

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEM



Faculté des sciences
Département de Mathématiques
MÉMOIRE DE MASTER

présenté par

Sadaoui Chaima

Soutenu le : 2 juillet 2023

**Convergence des valeurs propres extrémales des
grandes matrices aléatoires**

Soutenu devant le jury composé de :

Mme. BENYAHIA WAHIBA	Université de Tlemcen	Présidente
Mme. BOUKHIAR SOUAD	Université de Tlemcen	Examinatrice
Mme. KHETTAB ZAHIRA	Université de Tlemcen	Encadrante

Année universitaire : 2022 - 2023

Table des matières

Introduction	3
1 Valeurs propres extrémales de matrice de Wigner	5
1.1 Matrice de Wigner	5
1.2 Mesure spectrale	6
1.3 Loi du demi-cercle de Wigner	7
1.3.1 Définitions	8
1.3.2 Théorème de Wigner	8
1.4 Méthode des grandes traces	10
1.5 Résultats sur la convergence des valeurs propres extrémales . .	11
2 Valeurs propres extrémales de matrice de covariance	23
2.1 Matrice de covariance	23
2.2 Distribution du spectre de la matrice de covariance	23
2.3 Résultats sur la convergence des valeurs propres extrémales . .	25
3 Loi de Tracy-Widom	32
3.1 Généralités	32
3.1.1 Ensembles gaussiens	32
3.1.2 Equation différentielle : Painlevé II et fonction d’Airy	33
3.1.3 La distribution de Tracy-Widom	34
3.2 Résultat sur la loi de Tracy-Widom	36
3.2.1 Cas de la matrice de Wigner	36
3.2.2 Cas de la matrice de covariance	37
3.3 Approximation de la distribution Tracy-Widom	38
3.3.1 Approximation de la fonction de distribution cumula- tive	39

Annexe	41
Conclusion	45
Bibliographie	46

Introduction

La théorie des grandes matrices aléatoires constitue un domaine de recherche vaste et en constante évolution, son utilisation s'étend à de nombreux domaines scientifiques et technologiques, tels que les mathématiques, la statistique, la physique, l'informatique et l'apprentissage automatique, offrant des outils puissants pour modéliser, analyser et résoudre des problèmes complexes.

Ce mémoire porte sur l'étude des convergences des valeurs propres extrémales de matrices aléatoires particulières. Nous commençons par la matrice de Wigner, qui est une matrice aléatoire symétrique dont les éléments suivent une distribution spécifique appelée distribution de Wigner, elle porte nom du physicien Eugene Wigner, qui a introduit ces matrices dans le domaine de la mécanique quantique. Ensuite, nous regardons la grande matrice aléatoire de covariance empirique, c'est une matrice dont les éléments sont générés de manière aléatoire sans aucune structure ou dépendance spécifique, elles sont utilisées dans des contextes théoriques, de simulation ou d'analyse statistique pour effectuer des expériences numériques.

Le premier chapitre de ce manuel aborde les matrices de Wigner, où nous passons brièvement sur certaines notions de base et nous présentons un résultat qui concerne la convergence de la mesure spectrale empirique des matrices étudiées vers la loi de demi-cercle. Un autre résultat sur la convergence des valeurs propre extrémale a été établi à l'aide de la méthode des grandes traces.

Dans le deuxième chapitre, les matrices de covariance ont été définies pour introduire un contexte intuitif similaire au chapitre précédent, concernant les résultats sur la convergence de la mesure spectrale de ce type de matrice vers une loi asymptotique dite de Marcenko-Pastur ainsi que sur la convergence

des valeurs propres extrémales.

Le dernier chapitre est consacré à la description de la loi de Tracy–Widom pour les ensembles de variables corrélées. Ce qui permet de donner la distribution asymptotique de la plus grande valeur propre d’une grande matrice aléatoire et de faire également une approximation de cette distribution.

Chapitre 1

Valeurs propres extrémales de matrice de Wigner

Dans ce chapitre nous allons définir la matrice de Wigner et nous présentons un théorème qui porte le même nom concernant la convergence de la mesure spectrale empirique.

Ensuite, nous allons énoncer un théorème qui établit un résultat sur la convergence des valeurs propres extrémales de la matrice de Wigner.

1.1 Matrice de Wigner

Soit W une matrice carrée de dimension $(N \times N)$,

$$W = W_N = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1N} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N1} & W_{N2} & \cdots & W_{NN} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

les W_{ij} pour $i, j = 1, \dots, N$, sont des variables aléatoires réelles ou complexes soumises à la contrainte $W_{ij} = \bar{W}_{ji}$ de sorte que W soit hermitienne (complexe) ou symétrique (réelle).

Définition 1.1.1. *La matrice W définie par (1.1) est appelé matrice de Wigner si :*

1. W_{ij} sont indépendantes pour tout $i, j = 1, \dots, N$, et ont une moyenne nulle et variance égale à $\frac{1}{2}$ pour $(i < j)$.
2. Ses coefficients diagonaux sont indépendants, ont une moyenne nulle et une variance égale 1, et ils sont indépendants des coefficients non diagonaux.

1.2 Mesure spectrale

Définition 1.2.1. soient A_N une matrice carrée symétrique réelle, de taille N et $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, N$ les valeurs propres de A_N .

La mesure de comptage normalisée ou la mesure spectrale μ_{A_N} de A_N est définie par :

$$\mu_{A_N}(\Delta) = \frac{1}{N} \text{card} \{i \in (1, \dots, N) \mid \lambda_i \in \Delta\},$$

où Δ est un borélien de \mathbb{R} .

On peut la définir aussi, par

$$\mu_{A_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}, \quad (1.2)$$

où δ la mesure de dirac.

Remarque 1.2.1. Si A_n est une matrice aléatoire alors μ_{A_N} est aussi aléatoire.

Soit \mathbb{P} une mesure de probabilité sur un ensemble de matrices carrées aléatoires alors

La moyenne

$$\bar{\mu}_{A_N} = \mathbb{E}[\mu_{A_N}(\Delta)].$$

La covariance

$$\text{cov} [\mu_{A_N}(\Delta_1), \mu_{A_N}(\Delta_2)] = E_n [\mu_{A_N}(\Delta_1)\mu_{A_N}(\Delta_2)] - E_n [\mu_{A_N}(\Delta_1)] E [\mu_{A_N}(\Delta_2)],$$

où Δ_1 et Δ_2 sont des boréliens, en particulier,

$$\text{Var} [\mu_{A_N}(\Delta)] = \text{cov} [\mu_{A_N}(\Delta), \mu_{A_N}(\Delta)].$$

1.3 Loi du demi-cercle de Wigner

La loi du demi cercle est utilisée pour modéliser des variables aléatoires continues qui ont des valeurs finies et symétriques autour de zéro. Cette loi admet une densité de probabilité qui a la forme d'un demi-cercle, d'où son appellation, (voir Figure 1.1)

Définition 1.3.1. *La loi du demi-cercle de paramètre $R > 0$ est la loi de probabilité sur l'intervalle $[-R, R]$, dont le graphe de la densité de probabilité f est le demi-cercle de rayon R centré en 0, convenablement renormalisée pour que*

$$\int_{-R}^R f(x)dx = 1.$$

La densité f a l'expression,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2} & \text{si } x \in [-R, R] \\ 0 & \text{si non.} \end{cases} \quad (1.3)$$

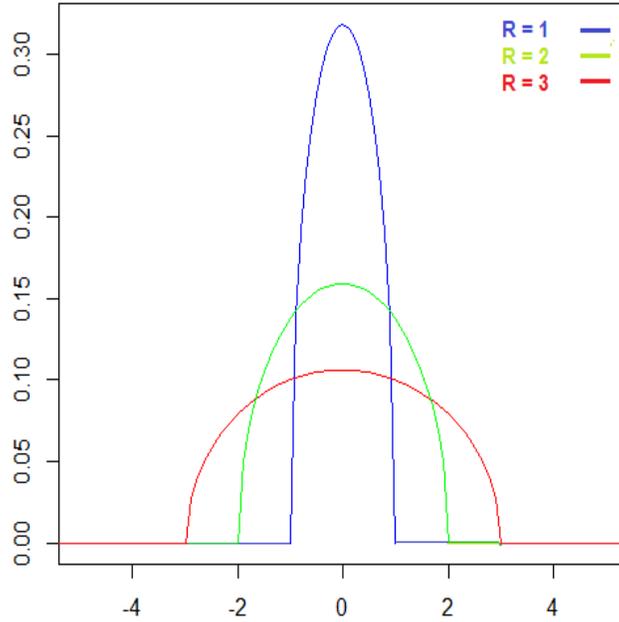


Figure 1.1 : Fonction du demi cercle pour différents valeurs du paramètre R .

1.3.1 Définitions

Définition 1.3.2. On dit qu'une suite (μ_n) de mesures positives bornées converge étroitement vers une mesure positive bornée μ si, pour toute fonction continue bornée f ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) \mu_n(dt) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \mu(dt).$$

Définition 1.3.3. Les nombres de Catalan $C_0 = 1$ et $C_k = \frac{1}{k} C_{2k}^{k-1}$, sont caractérisés par

$$C_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1, C_k = \sum_{l=1}^k C_{l-1} C_{k-l}. \quad (1.4)$$

1.3.2 Théorème de Wigner

Le théorème de Wigner qui a été prouvé en 1958, donne un résultat sur la convergence étroite de la mesure spectrale vers la loi du demi cercle.

Théorème 1.3.1. [12]

Soit W_N une matrice de Wigner telle que $W_N = (W_{ij})$, $\forall 1 \leq i \leq j \leq N$.

On suppose que :

1. $E(W_{ij}) = 0$ et $E(|W_{ij}|^2) = 1$.
2. $\forall k > 2$, $\sup_{1 \leq i \leq j \leq N} E(|W_{ij}|^k) = C(k) < \infty$.

Alors, la mesure spectrale $\mu(\frac{W_N}{\sqrt{N}})$ converge étroitement vers la loi du demi-cercle μ_c ,

$$d\mu_c(t) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[-2;2]} \sqrt{4 - t^2} dt.$$

La démonstration du théorème a été établie en montrant que les moments de la loi spectrale empirique converge vers les moments de la loi du demi-cercle.

Corollaire 1.3.1. [12] Les valeurs propres d'une matrice étant des fonctions continues des entrées de la matrice, pour toute fonction f continue et bornée, on a

$$\int f(x) d\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f\left(\lambda_i\left(\frac{W_N}{\sqrt{N}}\right)\right).$$

qui est bien mesurable.

La figure suivante donne des simulations de la distribution des valeurs propres d'une matrice de Wigner.

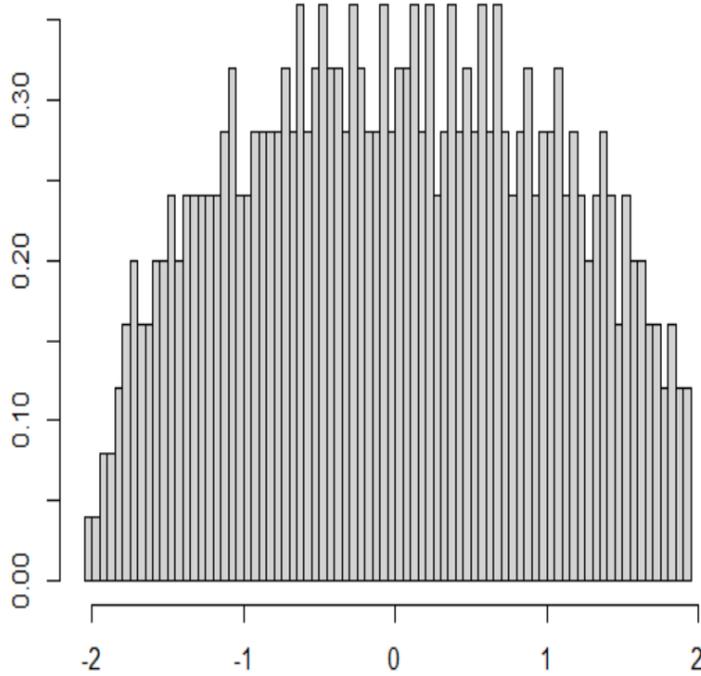


Figure 1.2 : Distribution des valeurs propres d'une matrice carrée à entrées gaussiennes de taille $N=500$.

1.4 Méthode des grandes traces

Soit $M = (M_n)$ une suite de matrices symétriques. On a, $\|M\| = \max |\lambda_i|$, $i = 1, 2, \dots, N$, alors pour tout k ,

$$\|M\|^{2k} \leq \text{Tr}(M^{2k}) \leq N\|M\|^{2k}. \quad (1.5)$$

Puisque $\text{Tr}(M^{2k}) = \sum_1^N \lambda_i^{2k} = \sum_1^N |\lambda_i|^{2k}$.

Si $k \gg \log N$, alors $n^{1/2k} \rightarrow 1$ et on a l'approximation de la norme de la matrice M suivante

$$\|M\| \sim [\text{Tr}(M^{2k})]^{1/2k}.$$

Si M est une matrice aléatoire, on a aussi

$$\mathbb{P}[\|M\| \geq t] = \mathbb{P}[(\text{Tr}(M^{2k}))^{1/2k} \geq t] \leq \mathbb{P}[\text{Tr}(M^{2k}) \geq t^{2k}] \leq \frac{\mathbb{E} \text{Tr}(M^{2k})}{t^{2k}}, \quad (1.6)$$

Il s'agit d'estimer $\mathbb{E}(\text{Tr}(M^{2k}))$, pour un choix de k .

1.5 Résultats sur la convergence des valeurs propres extrémales

Soit W_N une matrice $(N \times N)$ symétrique telle que :

$$W_N = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1N} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N1} & W_{N2} & \cdots & W_{NN} \end{pmatrix}.$$

On considère les hypothèses **H** suivantes :

1. Les $(W_{ij}, 1 \leq i \leq j)$ sont indépendantes et identiquement distribuées de variance 1.
2. $\exists \alpha > 0$ telle que $\mathbb{E}(W_{ij}^{4+\alpha}) < \infty, \forall 1 \leq i \leq j$.
3. Les W_{ii} ont la même loi telle que $\mathbb{E}(W_{11}^+)^2 < \infty$, où $W_{11}^+ = \max(W_{11}, 0)$.

Lemme 1.5.1. *Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty$ alors*

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{m}{2}}) < \infty.$$

Démonstration

On a,

$$\mathbb{E}(|X|^2) = \mathbb{E}\left(2 \int_0^{|X|} t dt\right),$$

par suite

$$\mathbb{E}(|X|^2) = \mathbb{E}\left(2 \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{0 < t \leq |X|} t dt\right),$$

et

$$\mathbb{E}(|X|^2) = \mathbb{E}\left(2 \int_0^1 \mathbf{1}_{0 < t \leq |X|} t dt\right) + \mathbb{E}\left(2 \int_1^{+\infty} \mathbf{1}_{0 < t \leq |X|} t dt\right).$$

En subdivisant l'intervalle $[1, +\infty[$, on obtient

$$\mathbb{E}(|X|^2) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{\frac{m-1}{2}}}^{2^{\frac{m}{2}}} \mathbb{P}(|X| \geq t) t dt + 2 \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t dt.$$

$$\mathbb{E}(|X|^2) \geq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{\frac{m-1}{2}}}^{2^{\frac{m}{2}}} \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{m}{2}}) t dt + 2 \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t dt \quad (1)$$

Après calcul de la première intégrale de (1), on obtient

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m - 2^{m-1}) \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{m}{2}}) + 2 \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t dt.$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\mathbb{E}(|X|^2) \geq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m-1} \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{m}{2}}) + 2 \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t dt.$$

Comme X est de carrée intégrable alors,

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m-1} \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{m}{2}}) + 2 \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t dt < \infty,$$

d'autre part on a, $2 \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t dt \leq \infty$, ce qui donne

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m-1} \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{m}{2}}) < \infty.$$

Lemme 1.5.2. *Soit X une variable aléatoire telle que, $\mathbb{E}(|X|^{4+\alpha}) < +\infty$, pour un certain $\alpha > 0$. Soit $(\delta_N)_{N \geq 1}$ la suite définie par*

$$\delta_N = \left(\frac{1}{N} \right)^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}} 2^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}}.$$

Alors

$$\sum_{m \geq 1} 2^{2m} \mathbb{P}(|X| > \delta_{2^{m+1}} 2^{\frac{m}{2}}) < +\infty.$$

Démonstration

On a

$$\mathbb{E}(|X|^{4+\alpha}) = \mathbb{E}\left((4+\alpha) \int_0^{|X|} t^{3+\alpha} dt\right).$$

Ou encore

$$\mathbb{E}(|X|^{4+\alpha}) = \mathbb{E}\left((4+\alpha) \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{0 < t \leq |X|} t^{3+\alpha} dt\right).$$

Comme pour le lemme précédent on utilise la relation de Chasles et on fait une subdivision de l'intervalle $[1, +\infty[$, pour avoir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X|^{4+\alpha}) &= (4+\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{\frac{2(m-1)}{4+\alpha}}}^{2^{\frac{2m}{4+\alpha}}} \mathbb{P}(|X| \geq t) t^{3+\alpha} dt + (4+\alpha) \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t^{3+\alpha} dt \\ \mathbb{E}(|X|^{4+\alpha}) &\geq (4+\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{\frac{2(m-1)}{4+\alpha}}}^{2^{\frac{2m}{4+\alpha}}} \mathbb{P}\left(|X| \geq 2^{\frac{2m}{4+\alpha}}\right) t^{3+\alpha} dt + (4+\alpha) \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t^{3+\alpha} dt \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (2^{2m} - 2^{2(m-1)}) \mathbb{P}\left(|X| \geq 2^{\frac{2m}{4+\alpha}}\right) + (4+\alpha) \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t^{3+\alpha} dt. \end{aligned}$$

On conclut alors que,

$$\mathbb{E}(|X|^{4+\alpha}) \geq \frac{3}{4} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{2m} \mathbb{P}\left(|X| \geq 2^{\frac{2m}{4+\alpha}}\right) + (4+\alpha) \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t^{3+\alpha} dt.$$

Comme, $\mathbb{E}(|X|^{4+\alpha}) < \infty$ et $(4+\alpha) \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t^{3+\alpha} dt < \infty$. Alors,

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{2m} \mathbb{P}\left(|X| \geq 2^{\frac{2m}{4+\alpha}}\right) < \infty.$$

En remarquant que,

$$\delta_{2^{m+1}} 2^{m/2} = \left(\frac{1}{2^{m+1}}\right)^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}} 2^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}} 2^{m/2} = 2^{\frac{2m}{4+\alpha}}.$$

On obtient

$$\sum_{m \geq 1} 2^{2m} \mathbb{P}\left(|X| > \delta_{2^{m+1}} 2^{\frac{m}{2}}\right) < +\infty.$$

Lemme 1.5.3.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \max_i \frac{W_{ii}^+}{\sqrt{N}} = 0. \quad p.s,$$

où $W_{ii}^+ = \max(W_{ii}; 0)$.

Démonstration

On a,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq 2^m} W_{ii}^+ \geq \epsilon 2^{\frac{m}{2}} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq 2^m} W_{ii}^+ < \epsilon 2^{\frac{m}{2}} \right) \right).$$

Comme $\forall i \in \mathbb{N}$, W_{ii} sont indépendantes et identiquement distribuées, alors

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq 2^m} W_{ii}^+ \geq \epsilon 2^{\frac{m}{2}} \right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - (\mathbb{P}(W_{11}^+ < \epsilon 2^{\frac{m}{2}}))^{2^m} \right), \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - (1 - \mathbb{P}(W_{11}^+ \geq \epsilon 2^{\frac{m}{2}}))^{2^m} \right), \end{aligned}$$

pour $0 \leq x \leq 1$, on a $1 - x^p \leq p(1 - x)$, et donc pour $x = 1 - \mathbb{P}(W_{11}^+ \geq \epsilon 2^{\frac{m}{2}})$, on obtient

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - (1 - \mathbb{P}(W_{11}^+ \geq \epsilon 2^{\frac{m}{2}}))^{2^m} \right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \mathbb{P}(W_{11}^+ \geq \epsilon 2^{\frac{m}{2}}).$$

D'après la lemme 1.5.2, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m \mathbb{P}(W_{11}^+ \geq \epsilon 2^{\frac{m}{2}}) < +\infty \quad p.s$$

donc,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq 2^m} W_{ii}^+ \geq \epsilon 2^{\frac{m}{2}} \right) < +\infty \quad p.s.$$

On conclut par lemme de Borel-Cantelli que,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \max_{1 \leq i \leq 2^m} \frac{W_{ii}^+}{2^{\frac{m}{2}}} = 0 \quad p.s,$$

d'autre part, pour tout $N \geq 1$, soit $m_N \in N$ tel que $2^{m_N} \leq N \leq 2^{m_N+1}$, on a :

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq N} \frac{W_{ii}^+}{\sqrt{N}} \leq \sqrt{2} \max_{1 \leq i \leq 2^{m_N+1}} \frac{W_{ii}^+}{2^{\frac{m_N+1}{2}}},$$

on en déduit que,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \max_{1 \leq i \leq N} \frac{W_{ii}^+}{\sqrt{N}} = 0.$$

Maintenant définissons la matrice \hat{W}_N , en posant pour $i \neq j$, $(\hat{W}_N)_{ij} = (\tilde{W}_N)_{ij} \mathbf{1}_{|(W_N)_{ij}| \leq \delta_N \sqrt{N}}$, avec la matrice \tilde{W}_N définie telle que, $(\tilde{W}_N)_{ij} = (W_N)_{ij}$, $\forall i \neq j$ et $(\tilde{W}_N)_{ii} = 0$, c'est à dire

$$\tilde{W}_N = \begin{pmatrix} 0 & W_{12} & \cdots & W_{1N} \\ W_{21} & 0 & \cdots & W_{2N} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ W_{N1} & W_{N2} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{où } \delta_N = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}} 2^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}}, \text{ et } (\hat{W}_N)_{ii} = 0.$$

Lemme 1.5.4. *Soit*

$$a_k(N) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr } M_N^{2k} \right),$$

avec $M_N = \frac{\hat{W}_N}{\sqrt{N}}$, alors pour tout $\epsilon > 0$, pour N suffisamment grand et tout $k \leq \delta_N^{-1/3}$ où $\delta_N = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}} 2^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}}$,

$$a_{k+1}(N) \leq (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^k a_l(N) a_{k-l}(N).$$

Démonstration

$$a_k(N) = \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{i_1, \dots, i_{2k}} \mathbb{E} \left(\hat{W}_{i_1 i_2} \hat{W}_{i_2 i_3} \cdots \hat{W}_{i_{2k} i_1} \right).$$

Les \hat{W}_{ij} étant indépendantes et symétriques, chaque terme non nul de cette somme est positif puisque chaque \hat{W}_{ij} doit apparaître un nombre pair de fois. En particulier, il existe l dans $\{2, \dots, 2k\}$ telle que $(i_1, i_2) = (i_l, i_{l+1})$ ou $(i_2, i_1) = (i_l, i_{l+1})$ (avec la convention $i_{2k+1} = i_1$). Donc

$$a_k(N) \leq \Sigma_1(k) + \Sigma_2(k),$$

où

$$\begin{aligned} \Sigma_1(k) &= \sum_{l=0}^{2k-2} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i_1, i_2=1}^N \frac{\hat{W}_{i_1 i_2}}{\sqrt{N}} (M_N^l)_{i_2 i_1} \frac{\hat{W}_{i_1 i_2}}{\sqrt{N}} (M_N^{2k-2-l})_{i_2 i_1} \right\}, \\ \Sigma_2(k) &= \sum_{l=0}^{2k-2} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i_1, i_2=1}^N \frac{\hat{W}_{i_1 i_2}}{\sqrt{N}} (M_N^l)_{i_2 i_2} \frac{\hat{W}_{i_2 i_1}}{\sqrt{N}} (M_N^{2k-2-l})_{i_1 i_1} \right\}. \end{aligned}$$

Donc il existe une certaine constante $C > 0$, telle que pour tout $k \geq 1$ et tout $N \geq 2$, on a

$$a_k(N) \leq 2k\delta_N^2 a_{k-1}(N) + \sum_{l=0}^{k-1} a_l(N) a_{k-1-l}(N) + Ck^3 \delta_N^2 a_{k-2}(N) a_1(N) + Ck^3 \delta_N^2 a_{k-1}(N).$$

Pour $k \leq \delta_N^{-\frac{1}{3}}$, on obtient

$$\begin{aligned} a_k(N) &\leq 2\delta_N^{2-\frac{1}{3}} a_{k-1}(N) + \sum_{l=0}^{k-1} a_l(N) a_{k-1-l}(N) + C\delta_N a_{k-2}(N) a_1(N) + C\delta_N a_{k-1}(N) \\ &\leq \left(1 + 2\delta_N^{\frac{5}{3}} + 2C\delta_N\right) \sum_{l=0}^{k-1} a_l(N) a_{k-1-l}(N). \end{aligned}$$

Puisque δ_N tend vers zéro, on obtient donc que pour tout $\epsilon > 0$, pour N suffisamment grand et tout $k \leq \delta_N^{-\frac{1}{3}}$, $a_k(N) \leq (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^{k-1} a_l(N) a_{k-1-l}(N)$.

Le théorème de Wigner établit la convergence globale du spectre mais ne donne pas d'information complète sur les valeurs propres individuelles. En particulier, on pourrait tout à fait imaginer que la plus grande valeur propre « saute » du spectre limite et converge vers une valeur strictement plus grande que 2.

En 1988, Bai et Yin [1], établissent des conditions nécessaires et suffisantes pour que la plus grande et la plus petite valeurs propres d'une matrice de Wigner convergent effectivement vers 2

Théorème 1.5.1. :

Sous les hypothèses \mathbf{H} , la plus grande valeur propre de W_N converge presque sûrement vers 2 quand $N \rightarrow +\infty$.

Preuve :

A fin de faciliter la lecture de la preuve du résultat, on va la répartir en quatre étapes.

Etape 1

Soit f_ϵ une fonction continue bornée positive à support compact $[2 - \epsilon, 2]$ strictement positive dans $[2 - 3\frac{\epsilon}{4}, 2 - \frac{\epsilon}{4}]$. D'après le corollaire 1.3.1 pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_\epsilon \left(\lambda_i \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right) \right) f_n \longrightarrow \int f_\epsilon(x) d\mu_{sc}(x) > 0.$$

Donc pour N assez grand

$$\lambda_{\max} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right) \geq 2 - \epsilon,$$

on en déduit que ,

$$\liminf_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{\max} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right) \geq 2. \tag{1.7}$$

Reste à montrer que presque sûrement ,

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{\max} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right) \leq 2.$$

Etape 2

Rappelons que la matrice \tilde{W}_N est telle que $(\tilde{W}_N)_{ij} = (W_N)_{ij}, \forall i \neq j$ et $(\tilde{W}_N)_{ii} = 0$

$$\tilde{W}_N = \begin{pmatrix} 0 & W_{12} & \cdots & W_{1N} \\ W_{21} & 0 & \cdots & W_{2N} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ W_{N1} & W_{N2} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

comme W_N est une matrice symétrique, alors

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right) &= \sup_{x, \|x\|=1} \left\langle \frac{W_N}{\sqrt{N}} x, x \right\rangle \\ &= \sup_{x, \|x\|=1} \left(\sum_{i \neq j} \frac{(W_N)_{ij}}{\sqrt{N}} x_j x_i + \sum_i \frac{(W_N)_{ii}}{\sqrt{N}} x_i^2 \right). \end{aligned}$$

On a, $(\tilde{W}_N)_{ij} = (W_N)_{ij}, \forall i \neq j$ donc

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right) &= \sup_{x, \|x\|=1} \left(\sum_{i \neq j} \frac{(\tilde{W}_N)_{ij}}{\sqrt{N}} x_j x_i + \sum_i \frac{(W_N)_{ii}}{\sqrt{N}} x_i^2 \right) \\ &\leq \sup_{x, \|x\|=1} \left(\sum_{i,j} \frac{(\tilde{W}_N)_{ij}}{\sqrt{N}} x_j x_i \right) + \max_i \frac{W_{ii}^+}{\sqrt{N}}, \end{aligned}$$

par le lemme 1.5.3 :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \max_i \frac{W_{ii}^+}{\sqrt{N}} = 0 \quad \text{p.s.}$$

Etape 3

Soient k un entier naturel et les ensembles

$$A_k = \left\{ \exists N \geq 2^k, \exists (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2, i < j, \left| (W_N)_{ij} \right| > \delta_N \sqrt{N} \right\}.$$

On peut voir que

$$A_{k+1} \subset A_k \text{ et donc } \mathbb{P}(\cap A_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_k),$$

$$\mathbb{P}(A_k^c) \leq \mathbb{P}(\text{pour } N \text{ grand } \tilde{W}_N = \hat{W}_N).$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{N > 2^k} \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \left\{ |W_{ij}| > \delta_N \sqrt{N} \right\} \right),$$

donc ,

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{m \geq k} \bigcup_{2^m < N \leq 2^{m+1}} \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \left\{ |W_{ij}| > \delta_N \sqrt{N} \right\} \right),$$

et

$$\mathbb{P}(A_k) \leq \sum_{m=k}^{\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{2^m < N \leq 2^{m+1}} \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \{|W_{ij}| > \delta_N \sqrt{N}\} \right).$$

Comme $2^m < N$ et $\delta_{2^{m+1}} < \delta_N$, alors

$$\mathbb{P}(A_k) \leq \sum_{m=k}^{\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{2^m < N \leq 2^{m+1}} \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \{|W_{ij}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{m/2}\} \right),$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k) &\leq \sum_{m=k}^{\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq 2^{m+1}} \{|W_{ij}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{m/2}\} \right) \\ &\leq \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{1 \leq i < j \leq 2^{m+1}} \mathbb{P}(|W_{ij}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{m/2}). \end{aligned}$$

Comme les W_{ij} ont la même loi, on conclut, alors que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k) &\leq \sum_{m=k}^{\infty} 2^{2(m+1)} \mathbb{P}(|W_{12}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{m/2}) - \sum_{m=k}^{\infty} 2^{(m+1)} \mathbb{P}(|W_{12}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{m/2}), \\ &\leq \sum_{m=k}^{\infty} 2^{2(m+1)} \mathbb{P}(|W_{12}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{m/2}), \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.5.2 ,

$$\sum_{m \geq 1} 2^{2(m+1)} \mathbb{P}(|W_{12}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{\frac{m}{2}}) < +\infty.$$

Ce qui permet de dire que,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P} \left(\text{pour } N \text{ grand } \tilde{W}_N = \hat{W}_N \right) = 1.$$

Etape 4

Pour terminé la preuve, on veut aboutir à ce que presque sûrement,

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{\max}(M_N) \leq 2, \tag{1.8}$$

où

$$M_N = \frac{\hat{W}_N}{\sqrt{N}},$$

$\forall k \geq 1$ et $\forall \epsilon > 0$, nous avons d'après (1.6),

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max}(M_N) > 2(1 + \epsilon)) \leq \mathbb{P}(\text{Tr}(M_N^{2k}) > 2^{2k}(1 + \epsilon)^{2k}).$$

Par l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max}(M_N) > 2(1 + \epsilon)) \leq \frac{1}{2^{2k}(1 + \epsilon)^{2k}} \mathbb{E}(\text{Tr}(M_N^{2k})).$$

Alors si k tend vers l'infini avec N , avec un bon choix de k_N , on veut obtenir

$$\sum_N \frac{1}{2^{2k_N}(1 + \epsilon)^{2k_N}} \mathbb{E}(\text{Tr}(M_N^{2k_N})) < +\infty.$$

Soient $\epsilon > 0$ et S une variable aléatoire suivant la loi du demi-cercle de variance 1

$$d\mu_1(t) = \frac{1}{2\pi} 1_{[-2;2]}(t) \sqrt{4 - t^2} dt.$$

Soit $X_\epsilon = \sqrt{1 + \epsilon}S$. X_ϵ suit la loi du demi-cercle de variance $1 + \epsilon$,

$$d\mu_{\sqrt{1+\epsilon}}(t) = \frac{1}{2\pi(1 + \epsilon)} 1_{[-2\sqrt{1+\epsilon}; 2\sqrt{1+\epsilon}]}(t) \sqrt{4(1 + \epsilon) - t^2} dt.$$

En utilisant la relation de récurrence (1.4) satisfaite par les moments pairs de S , on en déduit que la suite $\{a_k^*\}_{k \geq 0}$ les moments pairs de X_ϵ , $a_k^* = \mathbb{E}(X_\epsilon^{2k})$ satisfait

$$\begin{aligned} a_0^* &= 1, \\ a_{k+1}^* &= (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^k a_l^* a_{k-l}^*. \end{aligned}$$

On a

$$a_0^* = 1 = a_0(N),$$

et

$$a_1(N) \leq 1 < (1 + \epsilon) = a_1^*.$$

D'après le lemme 1.5.4 , il existe $N(\epsilon)$ tel que $\forall N \geq N(\epsilon)$, pour tout $k \leq \delta_N^{-1/3}$,

$$a_{k+1}(N) \leq (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^k a_l(N) a_{k-l}(N).$$

Soit $1 \leq k \leq \delta_N^{-1/3}$. Supposons que $\forall N \geq N(\epsilon)$ pour tout $p \leq k$, $a_p(N) \leq a_p^*$. Alors

$$a_{k+1}(N) \leq (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^k a_l^* a_{k-l}^* = a_{k+1}^*.$$

On obtient donc par récurrence que $\forall N \geq N(\epsilon)$, pour tout $k \leq \delta_N^{-1/3}$,

$$a_k(N) \leq a_k^*.$$

Or $a_k^* = \int \frac{1}{2\pi(1+\epsilon)} \mathbf{1}_{[-2\sqrt{1+\epsilon}; 2\sqrt{1+\epsilon}]}(t) t^{2k} \sqrt{4(1+\epsilon) - t^2} dt \leq (2\sqrt{1+\epsilon})^{2k}$.

Donc $\forall N \geq N(\epsilon)$, pour tout $k \leq \delta_N^{-1/3}$,

$$a_k(N) \leq 2^{2k} (1 + \epsilon)^k.$$

D'après le lemme 1.5.2, $\forall N \geq N(\epsilon)$, pour tout $k \leq \delta_N^{-1/3}$,

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max}(M_N) > 2(1 + \epsilon)) \leq \frac{N}{2^{2k} (1 + \epsilon)^{2k}} 2^{2k} (1 + \epsilon)^k \leq N(1 + \epsilon)^{-k}.$$

Choisissons k_N tel que $k_N / \log N \rightarrow +\infty$ et $\forall N \geq N(\epsilon)$, $k_N \leq \delta_N^{-1/3}$. Alors pour N grand, $N(1 + \epsilon)^{-k} \leq \exp(-Ck_N)$, et

$$\sum_N \mathbb{P}(\lambda_{\max}(M_N) > 2(1 + \epsilon)) < +\infty,$$

d'après le lemme de Borel-Contelli,

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{\max}(M_N) \leq 2(1 + \epsilon), p.s$$

ce qui permet de conclure.

Remarque 1.5.1. *Pour une matrice de Wigner satisfaisant les mêmes conditions, l'étude de la plus petite valeur propre se ramène à celle de la plus grande. Leurs comportements sont en effet symétriques.*

Théorème 1.5.2. [2] : Soit W une matrice hermitienne de taille N de telle que,

$$W = W_N = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1N} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N1} & W_{N2} & \cdots & W_{NN} \end{pmatrix}.$$

On suppose que $(W_{ij}, 1 \leq i \leq j)$ sont des variables aléatoires indépendantes complexes et de même loi, et que les éléments de la diagonale sont des variables aléatoires réelles de même loi. Si les conditions suivantes sont satisfaites

1. $\mathbb{E} \{(W_{11})^2\} < \infty$.
2. $\mathbb{E} \{W_{12}\} = 0$.
3. $\mathbb{E} \{|W_{12}|^2\} = \sigma^2$.
4. $\mathbb{E} \{|W_{12}|^4\} < \infty$.

Alors la plus grande valeur propre et la plus petite valeur propre de $\frac{W_N}{\sqrt{N}}$ convergent presque sûrement vers 2σ et -2σ respectivement.

Chapitre 2

Valeurs propres extrémales de matrice de covariance

Comme pour la matrice de Wigner, dans ce chapitre nous allons définir la matrice de covariance et énoncer des résultats sur la distribution de son spectre ainsi que la convergence de ses valeurs propres extrémales.

2.1 Matrice de covariance

Définition 2.1.1. *Une matrice de covariance empirique est une matrice $(N \times N)$ de la forme,*

$$C_n = \frac{1}{n} X X^\top,$$

où X est une matrice de taille $(N \times n)$, dont toutes les entrées sont réelles ou complexes *i.i.d.*

Notation :

Si les entrées de X sont réelles, X^\top désigne la matrice transposée de X .

Si les entrées de X sont complexes, X^ désigne la matrice adjointe de X .*

2.2 Distribution du spectre de la matrice de covariance

En 1967, Marchenko et Pastur ont montré le théorème suivant, concernant le comportement global du spectre des matrices de covariance.

Théorème 2.2.1. [9]

Soient X une matrice $(N \times n)$ et X_{ij} les éléments de la matrice X réelles ou complexes i.i.d. On suppose que,

1. $E(X_{ij}) = 0$ et $E(|X_{ij}|^2) = 1$.
2. $N = N(n)$ vérifie $\frac{N}{n} \rightarrow c > 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Alors, le spectre de la matrice $C_n = \frac{1}{n}XX^\top$, suit la distribution de Marchenko-Pastur dont la densité est donnée par :

$$f_{MP}(x) = \frac{\sqrt{(\lambda^+ - x)(x - \lambda^-)}}{2\pi cx} 1_{[\lambda^-, \lambda^+]}(x),$$

où λ^- et λ^+ sont des fonctions de c ,

$$\begin{cases} \lambda^-(c) = (1 - \sqrt{c})^2. \\ \lambda^+(c) = (1 + \sqrt{c})^2. \end{cases}$$

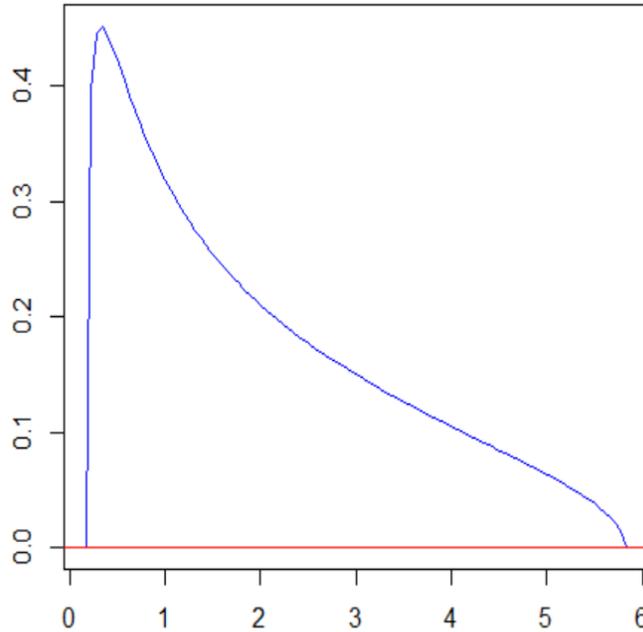


Figure 2.1 : Loi de Marchenko-pastur pour $c = 2$.

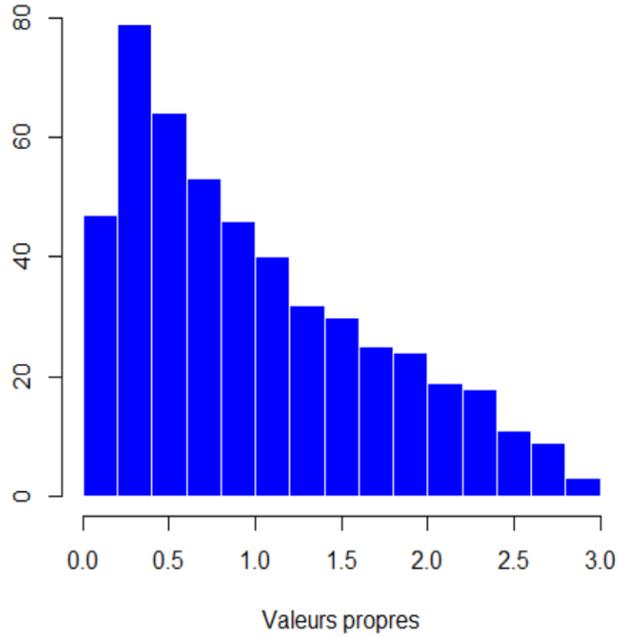


Figure 2.2 : Distribution des valeurs propres de la matrice de covariance a entrées gaussiennes centrées et de variance 1.

Remarque 2.2.1. Si $c = 1$, alors $\lambda^- = 0, \lambda^+ = 4$, et on a

$$f_{MP}(x) = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(4-x)x} \mathbf{1}_{0 \leq x \leq 4},$$

qui est la densité de la distribution de la loi du demi-cercle avec l'application $x \rightarrow x^2$

2.3 Résultats sur la convergence des valeurs propres extrémales

Concernant le comportement asymptotique du spectre d'une matrice de covariance aléatoire, de nombreuses questions ont été posées, parmi eux le comportement des valeurs propres extrémales.

Théorème 2.3.1. Pour $i = 1, 2, \dots, N$, et $j = 1, 2, \dots, n$, $X_{i,j}$ sont des variables aléatoires i.i.d de moyenne nulle et de variance unitaire, on définit

pour $X = (X_{i,j})$ la matrice,

$$C_n = \frac{1}{n} X X^\top.$$

Si $\mathbb{E}((X_{11})^4) < \infty$, comme $n \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$ et $\frac{N}{n} \rightarrow c \in (0, 1)$, l'inégalité suivante est vraie presque sûrement.

$$-2\sqrt{c}\sigma^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\mathbf{C}_n - \sigma^2(1+c)\mathbf{I}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\max}(\mathbf{C}_n - \sigma^2(1+c)\mathbf{I}) \leq 2\sqrt{c}\sigma^2,$$

où \mathbf{I} est la matrice identité et λ désigne les valeurs propres de C_n .

Un résultat immédiat basé sur ce théorème, est le suivant.

Théorème 2.3.2. *Sous les mêmes hypothèses du théorème 2.3.1, quand $n \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$ et $\frac{N}{n} \rightarrow c \in (0, 1)$, les égalités suivantes sont presque sûres :*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(C_n) &= \sigma^2(1 - \sqrt{c})^2. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\max}(C_n) &= \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2. \end{aligned}$$

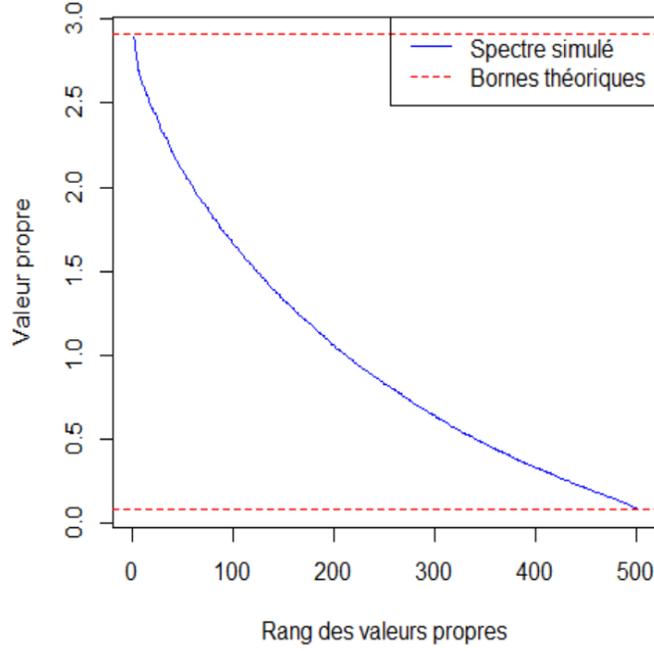


Figure 2.3 : Spectre de matrice de covariance à entrées gaussienne centrées et de variance 1.

Pour établir la preuve du théorème 2.3.1 et donc de son résultat immédiat énoncé au théorème 2.3.2, on introduit des lemmes intermédiaires qui sont nécessaires.

L'idée clé de la démonstration est d'estimer la norme spectrale de la matrice puissance $(\mathbf{C}_n - \sigma^2(1+c)\mathbf{I})^\ell$.

Dans la première étape, nous décomposons la matrice puissance en plusieurs matrices, parmi lesquelles la matrice la plus significative est celle appelée $\mathbf{T}_n(\ell)$ définie ci-dessous. Le lemme 2.3.1 est consacré à l'estimation de la norme de $\mathbf{T}_n(\ell)$. Le but des lemmes suivants est d'estimer la norme de $(\mathbf{C}_n - \sigma^2(1+c)\mathbf{I})^\ell$ en utilisant l'estimateur de $\mathbf{T}_n(\ell)$.

Sous les hypothèses du théorème 2.3.1, on a

Lemme 2.3.1. [2]

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{T}_n(\ell)\| \leq (2\ell + 1)(\ell + 1)c^{(\ell-1)/2}\sigma^{2\ell} \quad ,$$

où

$$\mathbf{T}_n(\ell) = n^{-\ell} \left(\sum' X_{av_1} \bar{X}_{u_1 v_1} X_{u_1 v_2} \bar{X}_{u_2 v_2} \cdots X_{u_{\ell-1} v_{\ell-1}} \bar{X}_{bv_{\ell}} \right),$$

la sommation \sum' est définie pour $v_1, \dots, v_{\ell} = 1, 2, \dots, n$, et $u_1, \dots, u_{\ell-1}, a, b = 1, 2, \dots, N$ soumise à la restriction

$$a \neq u_1, u_1 \neq u_2, \dots, u_{\ell-1} \neq b \quad \text{et} \quad v_1 \neq v_2, v_2 \neq v_3, \dots, v_{\ell-1} \neq v_{\ell}.$$

Lemme 2.3.2. [2]

On définit $\mathbf{Y}_n^{(2f+1)} = \left(n^{-f-1/2} |X_{ij}|^{2f} X_{ij} \right)$ et $\mathbf{Y}_n^{(2f+2)} = \left(n^{-f-1} |X_{ij}|^{2f+2} \right)$, $f = 0, 1, 2, \dots$, Alors

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{Y}_n^{(1)}\| &\leq \sqrt{7}\sigma. \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{Y}_n^{(2)}\| &\leq \sqrt{\mathbf{E} |X_{11}|^4}. \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{Y}_n^{(f)}\| &= 0, \text{ pour tous } f > 2. \end{aligned}$$

Lemme 2.3.3. [2]

$$\mathbf{T}_n \mathbf{T}_n(k) = \mathbf{T}_n(k+1) + c\sigma^2 \mathbf{T}_n(k) + c\sigma^4 \mathbf{T}_n(k-1) + o(1).$$

Le lemme suivant est démontré à l'aide des lemmes 2.2.2 et 2.2.3.

Lemme 2.3.4. [2]

$$\left(\mathbf{T}_n - c\sigma^2 \mathbf{I} \right)^k = \sum_{r=0}^k (-1)^{r+1} \sigma^{2(k-r)} \mathbf{T}(r) \sum_{i=0}^{[(k-r)/2]} C_i(k, r) c^{k-r-i} + o(1),$$

où les constantes : $|C_i(k, r)| \leq 2^k$.

Lemme 2.3.5. [2]

Soit $(X_{ij}, i, j = 1, 2, \dots)$ des variables aléatoires iid complexe, et soient les constantes $\alpha > \frac{1}{2}, \beta \geq 0$ et $M > 0$, quand $n \rightarrow \infty$, on a :

$$\max_{j \leq Mn^\beta} \left| n^{-\alpha} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \gamma) \right| \rightarrow 0.$$

Si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

$$(i) \mathbb{E} |X_{11}|^{(1+\beta)/\alpha} < \infty,$$

$$(ii) \gamma = \begin{cases} \mathbb{E}(X_{11}) & \text{si } \alpha \leq 1. \\ n'importe\ quel\ nombre & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

De plus, si $\mathbb{E} |X_{11}|^{(1+\beta)/\alpha} = \infty$, alors :

$$\limsup \max_{j \leq Mn^\beta} \left| n^{-\alpha} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \gamma) \right| = \infty.$$

Preuve théorème 2.3.1

Sans perte de généralité, nous supposons que $\sigma^2 = 1$, nous avons par le lemme 2.3.5 :

$$\|\mathbf{C}_n - \mathbf{I} - \mathbf{T}_n\| \leq \max_{i \leq N} \left| \sum_{j=1}^n (|X_{ij}|^2 - 1) \right| \rightarrow 0.$$

Par conséquent, on a

$$\|\mathbf{C}_n - (1+c)\mathbf{I}\| = \|\mathbf{C}_n - \mathbf{I} - c\mathbf{I}\|, = \|\mathbf{C}_n - \mathbf{I} - \mathbf{T}_n + \mathbf{T}_n - c\mathbf{I}\|, \leq \|\mathbf{C}_n - \mathbf{I} - \mathbf{T}_n\| + \|\mathbf{T}_n - c\mathbf{I}\|.$$

Pour n assez grand, on a

$$\|\mathbf{C}_n - (1+c)\mathbf{I}\| \leq \|\mathbf{T}_n - c\mathbf{I}\|,$$

donc pour prouver le théorème 2.3.1, il suffit de montrer que :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{T}_n - c\mathbf{I}\| \leq 2\sqrt{c}.$$

D'après les lemmes 2.3.4 et 2.3.1, pour tout k fixé, on a :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{T}_n - c\mathbf{I}\|^k = \left\| \sum_{r=0}^k (-1)^{r+1} \sigma^{2(k-r)} \mathbf{T}(r) \sum_{i=0}^{\lfloor (k-r)/2 \rfloor} C_i(k, r) c^{k-r-i} + o(1) \right\|,$$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{T}_n - c\mathbf{I}\|^k &\leq \sum_{r=0}^k \left\| (-1)^{r+1} \sigma^{2(k-r)} \mathbf{T}_n(r) \right\| \sum_{i=0}^{\lfloor (k-r)/2 \rfloor} \|C_i(k, r) c^{k-r-i}\| \\ &\leq \|\mathbf{T}_n(l)\| 2^k c^{(k-l)/2} \\ &\leq C 2^k c^{(k-1)/2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{T}_n - c\mathbf{I}\|^k \leq C 2^k c^{(k-1)/2}.$$

Alors,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{T}_n - c\mathbf{I}\| \leq C^{1/k} 2 c^{(k-1)/(2k)},$$

quand $k \rightarrow \infty$, ça termine la preuve du théorème 2.3.1.

Preuve théorème 2.3.2 :

D'après le théorème 2.1.1, avec une probabilité 1, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\mathbf{C}_n) \leq \sigma^2(1 - \sqrt{c})^2 \quad (1)$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\max}(\mathbf{C}_n) \geq \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2 \quad (2)$$

Et d'après le théorème 2.3.1, on a

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\max}(\mathbf{C}_n) &= \sigma^2(1 + c) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\max}(\mathbf{C}_n - \sigma^2(1 + c)\mathbf{I}) \\ &\leq \sigma^2(1 + c) + 2\sigma^2\sqrt{c} = \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2, \end{aligned} \quad (3)$$

et

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\mathbf{C}_n) &= \sigma^2(1 + c) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\mathbf{C}_n - \sigma^2(1 + c)\mathbf{I}) \\ &\geq \sigma^2(1 + c) - 2\sigma^2\sqrt{c} = \sigma^2(1 - \sqrt{c})^2. \end{aligned} \quad (4)$$

De (1) et (4), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\mathbf{C}_n) = \sigma^2(1 - \sqrt{c})^2.$$

De même de (2) et (3), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\max}(\mathbf{C}_n) = \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2.$$

Chapitre 3

Loi de Tracy-Widom

3.1 Généralités

La loi de Tracy-Widom notée TW est une distribution de probabilité importante dans la théorie des matrices aléatoires. Elle est utilisée pour décrire le comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe de matrices aléatoires, notamment les matrices de covariance empiriques et les matrices de Wigner.

Des formules récursives donnant la distribution exacte de la plus grande valeur propre ont été décrites pour les ensembles gaussiens et pour les matrices de covariance de dimension finie. Il a été également constaté que la loi de Tracy-Widom peut être approchée par une distribution gamma, avec une grande précision pour les valeurs d'intérêt dans les applications statistiques.

3.1.1 Ensembles gaussiens

les ensembles gaussiens sont des modèles des matrices aléatoires qui représentent des collections infinies de variables aléatoires gaussiennes où chaque sous-ensemble fini suit une distribution gaussienne. Il existe trois ensembles gaussiens classiques.

- **Ensemble orthogonal gaussien (GOE, $\beta = 1$)**

Il est défini par une matrice aléatoire symétrique réelle de taille $(N \times N)$, dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une distribution gaussienne centrée et de variance

$\frac{1}{\sqrt{N}}$. La symétrie de la matrice exige que ses éléments soient les mêmes pour les positions (i, j) et (j, i) .

• **Ensemble unitaire gaussien (GUE, $\beta = 2$) :**

Il s'agit d'un ensemble de matrices aléatoire de taille $(N \times N)$, où les éléments de la matrice sont des variables aléatoires gaussiennes complexes, caractérisés par une moyenne nulle et une variance égale à $1/N$.

• **Ensemble symplectique gaussien (GSE, $\beta = 4$) :**

Cet ensemble est caractérisé par des matrices S à coefficients complexes, de taille $(2N \times 2N)$, vérifiant $S^* Z S = Z$, où $Z = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité.

3.1.2 Equation différentielle : Painlevé II et fonction d'Airy

Les équations classiques de Painlevé sont de plus en plus impliquées dans de nombreux domaines de la physique mathématique moderne et de l'analyse.

Définition 3.1.1. *L'équation de Painlevé II est définie par la formule suivante*

$$\frac{d^2 q}{dx^2} = xq + 2q^3,$$

où q est l'unique solution de l'équation de Painlevé II, satisfaisant la condition aux limites :

$$q(x) \sim \text{Ai}(x) \text{ quand } x \rightarrow \infty.$$

où $\text{Ai}(x)$ désigne la fonction Airy, définie comme suite

Définition 3.1.2. *La fonction d'Airy est définie en tout x réel par la formule*

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt,$$

qui forme une intégrale semi-convergente. La fonction d'Airy Ai est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux, connue sous le nom d'équation d'Airy :

$$y'' - xy = 0.$$

avec les conditions initiales :

$$\text{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, \quad \text{Ai}'(0) = -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler.

3.1.3 La distribution de Tracy-Widom

La distribution de Tracy-Widom est une distribution de probabilité issue de la théorie des matrices aléatoires introduite par Craig Tracy et Harold Widom (1993 , 1994). C'est la distribution de la plus grande valeur propre normalisée d'une matrice aléatoire.

La distributions de la plus grande valeur propre

La fonction de distribution cumulative de Tracy–Widom notée F_β , peut être définie comme la loi des grands nombres du théorème central limite quand $N \rightarrow \infty$, pour obtenir des limites non triviales, il faut centrer et normaliser les variables aléatoires.

Il existe trois distributions Tracy–Widom, F_β , avec $\beta \in \{1, 2, 4\}$. Elles correspondent aux trois ensembles gaussiens : orthogonaux (GOE, $\beta = 1$), unitaires (GUE, $\beta = 2$), symplectiques (GSE, $\beta = 4$), donc

$$F_{N,\beta}(t) := \mathbb{P}_{\beta,N}(\lambda_{\max} < t), \beta = 1, 2, 4,$$

désigne la fonction de répartition de la plus grande valeur propre, et

$$F_\beta(x) := \lim_{N \rightarrow \infty} F_{N,\beta} \left(2\sigma\sqrt{N} + \frac{\sigma x}{N^{1/6}} \right), \beta = 1, 2, 4,$$

existent et elles sont données explicitement par, (voir [11])

$$F_2(x) = \exp \left(- \int_x^\infty (y-x)q^2(y)dy \right), \quad (3.1)$$

où q est l'unique solution de l'équation de Painlevé II.

Les distributions orthogonales et symplectiques sont

$$F_1(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_x^\infty q(y)dy\right) (F_2(x))^{1/2}, \quad (3.2)$$

$$F_4(x/\sqrt{2}) = \cosh\left(\frac{1}{2} \int_x^\infty q(y)dy\right) (F_2(x))^{1/2}. \quad (3.3)$$

Les graphiques des densités $f := dF/dx$ sont représentés dans la Figure 3.1

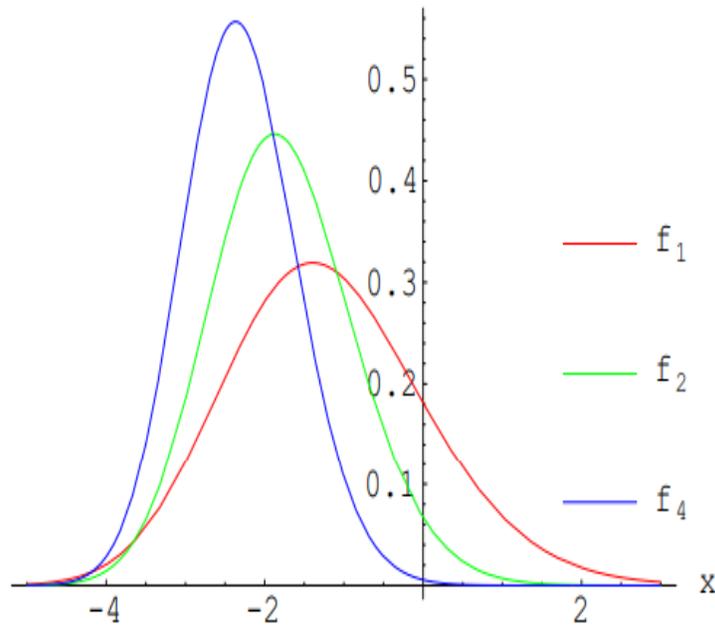


Figure 3.1 : Densités de la plus grande de valeur propre $f(x) = dF/dx$, $\beta = 1, 2, 4$ avec F définies dans (3.1), (3.2) et (3.4).

Pour énoncer des résultats sur la loi de Tracy–Widom, on introduit

$$F(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_x^\infty (y-x)q(y)^2 dy\right),$$

$$E(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_x^\infty q(y)dy\right),$$

de sorte que

$$F_1(x) = E(x)F(x), \quad F_2(x) = F(x)^2, \quad \text{et} \quad F_4(x/\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \left(E(x) + \frac{1}{E(x)} \right) F(x).$$

Alors quand $x \rightarrow +\infty$,

$$F(x) = 1 - \frac{e^{-\frac{4}{3}x^{3/2}}}{32\pi x^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \right),$$

$$E(x) = 1 - \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{4\sqrt{\pi}x^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \right).$$

3.2 Résultat sur la loi de Tracy-Widom

3.2.1 Cas de la matrice de Wigner

Les matrices de Wigner sont des modèles des matrices aléatoires complexes hermitiennes ou réelles symétriques ($N \times N$).

$$W = \frac{1}{\sqrt{N}} (X_{ij}),$$

où X_{ij} , $1 \leq i < j \leq N$, sont des variables aléatoires iid et les X_{ii} sont indépendant des X_{ij} . Le théorème de Wigner établit que la plus grande des valeurs propres (à une renormalisation près) converge presque-sûrement vers 2 pour les matrices vérifiant les hypothèses du théorème.

La loi de la plus grande valeur propre peut être approchée de manière beaucoup plus précise, grâce à la loi de Tracy-Widom.

Cas W matrice complexe (GUE, $\beta = 2$)

Soit W matrice de Wigner gaussienne hermitienne de taille ($N \times N$), avec des éléments diagonaux $X_{jj} \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 2)$, et les parties réelle et imaginaire des entrées hors diagonale $X_{ij}, i < j, \stackrel{iid}{\sim} N(0, \frac{1}{2})$. Tracy et Widom (1994) ont montré que la plus grande valeur propre de W a la distribution limite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sqrt{2}n^{1/6} \left(\lambda_{max} - \sqrt{2n} \right) \leq t \right\} = F_2(t),$$

où F_2 est la loi de Tracy-Widom d'ordre 2 avec la fonction de distribution,

$$F_2(t) = \exp \left\{ - \int_t^\infty (x-t)[q(x)]^2 dx \right\}.$$

Cas W matrice réelle (GOE, $\beta = 1$)

Soit W une matrice de Wigner gaussienne réelle, Tracy et Widom (1996) ont établi la distribution asymptotique de la plus grande valeur propre pour le cas (GOE)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sqrt{2}n^{1/6} \left(\widehat{\lambda}_1 - \sqrt{2n+1} \right) \leq t \right\} = F_1(t),$$

où

$$[F_1(t)]^2 = F_2(t) \cdot \exp \left\{ - \int_t^\infty q(x) dx \right\}.$$

Théorème 3.2.1. [3]

Il existe des constantes $z_N^{(\beta)}$ et $s_N^{(\beta)}$ tel que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\beta, V, N} \left(\frac{\lambda_{\max} - z_N^{(\beta)}}{s_N^{(\beta)}} \leq t \right) = F_\beta(t), \beta = 1, 2, 4,$$

où les F_β sont données par (3.1), (3.2), et (3.3), avec V polynôme de degré pair et de coefficient directeur positif.

3.2.2 Cas de la matrice de covariance

Soit X une matrice ($N \times n$), de composantes i.i.d complexes de moyenne 0 et de covariance σ_n . [7] et [4] ont montré que pour une grande classe de matrices de covariance, la plus grande valeur propre de X^*X est asymptotiquement distribué comme la distribution Tracy-Widom qui apparaît dans l'étude de l'ensemble unitaire gaussien. Les valeurs propres de X^*X seront notées $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, on a

$$\text{Si } N \text{ et } n \rightarrow \infty, \quad \frac{\lambda_1(X^*X) - \mu_{N,n}}{\sigma_{N,n}} \Rightarrow \text{TW}, \quad (3.4)$$

où $\mu_{N,n}$ et $\sigma_{N,n}$, sont des suites explicites.

Théorème 3.2.2. [7]

Considérons les matrices de covariance complexes C_n . Soit λ_1 la plus grande valeur propre de C_n et soit λ_n la plus petite. Soit H_n la distribution spectrale de C_n . Soit a l'unique solution dans $[0, 1/\lambda_1(\sigma_n)]$ de l'équation

$$\int \left(\frac{\lambda a}{1 - \lambda a} \right)^2 dH_n(\lambda) = \frac{N}{n}.$$

On suppose que $N/n \geq 1$ est uniformément borné, $\limsup \lambda_1 < \infty$, $\liminf \lambda_n > 0$ et $\limsup \lambda_1 a < 1$. Nous appelons

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{n}{N} \int \frac{\lambda a}{1 - \lambda a} dH_n(\lambda) \right), \\ \sigma^3 &= \frac{1}{a^3} \left(1 + \frac{n}{N} \int \left(\frac{\lambda a}{1 - \lambda a} \right)^3 dH_n(\lambda) \right). \end{aligned}$$

Alors on a, quand $N \rightarrow \infty$,

$$\frac{\lambda_1 - N\mu}{\sigma N^{1/3}} \implies \text{TW}_2.$$

3.3 Approximation de la distribution Tracy-Widom

La distribution Tracy-Widom peut être approchée avec précision par une distribution gamma mise à l'échelle et décalée

$$TW \simeq g - \alpha,$$

où α est une constante, et $g \sim \Gamma(k, \theta)$ désigne une variable aléatoire gamma, de paramètre de forme k et de paramètre d'échelle θ . Ainsi la fonction de distribution cumulative (CDF) et la fonction de densités de TW_β sont approchées par :

$$\begin{aligned} F_\beta(x) &\simeq \frac{1}{\Gamma(k)} \gamma \left(k, \frac{x + \alpha}{\theta} \right) \quad x > -\alpha, \\ f_\beta(x) &\simeq \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} (x + \alpha)^{k-1} e^{-\frac{x+\alpha}{\theta}} \quad x > -\alpha, \end{aligned}$$

avec $\gamma(a, b) = \int_0^b t^{a-1} e^{-t} dt$.

Nous rappelons que pour la variable aléatoire gamma la moyenne est $\mathbb{E}\{g\} = k\theta$, la variance est $\text{var}\{g\} = k\theta^2$ et l'asymétrie est $S\{g\} = \frac{2}{\sqrt{k}}$. Si $\mu_\beta, \sigma_\beta^2, S_\beta$ sont la moyenne, la variance et l'asymétrie de Tracy-Widom, la mise en correspondance des trois premiers moments donne,

$$\begin{aligned} k &= \frac{4}{S_\beta^2}, \\ \theta &= \sigma_\beta \frac{S_\beta}{2}, \\ \alpha &= k\theta - \mu_\beta. \end{aligned}$$

3.3.1 Approximation de la fonction de distribution cumulative

En remplaçant l'approximation gamma dans (3.4) nous avons, pour les matrices de covariance avec N et $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\lambda_1 - \mu_{Nn}}{\sigma_{Nn}} + \alpha \stackrel{D}{\approx} \Gamma[k, \theta],$$

où μ_{Nn}, σ_{Nn} sont,

$$\begin{aligned} \mu_{Nn} &= \left(\sqrt{N + a_1} + \sqrt{n + a_2} \right)^2, \\ \sigma_{Nn} &= \sqrt{\mu_{Nn}} \left(\frac{1}{\sqrt{N + a_1}} + \frac{1}{\sqrt{n + a_2}} \right)^{1/3}, \end{aligned}$$

telle que les paramètres a_1, a_2 sont $a_1 = a_2 = -1/2$ pour $(\beta = 1)$ ([8],[6]) et $a_1 = a_2 = 0$ pour $(\beta = 2)$ [5].

De même dans [10], l'approximation basée sur la distribution Tracy-Widom pour GOE et GUE est

$$\frac{\lambda_1 - \mu'_N}{\sigma'_N} \stackrel{D}{\rightarrow} \text{TW}_\beta,$$

avec $\mu'_N = 2\sigma_0\sqrt{N - a_1}$ et $\sigma'_N = \sigma_0(N - a_2)^{-1/6}$, où $\sigma_0^2 = 1/2$ est la variance des éléments hors diagonale dans les ensembles de normalisation.

Dans l'expression précédente $\beta = 1$ et $\beta = 2$ pour le GOE, $a_1 = 1/2 + 1/10(N - 1/2)^{-1/3}, a_2 = 0$, et pour le GUE, $a_1 = a_2 = 0$, respectivement.

Ainsi, pour N assez grand, on a pour GOE et GUE la nouvelle expression,

$$\frac{\lambda_1 - \mu'_N}{\sigma'_N} + \alpha \stackrel{D}{\approx} \Gamma[k, \theta].$$

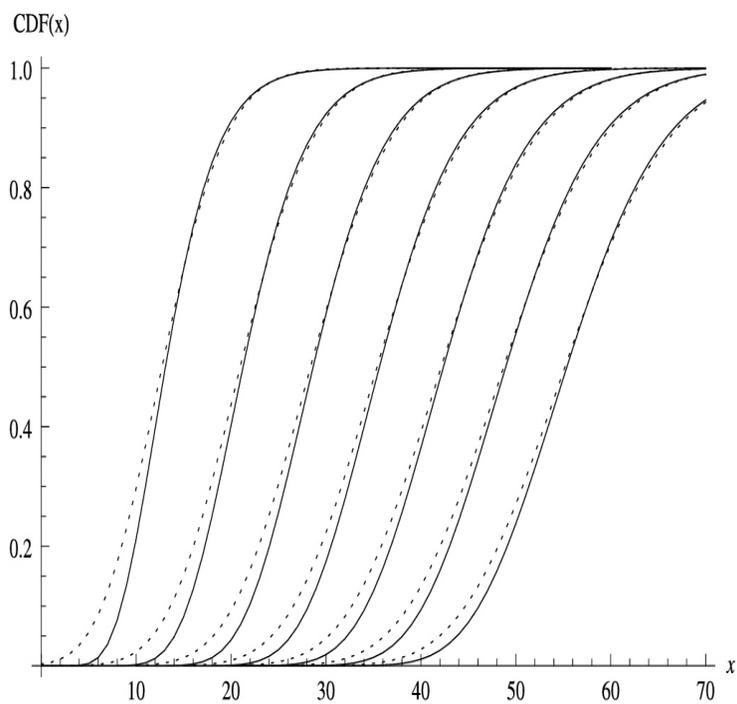


Figure 3.2 : CDF de la plus grande valeur propre de matrice de covariance réelle, $N = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$.

Annexe

Scripte des figures insérées dans le mémoire

Dans cette partie on présente les codes pour la réalisation des figures par le logiciel R.

Code figure 1.1

```
# Fonction de densité de la loi du demi-cercle
demi_cercle <- function(x, r)
{ ifelse(x >= -r & x <= r, sqrt(r^2 - x^2) / (2 * pi * r^2), 0)
}
# Conversion de la fonction en fonction vectorielle
vectorized_demi_cercle <- Vectorize(demi_cercle, "x")
# Tracé des courbes avec différents rayons
curve(vectorized_demi_cercle(x, 1), from = -4, to = 4, col = "blue", xlab = "x", ylab = "Densité", main = "Loi du demi-cercle (rayons 1, 2 et 3)")
curve(vectorized_demi_cercle(x, 2), from = -3, to = 3, col = "green", add = TRUE)
curve(vectorized_demi_cercle(x, 3), from = -3, to = 3, col = "red", add = TRUE)
# Légende legend("topright", legend = c("r = 1", "r = 2", "r = 3"), col = c("blue", "green", "red"), lty = 1)
```

Code figure 1.2

```
# Distribution des valeurs propres de matrice de Wigner
library("MASS")
# Définir la taille de la matrice
```

```

n <- 500
# Générer une matrice avec des entrées N(0,1) indépendantes et identique-
ment distribuées
H <- matrix(rnorm(n^2,0,1),n,n)
# Produire une matrice de Wigner standard
H <- (H+t(H))/2/sqrt(n)sqrt(2)
# Calculer les valeurs propres
H.eigen <- eigen(H)
H.evals <- H.eigen$values
# Produire le graphique hist(H.evals,breaks=100,prob=T, xlab="Valeurs
propres ordonnées", main="Convergence des valeurs propres de la matrice
de Wigner vers la loi semi-circulaire" )

```

Code figure 2.1

```

# Loi de Marchenko-pastur
# Paramètres
y <- 2
A <- 0.17
B <- 5.83
L <- 100
# Génération des valeurs pour x
x <- seq(A, B, length = L)
# Calcul des différentes parties de l'équation
a <- (B - x)
e <- (x - A)
b <- (a * e)^(1/2)
c <- -2 * pi * x
f <- b / c
# Tracé de la courbe plot(x, f, type = "l", ylab = "f", col = "blue")
abline(h = 0, col = "red")
# Ajout du titre et du sous-titre
title(sub = "Figure 2 - Densité de la loi de Marchenko-Pastur avec y = 2",
cex.sub = 1, font.sub = 1, col.sub = 1)

```

Code figure 2.2

```
# Distribution des valeurs propres de la matrice de covariance
# Paramètres
n <- 1000 # Nombre de lignes dans la matrice
p <- 500 # Nombre de colonnes dans la matrice
sigma <- 1 # Variance des éléments de la matrice
# Génération de la matrice aléatoire
X <- matrix(rnorm(n * p, 0, sqrt(sigma)), n, p)
# Calcul de la matrice de covariance empirique
C <- cov(X)
# Calcul des valeurs propres de la matrice de covariance empirique
eigenvalues <- eigen(C, symmetric = TRUE)$values
# Tracé de l'histogramme des valeurs propres
hist(eigenvalues, breaks = "FD", col = "blue", border = "white", xlab = "Valeur propre", ylab = "Fréquence", main = "Distribution des valeurs propres Loi de Marchenko-Pastur")
```

Code figure 2.3

```
# Spectre de matrice de covariance # Paramètres
n <- 1000 # Nombre de lignes dans la matrice
p <- 500 # Nombre de colonnes dans la matrice
sigma <- 1 # Variance des éléments de la matrice
# Génération de la matrice aléatoire
X <- matrix(rnorm(n * p, 0, sqrt(sigma)), n, p)
# Calcul de la matrice de covariance empirique
C <- cov(X)
# Calcul des valeurs propres de la matrice de covariance empirique
eigenvalues <- eigen(C, symmetric = TRUE)$ values
# Tracé du spectre des valeurs propres
plot(sort(eigenvalues, decreasing = TRUE), type = "l", col = "blue", xlab = "Rang des valeurs propres", ylab = "Valeur propre", main = "Simulation du spectre des valeurs propres Loi de Marcenko-Pastur")
# Tracé des bornes théoriques
alpha <- p/n # Ratio des dimensions
a <- sigma * (1 - sqrt(alpha))2 # Borne inférieure
b <- sigma * (1 + sqrt(alpha))2
```

```
a <- -sigma * (1 - sqrt(alpha))2
#Borne inférieure Borne supérieure
abline(h = c(a, b), col = "red", lty = 2)
# Ajout d'une légende
legend("topright", legend = c("Spectre simulé", "Bornes théoriques"),col =
c("blue", "red"), lty = c(1, 2))
```

Conclusion

Les grandes matrices aléatoires font partie des outils mathématiques les plus utilisés elles sont largement présentes dans le calcul, les équations différentielles, les mathématiques discrètes, les méthodes numériques et les statistiques, et bien sûr, elles sont l'une des pierres angulaires de l'algèbre.

Dans ce mémoire on s'est intéressé aux matrices de Wigner et aux matrices de covariance empiriques. L'une des principales questions qui se pose à leur sujet est celle de la convergence de la distribution spectrale et des valeurs propres extrémales qui correspondent à plus grande et à la plus petite valeur propre d'une matrice.

Dans le cas des matrices de Wigner, qui sont des matrices aléatoires symétriques dont les éléments sont généralement choisis de manière indépendante et identiquement distribuée, la théorie des ensembles aléatoires prévoient que les valeurs propres sont distribuées uniformément sur un certain intervalle. Cependant, lorsque la taille de la matrice devient très grande, il a été démontré que les valeurs propres extrémales convergent vers des distributions spécifiques, telles que la distribution de Tracy-Widom. Cette convergence est un résultat profond de la théorie des matrices aléatoires. En ce qui concerne les matrices de covariance, qui sont utilisées pour analyser les relations statistiques entre les variables aléatoires, leur comportement en termes de convergence des valeurs propres dépend des propriétés du processus stochastique sous-jacent.

En conclusion, les grandes matrices aléatoires, telles que les matrices de Wigner et les matrices de covariance, présentent des comportements intéressants en termes de spectre et de convergence des valeurs propres extrémales, leur étude a permis de mettre en évidence des résultats importants dans la théorie de ces matrices.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] Zhi-Dong Bai and Yong-Qua Yin. Necessary and sufficient conditions for almost sure convergence of the largest eigenvalue of a wigner matrix. *The Annals of Probability*, pages 1729–1741, 1988.
- [2] Zhidong Bai and Jack W Silverstein. *Spectral analysis of large dimensional random matrices*, volume 20. Springer, 2010.
- [3] Percy Deift and Dimitri Gioev. Universality at the edge of the spectrum for unitary, orthogonal, and symplectic ensembles of random matrices. *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 60(6) :867–910, 2007.
- [4] Kurt Johansson. Shape fluctuations and random matrices. *Communications in mathematical physics*, 209 :437–476, 2000.
- [5] Iain M Johnstone. On the distribution of the largest eigenvalue in principal components analysis. *The Annals of statistics*, 29(2) :295–327, 2001.
- [6] Iain M Johnstone. High dimensional statistical inference and random matrices. *arXiv preprint math/0611589*, 2006.
- [7] Noureddine El Karoui. On the largest eigenvalue of wishart matrices with identity covariance when n , p and p/n tend to infinity. *arXiv preprint math/0309355*, 2003.
- [8] Zongming Ma. Accuracy of the tracy–widom limits for the extreme eigenvalues in white wishart matrices. 2012.
- [9] Vladimir Alexandrovich Marchenko and Leonid Andreevich Pastur. Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Matematicheskii Sbornik*, 114(4) :507–536, 1967.
- [10] Craig A Tracy and Harold Widom. Level-spacing distributions and the airy kernel. *Communications in Mathematical Physics*, 159 :151–174, 1994.

- [11] Craig A Tracy and Harold Widom. On orthogonal and symplectic matrix ensembles. *Communications in Mathematical Physics*, 177 :727–754, 1996.
- [12] Eugene P Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *Annals of Mathematics*, pages 325–327, 1958.