P. Quittner. Stationary Partial Differential equations, Volume 1, Elsevier, pp.593-712, 2004, Handbook of Differential Equations. ffhal-00326583.

[11] M. Marcus, L.Veron. *Nonlinear second order elliptic equations involving measures.* Book. Volume 21 in the series De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications.