

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

---

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## MÉMOIRE DE MASTER

Option : Biomathématiques et Modélisation  
Présenté par

M<sup>elle</sup> KHATIR CHEMS EL DOUHA

Soutenu le : 26 Juin 2023

---

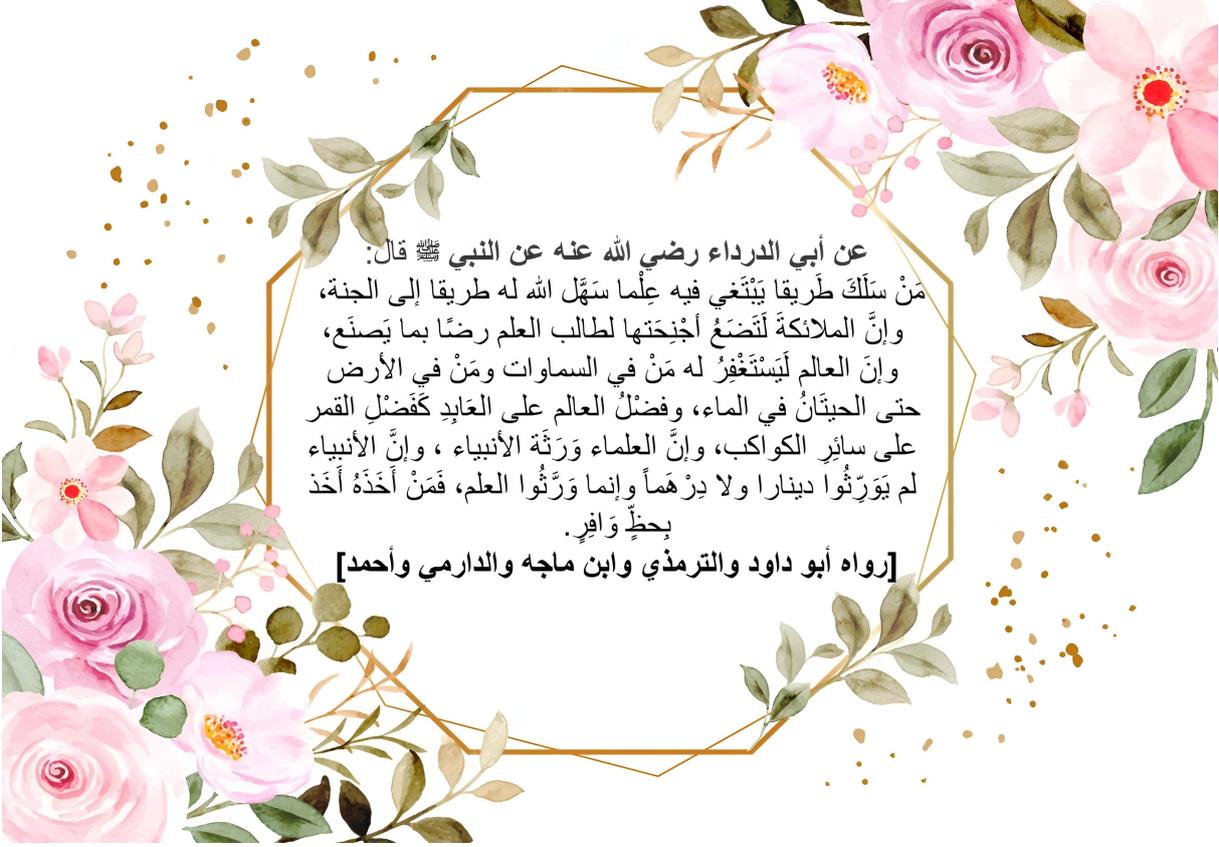
# Impact de la réserve sur la dynamique d'un système proie-prédateur induit par un retard

---

Soutenu devant le jury composé de :

|                       |            |                        |              |
|-----------------------|------------|------------------------|--------------|
| M. YADI KARIM         | Professeur | Université de Tlemccen | Président    |
| Mme. BENZERDJEB SARRA | MCB        | Université de Tlemccen | Examinatrice |
| M. MOULAI-KHATIR ANES | MCB        | Université d'Oran 2    | Encadrant    |

**Année Universitaire : 2022-2023**



عن أبي الدرداء رضي الله عنه عن النبي ﷺ قال:  
مَنْ سَلَكَ طَرِيقًا يَبْتَغِي فِيهِ عِلْمًا سَهَّلَ اللَّهُ لَهُ طَرِيقًا إِلَى الْجَنَّةِ،  
وَإِنَّ الْمَلَائِكَةَ لَتَضَعُ أَجْنِحَتَهَا لَطَالِبِ الْعِلْمِ رِضًا بِمَا يَصْنَعُ،  
وَإِنَّ الْعَالَمَ لَيَسْتَعْفِرُ لَهُ مَنْ فِي السَّمَاوَاتِ وَمَنْ فِي الْأَرْضِ  
حَتَّى الْحَيَّاتِ فِي الْمَاءِ، وَفَضَّلُ الْعَالَمِ عَلَى الْعَابِدِ كَفَضْلِ الْقَمَرِ  
عَلَى سَائِرِ الْكَوَاكِبِ، وَإِنَّ الْعُلَمَاءَ وَرَثَةُ الْأَنْبِيَاءِ ، وَإِنَّ الْأَنْبِيَاءَ  
لَمْ يَوَرِّثُوا دِينَارًا وَلَا دِرْهَمًا وَإِنَّمَا وَرَّثُوا الْعِلْمَ، فَمَنْ أَخَذَهُ أَخَذَ  
بِحِطِّ وَافِرٍ.

[رواه أبو داود والترمذي وابن ماجه والدارمي وأحمد]



*Je dédie ce travail*

*À mes chers parents bien-aimés, dont le plus grand souhait était toujours de me voir réussir, je tiens à leur faire savoir que leur importance dans mon cœur et dans mes pensées restera à jamais immense*

*À mes chers grands-parents bien-aimés, dont leur bénédiction m'a toujours accompagnée*

*À mon cher frère et ma chère sœur, je suis chanceuse d'avoir des personnes exceptionnelles comme vous*

*À tous ceux qui m'ont enseigné, votre bienveillance restera gravée dans ma mémoire*

*De plus, je dédie ce travail à tous ceux qui ont choisi le chemin des mathématiques, votre passion et votre dévouement à cette discipline sont une source d'inspiration; ce travail humblement réalisé est dédié pour vous, et j'espère qu'il pourra vous être utile dans votre parcours*

*Chems El Douha*



## REMERCIEMENTS

### **Au nom d'Allah le clément le miséricordieux**

**J**E prie Allah Dieu tout-puissant pour m'avoir accordé le courage et la force, nécessaires pour mener à bien ce mémoire, qui m'a ouvert les portes du savoir.

Je suis ravie de pouvoir exprimer ma gratitude envers les individus qui ont été à mes côtés tout au long de mon parcours scientifique.

En premier lieu, je tiens à exprimer ma sincère gratitude envers Monsieur MOULAI-KHATIR Anes pour son encadrement tout au long de ce mémoire. Sa présence précieuse, son assistance et sa disponibilité, ainsi que l'intérêt qu'il a manifesté envers ce modeste travail, sont des éléments que je souhaite souligner. Ses orientations et son enthousiasme à l'égard de mon travail ont été d'une valeur inestimable. Travailler avec lui a été un réel plaisir.

Je suis extrêmement reconnaissante envers tous ceux qui ont accepté de juger ce modeste travail, Monsieur K.YADI et Madame S.BENZERDJEB. Votre engagement et votre expertise ont été essentiels pour son évaluation. Merci du fond du cœur pour votre précieuse contribution et pour avoir consacré votre temps à ce projet.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes enseignants du Département de Mathématiques, et en particulier, l'équipe de la formation de master avec qui j'ai énormément appris.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mes parents. Leur amour inconditionnel, leur soutien indéfectible et leurs sacrifices ont été des piliers essentiels dans ma vie. Leur bienveillance, leurs encouragements et leurs précieux conseils m'ont guidée tout au long de mon parcours. Je suis reconnaissante pour leur présence constante, leur confiance en moi et leur soutien inébranlable. Leur dévouement et leurs efforts ont été inestimables, et je suis infiniment reconnaissante d'avoir été bénie par leur amour et leur soutien tout au long de ma vie.

Ma profonde gratitude va également à mes grands-parents pour leurs précieux conseils et dou'as. Je suis reconnaissante d'avoir la chance d'avoir des grands-parents aussi aimants.

Je tiens à remercier chaleureusement mon frère et ma sœur pour tout ce qu'ils ont fait pour moi. Leur soutien, leur présence et leur appui dans mon parcours me complètent.

## Résumé

Le mémoire présent examine l'impact de la réserve sur la dynamique d'un système proie-prédateur avec retard. En analysant le modèle sans retard, une évaluation de la stabilité de l'équilibre intérieur est réalisée, tout en identifiant les limites associées. Une politique fiscale optimale, basée sur le maximum de Pontryagin, est également proposée pour une gestion optimisée des ressources. Dans le cadre de l'étude du modèle avec retard, l'accent est mis sur la stabilité de l'équilibre intérieur et l'identification des conditions de bifurcation de Hopf. Cette recherche souligne l'importance de modéliser la dynamique de la pêche afin de comprendre ses impacts économiques, sociaux et environnementaux. Des simulations numériques viennent confirmer l'importance cruciale des réserves dans la conservation des écosystèmes marins. En somme, ce mémoire souligne la nécessité d'une gestion équilibrée prenant en compte la complexité des systèmes écologiques et socio-économiques impliqués dans la pêche pour assurer une durabilité à long terme.

**Mots clés :** système proie-prédateur, zone réservée, politique fiscale, retard discret, bifurcation de Hopf.

*"Celui qui ne connaît pas les mathématiques ne peut pas comprendre la nature."*



*Ibn Al-Haytham.*

### **Abstract**

This thesis examines the impact of reserves on the dynamics of a prey-predator system with delay. By analyzing the model without delay, an evaluation of the stability of the internal equilibrium is conducted, while identifying associated limitations. An optimal fiscal policy based on Pontryagin's maximum principle is also proposed for optimized resource management. In the study of the model with delay, the focus is on the stability of the internal equilibrium and identifying Hopf bifurcation conditions. This research highlights the importance of modeling fishing dynamics to understand its economic, social, and environmental impacts. Numerical simulations confirm the crucial significance of reserves in marine ecosystem conservation. In summary, this thesis emphasizes the need for balanced management that takes into account the complexity of ecological and socio-economic systems involved in fishing to ensure long-term sustainability.

**Keywords :** prey-predator system, reserved area, fiscal policy, discrete delay, Hopf bifurcation.

*"The one who does not know mathematics cannot understand nature."*

 *Ibn Al-Haytham.*

# TABLE DES MATIÈRES

|   |            |
|---|------------|
| <b>DÉDICACES</b>  | <b>i</b>   |
| <b>REMERCIEMENTS</b>  | <b>ii</b>  |
| <b>RÉSUMÉ</b>   | <b>i</b>   |
| <b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>  | <b>vii</b> |
| <b>1 DÉVELOPPEMENT DU MODÈLE</b>  | <b>1</b>   |
| 1.1 MODÈLES AVEC UNE SEULE POPULATION . . . . .   | 1          |
| 1.1.1 Modèle de Malthus . . . . .   | 1          |
| 1.1.2 Modèle de Verhulst . . . . .  | 2          |
| 1.2 MODÈLES AVEC DEUX POPULATIONS . . . . .   | 3          |
| 1.2.1 Modèle de Lotka-Volterra . . . . .  | 4          |
| 1.2.2 Réponse fonctionnelle de Lotka et Volterra . . . . .                                | 6          |
| 1.2.3 Réponse(s) fonctionnelle(s) de Holling . . . . .                                    | 6          |
| 1.2.4 Proportionnalité entre les réponses fonctionnelles et numériques . . . . .          | 7          |
| 1.2.5 Modèle de Lotka-Volterra avec réponse fonctionnelle de Holling de type II . . . . . | 8          |
| 1.2.6 Modèle de Lotka-Volterra avec croissance logistique des proies . . . . .            | 8          |
| 1.2.7 Modèle de Rosenzweig-MacArthur . . . . .  | 9          |
| 1.3 EFFORT DE PÊCHE . . . . .   | 10         |
| 1.4 DISPERSION DES PROIES . . . . .   | 11         |
| 1.4.1 Absence de migration entre proies . . . . .   | 12         |
| 1.4.2 Migration des proies . . . . .  | 12         |
| 1.5 FORMULATION DU MODÈLE COMPLET . . . . .   | 13         |
| 1.5.1 Absence du retard . . . . .   | 13         |
| 1.5.2 Introduction du retard . . . . .  | 14         |
| <b>2 DYNAMIQUE SANS RETARD</b>  | <b>16</b>  |
| 2.1 MODÈLE ET PROPRIÉTÉS DE BASES . . . . .   | 16         |
| 2.1.1 Bornitude des solutions . . . . .   | 16         |
| 2.2 DYNAMIQUE DU MODÈLE . . . . .   | 17         |
| 2.2.1 Point(s) d'équilibre . . . . .  | 17         |
| 2.2.2 Stabilité locale de l'équilibre $M^*$ . . . . .                                     | 19         |
| 2.2.3 Stabilité globale de l'équilibre $M^*$ . . . . .                                    | 20         |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.3      | INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE MIGRATIONS À L'ÉQUILIBRE . . . . .       | 22        |
| 2.4      | POLITIQUE FISCALE OPTIMALE . . . . .                                 | 24        |
| 2.5      | SIMULATION NUMÉRIQUE . . . . .                                       | 27        |
| 2.5.1    | Effet des paramètres de migration $\sigma_1$ et $\sigma_2$ . . . . . | 27        |
| 2.5.2    | Effet du paramètre de taxation $\sigma$ . . . . .                    | 29        |
| 2.5.3    | Effet du coefficient intra-spécifique $\gamma$ . . . . .             | 30        |
| <b>3</b> | <b>MODÈLE AVEC RETARD</b>  | <b>32</b> |
| 3.1      | STABILITÉ ET ANALYSE DE BIFURCATION . . . . .                        | 32        |
| 3.1.1    | Stabilité au point d'équilibre intérieur $M^*$ . . . . .             | 33        |
| 3.1.2    | Stabilité et direction de la bifurcation de Hopf . . . . .           | 35        |
| 3.2      | SIMULATION NUMÉRIQUE . . . . .                                       | 44        |
| 3.2.1    | Étude de la dynamique pour $\tau < \tau_0^*$ . . . . .               | 45        |
| 3.2.2    | Étude de la dynamique pour $\tau > \tau_0^*$ . . . . .               | 46        |
|          | <b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>   | <b>48</b> |
|          | <b>OUTILS MATHÉMATIQUES</b>  | <b>50</b> |
| 0.1      | CRITÈRE DE ROUTH-HURWITZ [10], [26] . . . . .                        | 50        |
| 0.2      | RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES [10] . . . . .                         | 51        |
| 0.3      | FONCTION DE LYAPUNOV [26] . . . . .                                  | 51        |
| 0.4      | THÉORIE DES BIFURCATIONS [26], [37] . . . . .                        | 52        |
| 0.4.1    | Types de Bifurcation [37] . . . . .                                  | 52        |
| 0.4.2    | Bifurcations de Hopf [26] . . . . .                                  | 52        |
| 0.5      | VARIÉTÉS INVARIANTES [29] . . . . .                                  | 53        |
|          | <b>BIBLIOGRAPHIE</b>   | <b>54</b> |

## TABLE DES FIGURES

|     |  |      |
|-----|--|------|
| 1   | Profil de l'activité de pêche en mer [38]. . . . .   | vii  |
| 2   | Exemple représentatif d'un poisson dans un écosystème marin [36]. . . . .  | viii |
| 3   | Exemple de prédation marine en action : des requins (prédateurs) chassant des poissons (proies) [35]. . . . .  | ix   |
| 1.1 | Modèle de croissance de Malthus. . . . .   | 2    |
| 1.2 | Modèle de croissance de Verhulst. . . . .  | 3    |
| 1.3 | Diagramme de l'interaction directe négative du prédateur $P$ sur sa proie principale $N$ . Les populations sont représentées par un cercle où Figure leur dénomination, et l'interaction directe est représentée par une flèche à trait plein. . . . . | 3    |
| 1.4 | Solutions typiques des équations du modèle de Lotka-Volterra. . . . .  | 5    |
| 1.5 | Deux réponses fonctionnelles du prédateur, en fonction de la densité des proies : Holling de type I (A), Holling de type II (B). . . . .   | 7    |
| 1.6 | Dispersion des proies $N$ en deux espèces non protégées et protégées. . . . .  | 12   |
| 2.1 | Illustration du revenu économique net pour la société. . . . .   | 24   |
| 2.2 | Variation temporelle des populations et de l'effort de pêche pour différentes valeurs de $\sigma_1$ . . . . .  | 28   |
| 2.3 | Variation temporelle des populations et de l'effort de pêche pour différentes valeurs de $\sigma_2$ . . . . .  | 28   |
| 2.4 | Trajectoires dans l'espace des phases du système (2.1), correspondant à $\sigma_1$ et $\sigma_2$ , commençant par différentes conditions initiales. . . . .  | 28   |
| 2.5 | Variation temporelle des trajectoires pour différentes valeurs de $\sigma$ . . . . .   | 29   |
| 2.6 | Trajectoires dans l'espace des phases correspondant à la taxe optimale $\sigma$ . . . . .  | 29   |
| 2.7 | Variation temporelle des trajectoires pour deux valeurs de $\gamma$ . . . . .  | 30   |
| 2.8 | Trajectoires dans l'espace des phases correspondante au coefficient intra-spécifique $\gamma$ . . . . .  | 30   |
| 3.1 | Évolution temporelle de la population des proies protégées, non protégées, des prédateurs et de l'effort de pêche pour différentes valeurs de $\tau < \tau_0^*$ . . . . .  | 45   |
| 3.2 | Diagramme de l'espace des phases pour le système (3.1) avec l'ensemble de paramètres 3.1 et $\tau < \tau_0^*$ . (a,b) représente les portraits de phases pour les variables $(N_1, N_2, P)$ et $(N_1, N_2, E)$ respectivement. . . . .                 | 45   |
| 3.3 | Évolution temporelle de la population des proies protégées, non protégées, des prédateurs et de l'effort de pêche pour une valeur de $\tau > \tau_0^*$ . . . . .   | 46   |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.4 | Portraits de phases pour le système (3.1). L'ensemble des paramètres est comme dans le Tableau 3.1 avec une valeur de $\tau > \tau_0^*$ . . . . . | 47 |
|-----|---|----|

## LISTE DES TABLEAUX

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Description des paramètres du modèle (1.16). . . . .   | 14 |
| 2.1 | Effet des paramètres de migration sur la densité de $N_1$ . . . . .                                      | 23 |
| 2.2 | Effet des paramètres de migration sur l'effort de pêche $E$ . . . . .                                    | 24 |
| 2.3 | Les valeurs des paramètres correspondantes pour les simulations numériques. . . . .                      | 27 |
| 2.4 | Valeurs du paramètre $\sigma_1$ et composantes de l'équilibre intérieure $M^*$ de la Figure 2.2. . . . . | 27 |
| 2.5 | Valeurs du paramètre $\sigma_2$ et composantes de l'équilibre intérieure $M^*$ de la Figure 2.3. . . . . | 27 |
| 2.6 | Les conditions initiales. . . . .  | 28 |
| 3.1 | Les valeurs des paramètres correspondantes pour les simulations numériques. . . . .                      | 44 |

---

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

La pêche est une activité fondamentale pour l'humanité depuis des milliers d'années, assurant une source de nourriture, de revenus et de subsistance pour de nombreuses communautés à travers le monde. Cependant, la pêche intensive et non réglementée a entraîné d'énormes pressions sur les écosystèmes marins. Les avancées technologiques et l'augmentation de la demande ont conduit à une exploitation excessive des populations de poissons, menaçant ainsi leur survie à long terme [25]. Des pratiques telles que la pêche de fond destructrice, la surpêche de certaines espèces commerciales et la capture accessoire non ciblée ont également des conséquences néfastes sur la biodiversité marine. Par conséquent, la gestion durable des ressources halieutiques est devenue une préoccupation majeure, visant à préserver les écosystèmes marins et à assurer la viabilité des activités de pêche. Dans ce contexte, la modélisation mathématique des pêcheries est un sujet d'actualité, en réponse à la surexploitation de nombreuses espèces commerciales à l'échelle mondiale [23].



FIGURE 1 – Profil de l'activité de pêche en mer [38].

Avec la rapide expansion des sciences de la vie, il est devenu évident que les arguments descriptifs et verbaux seuls ne sont plus suffisants pour appréhender et expliquer les phénomènes complexes présents dans divers domaines tels que l'écologie, la physique, l'économie et la chimie. Ainsi, l'analyse mathématique s'est imposée comme une nécessité pour mieux comprendre notre environnement en constante évolution et explorer des phénomènes à des échelles temporelles et spatiales difficiles à appréhender expérimentalement. Les modèles mathématiques permettent non seulement de quantifier certains phénomènes, mais aussi de prédire des comportements spécifiques [5]. Cependant, il est crucial de garder à l'esprit que ces modèles ont une dimension interprétative et prédictive propre.

La modélisation mathématique des problèmes écologiques est devenue indispensable dans de nombreuses disciplines, notamment l'écologie, la dynamique des populations, la génétique et l'épidémiologie [18]. Cette approche exige une collaboration étroite entre des scientifiques issus de différentes disciplines (biologie, mathématiques, informatique), au sein d'un domaine commun appelé biomathématiques. Au cours des dernières décennies, la modélisation mathématique a été largement appliquée en écologie, comme en témoignent de nombreux articles publiés dans les revues spécialisées. Ainsi, il est juste de considérer la modélisation mathématique comme une étape incontournable de la recherche écologique [30].



FIGURE 2 – Exemple représentatif d'un poisson dans un écosystème marin [36].

Les écosystèmes marins sont des éléments clés de notre planète, fournissant une grande partie de l'oxygène que nous respirons, régulant le climat et abritant une grande diversité d'espèces animales et végétales [17]. Les écosystèmes sont constitués de créatures vivantes, de plantes et de choses non vivantes qui coexistent et interagissent les unes avec les autres. Les poissons font partie de l'écosystème marin car ils ne vivent pas isolés. Ils ont un lien étroit avec leur environnement physique, chimique et biologique. Ils dépendent de l'environnement pour fournir les conditions nécessaires à leur croissance, leur reproduction et leur survie. Ils servent également d'approvisionnement alimentaire pour d'autres espèces telles que les oiseaux de mer et les mammifères marins, ce qui en fait un élément essentiel de la chaîne alimentaire marine [6]. Cependant, ces écosystèmes sont menacés par la surpêche, la pollution, le changement climatique et d'autres facteurs anthropiques. Afin de protéger ces écosystèmes vitaux, il est essentiel de comprendre les dynamiques des populations proie-prédateur dans les écosystèmes marins.

Dans ce contexte, cette étude se concentre sur l'analyse des dynamiques des populations proie-prédateur avec réserve et retard dans les écosystèmes marins. L'objectif principal de cette étude est donc de fournir des informations précieuses pour guider les décisions de gestion et de conservation des écosystèmes marins en prenant en compte les effets du temps de réponse des populations proie-prédateur aux changements environnementaux. Les résultats obtenus peuvent être utilisés comme outils de gestion pour évaluer les impacts biologiques, sociaux et économiques des ressources existantes et aider à atteindre la durabilité à long terme de l'écosystème marin.

L'étude présentée dans ce mémoire vise à modéliser les dynamiques d'une population proie-prédateur au sein d'un écosystème marin. L'objectif principal est de comprendre comment les interactions entre les espèces proies et prédateurs influencent la dynamique de la

population, en prenant en compte des facteurs tels que la pêche humaine. Ainsi, cette étude cherche à développer un modèle mathématique qui permettra une meilleure compréhension de ces interactions et une évaluation de l'impact des interventions humaines sur l'écosystème marin étudié.

Ce mémoire est organisé en plusieurs chapitres qui explorent divers aspects de l'analyse des dynamiques des populations proie-prédateur au sein des écosystèmes marins. Chaque chapitre se focalise sur des aspects spécifiques de la modélisation mathématique et de l'analyse des interactions écologiques.

Le premier chapitre revêt une importance capitale, car il se concentre sur la construction d'un modèle proie-prédateur complexe mettant en évidence l'effet de l'effort de pêche sur la population de proies non protégées. Cette étape cruciale permettra de mieux appréhender les dynamiques écologiques dans leur ensemble et posera les bases nécessaires pour nos investigations approfondies dans les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons la dynamique du modèle sans retard, en nous focalisant sur l'analyse du point d'équilibre intérieure et de sa stabilité. Cette étude approfondie permet d'acquérir une meilleure compréhension des conséquences pour les populations étudiées et de développer des stratégies de gestion des ressources halieutiques plus efficaces. En examinant attentivement les caractéristiques dynamiques du modèle, nous visons à fournir des informations précieuses pour une prise de décision éclairée dans le domaine de la gestion des écosystèmes marins.

Dans le troisième chapitre, nous nous penchons sur l'étude de la dynamique du modèle avec retard, en examinant attentivement les phénomènes de stabilité et de bifurcation qui peuvent se produire. Cette analyse approfondie nous permet de mieux appréhender les interactions complexes entre les populations proie-prédateur et de déceler les changements dynamiques importants liés à l'introduction du retard.



FIGURE 3 – Exemple de prédation marine en action : des requins (prédateurs) chassant des poissons (proies) [35].

Dans ce chapitre, nous présentons la construction d'un modèle proie-prédateur qui tient compte des populations de proies protégées et non protégées. Ce modèle est basé sur des équations différentielles à retard et prend en compte les effets de l'effort de récolte (pêche). Les proies sont réparties en deux zones distinctes : une pour les proies protégées et une pour les proies non protégées. Ce chapitre fournit une description détaillée du modèle, en mettant l'accent sur l'effet de la récolte sur la population de proies non protégées. Cette étude pose les bases pour une analyse ultérieure plus approfondie de ce système écologique important.

### 1.1 MODÈLES AVEC UNE SEULE POPULATION

Les modèles mathématiques à une seule population constituent un outil précieux pour comprendre et prédire la dynamique des populations dans différents contextes, qu'il s'agisse d'espèces animales, de populations bactériennes ou d'autres phénomènes biologiques. Ces modèles reposent sur des équations différentielles ou des systèmes d'équations qui décrivent l'interaction entre les différents paramètres qui influencent la taille et la croissance d'une population. Les modèles mathématiques à une seule population sont utilisés dans de nombreuses disciplines scientifiques, de la biologie à l'écologie en passant par les sciences économiques et sociales. Dans cette partie, nous examinerons différents types de modèles mathématiques à une seule population et discuterons de leurs applications et de leurs limites.

#### 1.1.1 Modèle de Malthus

En 1798, le britannique Thomas Robert Malthus a publié la première version de son essai sur la dynamique de la population humaine [26]. Il a considéré une population constituée d'une seule espèce animale, homogène, c'est-à-dire, qu'il a négligé les variations d'âge, de taille et de périodicité éventuelle pour la natalité.

Le modèle Malthusien suppose que l'accroissement du nombre  $N$  d'individus de cette population, pendant un court intervalle de temps, est proportionnel à  $N$ , ce qui se traduit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t),$$

où  $a$  est un facteur positif constant qui représente le taux de croissance.

En intégrant l'équation précédente, on obtient :

$$N(t) = N(0)e^{at},$$

où  $N(0)$  étant la population initiale.

Cette loi est appelée fonction de croissance malthusienne ou fonction de croissance exponentielle qui reste valable tant que la densité de la population ne sature pas le milieu (voir Figure 1.1).

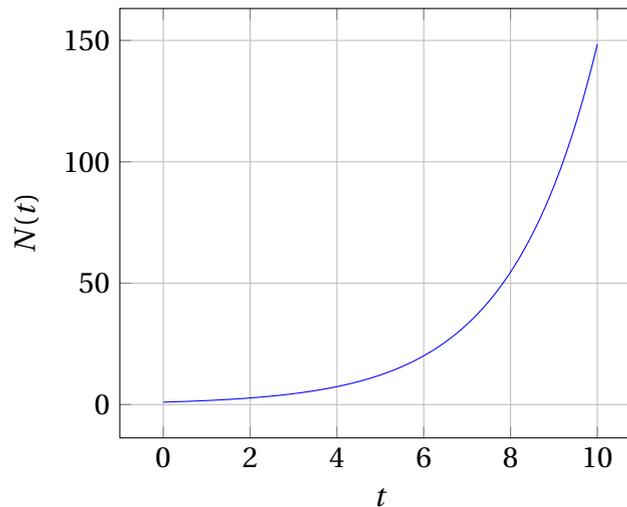


FIGURE 1.1 – Modèle de croissance de Malthus.

### 1.1.2 Modèle de Verhulst

Le biologiste belge Pierre-François Verhulst propose en 1837 un modèle tenant compte de la limitation imposée par l'effectif croissant de la population [26] qui est en fait une amélioration du modèle de Malthus ou il est supposé que le taux d'accroissement est constant, ce qui provoque une croissance exponentielle de la population. On peut exprimer cela sous forme d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right),$$

où  $K$  est une constante positive qui représente la capacité de charge (limite) de l'environnement.

En intégrant l'équation précédente, on obtient :

$$N(t) = \frac{KN(0)}{N(0) + (K - N(0))e^{-at}},$$

où  $N(0)$  étant comme précédemment la population initiale.

Cette loi est appelée fonction de croissance logistique par Verhulst, et est radicalement différente de celle de Malthus en ce sens qu'elle impose une valeur limite à la population (voir Figure 1.2).

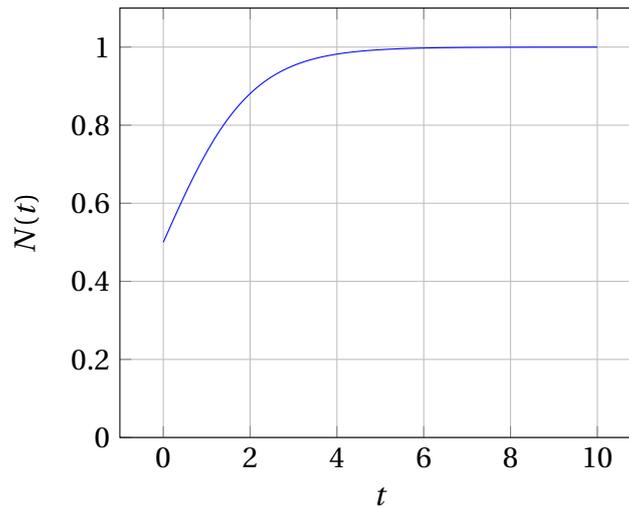


FIGURE 1.2 – Modèle de croissance de Verhulst.

Les modèles précédents négligent beaucoup trop de phénomène que l'on peut voir dans la nature, cependant ils sont assez riche d'un point de vue mathématique. Dans la suite, on se propose d'améliorer encore plus ces modèles suivant notre besoin et en dépit, bien-sure, des recherches faites de sorte à ce que l'on puisse avoir un modèle assez réaliste.

## 1.2 MODÈLES AVEC DEUX POPULATIONS

Les modèles mathématiques qui se concentrent sur deux populations sont utilisés pour étudier les relations entre deux espèces au sein d'un écosystème. Ces modèles décrivent la dynamique de chaque population en fonction de divers facteurs tels que la prédation, la concurrence pour les ressources et les taux de reproduction. Ils sont souvent utilisés pour examiner les systèmes écologiques comprenant une proie et un prédateur. Dans ces modèles, la population de proies est représentée par une équation qui prend en compte leur taux de reproduction et la mortalité due à la prédation, tandis que la population de prédateurs est représentée par une équation qui prend en compte leur taux de reproduction et la mortalité due à la compétition pour les ressources. Dans l'ensemble, les modèles mathématiques à deux populations constituent un outil essentiel pour comprendre les interactions entre les différentes espèces d'un écosystème.

Tout au long de ce manuscrit, nous identifierons dans les modèles la population de prédateurs par  $P$  et celle de sa proie principale par  $N$ . Dans un système à deux espèces  $N$  et  $P$ , nous considérons que l'interaction qui les lie est directe et se fait uniquement via la prédation :  $P$  a donc directement des effets négatifs sur  $N$  (voir Figure 1.3).

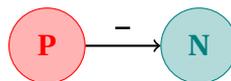


FIGURE 1.3 – Diagramme de l'interaction directe négative du prédateur  $P$  sur sa proie principale  $N$ . Les populations sont représentées par un cercle où Figure leur dénomination, et l'interaction directe est représentée par une flèche à trait plein.

La modélisation des systèmes proie-prédateur implique d'exprimer les deux variables dynamiques  $N$  et  $P$  ensemble, ce qui crée un système dynamique défini pour des valeurs

positives de  $N$  et  $P$ , en particulier dans le plan  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ , par :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = f(N) - F(N, P)P, \\ \frac{dP}{dt} = g(N)P. \end{cases} \quad (1.1)$$

En général, la dynamique de la population de proies  $N$  est déterminée par deux termes. Le premier terme,  $f(N)$ , représente la croissance de la population de proies, tandis que le second terme,  $F(N, P)$ , est appelé la réponse fonctionnelle, qui représente le nombre de proies tuées par unité de temps par un prédateur (comme décrit par Murdoch [24] et Holling [16]). La dynamique de la population de prédateurs  $P$  est représentée par le terme  $g(N)$ , qui correspond traditionnellement à la réponse numérique du prédateur, c'est-à-dire à la manière dont sa densité varie en réponse aux changements de la densité des proies, tout en tenant compte de la mortalité naturelle.

### 1.2.1 Modèle de Lotka-Volterra

Lotka [20] et Volterra [33] ont initialement proposé un modèle de prédation simple à deux dimensions qui possède des caractéristiques génériques et sert de base à de nombreux autres modèles. L'intérêt de Lotka s'est étendu, au-delà des oscillations des réactions chimiques, aux problèmes démographiques, aux réseaux alimentaires, au cycle de l'eau et même aux cycles du dioxyde de carbone, y compris les oscillations entre prédateurs et proies qui ont donné leur nom au modèle. L'intérêt de Volterra a été éveillé par un problème posé par D'Ancona : pendant la Première Guerre mondiale, la pêche a été temporairement interrompue dans l'Adriatique, ce qui a entraîné une augmentation des poissons prédateurs, en particulier des requins, et une diminution des poissons proies. Bien que le nombre total de poissons soit resté constant du début à la fin de la guerre, les proportions ont changé. Alors à travers des équations différentielles, Volterra [33] a étudié les raisons d'une perturbation d'un équilibre entre une proie et son prédateur, similaires à celles proposées par Lotka [20] :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - bNP, \\ \frac{dP}{dt} = cNP - DP, \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $D$  sont des constantes positives telles que :

$a$  : le taux de croissance de la proie en l'absence du prédateurs,

$b$  : le taux de prédation du prédateur sur la proie,

$c$  : le taux de croissance du prédateur suite à sa prédation,

$D$  : le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proies.

L'interprétation des hypothèses de ce modèle est la suivante :

1. En l'absence de toute prédation, la proie croît selon la loi malthusienne, représentée par le terme  $aN$  dans (1.2).
2. L'effet de la prédation est de réduire le taux de croissance de la proie d'un terme proportionnel à la population de la proie et du prédateur, qui est représenté par le terme  $-bNP$ .

3. En l'absence de toute proie pour sa subsistance, le prédateur connaît une décroissance exponentielle, représentée par le terme  $-DP$ .
4. La contribution des proies au taux de croissance des prédateurs est représentée par le terme  $cNP$ , qui est proportionnel à la population de la proie et du prédateur.

La formulation de l'équation de la fonction représentative dans (1.2) est basée sur la méthode de rencontre et les équations d'équivalence construites par Volterra [33]. La première méthode considère l'existence d'une espèce prédatrice et d'une espèce proie. Tout d'abord, il doit y avoir une rencontre entre ces deux espèces, et le nombre de rencontres est proportionnel au nombre d'individus de chaque espèce. Le coefficient de rapport est égal à la probabilité de rencontre. La seconde méthode suppose qu'il existe un rapport constant entre les disparitions et les apparitions d'individus provoquées par une rencontre, c'est-à-dire que la prédation de la proie est équivalente à la croissance du prédateur [33].

Le phénomène observé par D'Ancona s'explique ainsi : l'augmentation du nombre de prédateurs et la diminution du nombre de proies résultent de la disparition de la pêche, qui avait auparavant altéré l'équilibre naturel de cette association biologique.

Le modèle (1.2) est appelé modèle de Lotka-Volterra car Alfred J. Lotka (voir [20], [19]) a obtenu les mêmes équations que celles de (1.2) à partir d'une réaction chimique, dont il pensait qu'elle pouvait présenter un comportement périodique dans les concentrations des produits chimiques.

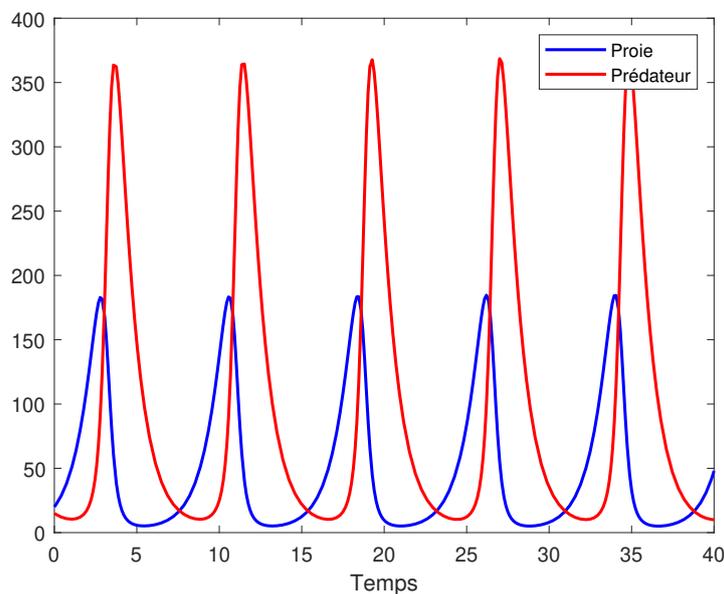


FIGURE 1.4 – Solutions typiques des équations du modèle de Lotka-Volterra.

D'autres modèles, plus réalistes et dont la structure est similaire à celle du modèle de Lotka-Volterra, ont donné lieu à des caractéristiques différentes. Nous examinerons plusieurs de ces modèles plus loin dans cette partie.

Dans le paragraphe précédent, nous avons rencontré deux fonctions couramment utilisées pour  $f(N)$  : le modèle de Malthus et le modèle de Verhulst. Il existe également diverses

expressions pour la réponse fonctionnelle  $F(N, P)$ , qui dépendent de certaines hypothèses. Dans ce qui suit, nous nous concentrerons sur les réponses fonctionnelles classiquement utilisées qui dépendent de la densité de la proie, c'est-à-dire  $F(N, P) = F(N)$ , puis nous compléterons cette description en présentant des formalismes dépendant des ratios.

### 1.2.2 Réponse fonctionnelle de Lotka et Volterra

La réponse fonctionnelle la plus simple a été proposée par Lotka [33] et Volterra [20]. Il s'agit d'une relation linéaire avec la densité de la proie, qu'on retrouve dans leur modèle de prédation :

$$F(N) = bN, \quad (1.3)$$

où  $b$  est le taux d'attaque de la proie principale par le prédateur. Le terme de prédation est exprimé par  $F(N)P = bNP$ , qui est une relation masse-action. Ce terme suggère que la prédation augmente ou diminue proportionnellement au taux de rencontre entre le prédateur et la proie. C'est le cas de certaines espèces dans l'espace marin, comme les requins. La probabilité que les sardines soient dévorées par les requins augmente proportionnellement à l'augmentation de la densité de sardines.

### 1.2.3 Réponse(s) fonctionnelle(s) de Holling

A la fin des années cinquante, l'entomologiste (scientifique spécialisé dans l'étude des insectes) C.S. Holling (voir [15], [16]) élaborera quelques types de réponses fonctionnelles qui ont gardé son nom. Cela fut introduit selon les densités et les caractéristiques des proies et du prédateur, tout en visant à transcrire une certaine saturation du prédateur vis-à-vis de ses proies. Ces réponses fonctionnelles sont : la fonction de Holling de type I et type II (voir Figure 1.5).

**Holling de type I** Reprenant le concept d'une relation linéaire avec la densité des proies, Holling [15] propose que les prédateurs puissent rechercher leurs proies au hasard : le temps de recherche est négligeable et le taux de recherche est constant quelle que soit la densité des proies. Par conséquent, le nombre de proies tuées est proportionnel à leur densité. Un niveau de saturation peut être atteint si le prédateur ne peut plus consommer davantage d'individus :

$$F(N) = \begin{cases} bN & \forall N < \bar{N}, \\ b\bar{N} & \forall N \geq \bar{N}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Holling [15] indique que ce type de réponse fonctionnelle a été observé dans les études de Ricker [27] sur les espèces de poissons consommant du saumon rouge.

**Holling de type II** Holling [16] a documenté un certain nombre d'expériences qui illustrent les limites d'une relation linéaire avec la densité des proies. Souvent, une augmentation de la densité des proies se traduit par une augmentation rapide du nombre de proies attaquées par le prédateur, qui finit par ralentir et atteindre une valeur fixe. Ce phénomène est représenté par une expression de la forme suivante :

$$F(N) = \frac{bN}{1 + hN}, \quad (1.5)$$

avec  $h$  le temps moyen que prend le prédateur pour consommer une proie [16].

Le taux de prédation est caractérisé par une décélération due à la limitation du prédateur dans la recherche et la consommation de ses proies. Par conséquent, la saturation de la prédation est marquée par une densité limite de proies pouvant être consommées et une consommation marginale qui ne fait que diminuer. Ce type de réponse fonctionnelle est couramment observé chez une grande variété de prédateurs (Murdoch [24]) : insectes, acariens, mollusques, poissons, etc. Par ailleurs, ce modèle correspond également au modèle de Monod (Monod [22]), qui décrit la croissance des micro-organismes consommant des substrats, et au modèle de Michaelis-Menten (Menten et Michaelis [21]), qui décrit la cinétique des enzymes agissant sur un substrat.

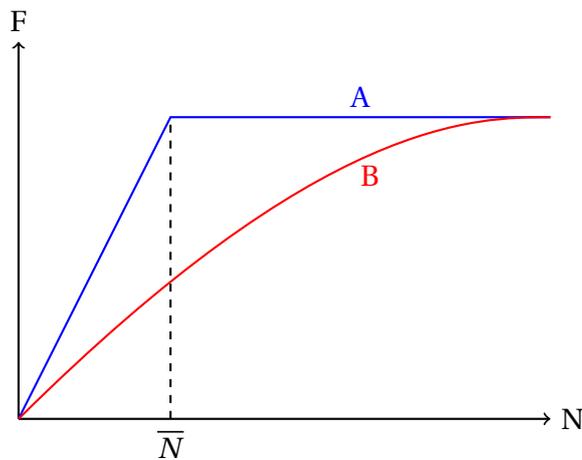


FIGURE 1.5 – Deux réponses fonctionnelles du prédateur, en fonction de la densité des proies : Holling de type I (A), Holling de type II (B).

Les différents types de réponses fonctionnelles sont particulièrement importants dans la dynamique des modèles proie-prédateur. En particulier, la limitation du prédateur par son temps de recherche et de consommation des proies peut modifier de manière significative le comportement qualitatif des solutions.

#### 1.2.4 Proportionnalité entre les réponses fonctionnelles et numériques

La plupart des modèles de Lotka-Volterra présentent un taux de croissance du prédateur qui augmente de façon monotone avec le nombre de proies tuées, un phénomène communément appelé "conversion de la biomasse" (Ginzburg, 1998 [11]). La conversion de la biomasse signifie que la fonction de croissance du prédateur,  $g$ , ne dépend que du nombre de proies consommées par unité de temps, qui est la réponse fonctionnelle  $F(N)$  dépendant de la densité des proies, plutôt que directement des densités des proies et des prédateurs. Par conséquent,  $g(N) = G(F(N)) - D(P)$ , où  $D(P)$  est le taux de dispersion des prédateurs.

Dans la suite de cette partie, nous présenterons plusieurs modèles basés sur le modèle de Lotka-Volterra (1.2), mais qui reposent sur des hypothèses différentes.

### 1.2.5 Modèle de Lotka-Volterra avec réponse fonctionnelle de Holling de type II

La première modification du modèle de Lotka-Volterra a été apportée par Holling, qui a remplacé la réponse fonctionnelle linéaire de type I par la réponse de type II. Il s'agit du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - \frac{bNP}{v+N}, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{cNP}{v+N} - DP, \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $v$  est la constante positive de demi-saturation pour le prédateur, qui est la densité de proies au cours de laquelle la réponse fonctionnelle du prédateur est à moitié maximale. Les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $D$  sont des constantes positives définies comme dans les modèles précédents.

Le système de Lotka-Volterra (1.2) est une méthode possible pour modéliser l'interaction entre les prédateurs et les proies à l'aide de systèmes d'équations différentielles. Une version améliorée du modèle pourrait être développée en faisant une hypothèse plus réaliste sur la croissance naturelle de la population de proies : leur réserve de nourriture est limitée. En l'absence d'interactions avec les prédateurs, les proies croissent selon un modèle de croissance logistique décrit par Verhulst (1840) [2].

### 1.2.6 Modèle de Lotka-Volterra avec croissance logistique des proies

Le modèle classique de Lotka-Volterra (1.2) suppose que les populations de proies peuvent croître de manière exponentielle. Cependant, dans la nature, les populations sont souvent contraintes par leur environnement et s'autorégulent pour atteindre leurs capacités de charge respectives, ce qui tend à les stabiliser autour de ces limites. Par conséquent, en incorporant la croissance logistique des proies, le modèle de Lotka-Volterra modifié gagne en stabilité, comme le montre son analyse.

La population de proies suit une dynamique qui tient compte d'une croissance logistique et d'une réponse fonctionnelle linéaire de la part des prédateurs. La dynamique de la population de prédateurs suit la règle classique du transfert de biomasse, où la croissance par individu est linéairement liée à la densité des proies consommées. La mortalité naturelle du prédateur dépend uniquement de sa propre densité :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - bNP, \\ \frac{dP}{dt} = cNP - DP, \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $D$  et  $K$  sont des constantes positives définies comme dans les modèles précédents.

Le modèle de base de Lotka-Volterra ne prend pas en compte de nombreux phénomènes observés dans la nature, mais il est riche en termes de formalisme mathématique. Des modèles plus avancés, tels que ceux qui intègrent la réponse fonctionnelle de Holling de type

II ou la croissance logistique des proies, ont été développés pour améliorer la précision des modèles. Cependant, pour rendre ces modèles encore plus proches de la réalité, il est important de continuer à les améliorer en se basant sur les travaux de recherche menés par différents scientifiques.

### 1.2.7 Modèle de Rosenzweig-MacArthur

Rosenzweig et MacArthur [28] ont nommé le modèle de Lotka-Volterra, qu'ils ont modifié en prenant en compte le développement logistique de la satiété des proies et des prédateurs avec une réponse fonctionnelle de type Holling. C'est le modèle de Lotka-Volterra qui est régularisé en remplaçant la loi de croissance exponentielle de Malthus par la loi de croissance logistique de Verhulst, et répondant linéairement par la loi de Holling de type II, il s'agit du système :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{bNP}{v + N}, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{\lambda NP}{v + N} - DP, \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $\lambda$  le taux de conversion de proies en prédateurs (selon [5], page 1807, on suppose que  $0 < \lambda \leq v$ ). Les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $v$ ,  $D$  et  $K$  sont des constantes positives définies comme dans les modèles précédents.

Le modèle Rosenzweig-MacArthur, présenté dans (1.8), est le modèle le plus simple qui satisfait toutes les hypothèses énoncées par Turchin (2003) (voir [31]). Contrairement au modèle de Lotka-Volterra, il est suffisamment réaliste pour être appliqué directement à plusieurs systèmes réels. Cependant, plusieurs améliorations peuvent être apportées au modèle. Par exemple, on peut observer que les prédateurs n'ont qu'un taux de mortalité constant ( $DP$ ). En ajoutant un terme autolimitant à l'équation du prédateur dans le système (1.8), on obtient le modèle proposé par Bazykin (1974) (voir [1]) :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{bNP}{v + N}, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{\lambda NP}{v + N} - DP - \gamma P^2, \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $\gamma$  est une constante positive qui représente le coefficient intra-spécifique de la population de prédateurs.

L'ajout du terme linéaire d'auto-limitation pour les prédateurs rapproche l'équation du prédateur du système (1.8) à une croissance logistique. Cette caractéristique est importante pour la définition de certains paramètres au Chapitre 2. On choisit le modèle de Bazykin [1] comme base pour la construction des équations du modèle construit dans le cadre du mémoire, sous une forme équivalente, mais légèrement différente.

L'intégration de l'effort de pêche dans les modèles mathématiques implique l'ajout d'une fonction qui décrit la récolte (la pêche) humaine des proies dans le modèle. Cette fonction peut dépendre de divers facteurs tels que le nombre de pêcheurs, les quotas de pêche, les techniques de pêche utilisées et les réglementations environnementales. L'effort de pêche

est un concept important dans les modèles mathématiques pour l'étude des systèmes écologiques impliquant à la fois des proies et des prédateurs. Nous aborderons ce concept dans le paragraphe suivant.

### 1.3 EFFORT DE PÊCHE

L'effort de pêche est un facteur clé qui influence la dynamique des populations de proies et les pratiques de gestion des ressources. Dans cette partie, nous examinerons en détail l'effort de pêche et son impact sur les populations de proies, en nous concentrant sur un type spécifique d'effort de pêche, son effet sur les populations de proies et les mesures de gestion des ressources mises en place pour atténuer les effets négatifs de l'effort de pêche. Nous discuterons également du modèle mathématique utilisé pour estimer l'effort de pêche et prévoir son impact sur les populations de proies. Cette partie fournira une vue d'ensemble brève de l'effort de pêche.

Dans cette étude, on suppose que la pêche n'est autorisée que sur la population de proie et que le prédateur n'est pas pêchée, ainsi la pêche n'affecte pas directement la croissance de la population de prédateurs. Cependant, on considère que les prédateurs se font concurrence pour leur survie.

Gardant cela à l'esprit, nous avons modifié le modèle de proie en incorporant un effort de pêche, comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{bNP}{v+N}, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{\lambda NP}{v+N} - DP - \gamma P^2, \end{cases} \quad (1.10)$$

avec les paramètres définis dans les modèles précédents. À l'instant  $t$ ,  $R(t) > 0$  représente le taux de capture de la proie, dépend de plusieurs facteurs tels que le revenu, la demande du marché et les coûts de pêche. Par conséquent, nous considérons l'effort de capture comme une variable d'un point de vue pratique, qui prend la forme suivante :

$$R(t) = qNE, \quad (1.11)$$

où  $q$  est le coefficient de capture,  $E$  l'effort utilisé pour récolter la ressource (effort de pêche).

L'organisme de contrôle prélève une taxe  $\sigma > 0$  de la population de proies débarquée afin de contrôler l'exploitation. Toute subvention au pêcheur peut être interprétée comme une valeur négative de taxation  $\sigma$ .

On considère le revenu économique net du pêcheur (rente perçue) par l'expression suivante :

$$(q(p - \sigma)N - c)E,$$

où  $c$  est le coût constant de la pêche par unité d'effort,  $p$  le prix constant de poisson débarqué.

**Remarque 1.** Dans cette étude, nous considérons la fiscalité comme l'objectif de gestion lors de l'examen d'impact de la pêche dans le système et supposons  $(p - \sigma > 0)$  [6]. Selon ([6], page 70).

Nous considérons maintenant un modèle de réaction dynamique en supposant que le niveau d'effort de pêche augmente ou diminue selon que la rente perçue est positive ou négative. L'effort de pêche  $E$  est donc une variable dynamique régie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dE}{dt} = \mu(q(p - \sigma)N - c)E, (p > \sigma), \quad (1.12)$$

où  $\mu$  est le paramètre de rigidité mesure la distribution de la force réactive. Ainsi, en utilisant (1.11) et (1.12), le système (1.10) devient :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \left( a \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{bP}{v + N} \right) N, & N(0) \geq 0, \\ \frac{dP}{dt} = \left( \frac{\lambda N}{v + N} - D - \gamma P \right) P, & P(0) \geq 0, \\ \frac{dE}{dt} = \mu(q(p - \sigma)N - c)E, & E(t) \geq 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Un résultat important concernant le modèle ci-dessus est le suivant.

**Proposition 1.** *Le cône positif  $\mathbb{R}_+^3$  est positivement invariant.*

*Démonstration.* Du système (1.13), on a :

1. Si  $N = 0$ , alors  $\frac{dN}{dt} = 0$ , et donc le plan  $\{N = 0\}$  est invariant.
2. De même, si  $P = 0$ , alors  $\frac{dP}{dt} = 0$ , et donc le plan  $\{P = 0\}$  est invariant.
3. Finalement, si  $E = 0$ , alors  $\frac{dE}{dt} = 0$ , et de ce fait le plan  $\{E = 0\}$  est invariant.

De ces observations nous déduisons que le cône  $\mathbb{R}_+^3$  est positivement invariant. □

Actuellement, le modèle a pris en compte l'effet de l'effort de pêche sur les populations de proies. Toutefois, la dispersion des proies peut également avoir un impact significatif sur la dynamique de ce système écologique. Dans le paragraphe qui va suivre on se concentrera sur l'ajout de la variable de dispersion des proies dans le modèle, dans le but d'explorer son influence sur la répartition spatio-temporelle des populations de proies protégées et non protégées.

## 1.4 DISPERSION DES PROIES

La dispersion des proies est un phénomène important dans les écosystèmes, car elle peut avoir un impact significatif sur la dynamique des populations de prédateurs et de proies. Dans un environnement à deux parcelles (zones), où les proies se déplacent entre deux zones distinctes, la dispersion peut être particulièrement complexe. Une étude mathématique de ce phénomène peut aider à mieux comprendre les interactions entre les populations de prédateurs et de proies, ainsi que l'effet des facteurs environnementaux sur leur dynamique.

Dans cette section, on suppose que la populations de proies  $N$  est dispersées dans un environnement à deux parcelles, dont l'une est une zone de pêche libre et l'autre une zone

réservée, où la pêche est interdite. Chaque parcelle est censé être homogène et la croissance des proies en l'absence de prédateurs est supposée être logistique (voir Figure 1.6).

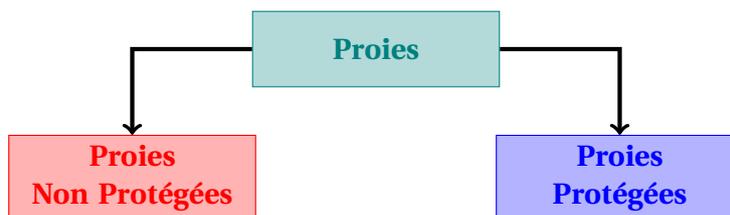


FIGURE 1.6 – Dispersion des proies  $N$  en deux espèces non protégées et protégées.

### 1.4.1 Absence de migration entre proies

À l'instant  $t$ , la densité des proies protégées (non protégées) est notée par  $N_1(t)$  ( $N_2(t)$  respectivement), et  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$  sont supposées continues de  $\mathbb{R}^+$  à  $\mathbb{R}^+$ . Ainsi le système est présenté par les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = rN_1 \left(1 - \frac{N_1}{k}\right), \quad N_1(0) \geq 0, \\ \frac{dN_2}{dt} = sN_2 \left(1 - \frac{N_2}{l}\right) - \frac{bN_2P}{b+N_2} - qN_2E, \quad N_2(0) \geq 0, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{\lambda N_2P}{b+N_2} - DP - \gamma P^2, \quad P(0) \geq 0, \\ \frac{dE}{dt} = \mu(q(p-\sigma)N_2 - c)E, \quad E(t) \geq 0. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Selon ([9], page 627), on suppose que les paramètres  $r$ ,  $s$ ,  $k$  et  $l$  sont des constantes positives telles que :

- $r$  : le taux de croissance intrinsèque de la proie protégée en l'absence de prédateur,
- $s$  : le taux de croissance intrinsèque de la proie non protégées en l'absence de prédateur,
- $l$  : la capacité de portée du milieu en proies non protégées.

### 1.4.2 Migration des proies

Supposons maintenant que les proies migre entre les deux parcelles réservée et non réservée de manière aléatoire, par des taux de migration positifs. Ainsi le système (1.14) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = rN_1 \left(1 - \frac{N_1}{k}\right) - \sigma_1 N_1 + \sigma_2 N_2, \quad N_1(0) \geq 0, \\ \frac{dN_2}{dt} = sN_2 \left(1 - \frac{N_2}{l}\right) + \sigma_1 N_1 - \sigma_2 N_2 - \frac{bN_2P}{v+N_2} - qN_2E, \quad N_2(0) \geq 0, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{\lambda N_2P}{v+N_2} - DP - \gamma P^2, \quad P(0) \geq 0, \\ \frac{dE}{dt} = \mu(q(p-\sigma)N_2 - c)E, \quad E(t) \geq 0. \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Selon ([9], page 627), on suppose que les paramètres  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  sont des constantes positives telles que :

$\sigma_1$  : le taux de migration des proies de la zone réservée vers la zone non réservée,

$\sigma_2$  : le taux de migration des proies de la zone non réservée vers la zone réservée.

Maintenant que nous avons exploré les différentes composantes du modèle de dynamique des populations de prédateurs et de proies dans un environnement à deux parcelles, nous pouvons passer au paragraphe suivant qui se concentrera sur la formulation complète du modèle, en reliant les concepts et les équations présentés dans les parties précédentes.

## 1.5 FORMULATION DU MODÈLE COMPLET

Afin de mieux comprendre la dynamique de la population de proies et de prédateurs dans un environnement avec des proies protégées et non protégées, il est important de développer un modèle complet qui prend en compte tous les facteurs pertinents. Dans cette partie, nous présentons une formulation détaillée de ce modèle qui incorpore l'effet de la pêche et le retard dans la réponse des proies à la prédation. En utilisant les avancées discutées dans les paragraphes précédents, nous explorons les équations et les paramètres nécessaires pour décrire ce système complexe.

### 1.5.1 Absence du retard

Nous examinons une pêcherie qui implique à la fois des espèces proies et des espèces prédatrices dans un environnement à deux parcelles. L'une des parcelles est désignée comme une zone de pêche libre, tandis que l'autre est une zone réservée où la pêche est interdite. Les deux zones sont supposées être de nature uniforme et la population de proies se déplace de l'une à l'autre de manière aléatoire. En l'absence de prédateurs, la croissance des proies dans chaque zone est supposée suivre un modèle logistique. Les prédateurs consomment les proies dans la zone non réservée en utilisant la fonction réponse de type II de Holling. Seule la zone de pêche libre autorise la récolte, et les prédateurs ne sont pas capturés, de sorte que la récolte n'a pas d'impact direct sur la croissance de la population de prédateurs. Toutefois, on suppose que les prédateurs sont en concurrence les uns avec les autres pour la survie, ce qui se traduit par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = rN_1 \left(1 - \frac{N_1}{k}\right) - \sigma_1 N_1 + \sigma_2 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = sN_2 \left(1 - \frac{N_2}{l}\right) + \sigma_1 N_1 - \sigma_2 N_2 - \frac{\alpha N_2 P}{a + N_2} - qN_2 E, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{\beta N_2 P}{a + N_2} - DP - \gamma P^2, \\ \frac{dE}{dt} = \mu(q(p - \sigma)N_2 - c)E. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Pour des raisons biologiques, nous supposons que :  $N_1(0) \geq 0$ ,  $N_2(0) \geq 0$ ,  $P(0) \geq 0$ ,  $E(t) \geq 0$ .

TABLE 1.1 – Description des paramètres du modèle (1.16).

| Paramètres | Description   |
|------------|---|
| $r$        | Le taux de croissance intrinsèque des proies à l'intérieur de la zone réservée        |
| $k$        | La capacité de charge du milieu pour les proies à l'intérieur de la zone réservée     |
| $s$        | Le taux de croissance intrinsèque des proies à l'intérieur de la zone non réservée    |
| $l$        | La capacité de charge du milieu pour les proies à l'intérieur de la zone non réservée |
| $\sigma_1$ | Le taux de migration à partir de la zone réservée vers la zone non réservée           |
| $\sigma_2$ | Le taux de migration à partir de la zone non réservée vers la zone réservée           |
| $\alpha$   | L'augmentation relative maximale de la prédation                                      |
| $\beta$    | Le taux de consommation de la proie par le prédateur                                  |
| $a$        | La constante de demi-saturation   |
| $D$        | Le taux de mortalité des prédateurs   |
| $\gamma$   | Le coefficient intra-spécifique de la population de prédateurs                        |
| $\sigma$   | Le paramètre de taxation  |
| $q$        | Le coefficient de capturabilité   |
| $p$        | Le prix constant de poisson débarqué  |
| $c$        | Le coût constant de la pêche par unité d'effort                                       |
| $\mu$      | Le paramètre de rigidité mesure la distribution de la force réactive                  |

À l'instant  $t$ , la densité des proies protégées (non protégées) est notée par  $N_1(t)$  ( $N_2(t)$  respectivement). La densité des prédateurs par  $P(t)$  et l'effort de pêche par  $E(t)$ . Les descriptions des paramètres positifs sont données dans le Tableau 1.1.

Dans le but de prendre en compte les effets temporels de l'effort de pêche sur les populations de proies non protégées, nous avons introduit un retard dans notre modèle proie-prédateur. Cette nouvelle variable temporelle permet de considérer les effets à court et à long terme de la pêche sur ces populations, et ainsi d'améliorer la précision de l'analyse de la dynamique de ce système écologique complexe. La formulation complète de ce modèle est décrite dans la suite de ce paragraphe.

### 1.5.2 Introduction du retard

Dans ce scénario, la population de prédateurs consomme la population de proies à un rythme régulier. Cependant, les carnivores ne se reproduisent pas immédiatement après avoir consommé leurs proies, mais il y a un délai (retard) avant que la population de prédateurs n'augmente. Ce délai est dû au temps nécessaire pour que la prédatrice se reproduit. Nous appellerons latence ou délai ou retard ( $\tau$ ) le temps qui s'écoule entre le moment où une proie est tuée et celui où elle est ajoutée à la population de prédateurs. Bien que ce délai puisse être bref, il ne peut être négligé.

En gardant à l'esprit l'aspect ci-dessus, nous construisons le système suivant d'équations non linéaires gérées par des équations aux dérivées ordinaires lorsqu'il y a un délai pour

étudier la dynamique du système proie-prédateur avec effort de pêche :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = rN_1 \left(1 - \frac{N_1}{k}\right) - \sigma_1 N_1 + \sigma_2 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = sN_2 \left(1 - \frac{N_2}{l}\right) + \sigma_1 N_1 - \sigma_2 N_2 - \frac{\alpha N_2 P}{a + N_2} - qN_2 E, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{\beta N_2(t-\tau) P(t-\tau)}{a + N_2(t-\tau)} - DP - \gamma P^2, \\ \frac{dE}{dt} = \mu(q(p-\sigma)N_2 - c)E. \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Où  $\tau$  est le délai discret en termes d'interconnexion.

Les conditions initiales sont donnés par,  $(N_1(t), N_2(t), P(t), E(t)) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \phi_4(t))$ , où  $\phi_i \in C_+ = C([- \tau, 0]; \mathbb{R}_+^4)$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) et  $t \in [- \tau, 0]$ .

La condition décrite s'applique à toutes les valeurs de  $t > 0$ . Le mécanisme de rétroaction pour la population du prédateur incorpore un délai discret  $\tau > 0$ .



### Conclusion

Ce chapitre a présenté la construction d'un modèle proie-prédateur prenant en compte les populations de proies protégées et non protégées, basé sur des équations différentielles à retard et prenant en compte les effets de l'effort de pêche. En particulier, nous avons étudié l'effet de la pêche sur la population de proies non protégées en les répartissant en deux zones distinctes. Cette modélisation constitue une première étape importante pour comprendre la dynamique de ce système écologique complexe et fourni des bases pour une analyse ultérieure plus approfondie. Les résultats de cette étude peuvent être utilisés pour élaborer des stratégies de gestion durable des populations de proies non protégées, en prenant en compte les effets de la pêche et en identifiant les facteurs clés qui influencent la dynamique de ces populations. Ce chapitre fournit donc une base théorique importante pour comprendre les concepts clés abordés dans les chapitres suivants et pour appliquer ces concepts à des situations réelles.

**Remarque :** Ce travail est une synthèse de l'article intitulé Effort dynamics of a delay-induced prey-predator system with reserve de Kunal Chakraborty, Soovoojeet Jana, T.K. Kar, publié dans *Nonlinear Dyn* (2012) 70 : 1805-1829 [5]. En gros, nous reprenons largement la présentation des auteurs. Nous invitons les lecteurs intéressés à voir les références pour plus de détails.



Dans ce chapitre, notre attention sera portée sur l'analyse approfondie du modèle proie-prédateur incluant une réserve, sans la prise en compte d'un retard, plus précisément le système (1.16). Notre objectif principal consistera à étudier la stabilité du système et à analyser sa dynamique autour de son point d'équilibre intérieur. Une meilleure compréhension du comportement à long terme de ce modèle nous sera ainsi permise.

## 2.1 MODÈLE ET PROPRIÉTÉS DE BASES

Le modèle est représenté par le système d'équations suivant, où les variables  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $P$  et  $E$  et les paramètres correspondants ont été définis dans le Chapitre 1, et seront utilisés tout au long de ce chapitre pour analyser les données :

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = rN_1 \left(1 - \frac{N_1}{k}\right) - \sigma_1 N_1 + \sigma_2 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = sN_2 \left(1 - \frac{N_2}{l}\right) + \sigma_1 N_1 - \sigma_2 N_2 - \frac{\alpha N_2 P}{a + N_2} - qN_2 E, \\ \frac{dP}{dt} = \left(\frac{\beta N_2}{a + N_2} - D - \gamma P\right) P, \\ \frac{dE}{dt} = \mu(q(p - \sigma)N_2 - c)E. \end{cases} \quad (2.1)$$

Le système d'équations est accompagné des conditions initiales suivantes :  $N_1(0) \geq 0$ ,  $N_2(0) \geq 0$ ,  $P(0) \geq 0$  et  $E(t) \geq 0$ .

### 2.1.1 Bornitude des solutions

Le modèle en question traite un phénomène biologique et donc seuls les quantités positives sont prise en considération. Dans le théorème qui suit, on donne la bornitude des solutions du système (2.1).

**Théorème 1.** *Si l'effort de pêche  $E$  est uniformément borné, alors le système (2.1) est uniformément borné.*

*Démonstration.* On considère la fonction  $X(t) = N_1(t) + N_2(t) + \frac{\alpha}{\beta}P(t)$ .

Sachant que  $0 \leq N_1(t) \leq k$  et que  $0 \leq N_2(t) \leq l$ , un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &\leq rN_1 + sN_2 - \frac{\alpha D}{\beta}P \\ &\leq (r + D)(k + \varepsilon_1) + (s + D)(l + \varepsilon_2) - DX. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est réécrite sous la forme

$$\frac{dX}{dt} + DX \leq \varepsilon,$$

où  $\varepsilon = (r + D)(k + \varepsilon_1) + (s + D)(l + \varepsilon_2)$ ,  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}^+$ .

On applique la théorie des inégalités différentielles [3], ce qui nous mène à obtenir

$$0 < X(t) \leq X(0)e^{-Dt} + \frac{\varepsilon(1 - e^{-Dt})}{D}.$$

Remarquons que pour  $t \rightarrow \infty$ , nous avons maintenant  $0 < X(t) \leq \frac{\varepsilon}{D}$ .

Étant donné que  $\varepsilon$  et  $D$  sont positifs, la conclusion ci-dessus montre que la fonction  $X$  est uniformément limitée dans la région positive. Encore une fois, après avoir pris en compte l'effort de pêche  $E$  qui doit avoir une borne inférieure et supérieure, respective.

Ainsi, toutes les solutions du système (2.1) sont uniformément bornés.  $\square$

La dynamique du modèle fait référence à la façon dont un modèle se comporte et évolue au fil du temps en réponse aux entrées. Comprendre la dynamique du modèle est important pour l'utiliser efficacement et l'améliorer. Cela implique souvent l'analyse de ses différentes composantes et des interactions entre elles pour identifier les points forts et les faiblesses du modèle.

## 2.2 DYNAMIQUE DU MODÈLE

Dans cette partie, nous étudions l'existence et la stabilité des points d'équilibre du système (2.1) dans le premier quadrant fermé.

### 2.2.1 Point(s) d'équilibre

Tout d'abord, nous trouverons les états d'équilibre positifs du modèle qui sont biologiquement réalisables.

Le point  $(N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$  est un équilibre du système (2.1) si et seulement si

$$rN_1^* \left(1 - \frac{N_1^*}{k}\right) - \sigma_1 N_1^* + \sigma_2 N_2^* = 0, \quad (2.2)$$

$$sN_2^* \left(1 - \frac{N_2^*}{l}\right) + \sigma_1 N_1^* - \sigma_2 N_2^* - \frac{\alpha N_2^* P^*}{a + N_2^*} - qN_2^* E^* = 0, \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\beta N_2^*}{a + N_2^*} - D - \gamma P^*\right) P^* = 0, \quad (2.4)$$

$$\mu(q(p - \sigma)N_2^* - c)E^* = 0. \quad (2.5)$$

De l'équation (2.5), on obtient :

$$E^* = 0 \quad \text{ou} \quad N_2^* = \frac{c}{q(p - \sigma)}.$$

De l'équation (2.4), on obtient :

$$P^* = 0 \quad \text{ou} \quad P^* = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\beta N_2^*}{a + N_2^*} - D \right).$$

Le système (2.1) admet donc plusieurs points d'équilibre. Pour des raisons biologiques, nous ne considérons que les points positifs. De plus, puisque les cas  $E^* = 0$  (sans effort de pêche) ou  $P^* = 0$  (sans prédateur) ne reflètent pas la réalité, nous les négligerons et nous nous concentrerons uniquement sur le point d'équilibre intérieur  $M^* (N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$ , qui est donné par :

$$\begin{aligned} N_2^* &= \frac{c}{q(p - \sigma)}, \\ P^* &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\beta N_2^*}{a + N_2^*} - D \right), \\ E^* &= \frac{1}{q} \left( r \frac{N_1^*}{N_2^*} \left( 1 - \frac{N_1^*}{k} \right) + s \left( 1 - \frac{N_2^*}{l} \right) - \frac{\alpha P^*}{a + N_2^*} \right), \end{aligned}$$

où  $N_1^*$  est la racine positive de l'équation suivante :

$$\Gamma(\chi) = \frac{r}{k} \chi^2 - (r - \sigma_1) \chi - \frac{c\sigma_2}{q(p - \sigma)} = 0. \quad (2.6)$$

Remarquons que  $\Gamma(0) = -\frac{c\sigma_2}{q(p - \sigma)} < 0$ , et donc, la fonction  $\Gamma$  admet une seule racine positive que nous notons par  $N_1^*$ .

**Remarque 2.** *Le point d'équilibre intérieur n'est possible que si toutes les composantes de  $M^* (N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$  sont supérieures strictement à zéro. Cela s'exprime par les conditions suivantes :*

$$H_1) \quad p > \sigma.$$

$$H_2) \quad \frac{\beta N_2^*}{a + N_2^*} > D.$$

$$H_3) \quad r \frac{N_1^*}{N_2^*} \left( 1 - \frac{N_1^*}{k} \right) + s \left( 1 - \frac{N_2^*}{l} \right) > \frac{\alpha P^*}{a + N_2^*}.$$

Avant de commencer l'étude de la stabilité locale de l'équilibre  $M^*$ , il est important de comprendre comment de petites perturbations peuvent affecter le comportement d'un système dynamique. En examinant la réponse du système aux perturbations, nous pourrions déterminer si le système est stable ou instable à cet équilibre, ce qui est essentiel pour comprendre le comportement global du système. Dans ce qui suit, nous allons nous concentrer sur l'étude de la stabilité locale de l'équilibre  $M^*$ , qui nous permet de mesurer cette influence et de déterminer si le système est stable ou instable à cet équilibre.

### 2.2.2 Stabilité locale de l'équilibre $M^*$

Nous fournissons ici les conditions de stabilité locale pour le point d'équilibre  $M^*$  du système (1.2) sur la base de la technique de linéarisation standard, puis nous utilisons le célèbre critère de Routh-Hurwitz (0.1) pour déterminer les propriétés des valeurs propres de la matrice associée à la version linéarisée.

Nous avons l'équation caractéristique du système (2.1) en  $M^* (N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$  écrite comme suit :

$$\lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4 = 0, \quad \text{où } c_i = x_i + y_i, \text{ pour } (i = 1, 2, 3, 4). \quad (2.7)$$

Avec

$$\begin{aligned} x_1 &= a_4 - a_3 - a_1, & x_2 &= a_5 - a_4(a_1 + a_3), \\ x_3 &= a_4 a_5 - a_1 a_2, & x_4 &= -a_1 a_2 a_4, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_1 &= -a_6, & y_2 &= a_6 \left( a_1 + a_3 + \frac{a\alpha P^*}{(a + N_2^*)^2} \right), \\ y_3 &= -a_6 \left( a_5 + \frac{a\alpha a_1 P^*}{(a + N_2^*)^2} \right), & y_4 &= a_1 a_2 a_6, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{rN_1^*}{k} - \frac{\sigma_2 N_2^*}{N_1^*}, & a_2 &= (p - \sigma) q^2 \mu N_2^* E^*, \\ a_3 &= \frac{\alpha N_2^* P^*}{(a + N_2^*)^2} - \frac{\sigma_1 N_1^*}{N_2^*} - \frac{sN_2^*}{l}, & a_4 &= D + 2\gamma P^*, \\ a_5 &= a_2 - \sigma_1 \sigma_2 + a_1 a_3, & a_6 &= \frac{\beta N_2^*}{a + N_2^*} = D + \gamma P^*. \end{aligned}$$

Nous avons maintenant le théorème qui nous garanti la stabilité locale de l'équilibre intérieur  $M^* (N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$ .

**Théorème 2.** *Si  $a_3 \leq 0$  et  $a_1 a_3 > \sigma_1 \sigma_2$ , alors le point d'équilibre intérieur positif  $M^*$  est localement asymptotiquement stable pour le système (2.1).*

*Démonstration.* Pour démontrer la stabilité locale de  $M^*$ , nous allons utiliser le critère de Routh-Hurwitz (0.1). Pour que  $M^*$  soit stable, il suffit que :

1.  $c_1 > 0, c_4 > 0$ ;
2.  $c_1 c_2 - c_3 > 0$ ;
3.  $c_1 c_2 c_3 - c_1^2 c_4 - c_3^2 > 0$ .

Remarquons d'abord que si  $a_3 \leq 0$  et  $a_5 \geq 0$  alors tous les  $c_i > 0$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ . Nous remarquons également que lorsque  $a_5 - a_2 \geq 0$  (ce qui équivaut à  $a_1 a_3 > \sigma_1 \sigma_2$ ), alors  $c_1 c_2 - c_3 > 0$ . Ainsi avec  $a_3 \leq 0$ , la condition précédente donne  $c_1 c_2 c_3 - c_1^2 c_4 - c_3^2 > 0$ .

Les conditions du critère de Routh-Hurwitz sont toutes vérifiées, ce qui implique que l'équilibre  $M^*$  est localement asymptotiquement stable.  $\square$

La stabilité globale est un enjeu majeur dans de nombreuses applications pratiques, notamment dans le domaine de la gestion des ressources naturelles. Dans ce qui suit, nous allons approfondir notre étude de la stabilité en considérant la dynamique du système dans son ensemble et en examinant les conditions requises pour assurer sa stabilité globale.

### 2.2.3 Stabilité globale de l'équilibre $M^*$

Nous considérons la stabilité asymptotique globale pour le point d'équilibre intérieur  $M^*$  à l'aide de la méthode des fonctions de Lyapunov (0.3).

Dans le théorème qui suit, on donne des conditions suffisantes pour la stabilité globale du point d'équilibre intérieur  $M^*$ .

**Théorème 3.** *Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1.  $T(0) > 0$ , où  $T(N_2) = \frac{s}{l} - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_2}{N_1^*} + \frac{\sigma_1}{N_2^*} \right) - \frac{\alpha P^*}{(a + N_2^*)(a + N_2)}$ .
2.  $r \geq \frac{k}{2} \left( \frac{\sigma_2}{N_1^*} + \frac{\sigma_1}{N_2^*} \right)$ .

Alors, le point d'équilibre intérieur positif  $M^*$  est globalement asymptotiquement stable pour le système (2.1).

*Démonstration.* Le point d'équilibre intérieur positif  $M^* (N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$  est globalement asymptotiquement stable. Évidemment,  $M^* (N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$  satisfait les égalité

$$\left\{ \begin{array}{l} r N_1^* \left( 1 - \frac{N_1^*}{k} \right) - \sigma_1 N_1^* + \sigma_2 N_2^* = 0, \\ s N_2^* \left( 1 - \frac{N_2^*}{l} \right) + \sigma_1 N_1^* - \sigma_2 N_2^* - \frac{\alpha N_2^* P^*}{a + N_2^*} - q N_2^* E^* = 0, \\ \left( \frac{\beta N_2^*}{a + N_2^*} - D - \gamma P^* \right) P^* = 0, \\ \mu (q (p - \sigma) N_2^* - c) E^* = 0. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Nous montrons maintenant la stabilité globale du point d'équilibre intérieur  $M^*$  en construisant la fonction de Lyapunov  $V(N_1, N_2, P, E) : \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , donné par :

$$V(N_1, N_2, P, E) = \sum_{i=1}^4 V_i(N_1, N_2, P, E), \quad (2.9)$$

où

$$\begin{aligned} V_1(N_1, N_2, P, E) &= N_1 - N_1^* - N_1^* \ln \frac{N_1}{N_1^*}, & V_2(N_1, N_2, P, E) &= N_2 - N_2^* - N_2^* \ln \frac{N_2}{N_2^*}, \\ V_3(N_1, N_2, P, E) &= \lambda_1 \left( P - P^* - P^* \ln \frac{P}{P^*} \right), & V_4(N_1, N_2, P, E) &= \lambda_2 \left( E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*} \right), \end{aligned}$$

avec  $\lambda_i$  pour ( $i = 1, 2$ ) sont des constantes positives appropriées à déterminer dans les étapes suivantes.

D'après (2.9), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(N_1, N_2, P, E)}{\partial N_i} &= 1 - \frac{N_i^*}{N_i}, \text{ pour } (i = 1, 2), \\ \frac{\partial V(N_1, N_2, P, E)}{\partial P} &= \lambda_1 \left( 1 - \frac{P^*}{P} \right), \quad \frac{\partial V(N_1, N_2, P, E)}{\partial E} = \lambda_2 \left( 1 - \frac{E^*}{E} \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

ce qui montre que l'équilibre positif  $M^* (N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$  est le seul extremum de la fonction  $V(N_1, N_2, P, E)$  dans le quadrant positif [32]. On peut alors facilement vérifier que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{N_1 \rightarrow 0} V(N_1, N_2, P, E) = \lim_{N_2 \rightarrow 0} V(N_1, N_2, P, E) = \lim_{P \rightarrow 0} V(N_1, N_2, P, E) = \lim_{E \rightarrow 0} V(N_1, N_2, P, E) = +\infty, \\ \lim_{N_1 \rightarrow +\infty} V(N_1, N_2, P, E) = \lim_{N_2 \rightarrow +\infty} V(N_1, N_2, P, E) = \lim_{P \rightarrow +\infty} V(N_1, N_2, P, E) = \lim_{E \rightarrow +\infty} V(N_1, N_2, P, E) = +\infty. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

En combinant (2.10) et (2.11), on observe que l'équilibre positif est le minimum global. De plus, on peut vérifier que la fonction  $V(N_1, N_2, P, E)$  est nulle en  $M^*(N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$ . Alors nous avons  $V(N_1, N_2, P, E) \geq V(N_1^*, N_2^*, P^*, E^*) = 0$  pour tout  $(N_1, N_2, P, E) > 0$ .

La dérivée temporelle de  $V_1$  le long de la solution de système (2.1) est :

$$\frac{dV_1}{dt} = (N_1 - N_1^*) \left( rN_1^* \left( 1 - \frac{N_1^*}{k} \right) - \sigma_1 N_1^* + \sigma_2 N_2^* \right).$$

Après quelques simplifications et à l'aide de la première équation de (2.8) prend la forme suivante :

$$\frac{dV_1}{dt} = (N_1 - N_1^*) \left( -\frac{r}{k} (N_1 - N_1^*) + \sigma_2 \left( \frac{N_2}{N_1} - \frac{N_2^*}{N_1^*} \right) \right).$$

De la même manière, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} &= (N_2 - N_2^*) \left( -\frac{s}{l} (N_2 - N_2^*) + \sigma_1 \left( \frac{N_1}{N_2} - \frac{N_1^*}{N_2^*} \right) + \frac{P}{a + N_2} - \frac{P^*}{a + N_2^*} - q(E - E^*) \right), \\ \frac{dV_3}{dt} &= \lambda_1 (P - P^*) \left( \beta \left( \frac{N_2}{a + N_2} - \frac{N_2^*}{a + N_2^*} \right) - \gamma (P - P^*) \right), \\ \frac{dV_4}{dt} &= \lambda_2 (E - E^*) \mu (p - \sigma) q (N_2 - N_2^*). \end{aligned}$$

En prenant la dérivée temporelle de  $V(N_1, N_2, P, E)$  le long des trajectoires de système (2.1), après une simplification [7], nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{dV(N_1, N_2, P, E)}{dt} &= \sum_{i=1}^4 \frac{dV_i(N_1, N_2, P, E)}{dt} \\ &= (N_1 - N_1^*) \left( -\frac{r}{k} (N_1 - N_1^*) + \sigma_2 \left( \frac{N_2}{N_1} - \frac{N_2^*}{N_1^*} \right) \right) + \lambda_2 (E - E^*) \mu (p - \sigma) q (N_2 - N_2^*) \\ &\quad + (N_2 - N_2^*) \left( -\frac{s}{l} (N_2 - N_2^*) + \sigma_1 \left( \frac{N_1}{N_2} - \frac{N_1^*}{N_2^*} \right) - \alpha \left( \frac{P}{a + N_2} - \frac{P^*}{a + N_2^*} \right) - q(E - E^*) \right) \\ &\quad + \lambda_1 (P - P^*) \left( -\gamma (P - P^*) + \beta \left( \frac{N_2}{a + N_2} - \frac{N_2^*}{a + N_2^*} \right) \right) \\ &= -\left( \frac{r}{k} + \frac{\sigma_2 N_2}{N_1 N_1^*} \right) (N_1 - N_1^*)^2 - \left( \frac{s}{l} + \frac{\sigma_1 N_1}{N_2 N_2^*} - \frac{\alpha P^*}{(a + N_2)(a + N_2^*)} \right) (N_2 - N_2^*)^2 \\ &\quad + \left( \frac{\alpha \beta \lambda_1}{a + N_2^*} - \alpha \right) \left( \frac{(N_2 - N_2^*)(P - P^*)}{a + N_2} \right) + q(\lambda_2 \mu (p - \sigma) - 1) (N_2 - N_2^*) (E - E^*) \\ &\quad - \lambda_1 \gamma (P - P^*)^2 + \left( \frac{\sigma_2}{N_1^*} + \frac{\sigma_1}{N_2^*} \right) (N_1 - N_1^*) (N_2 - N_2^*). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Posons :

$$\lambda_1 = \frac{\alpha (a + N_2^*)}{a\beta}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\mu(p - \sigma)}.$$

Ainsi, l'équation (2.12) se réduit à

$$\begin{aligned} \frac{dV(N_1, N_2, P, E)}{dt} &= -\left( \frac{r}{k} + \frac{\sigma_2 N_2}{N_1 N_1^*} \right) (N_1 - N_1^*)^2 - \left( \frac{s}{l} + \frac{\sigma_1 N_1}{N_2 N_2^*} - \frac{\alpha P^*}{(a + N_2)(a + N_2^*)} \right) (N_2 - N_2^*)^2 \\ &\quad + \left( \frac{\sigma_2}{N_1^*} + \frac{\sigma_1}{N_2^*} \right) (N_1 - N_1^*) (N_2 - N_2^*) - \frac{a + N_2^*}{a\alpha\beta} \gamma (P - P^*)^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Maintenant, si aucune trajectoire des chemins de la solution ne rencontre les axes de coordonnées, nous avons toujours  $\frac{N_1}{N_2}$  et  $\frac{N_2}{N_1}$  positifs. Ainsi, à partir de (2.13) nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{dV(N_1, N_2, P, E)}{dt} &\leq -\frac{r}{k}(N_1 - N_1^*)^2 - \left( \frac{s}{l} - \frac{\alpha P^*}{(a + N_2)(a + N_2^*)} \right) (N_2 - N_2^*)^2 \\ &\quad + \left( \frac{\sigma_2}{N_1^*} + \frac{\sigma_1}{N_2^*} \right) (N_1 - N_1^*) (N_2 - N_2^*) \\ &\leq - \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_2}{N_1^*} + \frac{\sigma_1}{N_2^*} \right)} \left( (N_1 - N_1^*) - (N_2 - N_2^*) \right) \right)^2 + \left( \frac{r}{k} - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_2}{N_1^*} + \frac{\sigma_1}{N_2^*} \right) \right) (N_1 - N_1^*)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{s}{l} - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_2}{N_1^*} + \frac{\sigma_1}{N_2^*} \right) - \frac{\alpha P^*}{(a + N_2)(a + N_2^*)} \right) (N_2 - N_2^*)^2 \right]. \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses du Théorème 3, on a  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ . La preuve est achevée.  $\square$

L'analyse ci-dessus montre que l'équilibre intérieur  $M^*$  est globalement asymptotiquement stable sous certaines conditions. Si le système est stable avant la pêche, le système avec pêche ne change pas sa stabilité.

Maintenant que nous avons étudié la dynamique du système, nous allons nous intéresser à l'impact des paramètres de migration sur la densité de population et l'effort de pêche à l'équilibre. Cette analyse nous permettra de mieux comprendre comment les mouvements de population peuvent influencer la durabilité des stocks de poissons et l'activité de pêche. Dans le paragraphe suivant, nous allons étudier l'effet des paramètres de migration  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sur la dynamique du système et déterminer leur impact sur les variables clés du modèle.

## 2.3 INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE MIGRATIONS À L'ÉQUILIBRE

Dans cette partie, nous allons examiner l'impact des paramètres de migration  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sur la densité de population et sur l'effort de pêche au niveau d'équilibre intérieure  $M^* (N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$ .

En commençant par les expressions de  $N_2^*$  et  $P^*$  nous pouvons voir qu'elles sont complètement indépendantes des paramètres de migration  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Il s'agit là d'un phénomène intéressant où la migration n'a aucun effet sur la densité de population des espèces  $N_2$ . La raison en est que nous supposons que la population de prédateurs ne s'attaque qu'aux espèces  $N_2$ , et donc que l'effet de la migration est supprimé par la prédation de la population de prédateurs sur les espèces  $N_2$ . Cependant, l'expression de  $N_1^*$  et  $E^*$  dépend des deux paramètres de migration  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

Pour étudier l'impact de la migration sur la densité de la population de l'espèce  $N_1$ , nous calculons la dérivée partielle de l'expression  $N_1^*$  par rapport à  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Les résultats sont les

suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_1^*}{\partial \sigma_1} = \frac{N_1^*}{r - \frac{2rN_1^*}{k} - \sigma_1}, \\ \frac{\partial N_1^*}{\partial \sigma_2} = \frac{N_2^*}{\frac{rN_1^*}{k} + \frac{\sigma_2 N_2^*}{N_1^*}}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Ainsi, sur la base de ce calcul, nous pouvons conclure que la densité de la population de l'espèce  $N_1$  augmente toujours lorsque le paramètre de migration  $\sigma_2$  augmente et diminue lorsque  $\sigma_2$  diminue. En outre, si  $\sigma_1 < r \left(1 - \frac{2N_1^*}{k}\right)$ , alors la densité de la population  $N_1$  augmente, et si  $\sigma_1 > r \left(1 - \frac{2N_1^*}{k}\right)$ , alors la densité de la population  $N_1$  diminue. Sur la base de ce qui précède, nous pouvons résumer ces informations dans le tableau suivant :

TABLE 2.1 – Effet des paramètres de migration sur la densité de  $N_1$ .

| Paramètre de migration ( $\sigma_2$ )            | Effet sur la densité de $N_1$ |
|--|-------------------------------|
| Augmente   | Augmente                      |
| Diminue  | Diminue                       |
| Condition sur ( $\sigma_1$ )                     | Effet sur la densité de $N_1$ |
| $\sigma_1 < r \left(1 - \frac{2N_1^*}{k}\right)$ | Augmente                      |
| $\sigma_1 > r \left(1 - \frac{2N_1^*}{k}\right)$ | Diminue                       |

**Remarque 3.** *Même la densité d'une espèce, telle que  $N_1$ , peut augmenter à la suite d'une migration. Cela peut se produire lorsqu'il existe un grand nombre d'espèces  $N_1$  qui, sans migration, seraient réduites par la concurrence entre elles. Cependant, la migration peut diminuer cette concurrence intraspécifique, ce qui entraîne une augmentation de leur population.*

Ensuite, nous tentons d'examiner l'impact des paramètres de migration  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sur l'effort de pêche  $E$ . Pour ce faire, nous calculerons la dérivée partielle de l'expression  $E^*$  par rapport à  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Les résultats sont les suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial E^*}{\partial \sigma_1} = \frac{N_1^*}{qN_2^*} \left( \frac{1 - N_2^*}{\frac{rN_1^*}{k} + \frac{\sigma_2 N_2^*}{N_1^*}} \right), \\ \frac{\partial E^*}{\partial \sigma_2} = \frac{r(k - 2N_1^*)}{qk \left( \frac{rN_1^*}{k} + \frac{\sigma_2 N_2^*}{N_1^*} \right)}. \end{cases} \quad (2.15)$$

De cette façon, à l'état d'équilibre, on observe que l'effort de pêche  $E$  varie de manière monotone en fonction du paramètre de migration  $\sigma_1$ , avec une augmentation ou une diminution selon la condition du paramètre de migration  $\sigma_2$ , qui est : si  $\sigma_2 \geq \frac{N_1^*}{N_2^*} \left(1 - \frac{rN_1^*}{k}\right)$ , on a  $\frac{\partial E^*}{\partial \sigma_1} \geq 0$  et donc l'effort de pêche  $E$  augmente. Dans le cas contraire, l'effort de pêche  $E$  diminue.

En utilisant un argument similaire, nous pouvons conclure qu’au niveau d’équilibre, l’effort de pêche  $E$  augmente (diminue) de façon monotone par rapport au paramètre de migration  $\sigma_2$ , ce qui signifie : si  $N_1^* \geq \frac{k}{2}$ , on a  $\frac{\partial E^*}{\partial \sigma_2} \geq 0$  et donc l’effort de pêche  $E$  augmente. Dans le cas contraire, l’effort de pêche  $E$  diminue. Sur la base de ce qui précède, nous pouvons résumer ces informations dans le tableau suivant :

TABLE 2.2 – Effet des paramètres de migration sur l’effort de pêche  $E$ .

| Paramètre de migration | Effet sur l’effort de pêche $E$   |
|------------------------|---|
| $(\sigma_1)$           | Varie de manière monotone.<br>Augmente si $\sigma_2 \geq N_1^* / (N_2^* (1 - rN_1^* / k))$ . Diminue sinon. |
| $(\sigma_2)$           | Varie de manière monotone.<br>Augmente si $N_1^* \geq k/2$ . Diminue sinon.                                 |

Avant de discuter la politique fiscale optimale, il convient de rappeler que la fiscalité est un outil essentiel pour la régulation économique et sociale. Elle permet de financer les dépenses publiques, de redistribuer les richesses, d’encourager ou de décourager certains comportements économiques, etc... Cependant, une politique fiscale mal conçue peut avoir des effets indésirables sur l’économie et la société. C’est pourquoi il est important de réfléchir à une politique fiscale optimale qui maximise les avantages tout en minimisant les coûts, et c’est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

## 2.4 POLITIQUE FISCALE OPTIMALE

Dans le but de planifier la pêche et de préserver le développement durable de l’écosystème, nous élaborons une politique optimale de pêche visant à maximiser le revenu net total actualisé issu de la pêche en utilisant la taxation comme outil de contrôle. Nous étudions également la trajectoire tracée par les variables  $N_1(t), N_2(t), P(t)$  et  $E(t)$  avec une taxation optimale  $\sigma(t)$ .

Selon [34], on a le revenu économique net pour la société, noté  $\pi(N_1, N_2, P, E, \sigma)$ , est équivalent au revenu économique net de la pêche plus le revenu économique net pour l’organisme de régulation (voir Figure 2.1). Formellement, cela se traduit par :  $\pi(N_1, N_2, P, E, \sigma) = (p - \sigma)qN_2E - cE + \sigma qN_2E = (pqN_2 - c)E$ .



FIGURE 2.1 – Illustration du revenu économique net pour la société.

L’objectif de l’organisme de régulation est de maximiser les revenus nets actualisés totaux que la société tire de la pêche. Symboliquement, cet objectif revient à maximiser la valeur présente  $J_e$  d’un flux continu de revenus représenté par :

$$J_e = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} (qpN_2 - c) E dt, \tag{2.16}$$

où  $\delta$  est le taux d'actualisation annuel instantané, et le problème d'optimisation est soumis au système du modèle (2.1).

En utilisant le principe du maximum de Pontryagin [8], la fonction Hamiltonienne associée est construite de la manière suivante :

$$H = e^{-\delta t} (qpN_2 - c)E + \lambda_1 \left( rN_1 \left( 1 - \frac{N_1}{k} \right) - \sigma_1 N_1 + \sigma_2 N_2 \right) + \lambda_2 \left( sN_2 \left( 1 - \frac{N_2}{l} \right) + \sigma_1 N_1 - \sigma_2 N_2 - \frac{\alpha N_2 P}{a + N_2} - qN_2 E \right) + \lambda_3 \left( \frac{\beta N_2}{a + N_2} - D - \gamma P \right) P + \lambda_4 \mu (q(p - \sigma)N_2 - c)E. \quad (2.17)$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$  sont des variables adjointes.  $\sigma$  est la variable de contrôle qui satisfait les contraintes  $\sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max}$ .  $\sigma_{\max}$  et  $\sigma_{\min}$  représentent respectivement la limite supérieure et inférieure admissible de la taxation pour l'effort de pêche. En particulier,  $\sigma_{\min} < 0$  implique que les subventions ont pour effet d'augmenter le taux d'expansion de la pêche. Selon la référence [12], la condition pour qu'un contrôle singulier soit optimal peut être obtenue, c'est-à-dire  $\frac{\partial H}{\partial \sigma} = 0$ , à partir de laquelle nous obtenons :

$$\lambda_4(t) = 0. \quad (2.18)$$

Pour les variables adjointes  $\lambda_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , nous avons :

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_1}, \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_2}, \quad \frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial P}, \quad \frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial E},$$

avec

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \left( -r + \frac{2rN_1}{k} + \sigma_1 \right) \lambda_1 - \sigma_1 \lambda_2, \quad (2.19)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\sigma_2 \lambda_1 + \left( -s + \frac{2sN_2}{l} + \sigma_2 + qE + \frac{\alpha P a}{(a + N_2)^2} \right) \lambda_2 - \frac{\beta P a}{(a + N_2)^2} \lambda_3 - e^{-\delta t} p q E, \quad (2.20)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \frac{\alpha N_2}{a + N_2} \lambda_2 + \left( -\frac{\beta N_2}{a + N_2} + D + 2\gamma P \right) \lambda_3, \quad (2.21)$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = qN_2 \lambda_2 - e^{-\delta t} (qpN_2 - c). \quad (2.22)$$

D'après l'équation (2.18), il découle de l'équation (2.22) que :

$$\lambda_2(t) = e^{-\delta t} \left( p - \frac{c}{qN_2} \right). \quad (2.23)$$

Afin d'obtenir une solution d'équilibre optimale, en considérant l'équilibre intérieur  $M^*$  et en résolvant l'équation (2.20), on obtient :

$$\lambda_1(t) = \frac{\rho_1 \lambda_3 - A_1 e^{-\delta t}}{\sigma_2}, \quad (2.24)$$

où

$$\rho_1 = \frac{-\beta P^* a}{(a + N_2^*)^2}, \quad A_1 = \left( p - \frac{c}{qN_2^*} \right) \left( s - \frac{2sN_2^*}{l} - \sigma_2 - \frac{\alpha P^* a}{(a + N_2^*)^2} - \delta \right) - \frac{cE^*}{N_2^*}.$$

En utilisant l'équation (2.24), on peut réécrire l'équation (2.19) de la manière suivante :

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \rho_2 \lambda_3 - A_2 e^{-\delta t}, \quad (2.25)$$

où

$$\rho_2 = -r + 2rN_1^* + \sigma_1, \quad A_2 = \left(-r + 2rN_1^* + \sigma_1 + \frac{\delta}{\rho_1}\right)A_1 + \frac{\sigma_1\sigma_2}{\rho_1} \left(p - \frac{c}{qN_2^*}\right).$$

Il est facile d'obtenir la solution de l'équation différentielle linéaire ci-dessus

$$\lambda_3(t) = A_3 e^{-\delta t}, \quad (2.26)$$

où

$$A_3 = \frac{A_2}{\delta + \rho_2}.$$

En utilisant l'équation (2.26) et en résolvant l'équation (2.21), on peut conclure que :

$$\lambda_2(t) = \left(\frac{a + N_2^*}{\alpha N_2^*} (D + 2\gamma P^* + \gamma) - \frac{\beta}{\alpha}\right) A_3 e^{-\delta t}. \quad (2.27)$$

En substituant l'équation (2.27) à l'équation (2.23), on obtient :

$$\left(p - \frac{c}{qN_2^*}\right) = \left(\frac{a + N_2^*}{\alpha N_2^*} (D + 2\gamma P^* + \gamma) - \frac{\beta}{\alpha}\right) A_3, \quad (2.28)$$

cela fournit une équation pour la trajectoire singulière et donne les niveaux d'équilibre optimaux de la population et de l'effort de pêche  $N_1^* = N_{1\delta}$ ,  $N_2^* = N_{2\delta}$ ,  $P^* = P_\delta$  et  $E^* = E_\delta$ . Ensuite, le niveau optimal de taxation peut être obtenu comme suit :

$$\sigma_\delta = p - \frac{c}{qN_{2\delta}}. \quad (2.29)$$

À partir de l'analyse effectuée dans cette partie, nous constatons ce qui suit :

1. Selon [18], les  $\lambda_i(t)e^{\delta t}$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$  représentent des prix d'ombre inhabituels le long de la trajectoire singulière. À partir des équations (2.18), (2.24) et (2.26) on peut conclure que ces prix d'ombre restent constants sur l'intervalle de temps dans un équilibre optimal lorsqu'ils satisfont strictement la condition de transversalité à l'infini [4]. De plus, ils restent bornés lorsque  $t \rightarrow \infty$ .
2. En considérant l'équilibre intérieur, l'équation (2.23) peut être écrite comme suit :

$$\lambda_2(t)qN_2^* = e^{-\delta t} (pqN_2^* - c) = e^{-\delta t} \frac{\partial \pi}{\partial E},$$

ce qui implique que le coût total de l'utilisateur de la pêche par unité d'effort est égal aux valeurs actualisées du prix futur au niveau d'effort à l'état d'équilibre.

3. À partir des équations (2.23) et (2.27), nous obtenons :

$$pqN_2^* - c = qN_2^* \left(\frac{a + N_2^*}{\alpha N_2^*} (D + 2\gamma P + \gamma) - \frac{\beta}{\alpha}\right) A_3 \rightarrow 0 \text{ lorsque } \delta \rightarrow \infty.$$

Cela montre que le revenu économique net pour la société,  $\pi(N_{1\infty}, N_{2\infty}, P_\infty, E_\infty, \sigma_\infty) = 0$ .

Le modèle proie-prédateur avec effort de pêche est un exemple courant où la simulation numérique peut être utilisée pour étudier l'impact de l'activité humaine sur les écosystèmes. Dans ce modèle, l'ajout d'un facteur humain, en l'occurrence l'effort de pêche, peut modifier l'équilibre de l'écosystème et conduire à des conséquences inattendues. La simulation numérique permet de modéliser les interactions entre les espèces et les effets de l'activité humaine, et ainsi de mieux comprendre les dynamiques de l'écosystème.

## 2.5 SIMULATION NUMÉRIQUE

Nous procédons, dans cette partie spécifique, à des simulations numériques du système (2.1) dans le but de confirmer les résultats analytiques préalablement exposés. Ces simulations sont réalisées en utilisant le logiciel MATLAB.

Étant donné que notre étude ne repose pas sur des données réelles, nous employons des données hypothétiques dans le seul but d'illustrer les résultats théoriques. Les valeurs des paramètres du système (2.1) sont répertoriées dans le Tableau 2.3.

TABLE 2.3 – Les valeurs des paramètres correspondantes pour les simulations numériques.

|            |       |         |            |            |       |     |          |       |
|------------|-------|---------|------------|------------|-------|-----|----------|-------|
| Paramètres | $r$   | $k$     | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $s$   | $l$ | $\alpha$ | $a$   |
| Valeurs    | 0.9   | 9       | 0.2        | 0.15       | 0.8   | 14  | 2.5      | 1.2   |
| Paramètres | $q$   | $\beta$ | $D$        | $\gamma$   | $\mu$ | $p$ | $\sigma$ | $c$   |
| Valeurs    | 0.564 | 0.8     | 0.3        | 0.1        | 1.4   | 2.5 | 1.04     | 0.995 |

### 2.5.1 Effet des paramètres de migration $\sigma_1$ et $\sigma_2$

Nous effectuons d'abord l'analyse de sensibilité pour les paramètres de migration  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Les paramètres de migration du système proposé jouent un rôle important dans la dynamique du système.

Les graphiques présentés dans les Figures 2.2 et 2.3, ainsi que les valeurs fournies dans les Tableaux 2.4 et 2.5, démontrent que les paramètres de migration  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ont un impact négligeable sur la densité des populations de proies non protégées et de prédateurs. Cependant, les variations des paramètres  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  influencent significativement la densité de la population de proies protégées et l'effort de pêche.

TABLE 2.4 – Valeurs du paramètre  $\sigma_1$  et composantes de l'équilibre intérieure  $M^*$  de la Figure 2.2.

| $\sigma_1$ | $N_1^*$ | $N_2^*$ | $P^*$   | $E^*$     |
|------------|---------|---------|---------|-----------|
| 0.05       | 7.51715 | 1.58936 | 1.55834 | 0.0245279 |
| 0.5        | 4.52666 | 1.58936 | 1.55834 | 1.03998   |
| 0.9        | 1.5443  | 1.58936 | 1.55834 | 1.1643    |

TABLE 2.5 – Valeurs du paramètre  $\sigma_2$  et composantes de l'équilibre intérieure  $M^*$  de la Figure 2.3.

| $\sigma_2$ | $N_1^*$ | $N_2^*$ | $P^*$   | $E^*$     |
|------------|---------|---------|---------|-----------|
| 0.001      | 7.00227 | 1.58936 | 1.55834 | 0.341555  |
| 0.25       | 7.52782 | 1.58936 | 1.55834 | 0.0173255 |
| 0.5        | 7.62782 | 1.58936 | 1.55834 | 0.003286  |

Les conditions initiales pour les Figures 2.2 et 2.3 sont donnés dans le tableau suivant :

TABLE 2.6 – Les conditions initiales.

| Gauche |       |     |     | Milieu |       |     |     | Droite |       |     |     |
|--------|-------|-----|-----|--------|-------|-----|-----|--------|-------|-----|-----|
| $N_1$  | $N_2$ | $P$ | $E$ | $N_1$  | $N_2$ | $P$ | $E$ | $N_1$  | $N_2$ | $P$ | $E$ |
| 5      | 15    | 4   | 0.3 | 15     | 15    | 4   | 0.3 | 15     | 15    | 4   | 0.3 |

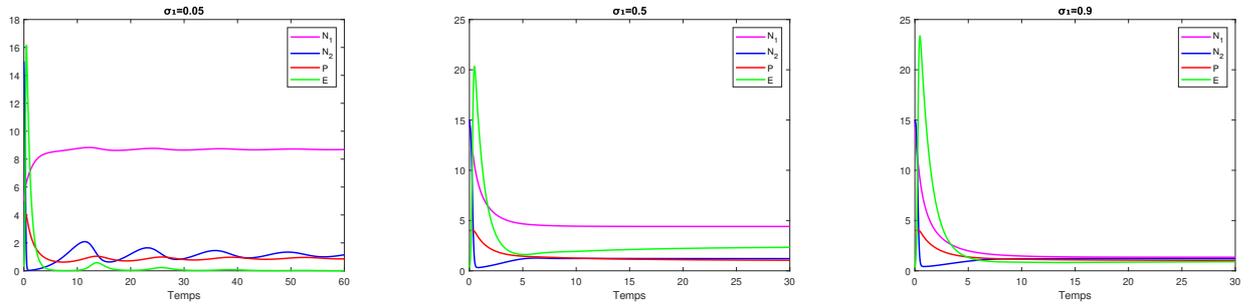


FIGURE 2.2 – Variation temporelle des populations et de l'effort de pêche pour différentes valeurs de  $\sigma_1$ .

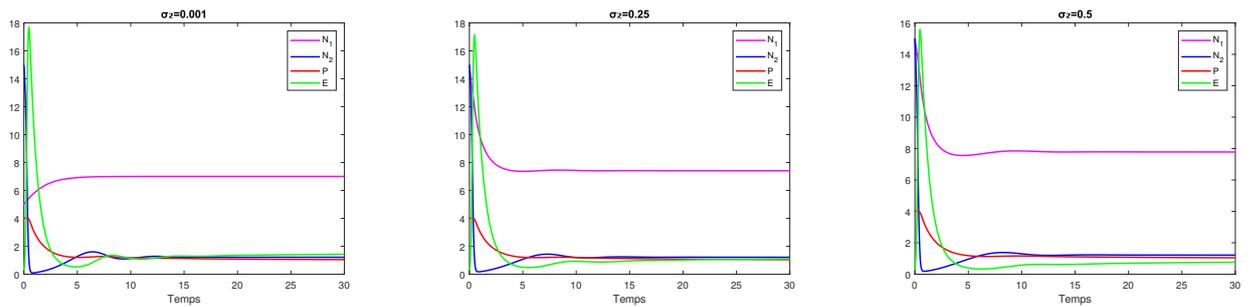


FIGURE 2.3 – Variation temporelle des populations et de l'effort de pêche pour différentes valeurs de  $\sigma_2$ .

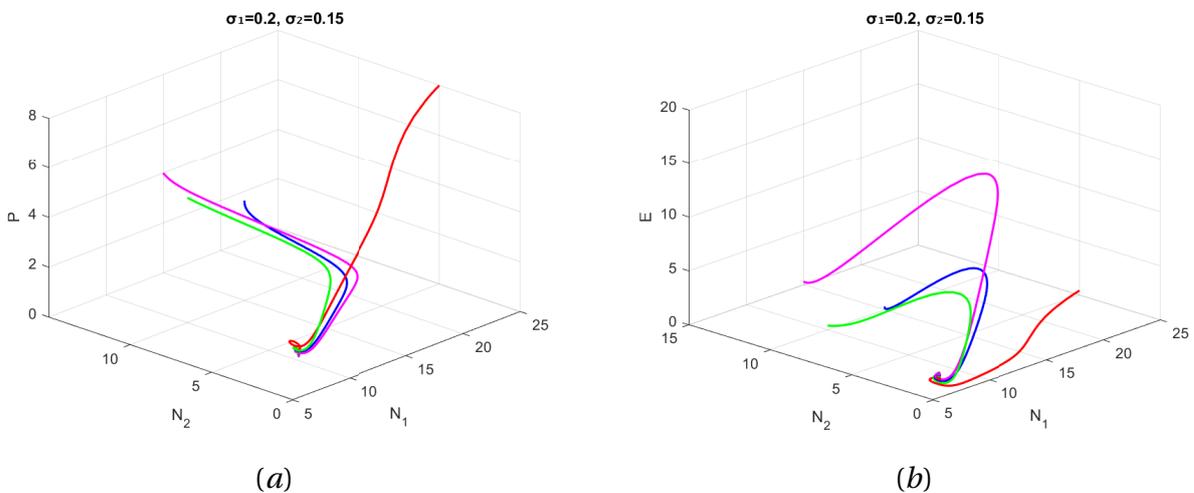


FIGURE 2.4 – Trajectoires dans l'espace des phases du système (2.1), correspondant à  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , commençant par différentes conditions initiales.

La Figure 2.4 illustre clairement que, pour chaque condition initiale  $(N_1(0), N_2(0), P(0), E(0))$ , les solutions du système (2.1) convergent vers l'équilibre intérieur  $M^* = (7.2560, 1.2086, 1.2914, 1.1643)$ . Les trajectoires démontrent de manière évidente que cet équilibre intérieur est asymptotiquement stable, confirmant ainsi le Théorème 2.

### 2.5.2 Effet du paramètre de taxation $\sigma$

Maintenant, pour montrer l'effet du paramètre de taxation  $\sigma$ . Nous avons considéré le même ensemble de paramètres que dans le Tableau 2.3 avec  $k = 100$ ,  $\gamma = 2.1$ .

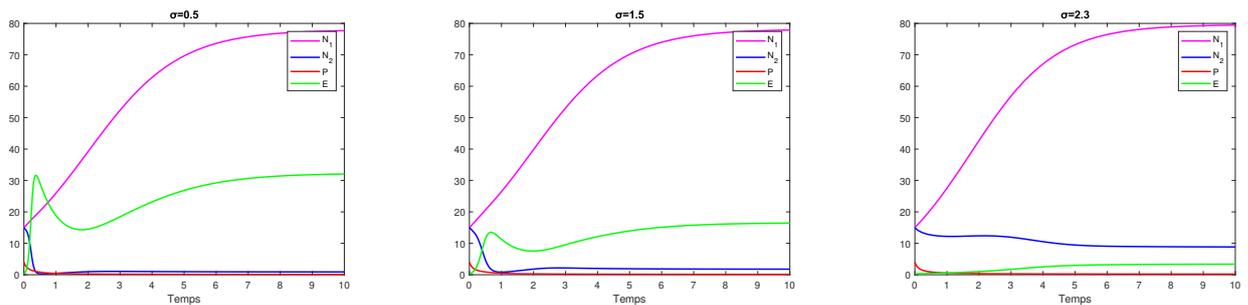


FIGURE 2.5 – Variation temporelle des trajectoires pour différentes valeurs de  $\sigma$ .

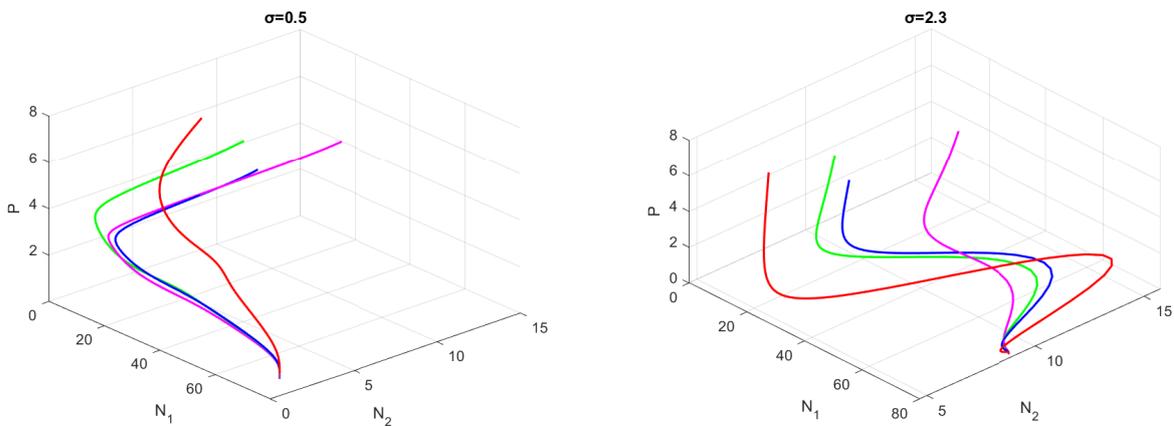


FIGURE 2.6 – Trajectoires dans l'espace des phases correspondant à la taxe optimale  $\sigma$ .

La Figure 2.5 met en évidence l'augmentation de l'ensemble des populations en fonction de la valeur croissante du paramètre de taxation  $\sigma$ . Ce résultat est facilement compréhensible étant donné que l'effort de pêche est inversement proportionnel à la taxe imposée par unité de population débarquée. Ainsi, à mesure que la valeur de la taxe  $\sigma$  augmente, l'effort de pêche diminue, ce qui a pour conséquence de protéger les populations contre la pêche.

Les conditions initiales pour la Figure 2.5 sont :  $(N_1(0), N_2(0), P(0), E(0)) = (15, 15, 4, 0.2)$ .

Sur la Figure 2.6 correspondant à la taxe optimale  $\sigma = 0.5$ ,  $\sigma = 2.3$ , on voit que même si chaque condition initiale  $(N_1(0), N_2(0), P(0))$  les solutions du système (2.1) pointent vers un équilibre intérieur  $M^* = (77.9664, 0.8822, 0.4171)$ ,  $M^* = (80.0718, 17.1447, 4.3648)$ , respectif.

### 2.5.3 Effet du coefficient intra-spécifique $\gamma$

Maintenant, pour montrer l'effet du coefficient intra-spécifique  $\gamma$ . Nous avons considéré le même ensemble de paramètres que dans le Tableau 2.3 avec  $k = 100$ .

La Figure 2.7 illustre l'impact significatif du coefficient intra-spécifique  $\gamma$  sur la dynamique de la population des prédateurs. L'augmentation de la valeur du coefficient  $\gamma$  entraîne une diminution de la population des prédateurs, ce qui réduit le taux de prédation et conduit à une augmentation des populations de proies. Les conditions initiales pour la Figure 2.7 sont :  $(N_1(0), N_2(0), P(0), E(0)) = (15, 15, 4, 0.2)$ .

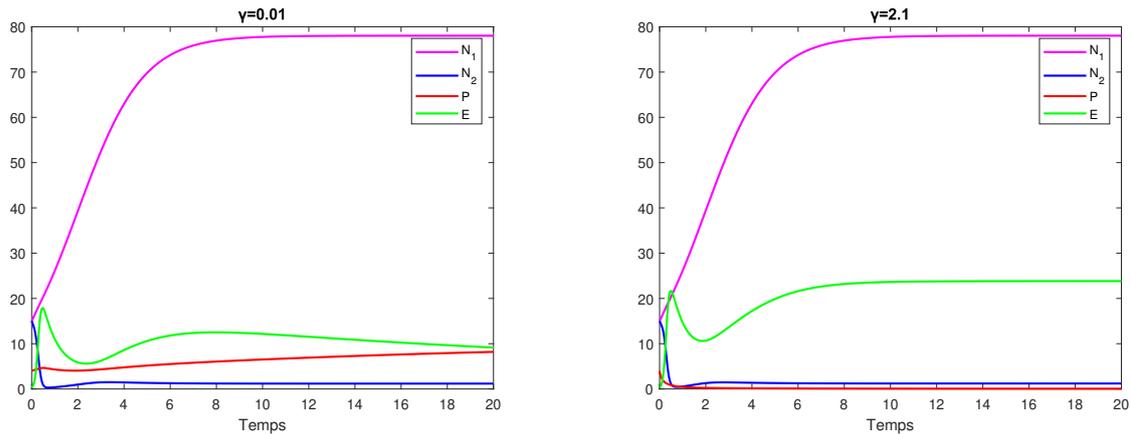


FIGURE 2.7 – Variation temporelle des trajectoires pour deux valeurs de  $\gamma$ .

Dans la Figure 2.8, correspondant au coefficient intra-spécifique  $\gamma = 0.01$ ,  $\gamma = 2.1$ , on peut clairement observer que pour chaque condition initiale  $(N_1(0), N_2(0), P(0))$ , les solutions du système (2.1) convergent vers l'équilibre intérieur  $M^* = (77.1197, 1.3719, 0.0103)$  et  $M^* = (78.0631, 1.3369, 12.1072)$ , respectivement. Ceci est en accord avec les résultats de l'étude.

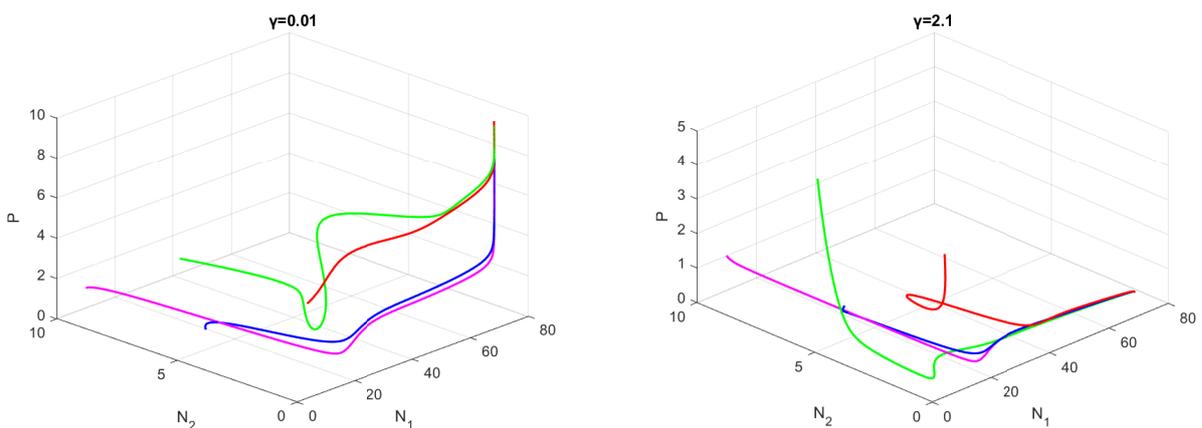


FIGURE 2.8 – Trajectoires dans l'espace des phases correspondant au coefficient intra-spécifique  $\gamma$ .

Pour résumer, l'étude de notre système pour  $\tau = 0$  a permis de constater que les solutions sont uniformément bornées et que le système possède un point d'équilibre intérieur. Bien

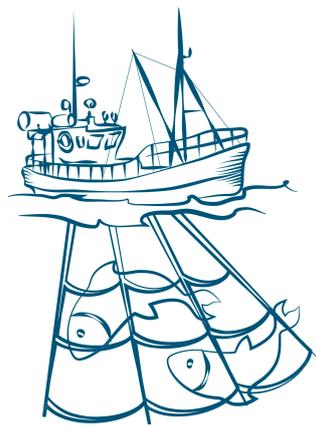
que le système puisse avoir plusieurs points d'équilibre, il est crucial de comprendre la dynamique autour du point d'équilibre intérieur. Ces résultats sont importants pour comprendre la dynamique du système dans des conditions sans retard et peuvent servir de base pour des analyses plus approfondies qui prennent en compte le retard.



### Conclusion

Ce chapitre se concentre sur l'analyse du modèle sans retard, tout en introduisant l'analyse du modèle avec retard qui sera abordée dans le chapitre suivant. L'analyse du modèle sans retard a démontré que les solutions du système sont uniformément bornées, à condition que l'effort de pêche soit également borné. De plus, cette étude a révélé l'existence d'un point d'équilibre intérieur et a analysé la dynamique du système autour de ce point. Bien que le système puisse avoir plusieurs points d'équilibre, nous avons focalisé notre étude sur le point d'équilibre intérieur en raison de son importance fondamentale. Ces résultats sont pertinents pour la compréhension des dynamiques des systèmes proie-prédateur avec réserve et pour orienter les décisions de gestion et de conservation des écosystèmes marins.

Dans le prochain chapitre, nous approfondirons l'analyse du modèle avec retard, en prenant en compte les effets des réponses temporelles des populations proie-prédateur aux changements environnementaux. Cette analyse nous permettra d'explorer les dynamiques complexes et les comportements non linéaires engendrés par le retard, fournissant ainsi une compréhension approfondie du système et des recommandations supplémentaires pour la gestion des écosystèmes marins.



Dans ce chapitre, l'objet d'étude est la dynamique d'un système spécifique (1.17) qui implique un temps de retard. En d'autres termes, le système est traité en prenant en compte un retard dans les réponses fonctionnelles de ses composants. Le but est d'analyser comment ce retard affecte la dynamique du système et de comprendre ses implications.

Le modèle est représenté par le système d'équations suivant, où les variables  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $P$  et  $E$  et les paramètres correspondants ont été définis dans le Chapitre 1, et seront utilisés tout au long de ce chapitre pour analyser les données :

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = rN_1 \left(1 - \frac{N_1}{k}\right) - \sigma_1 N_1 + \sigma_2 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = sN_2 \left(1 - \frac{N_2}{l}\right) + \sigma_1 N_1 - \sigma_2 N_2 - \frac{\alpha N_2 P}{a + N_2} - qN_2 E, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{\beta N_2(t-\tau) P(t-\tau)}{a + N_2(t-\tau)} - DP - \gamma P^2, \\ \frac{dE}{dt} = \mu(q(p-\sigma)N_2 - c)E. \end{cases} \quad (3.1)$$

Les conditions initiales du système d'équations sont données par,  $(N_1(t), N_2(t), P(t), E(t)) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \phi_4(t))$ , où  $\phi_i \in C_+ = C([- \tau, 0]; \mathbb{R}_+^4)$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) et  $t \in [- \tau, 0]$ .

### 3.1 STABILITÉ ET ANALYSE DE BIFURCATION

Pour comprendre la dynamique du modèle proposé et détecter l'effet du retard temporel dans le modèle proposé, nous étudions la stabilité des équilibres, puis nous développons la théorie des bifurcations pour décrire comment de petits paramètres peuvent changer le comportement qualitatif du modèle.

### 3.1.1 Stabilité au point d'équilibre intérieur $M^*$

Dans le Chapitre 2, nous avons déjà examiné la stabilité du point d'équilibre intérieur  $M^*$  lorsque  $\tau$  était nul. Cependant, dans cette partie, nous allons étudier la stabilité du point d'équilibre intérieur  $M^*$  dans le cas où un retard discret  $\tau$  est présent. Cette extension de l'analyse est importante car elle permet de prendre en compte les effets du retard dans le système et d'évaluer l'influence de cette composante sur la stabilité du système.

L'existence d'équilibre intérieur est confirmée lorsque  $(H_j)$  est vrai pour  $(j = 1, 2, 3)$  (voir Remarque 2). Les résultats de stabilité pour  $M^* (N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$  sont présentés ci-dessous.

La jacobienne  $J$  qui décrit les dynamiques locales du système (3.1) s'écrit comme suit :

$$J(M^*) = \begin{pmatrix} a_1 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & a_3 & -n & -qN_2^* \\ 0 & 0 & -a_4 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-\lambda\tau},$$

$$n = \frac{\alpha N_2^*}{a + N_2^*}, \quad j = \mu(p - \sigma)qE^*, \quad h = \frac{a\beta P^*}{(a + N_2^*)^2}.$$

Les expressions spécifiques de  $a_i$  avec  $i = 1, 3, 4, 6$  sont données précédemment (à la page 19).

L'équation caractéristique s'obtient par le calcul de la déterminante de la matrice  $(J(M^*) - \lambda I)$ , où  $I$  est la matrice identité de dimension 4 définie comme une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale principale et des 0 ailleurs, ce qui signifie que  $I_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et  $I_{i,j} = 0$  sinon. Ainsi,

$$\det(J(M^*) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & a_3 - \lambda & -n & -qN_2^* \\ 0 & he^{-\lambda\tau} & -a_4 + a_6e^{-\lambda\tau} - \lambda & 0 \\ 0 & j & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Après avoir effectué les calculs nécessaires, nous avons obtenu l'équation caractéristique autour de l'équilibre  $M^*$ , qui est donnée par :

$$\lambda^4 + x_1\lambda^3 + x_2\lambda^2 + x_3\lambda + x_4 + (y_1\lambda^3 + y_2\lambda^2 + y_3\lambda + y_4)e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (3.2)$$

où  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) et  $\sum_{i=1}^4 y_i^2 \neq 0$ . Les expressions spécifiques de  $x_i$  et  $y_i$  sont données précédemment (à la page 19)

Pour analyser la stabilité du système, nous définissons  $\lambda(\tau) \in \mathbb{C} : \lambda(\tau) = \nu(\tau) + i\omega(\tau)$  où  $\nu(\tau), \omega(\tau) \in \mathbb{R}$ , comme une valeur propre de (3.2) en  $M^*$ . La stabilité de  $M^*$  changera lorsque la partie réelle de  $\lambda$  sera nul, c'est-à-dire  $\Re(\lambda) = \nu(\tau) = 0$ . Afin de déterminer quand ce changement de stabilité se produit, nous pouvons substituer  $\lambda(\tau) = i\omega(\tau)$  (complexe pure) dans (3.2) :

$$(i\omega)^4 + x_1(i\omega)^3 + x_2(i\omega)^2 + x_3(i\omega) + x_4 + (y_1(i\omega)^3 + y_2(i\omega)^2 + y_3(i\omega) + y_4)e^{-(i\omega)\tau} = 0.$$

Dans notre raisonnement mathématique, nous prenons en considération les éléments suivants :  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$  et la formule d'Euler :  $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ . La fonction sin

est impaire, donc  $\sin(-x) = -\sin(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $\cos$  est paire, donc  $\cos(-x) = \cos(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ainsi,  $e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos(x) - i \sin(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . En conséquence, nous avons :

$$\omega^4 - x_1 \omega^3 i - x_2 \omega^2 + x_3 \omega i + x_4 + (\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) (-y_1 \omega^3 i - y_2 \omega^2 + y_3 \omega i + y_4) = 0. \quad (3.3)$$

Lorsque  $\tau > 0$ , nous supposons que  $\pm i\omega$  ( $\omega > 0$ ) représente une paire de racines purement imaginaires de l'équation (3.2). En séparant les parties réelles et imaginaires, nous obtenons :

$$\begin{cases} \omega^4 - x_2 \omega^2 + x_4 &= (y_2 \omega^2 - y_4) \cos(\omega\tau) + (y_1 \omega^3 - y_3 \omega) \sin(\omega\tau), \\ -x_1 \omega^3 + x_3 \omega &= (y_1 \omega^3 - y_3 \omega) \cos(\omega\tau) - (y_2 \omega^2 - y_4) \sin(\omega\tau). \end{cases} \quad (3.4)$$

En mettant au carré et en additionnant, on obtient :

$$\omega^8 + (x_1^2 - 2x_2 - y_1^2) \omega^6 + (x_2^2 + 2x_4 - 2x_1 x_3 - y_2^2 + 2y_1 y_3) \omega^4 + (x_3^2 - 2x_2 x_4 + 2y_2 y_4 - y_3^2) \omega^2 + x_4^2 - y_4^2 = 0.$$

Posons  $z = \omega^2$  et notons :

$$\begin{aligned} l_1 &= x_1^2 - 2x_2 - y_1^2, & l_2 &= x_2^2 + 2x_4 - 2x_1 x_3 - y_2^2 + 2y_1 y_3, \\ l_3 &= x_3^2 - 2x_2 x_4 + 2y_2 y_4 - y_3^2, & l_4 &= x_4^2 - y_4^2. \end{aligned}$$

Alors, l'équation ci-dessus peut être réécrite sous la forme suivante :

$$F(z) = z^4 + l_1 z^3 + l_2 z^2 + l_3 z + l_4 = 0. \quad (3.5)$$

Nous avons  $F(0) = l_4$ ,  $\lim_{z \rightarrow +\infty} F(z) = +\infty$ , et  $F'(z) = 4z^3 + 3l_1 z^2 + 2l_2 z + l_3$ .

Maintenant, on différenciant (3.2) par rapport à  $\tau$  et on fixe  $\nu = 0$ , on obtient :

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \Pi \left[ \frac{dF}{dz} \right]_{z=\omega^2} (> 0), \text{ où } \Pi \text{ est une constante positive.} \quad (3.6)$$

Nous constatons que  $l_4$  est toujours positif. Par conséquent, il peut y avoir quatre, deux ou zéro occurrences de  $\omega$  qui satisfont la condition énoncée dans l'équation (3.5). En supposant que  $\omega$  donne une valeur positive pour l'équation  $F(\omega^2) = 0$ , nous présentons et démontrons le théorème suivant.

**Théorème 4.** *Supposons  $a_3 \leq 0$  et  $a_1 a_3 > \sigma_1 \sigma_2$  sont vérifiées. Si l'équation  $F(\omega^2) = 0$  a une racine positive  $\omega$ , alors  $M^*$  subit une bifurcation de Hopf lorsque  $\tau$  passe par  $\tau_0^*$  où  $\tau_0^*$  est le retard critique et est calculé en résolvant l'équation (3.4) qui est exprimée par*

$$\tau_\kappa^* = \frac{1}{\omega^*} \left[ \arccos \left( \frac{(\omega^{*4} - x_2 \omega^{*2} + x_4)(y_2 \omega^{*2} - y_4) + (x_3 \omega^* - x_1 \omega^{*3})(y_1 \omega^{*3} - y_3 \omega^*)}{(y_2 \omega^{*2} - y_4)^2 + \omega^{*2} (y_1 \omega^{*2} - y_3)^2} \right) + 2\kappa\pi \right] \quad (3.7)$$

pour  $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

*Démonstration.* Les conditions  $a_3 \leq 0$  et  $a_1 a_3 > \sigma_1 \sigma_2$  étant remplies en  $M^*$ , le système est stable localement en  $M^*$  pour  $\tau = 0$ . Cependant, si l'équation  $F(\omega^2) = 0$  admet une racine positive  $\omega$ , alors le système aura au moins une valeur propre positive et ne pourra pas être stable en  $M^*$  pour tout  $\tau > 0$ . Par conséquent, dans un tel cas, il y aura un changement de stabilité.

En supposant que  $\omega^*$  est l'une des racines positives de l'équation  $F(\omega^2) = 0$ , alors pour cette  $\omega = \omega^*$ , nous avons  $\frac{d\lambda}{d\tau} = \Pi \left[ \frac{dF}{dz} \right]_{z=\omega^{*2}} (> 0)$ , où  $\Pi$  est une constante positive.

Par conséquent, la condition de transversalité pour la bifurcation de Hopf est remplie, et cette bifurcation de Hopf se produira lorsque  $\tau$  passera par  $\tau_0^*$ , où  $\tau_0^*$  est obtenu en résolvant (3.6) et a la forme de la formule (3.7).  $\square$

La bifurcation de Hopf est un phénomène important dans les systèmes dynamiques non linéaires, qui peut conduire à l'apparition de solutions périodiques. Dans la partie suivante, nous allons étudier la stabilité et la direction de cette bifurcation dans le contexte du système (3.1). En analysant ces dynamiques complexes, nous serons en mesure de mieux comprendre les effets de la bifurcation de Hopf et son impact sur les comportements du système.

### 3.1.2 Stabilité et direction de la bifurcation de Hopf

Dans le paragraphe précédente, nous avons déjà obtenu des conditions suffisantes qui garantissent que le système (3.1) subit une bifurcation de Hopf en  $M^*(N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$ .

Dans cette partie, nous supposons qu'une bifurcation de Hopf pour le système (3.1) se produira à l'état stable positif  $M^*(N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$  où  $\tau = \tau_0^*$ . Ensuite, nous établirons les solutions périodiques bifurquant de  $M^*(N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$  à la valeur critique  $\tau = \tau_0^*$  en utilisant la théorie de la forme normale, une méthode qui permet d'approximer les solutions périodiques du système dynamique près de la bifurcation de Hopf en utilisant des fonctions trigonométriques, ainsi que l'argument de la variété centrale présenté par Hassard et al. [14], qui permet quant à lui d'approximer les solutions périodiques en utilisant des fonctions polynomiales. De plus, nous utiliserons les formules déterminant la direction de la bifurcation de Hopf et la stabilité des solutions périodiques bifurquées du système (3.1) à  $M^*(N_1^*, N_2^*, P^*, E^*)$ .

#### L'opérateur d'équation différentielle

Soit  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))^T \in \mathbb{R}^4$  le vecteur d'état du système, où  $u_1 = N_1 - N_1^*$ ,  $u_2 = N_2 - N_2^*$ ,  $u_3 = P - P^*$ ,  $u_4 = E - E^*$  sont les variables d'état. En utilisant la notation simplifiée  $\bar{u}_i(t) = u_i(\tau t)$ , avec  $\tau = \tau_0^* + \zeta$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ , le système (3.1) peut être réécrit comme une équation différentielle fonctionnelle dans  $C = C([-1, 0], \mathbb{R}^4)$  :

$$\dot{u}(t) = L_\zeta(u_t) + f(\zeta, u_t), \quad (3.8)$$

où  $u_t(\theta) = u(t + \theta) \in \mathbb{R}^4$  est la fonction de retard correspondant au vecteur d'état  $u(t)$ ,  $L_\zeta$  est un opérateur linéaire de  $C$  à  $\mathbb{R}^4$  qui décrit comment les différentes espèces interagissent les unes avec les autres et évoluent dans le temps, et qui est défini par :

$$L_\zeta(\phi) = (\tau_0^* + \zeta) \begin{pmatrix} a_1 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & a_3 & -n & -qN_2^* \\ 0 & 0 & -a_4 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ \phi_3(0) \\ \phi_4(0) \end{pmatrix} + (\tau_0^* + \zeta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(-1) \\ \phi_2(-1) \\ \phi_3(-1) \\ \phi_4(-1) \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

et  $f$  est une fonction de réaction de  $\mathbb{R} \times C$  à  $\mathbb{R}^4$  qui décrit comment les différentes espèces réagissent aux changements de leur environnement et de leur propre état actuel. Elle est

définie par :

$$f(\zeta, \phi) = (\tau_0^* + \zeta) \begin{pmatrix} -\frac{r}{k}\phi_1^2(0) \\ -\frac{s}{l}\phi_2^2(0) - \alpha R_1 - q\phi_2(0)\phi_4(0) \\ \beta R_2 - \gamma\phi_3^2(0) \\ m\phi_2(0)\phi_4(0) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

où  $\phi(\theta) = (\phi_1(\theta), \phi_2(\theta), \phi_3(\theta), \phi_4(\theta))^T \in C$ ,  $m = \mu(p - \sigma)q$ . Les opérateurs différentiels  $R_1$  et  $R_2$  sont définis par

$$R_1 = \sum_{i+j \geq 2} \frac{1}{i!j!} \left[ \frac{\partial^{i+j} Q(N_2, P)}{\partial N_2^i \partial P^j} \right]_{(N_2, P) = (N_2^*, P^*)} \times \phi_2^i(0)\phi_3^j(0), \quad (3.11)$$

et

$$R_2 = \sum_{i+j \geq 2} \frac{1}{i!j!} \left[ \frac{\partial^{i+j} Q(N_2, P)}{\partial N_2^i \partial P^j} \right]_{(N_2, P) = (N_2^*, P^*)} \times \phi_2^i(-1)\phi_3^j(-1), \quad (3.12)$$

et agissent sur une fonction  $Q(N_2, P)$  qui dépend de deux variables,  $N_2$  et  $P$ . La fonction  $Q(N_2, P)$  est définie par  $Q(N_2, P) = \frac{N_2 P}{a + N_2}$ .

Par le théorème de représentation de Riesz (Hale et Verduyn [13]), il existe une fonction matricielle dont les composantes sont des fonctions de variation bornée  $\eta(\theta, \zeta)$  pour  $\theta \in [-1, 0]$  tel que :

$$L_\zeta(\phi) = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \zeta)\phi(\theta), \quad \text{pour } \phi \in C. \quad (3.13)$$

En effet, si l'on choisit une fonction de variation bornée définie par :

$$\eta(\theta, \zeta) = (\tau_0^* + \zeta) \begin{pmatrix} a_1 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & a_3 & -n & -qN_2^* \\ 0 & 0 & -a_4 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\theta) - (\tau_0^* + \zeta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\theta + 1), \quad (3.14)$$

où  $\delta$  est la fonction delta de Dirac définie par :

$$\delta(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \neq 0, \\ 1, & \theta = 0. \end{cases}$$

De plus, on peut définir une application linéaire de la fonction  $\phi$  à la matrice  $A(\zeta)$  et  $R(\zeta)$  respectivement, pour  $\phi \in C([-1, 0], \mathbb{R}^4)$ . Cette définition est donnée par :

$$A(\zeta)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0), \\ \int_{-1}^0 d\eta(s, \zeta)\phi(s), & \theta = 0, \end{cases} \quad (3.15)$$

et

$$R(\zeta)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0), \\ f(\zeta, \phi), & \theta = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

où  $\eta(s, \zeta)$  est une fonction de variation bornée définie par l'équation (3.14), le paramètre  $s$  représente le temps.

Ensuite, le système (3.8) peut être exprimé de manière équivalente par l'équation :

$$\dot{u}_t = A(\zeta)u_t + R(\zeta)u_t, \quad (3.17)$$

où  $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ , pour  $\theta \in [-1, 0]$  est la fonction de retard correspondant au vecteur d'état  $u(t)$ .

### La forme normale de Poincaré

On peut définir une application linéaire de la fonction  $\psi$  à la matrice adjointe  $A^*$  de la matrice  $A$ , pour  $\psi \in C^1([0, 1], (\mathbb{R}^4)^*)$ . Cette définition est donnée par :

$$A^*\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1], \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(t, 0)\psi(-t), & s = 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $\eta(t, 0)$  est une fonction de variation bornée définie par l'équation (3.14), le paramètre  $s$  représente le temps et  $T$  représente l'opérateur de transposition.

De plus, pour  $\psi \in C^1([0, 1], (\mathbb{R}^4)^*)$  on définit un produit scalaire bilinéaire :

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{\theta=-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi, \quad (3.19)$$

où  $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$ . En résumé,  $A(0)$  et  $A^*$  sont des opérateurs adjoints. Comme nous l'avons montré auparavant, les valeurs propres de  $A(0)$  sont  $\pm i\omega^*\tau_0^*$ , et donc ces mêmes valeurs propres sont également présentes dans  $A^*$ . Pour déterminer les vecteurs propres correspondants de  $A(0)$  et  $A^*$  associés aux valeurs propres  $i\omega^*\tau_0^*$  et  $-i\omega^*\tau_0^*$ , nous devons effectuer des calculs supplémentaires.

Selon [12], on suppose que  $q(\theta) = (1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T e^{i\omega^*\tau_0^*\theta}$  soit le vecteur propre de  $A(0)$  correspondant à la valeur propre  $i\omega^*\tau_0^*$ , où  $\alpha_1, \beta_1$  et  $\gamma_1$  sont des constantes complexes. Ainsi,  $A(0)q(\theta) = i\omega^*\tau_0^*q(\theta)$ . En utilisant la définition de  $A(0)$  et de  $\eta(\theta, \zeta)$ , on peut déduire que :

$$\begin{pmatrix} a_1 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & a_3 & -n & -qN_2^* \\ 0 & 0 & -a_4 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega^*\tau_0^*} \\ \alpha_1 e^{-i\omega^*\tau_0^*} \\ \beta_1 e^{-i\omega^*\tau_0^*} \\ \gamma_1 e^{-i\omega^*\tau_0^*} \end{pmatrix} = i\omega^* \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant les calculs nécessaires, nous obtenons les expressions suivantes :

$$\alpha_1 = \frac{i\omega^* - a_1}{\sigma_2}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_1 h e^{-i\omega^*\tau_0^*}}{i\omega^* + a_4 - a_6 e^{-i\omega^*\tau_0^*}}, \quad \gamma_1 = \frac{j\alpha_1}{i\omega^*}.$$

De même, selon [12], on suppose que  $q^*(s) = S(1, \alpha_1^*, \beta_1^*, \gamma_1^*) e^{i\omega^* \tau_0^* s}$  le vecteur propre de  $A^*$  correspondant à la valeur propre  $-i\omega^* \tau_0^*$ , où  $\alpha_1^*$ ,  $\beta_1^*$  et  $\gamma_1^*$  sont des constantes complexes et  $S$  est une constante de normalisation. En utilisant la définition de  $A^*$ , nous trouvons :

$$\alpha_1^* = -\frac{a_1 + i\omega^*}{\sigma_1}, \quad \beta_1^* = \frac{n\alpha_1^*}{i\omega^* - a_4 + a_6 e^{-i\omega^* \tau_0^*}}, \quad \gamma_1^* = \frac{qN_2^* \alpha_1^*}{i\omega^*}.$$

Pour déterminer la valeur de  $S$  de manière à ce que  $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ , selon l'équation (3.19), nous avons :

$$\begin{aligned} \langle q^*(s), q(\theta) \rangle &= \overline{q^*(0)} q(0) - \int_{\theta=-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \overline{q^*(\xi-\theta)} d\eta(\theta) q(\xi) d\xi \\ &= \overline{S}(1, \bar{\alpha}_1^*, \bar{\beta}_1^*, \bar{\gamma}_1^*) (1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T - \int_{-1}^0 \int_0^{\theta} \overline{S}(1, \bar{\alpha}_1^*, \bar{\beta}_1^*, \bar{\gamma}_1^*) e^{i\omega^* \tau_0^* (\xi-\theta)} d\eta(\theta) \\ &\quad \times (1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T e^{i\omega^* \tau_0^* \xi} d\xi \\ &= \overline{S} \left( 1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1^* + \beta_1 \bar{\beta}_1^* + \gamma_1 \bar{\gamma}_1^* - \tau_0^* \beta_1 (h\alpha_1^* + a_6 \beta_1^*) e^{-i\omega^* \tau_0^*} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous devons choisir  $S$  comme suit :

$$\overline{S} = \frac{1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_1^* + \beta_1 \bar{\beta}_1^* + \gamma_1 \bar{\gamma}_1^* - \tau_0^* \beta_1 (h\alpha_1^* + a_6 \beta_1^*) e^{-i\omega^* \tau_0^*}}. \quad (3.20)$$

### La variété centrale $C_0$

À ce stade, nous allons nous concentrer sur le calcul des coordonnées pour définir le collecteur central (variété centrale)  $C_0$  à  $\zeta = 0$ . Pour ce faire, nous utiliserons la solution de l'équation (3.17) lorsque  $\zeta = 0$ , que nous noterons  $u_t$ . À partir de cette solution, nous définirons les fonctions  $z(t)$  et  $W(t, \theta)$  telles que décrites dans l'équation (3.21).

$$z(t) = \langle q^*, u_t \rangle, \quad W(t, \theta) = u_t(\theta) - 2\Re \{z(t) q(\theta)\}. \quad (3.21)$$

En utilisant l'expression pour les fonctions  $z(t)$  et  $W(t, \theta)$  que nous avons définies précédemment, nous pouvons maintenant calculer l'expression de  $W$  au centre du collecteur  $C_0$ . Cette expression est donnée par l'équation (3.22), où  $z$  et  $\bar{z}$  représentent les coordonnées locales du centre du collecteur  $C_0$  selon la direction de  $q^*$  et  $\bar{q}^*$ .

$$W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z \bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots. \quad (3.22)$$

Il est évident que  $W$  est réel lorsque  $u_t$  est réel. Nous ne considérons que des solutions réelles. Par conséquent, pour obtenir la solution de  $u_t \in C_0$  de l'équation (3.17), puisque  $\zeta = 0$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \langle q^*, \dot{u}_t \rangle \\ &= \langle q^*(\theta), f(0, W(z, \bar{z}, 0) + 2\Re \{z q(\theta)\}) \rangle \\ &= i\omega^* \tau_0^* z + \bar{q}^*(0) f(0, W(z, \bar{z}, 0) + 2\Re \{z q(\theta)\}) \\ &\cong i\omega^* \tau_0^* z + \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}), \end{aligned}$$

et nous réécrivons cette équation sous la forme :

$$\dot{z}(t) = i\omega^* \tau_0^* z(t) + g(z, \bar{z}),$$

où  $g(z, \bar{z})$  est une fonction complexe qui dépend de la constante complexe  $W$  et de la fonction  $f_0(z, \bar{z})$ . La forme de la fonction  $g(z, \bar{z})$  est donnée par :

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z \bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots, \quad (3.23)$$

où les coefficients  $g_{ij}$  pour  $i, j = 0, 1, 2$  correspondent aux termes quadratiques et d'ordres supérieurs de la fonction  $g(z, \bar{z})$ . Plus précisément :  $g_{20}$  représente le terme quadratique en  $z^2$ ,  $g_{11}$  le terme quadratique en  $z\bar{z}$ ,  $g_{02}$  le terme quadratique en  $\bar{z}^2$  et  $g_{21}$  représente un terme d'ordre supérieur qui dépend à la fois de  $z^2$  et  $\bar{z}$ , et sont déterminés à partir de  $W$  et de  $f_0(z, \bar{z})$ .

A partir de (3.21) et (3.22), on peut évidemment obtenir l'expression suivante pour  $u_t$  :

$$\begin{aligned} u_t(\theta) &= W(t, \theta) + 2\Re\{z(t)q(\theta)\} \\ &= W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z \bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + zq + \bar{z}\bar{q} + \dots \\ &= W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z \bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + (1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T e^{i\omega^* \tau_0^* \theta} z + (1, \bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1)^T \\ &\quad \times e^{-i\omega^* \tau_0^* \theta} \bar{z} + \dots. \end{aligned} \quad (3.24)$$

En utilisant (3.10), on peut conclure que :

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}) &= \bar{q}^*(0) f_0(0, u_t) \\ &= \tau_0^* \bar{S}(1, \bar{\alpha}_1^*, \bar{\beta}_1^*, \bar{\gamma}_1^*) \begin{pmatrix} -\frac{r}{k} u_{1t}^2(0) \\ -\frac{s}{l} u_{2t}^2(0) - \alpha R_1 - q u_{2t}(0) u_{4t}(0) \\ \beta R_2 - \gamma u_{3t}^2(0) \\ m u_{2t}(0) u_{4t}(0) \end{pmatrix} \\ &= \tau_0^* \bar{S}(p_1 z^2 + 2p_2 z \bar{z} + p_3 \bar{z}^2 + p_4 z^2 \bar{z}) + H.O.T., \end{aligned} \quad (3.25)$$

où  $H.O.T.$  désigne les termes d'ordre supérieur et les équations pour  $p_i$  avec  $i = 1, 2, 3, 4$  sont données par :

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{r}{k} - \frac{s\alpha_1^2 \bar{\alpha}_1^*}{l} - \gamma \beta_1^* \bar{\beta}_1^* + (m\bar{\gamma}_1^* - q\bar{\alpha}_1^*) \alpha_1 \gamma_1 + (\beta \bar{\beta}_1^* - \alpha \bar{\alpha}_1^*) \left( \frac{a\alpha_1}{(a+N_2^*)^2} - \frac{aP^*}{(a+N_2^*)^3} \right), \\ p_2 &= -\frac{r}{k} - \frac{s\alpha_1 \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_1^*}{l} - \gamma \beta_1 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_1^* + (m\bar{\gamma}_1^* - q\bar{\alpha}_1^*) \Re\{\alpha_1 \bar{\gamma}_1\} + (\beta \bar{\beta}_1^* - \alpha \bar{\alpha}_1^*) \left( \frac{a\Re\{\alpha_1\}}{(a+N_2^*)^2} - \frac{aP^*}{(a+N_2^*)^3} \right), \\ p_3 &= -\frac{r}{k} - \frac{s\alpha_1^2 \bar{\alpha}_1^*}{l} - \gamma \bar{\beta}_1^2 \bar{\beta}_1^* + (m\bar{\gamma}_1^* - q\bar{\alpha}_1^*) \bar{\alpha}_1 \bar{\gamma}_1 + (\beta \bar{\beta}_1^* - \alpha \bar{\alpha}_1^*) \left( \frac{a\bar{\alpha}_1}{(a+N_2^*)^2} - \frac{aP^*}{(a+N_2^*)^3} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 p_4 = & -\frac{r}{k} \left( 2W_{11}^{(1)}(0) + W_{20}^{(1)}(0) \right) - \frac{s\bar{\alpha}_1^*}{l} \left( 2\alpha_1 W_{11}^{(2)}(0) + \bar{\alpha}_1 W_{20}^{(2)}(0) \right) - \gamma\bar{\beta}_1^* \left( 2\beta_1 W_{11}^{(3)}(0) + \bar{\beta}_1 W_{20}^{(3)}(0) \right) \\
 & + (m\bar{\gamma}_1^* - q\bar{\alpha}_1^*) \left[ \left( \alpha_1 W_{11}^{(4)}(0) + \frac{\bar{\alpha}_1}{2} W_{20}^{(4)}(0) \right) + \left( \gamma_1 W_{11}^{(2)}(0) + \frac{\bar{\gamma}_1}{2} W_{20}^{(2)}(0) \right) \right] + (\beta\bar{\beta}_1^* - \alpha\bar{\alpha}_1^*) \\
 & \times \left( \frac{a(\bar{\alpha}_1 + 2\alpha_1)}{(a + N_2^*)^3} - \frac{\alpha P^*}{(a + N_2^*)^4} \right) + \frac{a\alpha P^* \bar{\alpha}_1^*}{(a + N_2^*)^3} \left( 2W_{11}^{(2)}(0) + W_{20}^{(2)}(0) \right) - \frac{a\alpha\bar{\alpha}_1^*}{(a + N_2^*)^2} \left[ \left( W_{11}^{(3)}(0) + \frac{1}{2} W_{20}^{(3)}(0) \right) \right. \\
 & \left. + \left( \alpha_1 W_{11}^{(2)}(0) + \frac{\bar{\alpha}_1}{2} W_{20}^{(2)}(0) \right) \right] + \frac{a\beta\bar{\beta}_1^*}{(a + N_2^*)^2} \left[ \left( W_{11}^{(3)}(-1) + \frac{1}{2} W_{20}^{(3)}(-1) \right) + \left( \bar{\alpha}_1 W_{11}^{(2)}(-1) + \frac{\alpha_1}{2} W_{20}^{(2)}(-1) \right) \right] \\
 & - \frac{a\beta P^* \bar{\beta}_1^*}{(a + N_2^*)^3} \left( 2W_{11}^{(2)}(-1) + W_{20}^{(2)}(-1) \right).
 \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de l'équation (3.23) avec ceux de l'équation (3.25), nous obtenons :

$$g_{20} = 2\tau_0^* \bar{S} p_1, \quad g_{11} = 2\tau_0^* \bar{S} p_2, \quad g_{02} = 2\tau_0^* \bar{S} p_3, \quad g_{21} = 2\tau_0^* \bar{S} p_4.$$

Étant donné que  $W_{20}(\theta)$  et  $W_{11}(\theta)$  sont dans  $g_{21}$ , nous devons encore les calculer.

En utilisant les équations (3.17) et (3.21) on peut exprimer la dérivée de  $W$  (notée  $\dot{W}$ ) en fonction de  $\dot{u}_t$ ,  $\dot{z}q$  et  $\dot{z}\bar{q}$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 \dot{W} &= \dot{u}_t - \dot{z}q - \dot{z}\bar{q} \\
 &= \begin{cases} AW - 2\Re \{ \bar{q}^*(0) f_0 q(\theta) \}, & -1 \leq \theta < 0, \\ AW - 2\Re \{ \bar{q}^*(0) f_0 q(\theta) \} + f_0, & \theta = 0, \end{cases} \\
 &= AW + H(z, \bar{z}, \theta),
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

où  $H(z, \bar{z}, \theta)$  est une fonction complexe polynomiale en  $z$  et  $\bar{z}$ , dont les coefficients dépendent de  $\theta$ . La forme de la fonction  $H(z, \bar{z}, \theta)$  est donnée par :

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots, \tag{3.27}$$

où les coefficients  $H_{ij}$  pour  $i, j = 0, 1, 2$  correspondent aux termes quadratiques et d'ordres supérieurs de la fonction  $H(z, \bar{z}, \theta)$ . Plus précisément :  $H_{20}$  représente le terme quadratique en  $z^2$ ,  $H_{11}$  le terme quadratique en  $z\bar{z}$ ,  $H_{02}$  le terme quadratique en  $\bar{z}^2$  et  $H_{21}$  représente un terme d'ordre supérieur qui dépend à la fois de  $z^2$  et  $\bar{z}$ .

En vertu des connaissances acquises, nous avons la certitude que :

$$\begin{aligned}
 W &= W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \\
 \text{et} \\
 \dot{W} &= W_z \dot{z}(t) + W_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}(t) \\
 &= (W_{20}(\theta) z + W_{11}(\theta) \bar{z} + \dots) (i\omega_0^* \tau_0^* z(t) + g(z, \bar{z})) + (W_{11}(\theta) z + W_{02}(\theta) \bar{z} + \dots) \\
 &\quad \times (-i\omega_0^* \tau_0^* \bar{z}(t) + \bar{g}(z, \bar{z})).
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

En se basant sur l'équation (3.26), on peut déduire que :

$$\begin{aligned} \dot{W} &= A(0) \left( W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \right) + H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \\ &= (A(0)W_{20}(\theta) + H_{20}(\theta)) \frac{z^2}{2} + (A(0)W_{11}(\theta) + H_{11}(\theta)) z\bar{z} + (A(0)W_{02}(\theta) + H_{02}(\theta)) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

En comparant les coefficients de  $z^2$  et  $z\bar{z}$  dans (3.28) et (3.29), nous obtenons :

$$(A(0) - 2i\omega^* \tau_0^* I) W_{20}(\theta) = -H_{20}(\theta) \quad \text{et} \quad A(0)W_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta). \quad (3.30)$$

En considérant l'intervalle  $\theta \in [-1, 0]$ , nous pouvons utiliser les équations (3.21), (3.22), (3.26) et (3.27) pour établir que :

$$\begin{aligned} H(z, \bar{z}, \theta) &= -\bar{q}^*(0) f_0 q(\theta) - q^*(0) \bar{f}_0 \bar{q}(\theta) \\ &= -g(z, \bar{z}) q(\theta) - \bar{g}(z, \bar{z}) \bar{q}(\theta) \\ &= -\left( g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \right) q(\theta) - \left( \bar{g}_{20} \frac{\bar{z}^2}{2} + \bar{g}_{11} z\bar{z} + \bar{g}_{02} \frac{z^2}{2} + \dots \right) \bar{q}(\theta). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Encore une fois, en comparant les coefficients de  $z^2$  et  $z\bar{z}$  entre (3.27) et (3.31), nous obtenons :

$$H_{20}(\theta) = -g_{20} q(\theta) - \bar{g}_{20} \bar{q}(\theta), \quad \text{et} \quad H_{11}(\theta) = -g_{11} q(\theta) - \bar{g}_{11} \bar{q}(\theta). \quad (3.32)$$

### La restriction à la variété centrale $C_0$

À partir de la définition de  $A$  et des équations (3.30) et (3.32), nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{W}_{20}(\theta) = 2i\omega^* \tau_0^* W_{20}(\theta) + g_{20} q(\theta) + \bar{g}_{02} \bar{q}(\theta), \\ \dot{W}_{11}(\theta) = g_{11} q(\theta) + \bar{g}_{11} \bar{q}(\theta). \end{cases} \quad (3.33)$$

En utilisant l'expression précédente pour  $q(\theta) = (1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T e^{i\omega^* \tau_0^* \theta}$ , en résolvant  $\dot{W}_{20}(\theta)$  et  $\dot{W}_{11}(\theta)$ , on obtient :

$$\begin{cases} W_{20}(\theta) = \frac{i g_{20}}{\omega^* \tau_0^*} q(0) e^{i\omega^* \tau_0^* \theta} + \frac{i \bar{g}_{02}}{3\omega^* \tau_0^*} \bar{q}(0) e^{-i\omega^* \tau_0^* \theta} + E_1 e^{2i\omega^* \tau_0^* \theta}, \\ W_{11}(\theta) = -\frac{i g_{11}}{\omega^* \tau_0^*} q(0) e^{i\omega^* \tau_0^* \theta} + \frac{i \bar{g}_{02}}{\omega^* \tau_0^*} \bar{q}(0) e^{-i\omega^* \tau_0^* \theta} + E_2. \end{cases} \quad (3.34)$$

où  $E_1 = (E_1^{(1)}, E_2^{(2)}, E_3^{(3)}, E_4^{(4)})^T$  et  $E_2 = (E_1^{(1)}, E_2^{(2)}, E_3^{(3)}, E_4^{(4)})^T$  sont des vecteurs constants.

Nous trouvons les valeurs de  $E_1$  et  $E_2$ . À partir de la définition de  $A(0)$  et (3.30), nous avons

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta) W_{20} = 2i\omega^* \tau_0^* W_{20}(0) - H_{20}(0), \quad (3.35)$$

et

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta) W_{11} = -H_{11}(0), \quad (3.36)$$

où  $\eta(\theta) = \eta(0, \theta)$ . Maintenant, en utilisant (3.26), nous savons quand  $\theta = 0$  :

$$\begin{aligned} H(z, \bar{z}, \theta) &= -2\Re\{\bar{q}^*(0)f_0q(0)\} + f_0 \\ &= -g(z, \bar{z})q(0) - \bar{g}(z, \bar{z})\bar{q}(0) + f_0. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} H_{20}(0)\frac{z^2}{2} + H_{11}(0)z\bar{z} + H_{02}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots &= -\left(g_{20}\frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2} + g_{02}\frac{z^2}{2} + \dots\right)q(0) \\ &= -\left(\bar{g}_{20}\frac{\bar{z}^2}{2} + \bar{g}_{11}z\bar{z} + \bar{g}_{02}\frac{z^2}{2} + \dots\right)\bar{q}(0) + f_0. \end{aligned}$$

En comparant les deux côtés de ce qui précède, nous obtenons

$$H_{20}(0) = -g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) + 2\tau_0^*(c_1, c_2, c_3, c_4)^T, \quad (3.37)$$

et

$$H_{11}(0) = -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + \tau_0^*(d_1, d_2, d_3, d_4)^T, \quad (3.38)$$

où  $(c_1, c_2, c_3, c_4)^T = C_1$  et  $(d_1, d_2, d_3, d_4)^T = D_1$ , sont respectivement les coefficients de  $z^2$  et de  $z\bar{z}$  de  $f_0(z, \bar{z})$  et ils sont donnés respectivement par :

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{s}{l} - \alpha_1^2 - \alpha \left( \frac{a\alpha_1}{(a+N_2^*)^2} - \frac{aP^*}{(a+N_2^*)^3} \right) - q\alpha_1\gamma_1 \\ \beta \left( \frac{a\alpha_1}{(a+N_2^*)^2} - \frac{aP^*}{(a+N_2^*)^3} \right) - \gamma\beta_1^2 \\ m\alpha_1\gamma_1 \\ -\frac{r}{k} \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

et

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{s}{l} - \alpha_1\bar{\alpha}_1 - \alpha \left( \frac{a\Re\{\alpha_1\}}{(a+N_2^*)^2} - \frac{aP^*}{(a+N_2^*)^3} \right) - q\Re\{\alpha_1\bar{\gamma}_1\} \\ \beta \left( \frac{a\Re\{\alpha_1\}}{(a+N_2^*)^2} - \frac{aP^*}{(a+N_2^*)^3} \right) - \gamma\beta_1\bar{\beta}_1 \\ m\Re\{\alpha_1\bar{\gamma}_1\} \\ -\frac{r}{k} \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Étant donné que  $i\omega^*\tau_0^*$  représente la valeur propre de  $A(0)$ , avec  $q(0)$  étant le vecteur propre associé, on obtient :

$$\left( i\omega^*\tau_0^*I - \int_{-1}^0 e^{i\omega^*\tau_0^*\theta} d\eta(\theta) \right) q(0) = 0, \quad (3.41)$$

$$\left( -i\omega^*\tau_0^*I - \int_{-1}^0 e^{-i\omega^*\tau_0^*\theta} d\eta(\theta) \right) q(0) = 0. \quad (3.42)$$

Par conséquent, en substituant (3.35) et (3.41) dans (3.42), nous obtenons :

$$\left( 2i\omega^* \tau_0^* I - \int_{-1}^0 e^{2i\omega^* \tau_0^* \theta} d\eta(\theta) \right) E_1 = 2\tau_0^* C_1,$$

c'est-à-dire,

$$C^* E_1 = 2C_1, \quad \text{où} \quad C^* = \begin{pmatrix} 2i\omega^* - a_1 & -\sigma_2 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 2i\omega^* - a_3 & n & qN_2^* \\ 0 & -he^{-i\omega^* \tau_0^*} & 2i\omega^* + a_4 - a_6 e^{-i\omega^* \tau_0^*} & 0 \\ 0 & -j & 0 & 2i\omega^* \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Ainsi,  $E_1^{(i)} = \frac{2\Delta_i}{\Delta}$ , où  $\Delta = \det(C^*)$  représente le déterminant de  $C^*$  et  $\Delta_i$  est la valeur du déterminant  $U_i$ , où  $U_i$  est formé en remplaçant le vecteur de la  $i$ -ème colonne de  $C^*$  par un autre vecteur de colonne  $(c_1, c_2, c_3, c_4)^T$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ .

De même, nous avons

$$D^* E_2 = 2D_1, \quad \text{où} \quad D^* = \begin{pmatrix} -a_1 & -\sigma_2 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & -a_3 & n & qN_2^* \\ 0 & -h & a_4 - a_6 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Ainsi,  $E_2^{(i)} = \frac{2\bar{\Delta}_i}{\bar{\Delta}}$ , où  $\bar{\Delta} = \det(D^*)$  représente le déterminant de  $D^*$  et  $\bar{\Delta}_i$  est la valeur du déterminant  $V_i$ , où  $V_i$  est formé en remplaçant le vecteur de la  $i$ -ème colonne de  $D^*$  par un autre vecteur de colonne  $(d_1, d_2, d_3, d_4)^T$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Dans la continuité de notre étude de la bifurcation de Hopf, nous introduisons maintenant un théorème fondamental qui dévoile des caractéristiques essentielles de ces phénomènes dynamiques. Ce théorème établit des relations clés permettant de comprendre le type de bifurcation, la stabilité et la période de la solution périodique bifurquée. En explorant ce théorème, nous renforcerons notre compréhension de ces phénomènes et de leur pertinence dans le domaine de l'analyse des systèmes dynamiques.

**Théorème 5.** *Le signe de  $\mu_2$  détermine la direction de la bifurcation de Hopf :*

1. *Si  $\mu_2 > 0$ , la bifurcation de Hopf est supercritique. Cela signifie que lorsque les paramètres dépassent un certain seuil, une solution périodique bifurquée émerge, existant pour  $\tau > \tau_0^*$ .*
2. *Si  $\mu_2 < 0$ , la bifurcation de Hopf est subcritique. Dans ce cas, une solution périodique bifurquée existe pour  $\tau < \tau_0^*$ .*

*De plus,  $\beta_2$  détermine la stabilité de la solution périodique bifurquée :*

1. *Si  $\beta_2 < 0$ , la solution périodique bifurquée est stable.*
2. *Si  $\beta_2 > 0$ , la solution périodique bifurquée est instable.*

*Enfin,  $T_2$  détermine la période de la solution périodique bifurquée :*

1. *Si  $T_2 > 0$ , la période de la solution périodique augmente.*
2. *Si  $T_2 < 0$ , la période de la solution périodique diminue.*

En utilisant les équations (3.34) et (3.35), nous sommes en mesure de déterminer  $W_{20}(\theta)$  et  $W_{11}(\theta)$ . De plus, le calcul de  $g_{21}$  est également simple. Par conséquent, nous pouvons calculer les valeurs suivantes :

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega^* \tau_0^*} \left( g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2},$$

$$\beta_2 = 2\Re\{c_1(0)\} = g_{21},$$

$$\mu_2 = -\frac{\Re\{c_1(0)\}}{\Re\left\{\frac{d\lambda(\tau_0^*)}{d\tau}\right\}},$$

$$T_2 = -\frac{\Im\{c_1(0)\} + \mu_2 \Im\left\{\frac{d\lambda(\tau_0^*)}{d\tau}\right\}}{\omega^* \tau_0^*}.$$

En nous appuyant sur les résultats de Hassard et al. [14], nous avons exploité les conclusions préalables du Théorème 5 pour déterminer l'orientation de la bifurcation de Hopf ainsi que la stabilité de la solution périodique émergente suite à cette bifurcation. Le signe de  $\mu_2$  nous a renseignés sur la nature supercritique ou subcritique de la bifurcation, tandis que le signe de  $\beta_2$  a permis de déterminer la stabilité de la solution périodique. De plus, le signe de  $T_2$  a indiqué si la période de la solution périodique augmentait ou diminuait. Ces informations sont cruciales pour appréhender le comportement dynamique du système étudié.

Dans le but de mieux comprendre le comportement dynamique du modèle avec retard que nous avons présenté précédemment, nous allons maintenant passer à l'étape suivante et effectuer des simulations numériques en utilisant un ensemble de paramètres spécifiques. Cette approche nous permettra d'analyser les effets des retards sur la dynamique du système et de vérifier les résultats que nous avons obtenus grâce à l'analyse mathématique. À ce stade, nous allons donc décrire en détail notre méthodologie de simulation numérique et présenter les résultats que nous avons obtenus.

## 3.2 SIMULATION NUMÉRIQUE

La simulation numérique est un outil essentiel pour étudier la dynamique des systèmes complexes, tels que le modèle avec retard présenté précédemment. Dans cette catégorie, nous utiliserons des techniques de simulation numérique pour analyser comment les retards influencent la dynamique du système (3.1), en résolvant numériquement le système d'équations différentielles avec un ensemble de paramètres spécifiques.

**Remarque 4.** *Les simulations numériques réalisées dans ce chapitre ont été effectuées à l'aide du logiciel MATLAB, sur un domaine temporel [0, 500].*

Avant d'approfondir l'analyse, il est important de mentionner les valeurs des paramètres utilisées lors des simulations numériques. Le Tableau 3.1 présente les paramètres correspondants pour le système (3.1).

TABLE 3.1 – Les valeurs des paramètres correspondantes pour les simulations numériques.

|            |       |         |            |            |       |     |          |       |
|------------|-------|---------|------------|------------|-------|-----|----------|-------|
| Paramètres | $r$   | $k$     | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $s$   | $l$ | $\alpha$ | $a$   |
| Valeurs    | 0.9   | 4       | 0.2        | 0.14       | 0.8   | 14  | 2.5      | 1.2   |
| Paramètres | $q$   | $\beta$ | $D$        | $\gamma$   | $\mu$ | $p$ | $\sigma$ | $c$   |
| Valeurs    | 0.563 | 0.8     | 0.3        | 0.1        | 1.4   | 2.5 | 1.04     | 0.996 |

### 3.2.1 Étude de la dynamique pour $\tau < \tau_0^*$

La Figure 3.1 illustre l'évolution temporelle de la population des proies protégées, des proies non protégées, des prédateurs et de l'effort de pêche pour différentes valeurs de  $\tau < \tau_0^*$ . En outre, la Figure 3.2 représente le diagramme de l'espace des phases pour le système (3.1) avec l'ensemble de paramètres 3.1 et une valeur de  $\tau < \tau_0^*$ . Les sous-Figures (a) et (b) de la Figure 3.2 montrent respectivement les portraits de phases pour les variables  $(N_1, N_2, P)$  et  $(N_1, N_2, E)$ .

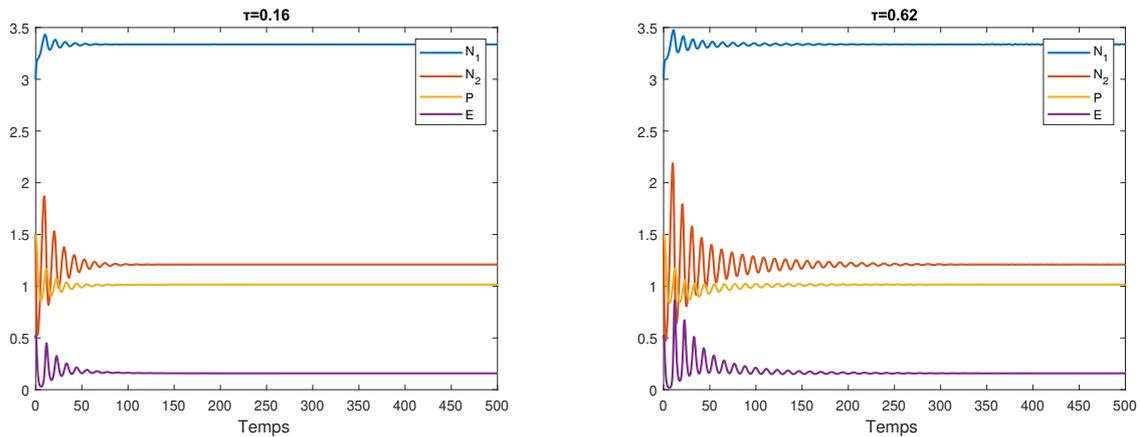


FIGURE 3.1 – Évolution temporelle de la population des proies protégées, non protégées, des prédateurs et de l'effort de pêche pour différentes valeurs de  $\tau < \tau_0^*$ .

En observant les courbes de solution du système (3.1) pour les valeurs de  $\tau$  (0.16 et 0.62), nous constatons que ces valeurs sont inférieures à  $\tau_0^*$ . Comme illustré dans la Figure 3.1, nous remarquons que les trajectoires convergent vers l'équilibre intérieur  $M^*$ . Les populations de proies et de prédateurs atteignent des niveaux d'équilibre stables, tandis que l'effort de pêche se stabilise également.

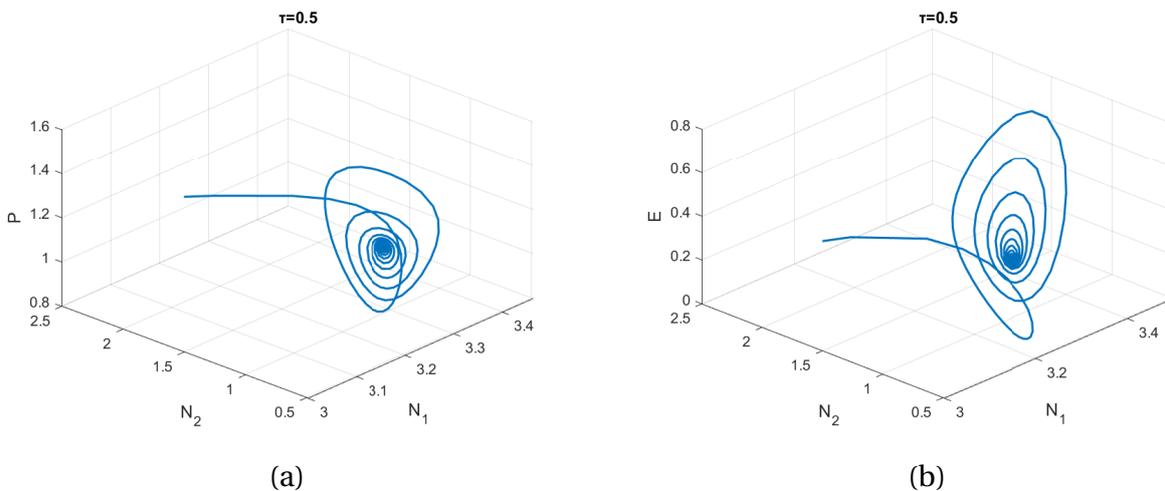


FIGURE 3.2 – Diagramme de l'espace des phases pour le système (3.1) avec l'ensemble de paramètres 3.1 et  $\tau < \tau_0^*$ . (a,b) représente les portraits de phases pour les variables  $(N_1, N_2, P)$  et  $(N_1, N_2, E)$  respectivement.

Ainsi, pour  $\tau < \tau_0^*$ , le système présente une stabilité locale asymptotique, avec les popula-

tions de proies, les prédateurs et l'effort de pêche atteignant des niveaux d'équilibre stables. Les trajectoires tracées dans l'espace des phases confirment la convergence vers l'équilibre intérieur, quelles que soient les conditions initiales. Cette conclusion est en accord avec les résultats analytiques obtenus à l'aide du Théorème 5.

### 3.2.2 Étude de la dynamique pour $\tau > \tau_0^*$

Avant d'approfondir les résultats, il est important de noter que la Figure 3.3 présente l'évolution temporelle de la population des proies et des prédateurs pour des valeurs élevées de  $\tau$ . De plus, la Figure 3.4 montre les solutions périodiques de bifurcation pour le système (3.1) avec  $\tau > \tau_0^*$ . Nous avons considéré le même ensemble de paramètres que dans le Tableau 3.1 avec  $\sigma = 1.1$ .

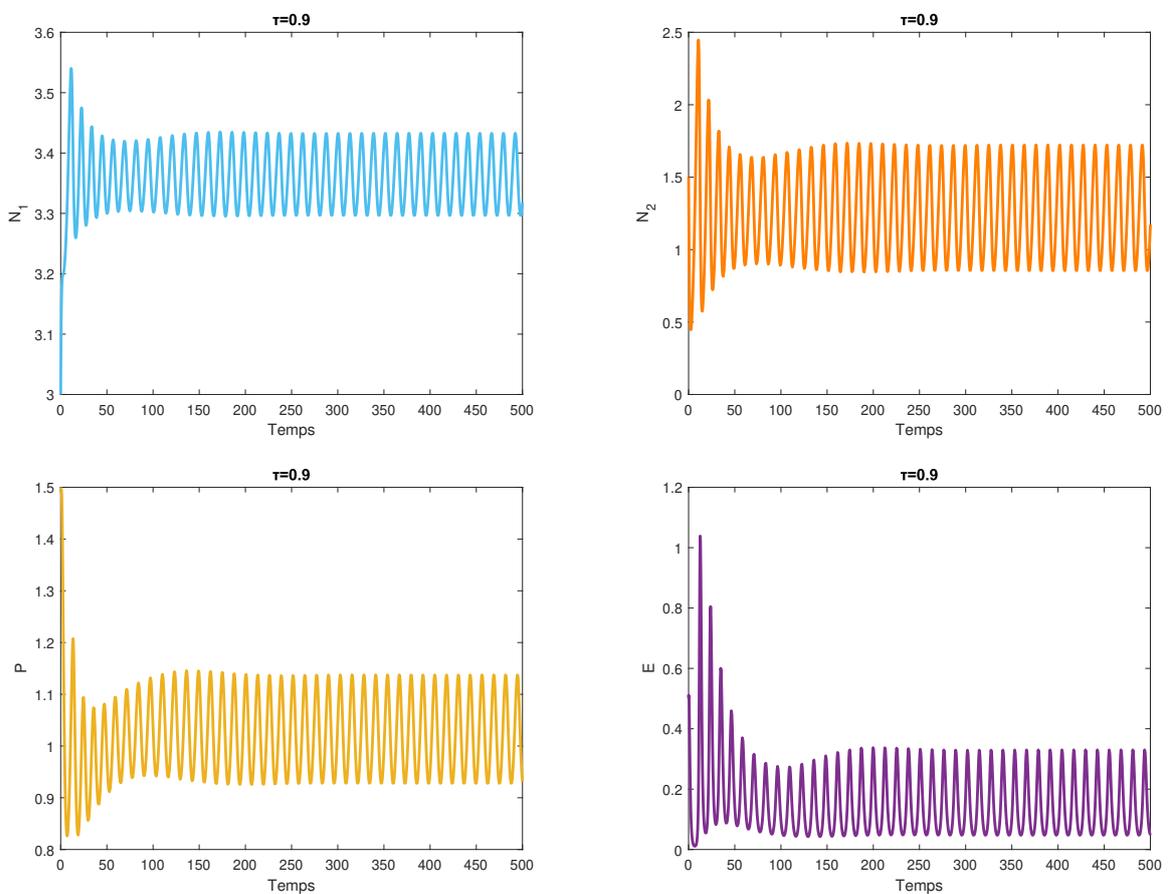


FIGURE 3.3 – Évolution temporelle de la population des proies protégées, non protégées, des prédateurs et de l'effort de pêche pour une valeur de  $\tau > \tau_0^*$ .

Dans la Figure 3.4, nous observons clairement que le système devient instable lorsque  $\tau = 0.9 (> \tau_0^* \simeq 0.85)$ . Les trajectoires tracées dans cette Figure indiquent que le système ne converge pas vers l'équilibre intérieur  $M^*$ .

En utilisant le Théorème 5, nous pouvons conclure que cette bifurcation de Hopf est supercritique et stable. Cela signifie que lorsque  $\tau$  dépasse la valeur critique de  $\tau_0^* \simeq 0.85$ , le système présente des solutions périodiques. La période de bifurcation augmente à mesure

que  $\tau$  augmente à partir de cette valeur critique.

Ainsi, les simulations numériques confirment nos résultats analytiques selon lesquels le système présente une bifurcation de Hopf stable pour  $\tau > \tau_0^*$ . Cette bifurcation entraîne une instabilité de l'équilibre intérieur et l'apparition de solutions périodiques dans l'espace des phases. Les Figures 3.3 et 3.4 illustrent ces comportements dynamiques du système.

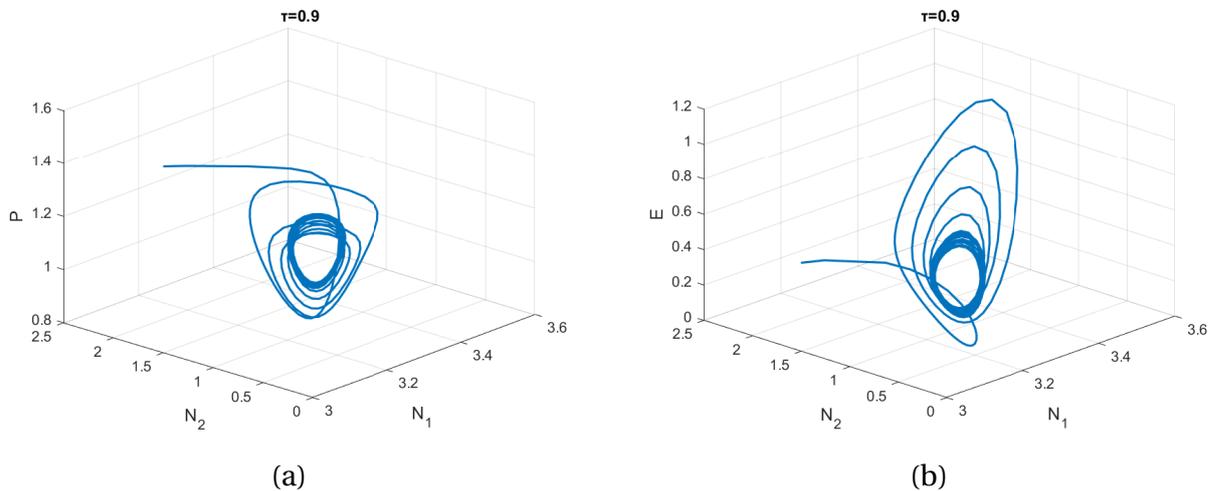


FIGURE 3.4 – Portraits de phases pour le système (3.1). L'ensemble des paramètres est comme dans le Tableau 3.1 avec une valeur de  $\tau > \tau_0^*$ .



### Conclusion

Ce chapitre porte sur l'étude dynamique du modèle retardé. Il révèle que les équations différentielles retardées peuvent engendrer une dynamique plus complexe que les équations différentielles ordinaires. Dans le contexte du modèle prédateur-proie avec pêche, l'introduction d'un délai dans la réponse de la population de prédateurs à la disponibilité des proies peut entraîner une instabilité du système, voire une bifurcation de Hopf. Toutefois, l'utilisation de théorèmes tels que le Théorème 5 permet de déterminer les conditions suffisantes conduisant à une instabilité. Les résultats ont démontré que, pour des valeurs de  $\tau$  inférieures à  $\tau_0^* \approx 0.85$ , le système présente une stabilité asymptotique locale, indiquant que les populations convergent vers un état stable à long terme malgré les perturbations initiales.

En conclusion, l'étude dynamique du modèle retardé fournit des informations cruciales sur la manière dont les populations interagissent dans un environnement changeant, offrant ainsi un éclairage précieux pour les décisions relatives à la gestion des ressources naturelles et à la préservation de la biodiversité.



## CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce mémoire est une contribution à la compréhension et à l'analyse de l'impact de l'introduction d'une réserve sur la dynamique d'un système proie-prédateur avec retard. À travers une étude approfondie, nous avons pu mettre en évidence les principales conclusions et recommandations qui émergent de cette analyse. Nous avons cherché à explorer les effets de la réserve sur la stabilité des populations, la protection des proies et l'atténuation des oscillations dues au retard.

Tout d'abord, nous avons constaté que l'ajout d'une réserve peut jouer un rôle crucial dans la préservation et le maintien de la stabilité des populations de proies et de prédateurs. Par exemple, notre étude a révélé que lorsque la réserve était introduite, la densité des populations de proies augmentait de manière significative, indiquant une meilleure capacité de reproduction et de survie. Cela a également conduit à une augmentation correspondante de la population de prédateurs, qui bénéficiait d'une source de nourriture plus abondante dans la réserve. De plus, la présence de la réserve a un effet de protection sur les proies en limitant l'effort de prédation exercé par les prédateurs. Par exemple, nous avons observé une diminution notable de l'effort de prédation sur les proies en raison de la disponibilité d'une alternative de nourriture fournie par la réserve. Cela a permis aux proies de se développer et de maintenir des populations plus stables, malgré la prédation exercée par les prédateurs.

Ensuite, l'incorporation d'un retard dans le modèle a révélé des dynamiques complexes et des comportements non linéaires. Plus précisément, le retard dans la réponse des prédateurs à l'abondance des proies a été identifié comme un facteur clé susceptible de provoquer des oscillations et des instabilités dans le système. Toutefois, nous avons constaté que la présence de la réserve agissait comme un mécanisme d'amortissement de ces instabilités, atténuant les oscillations et maintenant la stabilité du système. Par exemple, nos résultats ont montré que lorsque le retard était présent, le système pouvait osciller entre des périodes de surabondance de proies et de prédateurs, ce qui entraînait une instabilité globale. Cependant, l'introduction de la réserve a permis d'atténuer ces oscillations et de maintenir les populations dans des limites plus stables.

Cela souligne l'importance de prendre en compte les retards et les effets temporels dans l'analyse des systèmes écologiques. Les résultats de notre étude mettent en évidence le rôle essentiel des réserves dans la régulation des dynamiques complexes des populations et dans la préservation de la stabilité des écosystèmes.

En résumé, les résultats obtenus soulignent l'importance cruciale des réserves dans la conservation des écosystèmes. En particulier, ils démontrent leur rôle clé dans la stabilité des populations, la protection des proies et l'atténuation des oscillations induites par le retard. De plus, ils mettent en évidence l'importance de prendre en compte la taille et l'emplacement stratégique de la réserve pour optimiser son efficacité en tant qu'outil de conservation. Cette étude apporte ainsi une contribution significative à la littérature scientifique sur la dynamique des systèmes écologiques, fournissant des informations précieuses pour guider les décisions de gestion et de conservation des écosystèmes dans le but de préserver leur durabilité et leur résilience face aux défis futurs.

*"La pensée mathématique nous enseigne l'ordre, la logique et la discipline, et elle est une force inébranlable pour explorer les secrets de l'univers."*



*Al-Khawarizmi.*

Sur ces dernières pages du mémoire, nous accordons une attention particulière aux outils mathématiques qui ont été utilisés tout au long de notre étude sur les dynamiques des populations proies-prédateurs dans les écosystèmes marins. Ces outils mathématiques jouent un rôle essentiel dans notre compréhension des interactions écologiques complexes et dans la modélisation précise de ces systèmes.

## 0.1 CRITÈRE DE ROUTH-HURWITZ [10], [26]

La stabilité d'un point d'équilibre dans les systèmes dynamiques autonomes est intimement liée au signe de la partie réelle des valeurs propres correspondantes de la matrice jacobienne évaluée en ce point. Pour  $n > 2$  la recherche explicite des valeurs propres revient à résoudre des polynôme de degrés très élevée. Cependant, il existe un critère appelé critère de Routh-Hurwitz permettant de conclure à la stabilité locale d'un point d'équilibre sans connaître explicitement les valeurs propres.

Considérons le système linéaire de dimension  $n$  donné par l'équation :

$$\dot{x} = Ax,$$

où  $A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  est une matrice carrée de dimension  $n$  à coefficients constants. Nous supposons que  $\det(A) \neq 0$ , ce qui implique que l'origine est l'unique équilibre. La matrice  $A$  a  $n$  valeurs propres qui sont solutions de l'équation caractéristique  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Cette équation est un polynôme de degré  $n$  que nous écrivons sous la forme suivante :

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Considérons les  $n$  déterminants suivants :

$$H_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \cdot \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_k \end{vmatrix},$$

tel que  $k \in [1, n]$ . Dans le cas de dimension  $n$ , tous les  $a_j$  avec  $j > n$  sont pris égaux à zéro. Nous avons le résultat suivant :

L'équilibre est asymptotiquement stable si et seulement si pour tout  $k \in [1, n]$ ,  $H_k > 0$ .

Cela signifie que dans le critère de Routh-Hurwitz, pour un système de dimension  $n$ , si tous les déterminants  $H_k$  (avec  $k$  variant de 1 à  $n$ ) sont strictement positifs, alors l'équilibre du système est asymptotiquement stable. C'est une condition importante pour déterminer la stabilité d'un système dynamique à partir de son polynôme caractéristique, sans avoir à calculer explicitement les valeurs propres.

## 0.2 RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES [10]

La règle des signes de Descartes est un procédé permettant d'estimer le nombre de racines réelles positives d'un polynôme en comptant le nombre de changements de signe dans la séquence des coefficients, en excluant les coefficients nuls. Par conséquent, le nombre de racines positives ne peut dépasser ce nombre de changements de signe, noté  $c$ . De plus, on compte les racines en tenant compte de leur multiplicité, et le nombre de racines positives a la même parité que ce nombre de changements de signe. En d'autres termes, ce nombre peut être égal à  $c$  ou bien  $c - 2$  ou bien  $c - 4$ , etc.

Soit un polynôme de degré  $n$  à coefficients réels donné comme suit :

$$P(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

Pour  $0 \leq i \leq n$ , on pose  $\epsilon_i = \text{sgn}(\alpha_i)$  où  $\text{sgn}(\alpha_i) = -1$  ou  $1$  selon que  $x$  est strictement négatif ou strictement positif.

On dit qu'il y a un changement de signe dans la suite  $\epsilon_0, \dots, \epsilon_n$  s'il existe  $i$  et  $j > 2$  tels que :

$$\epsilon_i = -\epsilon_{i+j} \quad \text{et} \quad \epsilon_{i+1} = \dots = \epsilon_{i+j-1}.$$

On note  $\sigma(P)$  le nombre de changements de signe dans la suite  $\epsilon_0, \dots, \epsilon_n$ , en et  $r(P)$  le nombre de racines strictement positives de  $P$  (comptées avec leur multiplicité).

## 0.3 FONCTION DE LYAPUNOV [26]

La fonction de Lyapunov est un outil utilisé pour évaluer la stabilité locale et globale d'un point d'équilibre. Cette approche est particulièrement utile pour déterminer la stabilité d'un équilibre non hyperbolique lorsque la linéarisation ne fournit pas de conclusion claire. Définissons d'abord ce qu'est une fonction définie positive (reps.négative).

**Définition 1** (Fonction définie positive (reps.négative) [26]). *On appelle fonction définie positive (reps.négative) une fonction  $V$  définie sur un ouvert  $D$  tel que :*

$$\forall x \in D, V(x) \geq 0 \quad (\text{reps. } V(x) \leq 0).$$

**Théorème 6** (Théorème de stabilité de Lyapunov [26]). *Considérons le système dynamique représenté par l'équation suivante :*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

*avec l'origine comme point fixe.*

*Si une fonction réelle  $V$ , définie dans un voisinage de l'origine, existe telle que :*

1. La dérivée partielle  $\frac{\partial V}{\partial x}$  existe et est continue.
2.  $V$  est définie positive.
3.  $\dot{V}$  est définie négative.

Alors l'origine est un équilibre globalement asymptotiquement stable. On dit que la fonction  $V$  est une fonction de Lyapunov forte.

4.  $\dot{V}$  est définie positive, alors l'origine est un équilibre instable.

## 0.4 THÉORIE DES BIFURCATIONS [26], [37]

Une bifurcation se produit lorsque de petites variations d'un paramètre physique entraînent des changements significatifs dans le comportement du système.

### 0.4.1 Types de Bifurcation [37]

Nous abordons ici certains concepts liés aux bifurcations locales. Parmi les différents types de bifurcations, nous pouvons mentionner :

1. Les bifurcations fourche : Un équilibre stable perd sa stabilité pour devenir instable, tandis que deux nouveaux équilibres stables émergent.
2. Les bifurcations col-noeud : Avant la bifurcation, deux points d'équilibre existent (un stable et un instable). Après la bifurcation, il n'y a plus d'équilibre.
3. Les bifurcations de Hopf : Ce sont des bifurcations oscillantes.

Notre objectif n'est pas d'exposer en détail tous les types de bifurcations, mais nous nous concentrons particulièrement sur les bifurcations de Hopf (voir bifurcations de Hopf ci-dessous).

### 0.4.2 Bifurcations de Hopf [26]

Ce théorème de bifurcation valable en dimensions  $n \geq 2$  qui permet de démontrer l'existence d'un cycle limite.

Considérons le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu), \\ \dot{y} = g(x, y, \mu), \end{cases}$$

où  $\mu$  est un paramètre réel strictement positif. Supposons que  $(x^*, y^*)$  est un point d'équilibre du système pour toute valeur du paramètre  $\mu$ .

Soient  $\lambda_1(\mu)$  et  $\lambda_2(\mu)$  les valeurs propres de l'équation caractéristique de système linéaire :

$$\lambda_{1,2} = a(\mu) \pm ib(\mu).$$

Le théorème de Hopf s'énonce de la manière suivante :

**Théorème 7** (Théorème de bifurcation de Hopf [26]). *Supposons que les trois hypothèses suivantes soient vérifiées :*

1. La partie réelle des valeurs propres s'annulent pour une valeur  $\mu^*$  du paramètre, c'est-à-dire  $a(\mu^*) = 0$ .
2. Pour  $\mu = \mu^*$ , la partie imaginaire des valeurs propres est différente de zéro, c'est-à-dire  $b(\mu^*) \neq 0$ . Cela signifie que les racines sont purement imaginaires.
3. De plus, supposons que  $\frac{da}{d\mu}(\mu^*) > 0$ .

Alors nous pouvons conclure :

1.  $\mu = \mu^*$  est une valeur de bifurcation du système.
2. Il existe  $\mu_\alpha < \mu^*$  tel que pour tout  $\mu \in [\mu_\alpha, \mu^*$  le point  $(x^*, y^*)$  un est foyer stable.
3. Il existe  $\mu_\beta > \mu^*$  tel que pour tout  $\mu \in [\mu^*, \mu_\beta[$  le point  $(x^*, y^*)$  est un foyer instable entouré d'un cycle limite stable.

## 0.5 VARIÉTÉS INVARIANTES [29]

Prenons en considération un système :

$$\dot{x} = f(x),$$

défini sur l'espace  $X$  de dimension finie (un ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ ),  $a$  représente un point d'équilibre (avec  $f(a) = 0$ ). Le système linéaire correspondant est :

$$\dot{x} = Ax,$$

est appelé le linéarisé du système au point  $a$ , où  $A$  est donné par  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$ .

La variété stable  $W_s$  d'un point d'équilibre  $a$  du système  $\dot{x} = f(x)$  est une variété différentiable qui est tangente au sous-espace stable  $E_s$  du linéarisé en  $a$  et telle que toutes les solutions issues de  $W_s$  tendent vers  $a$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . De même, la variété instable  $W_u$  du point d'équilibre  $a$  est une variété différentiable qui est tangente au sous-espace instable  $E_u$  et telle que toutes les solutions issues de  $W_s$  tendent vers  $a$  quand  $t \rightarrow -\infty$ . Enfin, la variété centrale  $W_c$  est une variété tangente au sous-espace central  $E_c$ .

Le comportement asymptotique des orbites contenues dans la variété centrale n'est pas déterminé par le linéarisé du système en  $a$ . Il y a unicité des variétés stables  $W_s$  et instables  $W_u$ , en revanche, il existe une infinité de variétés centrales.

D'après les propriétés des variétés invariantes, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

**Théorème 8** (Théorème de la variété centrale [29]). *Considérons un système admettant 0 comme point d'équilibre. Soient  $E_s$ ,  $E_u$  et  $E_c$  les sous-espaces stable, instable et central du linéarisé du système en 0. Alors le système admet des variétés invariantes  $W_s$ ,  $W_u$  et  $W_c$  passant par le point 0 et tangentes respectivement aux sous-espaces  $E_s$ ,  $E_u$  et  $E_c$ . Les solutions issues de  $W_s$  (resp.  $W_u$ ) tendent exponentiellement vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  (resp.  $t \rightarrow -\infty$ ). Le comportement des solutions dans la variété  $W_c$  est déterminé par les termes non linéaires.*



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bazykin, A. D. (1974). Volterra system and Michaelis-Menten equation. *Voprosy matematicheskoi genetiki*, pp. 103-143.
- [2] Bergeron, C. Vision mathématique sur l'équilibre de la biodiversité. Article de synthèse. Association mathématique du Québec.
- [3] Birkhoff, G., Rota, G.C. (1982). Ordinary Differential Equations. Boston : Ginn.
- [4] Burghes, D. N., & Graham, A. (1980). Introduction to Control Theory, Including Optimal Control. New York, NY : John Wiley and Sons.
- [5] Chakraborty, K., Jana, S., & Kar, T.K. (2012). Effort dynamics of a delay-induced prey-predator system with reserve. *Nonlinear Dynamics*, 70(4), 1805-1829.
- [6] Chatterjee, A., & Pal, S. (2023). A predator-prey model for the optimal control of fish harvesting through the imposition of a tax. *An International Journal of Optimization and Control : Theories and Applications*.
- [7] Chen, F, Ma, Z. Z., & Zhang, H. Y. (2012). Global asymptotical stability of the positive equilibrium of the Lotka-Volterra prey-predator model incorporating a constant number of prey refuges. *Nonlinear Analysis, Real World Applications*, 13, 2790-2793.
- [8] Clark, C. W. (1990). Mathematical Bioeconomics : The Optimal Management of Renewable Resource (2nd edition). New York, NY : John Wiley and Sons.
- [9] Dubey, B., Chandrab, P., & Sinhab, P. (2003). A model for fishery resource with reserve area. *Nonlinear Analysis*, pp. 625-637.
- [10] El-Hadi, S., & Touaoula, T. M. (2021). Systèmes Dynamiques : Un pied à l'étrier. Rappels de cours et exercices corrigés. September, pp. 51-53.
- [11] Ginzburg, L. R. (1998). Assuming reproduction to be a function of consumption raises doubts about some popular predator-prey models. *Journal of Animal Ecology*, 67, 325-327.
- [12] Hale, J. K. (1997). Theory of Functional Differential Equations. New York, NY : Springer, Berlin.
- [13] Hale, J. K., & Verduyn, S. M. (1993). Introduction to Functional Differential Equations. New York : Springer.
- [14] Hassard, B. D., Kazarinoff, N. D., & Wan, Y.-H. (1981). Theory and Applications of Hopf Bifurcation (Vol. 41). London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press.

- 
- [15] Holling, C. S. (1959). Some characteristics of simple types of predation and parasitism. Canadian Entomologist, 91, 385-398.
- [16] Holling, C. S. (1959). The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the European pine sawfly. Canadian Entomologist, 91, 293-320.
- [17] Johnson, R., Smith, K., & Anderson, L. (2019). The role of marine ecosystems in global oxygen production. Nature Communications, 1, 1-10.
- [18] Kot, M. (2001). Elements of Mathematical Ecology. Cambridge, UK : Cambridge University Press.
- [19] Lotka, A.J. (1920). Undamped oscillations derived from the law of mass action. Journal of the American Chemical Society, 42(9), 1595-1599.
- [20] Lotka, A.J. (1925). Elements of Physical Biology. Baltimore : Williams and Wilkins.
- [21] Menten, L., & Michaelis, M. (1913). Die Kinetik der Invertinwirkung. Biochem, 49, 333-369.
- [22] Monod, J. (1949). The growth of bacterial cultures. Annual Review of Microbiology, 3, 371.
- [23] Moussaoui, A., Ducrot, A., Moulai-Khatir, A., & Auger, P. (2023). A model of a fishery with fish storage and variable price involving delay equations. Mathematical Biosciences.
- [24] Murdoch, W. W. (1973). The functional response of predators. Journal of Applied Ecology, 10, 335-342.
- [25] Pauly, D., & Zeller, D. (2016). Catch reconstructions reveal that global marine fisheries catches are higher than reported and declining. Nature communications, 7, 10244.
- [26] Poggial, P., Lett, C., & Auger, J. C. (2010). Modélisation mathématique en écologie. Paris : Dunod.
- [27] Ricker, W. (1941). The consumption of young sockeye salmon by predaceous fish. Journal of the Fisheries Research Board of Canada, 5, 293-313.
- [28] Rosenzweig, M., & MacArthur, R. (1963). Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions. The American Naturalist, 97(897), 209-223.
- [29] Sari, T. Introduction aux systèmes dynamiques et applications à un modèle cosmologique. Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications, Université de Haute Alsace, pp. 8.
- [30] Smith, J., Johnson, A., & Brown, E. (2018). Advances in mathematical modeling in ecology : Integrating mechanistic and statistical approaches. Ecology Letters, 21(12), 1696-1709.
- [31] Turchin, P. (2003). Complex population dynamics : A theoretical/empirical synthesis. Monographs in population biology. Princeton, NJ : Princeton University Press.
- [32] Tripathi, J.P., Abbas, S., Thakur, M. (2014). Local and global stability analysis of a two prey one predator model with help. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 19, 3284-3297.
- [33] Volterra, V. (1931). Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie. Paris : Gauthier-Villars.

- [34] Zhang, Y., Zhang, Q., & Bai, F. (2012). Dynamics and Optimal Taxation Control in a Bioeconomic Model with Stage Structure and Gestation Delay. Mathematical Problems in Engineering, Volume 2012, Article ID 803270, 17.
- [35] Bull Shark, Cage Diving with Great White Sharks in Guadalupe, Mexico.
- [36] Firefish Scuba Sea Marine.
- [37] Théorie des bifurcations, [https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie\\_des\\_bifurcations](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_bifurcations).
- [38] WTO rallies Nigeria on checking illegal fishing practices, Pourquoi c'est la pire année de pêche maritime jamais connue (INFOGRAPHIES).

﴿ بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ ﴾

الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي أَنْزَلَ عَلَى عَبْدِهِ الْكِتَابَ وَلَمْ يَجْعَلْ  
لَهُ عِوَجًا ﴿١﴾ قِيمًا لِيُنذِرَ بَأْسًا شَدِيدًا مِمَّنْ لَدُنْهُ وَيُبَشِّرَ  
الْمُؤْمِنِينَ الَّذِينَ يَعْمَلُونَ الصَّالِحَاتِ أَنَّ لَهُمْ أَجْرًا  
حَسَنًا ﴿٢﴾

سُورَةُ الْكَهْفِ