REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID – TLEMCEN

THÈSE LMD

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUE

Spécialité: Analyse mathématique et applications

Par :

M^lle ACHOUR Hanaa

Sur le thème

Contribution à l'analyse des problèmes elliptiques fractionnaires avec des nonlinéarités discontinues

Soutenue publiquement le 25-06-2023 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr. S. M. BOUGUIMA	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr. S. BENSID	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr. B. ABDELLAOUI	Professeur	Université de Tlemcen	Examinateur
Mme. Y. NASRI	Professeur	Université de Tlemcen	Examinatrice
Mr. A. OUAHAB	Professeur	Université de Sidi Bel Abbes	Examinateur

Laboratoire des systèmes dynamiques et applications - L 16
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie

DÉDICACE

Je dédie cette modeste thèse : A mes très chers parents.

Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler.

Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

À mes très chers sœurs et leurs époux ainsi que ma sœur cadette, mon frère et ma grande mère que dieu la garde.

À mes neveux et nièces.

À mes amis,

À toute ma famille.

À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible,

Je vous dis merci.

Remerciements

Au terme de ce travail, je remercie Dieu le tout puissant pour la santé et le courage qu'il m'a donné afin d'accomplir ce modeste travail.

Tout d'abord, je tiens à adresser mes sincères et chaleureux remerciements à mon directeur de thèse monsieur Sabri Bensid pour m'avoir fourni ses conseils et l'orientation dont j'ai besoin pour réussir mon doctorat. Il a été un excellent guide dans mon parcours et mes recherches, par sa compétence, son aide continue, ses ressources et ses connaissances mathématiques. Il a été toujours disponible pour répondre à mes questions. Je le remercie de m'avoir constamment encourager et guider ces dernières années aussi d'avoir toujours été si gentil, compréhensif et de m'avoir soutenu dans mes travaux et les défis qui m'ont fait face du début à la fin.

Je tiens aussi à remercier Monsieur S. M. Bouguima, Professeur à l'université de Tlemcen, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de ma thèse. Je rends hommage à ses qualités et connaissances qui m'ont aidé au cours de mon étude. Je lui présente mon plus grand respect.

Je suis heureuse également de remercier, monsieur B. Abdellaoui, Professeur à l'université de Tlemcen, d'avoir accepté d'examiner cette thèse et de participer au jury. J'ai été sensible à la générosité qu'il m'a témoignée sa présence.

Mes remerciements s'adressent aussi à monsieur A. Ouahab, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbes qui m'a fait le grand honneur de faire partie de ce jury. Je lui exprime ma reconnaissance et ma gratitude pour avoir accepté d'assister ma thèse.

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à madame Y. Nasri, Professeur à l'université de Tlemcen qui m'a honoré en acceptant d'être examinateur dans ce jury et je la remercie pour son assistance et son aide.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous avez été pour moi un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je vous suis redevable de l'éducation, l'amour et l'aide que vous m'avais procuré et dont je serai toujours fière ».

Je remercie ma grande mère, mon frère et mes sœurs pour leurs encouragements sans oublier aussi de remercier très spécialement mes amies qui m'ont apporté leur soutient moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Enfin, je témoigne ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin en me procurant leurs conseils et de leurs temps.

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions une classe de problèmes elliptiques fractionnaires impliquant un second membre qui varie en terme singulier de diffusion, d'absorption ou d'une discontinuité nonlinéaire qui change de signe et aussi dans le cas où ce second membre est une combinaison de ces termes précédents. Avec différentes hypothèses, nous obtenons divers résultats d'existence et de multiplicité en utilisant des méthodes variationnelles, la théorie des points critiques ainsi que la technique d'approximation.

Mots-clés: Problème singulier, nonlinéarités discontinues, frontières libres, p-Laplacien fractionnaire, inégalité de Hardy fractionnaire, point critique, méthode variationnelle, approche par approximation.

Table des matières

Notations

$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien de dimension $N \in \mathbb{N}$.
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$	Élément de $\mathbb{R}^N$.
$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2)^{\frac{1}{2}}$	Norme Euclidienne (canonique) de $\mathbb{R}^N$.
$\sigma(A) = \|A\|_\sigma = \|A\|$	Mesure de Lebesgue de $A \subset \mathbb{R}^N$.
$B(x,r)$ ou bien $B_r(x)$	Boule ouvert de centre x et rayon $r > 0$.
Ω	Domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ à frontière régulière $\partial\Omega$.
$\Delta_p u \coloneqq \text{div}\,(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$	p-Laplacien de u.
$(-\Delta)^s u$	Laplacien fractionnaire de u.
$(-\Delta)^s_p u$	p-Laplacien fractionnaire de u.
$\\| \cdot \\|_X$	Norme dans l'espace X.
X^*	Espace dual de X.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit ou Crochet de dualité entre X^* et X dans $\mathbb{R}^N$.
$\setminus$	Différence d'ensemble.
p.p.	Presque partout.
δ_0	Mesure de Dirac centrée en 0.
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Ω' sous ensemble ouvert de Ω.
$C_c(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω à support compact.
$C^k(\Omega)$	Espace des fonctions k-fois continûment différentiables (ou fonctions de classe k) sur Ω.
$C_c^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions de $C^k(\Omega)$ avec $k = \infty$ à support compact.
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R};$ mesurable et $\int_\Omega \|u(x)\|^p \ dx < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$.
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R};$ mesurable et $\exists C > 0$ telle que $\|u(x)\| \leq C$ p.p. sur $\Omega\}$.
$L^p_{loc}(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R};$ mesurable et $u(x)\chi_K \in L^p(\Omega), \forall K \subset \Omega$ compact$\}$, $1 \leq p \leq \infty$.
$W^{s,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev fractionnaire.

Introduction générale

Les problèmes elliptiques fractionnaires impliquant un opérateur non local modélisent beaucoup de phénomènes naturels. Ils apparaissent dans de nombreux domaines scientifiques notamment la géométrie, la physique, l'ingénierie et les sciences de vie.

Au cours de ces 20 dernières années, un avancement considérable a été fait surtout après le remarquable travail de Caffarelli et Silvestre [23] où les auteurs ont montré qu'un opérateur fractionnaire particulier est relié à des problèmes d'extension au demi-espace via des équations aux dérivées partielles. Cette idée ingénieuse permettra de traiter ce type de problème (avec un caractère non local) par des notions locales des EDP.

Plus précisément dans cette thèse, on s'intéresse à un opérateur non local de type p-Laplacien fractionnaire défini par

$$(-\Delta)_p^s u(x) := 2 \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

où $s \in (0,1)$, $p > 1$ et $N \geq 3$.

Le cas $p = 2$ correspond au Laplacien fractionnaire noté par $(-\Delta)^s$ qui apparait naturellement dans beaucoup de disciplines comme les modèles de la biomathématique, propagation des flammes, dynamique des fluides et les options américaines en finance. Pour plus de détails sur l'origine et la motivation de cet opérateur, nous invitons le lecteur à voir [21, 22, 28].

D'une manière générale, nous nous intéressons à l'étude de certains problèmes elliptiques de la forme suivante :

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ et f une fonction donnée qui vérifie certaines conditions.

Pour $p = 2$ avec une nonlinéarité f régulière par rapport à u, le problème (1) admet une structure variationnelle dont les solutions peuvent être construites comme les points critiques d'une fonctionnelle d'énergie.

Une série de papiers remarquables a été fait par Servadei et Validonci dans les travaux suivants [62–64].

Pour $p \neq 2$, il existe une littérature abondante sur le sujet et beaucoup d'auteurs ont étudié l'existence et la régularité des solutions du problème (1) pour des nonlinéarités régulières. Pour un bref panorama, nous envoyons le lecteur à regarder [8, 22, 42, 49, 53, 54, 57, 58, 67].

Dans ce travail, nous essayons de généraliser quelques résultats connus pour les nonlinéarités régulières à des nonlinéarités discontinues. Une des raisons de considérer des problèmes elliptiques avec un second membre discontinue est dû à de nombreux problèmes de frontières libre qui peuvent être ramener à un problème aux limites avec une nonlinéarité discontinue. Notons qu'une frontière libre est une courbe ou surface inconnue qui sépare deux régions différentes générées par la discontinuité du problème. Une des difficulté rencontrée est liée à la fonctionnelle d'énergie qui n'est pas Fréchet différentiable ainsi les méthodes classiques ne peuvent pas êtres appliquées.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'éxistence et la multiplicité des solutions du problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = m(x) \sum_{i=1}^{n} H(u - \mu_i) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où H est la fonction de Héaviside donnée par

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

la fonction $m \in L^\infty(\Omega)$ qui change de signe et $\mu_i > 0,\ i = \overline{1,n}$ vérifiant

$$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n, \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Pour le cas local $(s = 1, p \neq 2)$ avec $m \equiv 1$ et une seule nonlinéarité discontinue, le problème (1) a été étudié par Arcoya et Calahorrano [9].

Par contre, pour le cas $(s = 1, p = 2)$, l'étude a été faite par Ambrosetti et Badiale dans [6]. La généralisation pour le cas non locale est initié dans [11] où l'auteur a considéré le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f(u) H(u - \mu) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

où f est une fonction donnée vérifiant quelques hypothèses.

Beaucoup de travaux et généralisation ont été effectué ces dernières années et nous invitons le lecteur à consulter les articles suivant pour plus de détails. Voir [31, 47, 61, 66]. D'autres part, les problèmes elliptiques avec un terme singulier sont très peu étudiés surtout en les combinant avec des nonlinéarités discontinues. Ce type de problèmes apparait dans beaucoup de modèles telles que la théorie des fluides magnétiques et non-newtoniens. Voir [29, 30, 55].

Le caractère singulier dans ce type de problèmes pose beaucoup de difficultés liées au manque de régularité et de compacité des solutions pour pouvoir appliquer les méthodes classiques de l'analyse nonlinéaire. Les résultats obtenus dans cette thèse concernent les deux problèmes suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u \pm \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{sp}} = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

où Ω est un domaine borné contenant l'origine et de frontière régulière et $\lambda > 0$.

Le cas local ($s = 1$) a été traité par Khodabakhshi et Hadjian [46] en étudiant le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p}} = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

où $\Delta_p u := \text{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $\lambda, \mu > 0$ et f, g sont des fonctions données. Les auteurs ont montré l'existence de trois solutions par l'argument variationnel.

D'autre part, Ferrara et Bisci [32] ont étudié le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p}} + \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Ils ont montré l'existence d'au moins une solution.

Finalement, la généralisation de l'étude pour des nonlinéarité discontinues a été réalisé on supposant le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \beta \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{sp}} + \lambda f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{7}$$

où $0 \leq \beta < 1/c_H$ avec c_H est la constante de Hardy (fractionnaire).

Nous remarquons que le problème (7) est inconnu dans la littérature même pour le cas local et nous conjecturons que les résultats obtenus dans cette thèse restent vraies pour le cas $s = 1$.

Description de la thèse

La thèse est repartie en cinq chapitres qui sont organisé selon le plan suivant :

Le chapitre 1 intitulé "**Préliminaires**" contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles dans la suite de cette étude. Ce chapitre est partagé en cinq sections :

La section 1.1 présente un rappel de certaines définitions et résultats élémentaires des espaces fonctionnels L^p pour la bonne compréhension de ce manuscrit.

La section 1.2 est consacrée aux notions et résultats importants concernant la théorie des dérivées et des points critiques.

La section 1.3 est consacrée pour rappeler la méthode variationnelle et les principaux résultats utilisés dans cette thèse.

La section 1.4 est réservée à l'introduction de l'espace de Sobolev fractionnaire et de certains de ses résultats importants.

La section 1.5 fournit une introduction de l'opérateur p-Laplacien fractionnaire et quelques-unes de ses propriétés essentielles.

Dans le chapitre 2 intitulé "**Résultats d'existence pour un problème elliptique singulier impliquant le p-Laplacien fractionnaire avec terme de diffusion**", on étudie l'existence de solutions faibles du problème elliptique suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u - \beta \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{sp}} = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

où λ est un paramètre positif, Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, $p > 1$, $s \in (0,1)$, $(N > ps)$ contenant l'origine et de frontière régulière, $0 \leq \beta < 1/c_H$ où c_H est la constante de l'inégalité (1.15) de Hardy fractionnaire, f est une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance sous-critique **(H1)**. Ces résultats ont fait l'objet d'une partie de l'article soumis suivant :

H. Achour and S. Bensid, Existence results for singular elliptic problem involving a fractional p-Laplacian. arXiv preprint arXiv :2201.12651, 2022.

Dans le chapitre 3 intitulé "**Résultats d'existence pour un problème elliptique singulier impliquant le p-Laplacien fractionnaire avec terme d'absorption**", on obtient l'existence de solutions faibles du problème elliptique suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u + \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{sp}} = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

où λ est un paramètre positif, Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, $p > 1$, $s \in (0,1)$, $(N > ps)$ contenant l'origine et de frontière régulière, f est une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance sous-critique **(H1)**. Ces résultats ont fait l'objet d'une partie de l'article soumis suivant :

H. Achour and S. Bensid, Existence results for singular elliptic problem involving a fractional p-Laplacian. arXiv preprint arXiv :2201.12651, 2022.

Dans le chapitre 4 intitulé "**Sur un problème p-Laplacien fractionnaire avec des non-linéarités discontinues**", on s'intéresse à l'existence et de la multiplicité des solutions du problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = m(x) \sum_{i=1}^{n} H(u - \mu_i) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{8}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, $p \in (1,\infty), s \in (0,1)$, $(N > ps)$ de frontière régulière $\partial\Omega$, $\mu_i > 0$ vérifiant la condition $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$, $m \in L^\infty(\Omega)$ change de signe et H est la fonction de Héaviside. Ces résultats ont fait l'objet de l'article publié suivant :

H. Achour and S. Bensid, On a Fractional p-Laplacian Problem with Discontinuous Nonlinearities. Mediterranean Journal of Mathematics, 18(6), 1-17, 2021.

Dans le chapitre 5 intitulé "**Problème elliptique singulier impliquant le p-Laplacien fractionnaire avec une nonlinéarité discontinue**", on donne l'existence de solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \beta \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{sp}} + \lambda f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{9}$$

où Ω est un domaine régulier borné dans $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ contenant l'origine, $p > 1$, $s \in (0,1)$, $(N > ps)$, $0 \leq \beta < 1/c_H$ où c_H est la constante de l'inégalité (1.15) de Hardy fractionnaire, $\lambda > 0$ et f est une fonction nonlinéaire discontinue par rapport à u. Ces résultats ont fait l'objet de l'article publié suivant :

H. Achour and S. Bensid, Singular elliptic problem involving a fractional p-Laplacian with discontinuous nonlinearity. Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, 13(3), 1-25, 2022.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et nous rappelons les résultats nécessaires à la suite de ce travail. En particulier, nous citons certains notions élémentaires des espaces fonctionnels, et d'intégration, nous présentons également une introduction à la théorie des points critiques.

1.1 Espaces Fonctionnels

1.1.1 Les espaces L^p

Dans la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition et propriétés élémentaires des espaces L^p

Définition 1.1.1 ([19]). *Soit $p \in \mathbb{R}$, alors :*

▶ *Pour $1 \leq p < \infty$, on pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ \textit{mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \ dx < \infty \right\},$$

qui est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}^N$, muni de la norme suivante

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \ dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

▶ *Pour $p = \infty$, on pose*

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ \textit{mesurable et } \exists C > 0 \textit{ telle que } |f(x)| \leq C \textit{ p.p. sur } \Omega \},$$

qui est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}^N$, muni de la norme suivante

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C > 0 \textit{ telle que } |f(x)| \leq C \textit{ p.p. sur } \Omega \}.$$

▶ *Pour $1 \leq p \leq \infty$, on pose*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ \textit{mesurable et } f(x)\chi_K \in L^p(\Omega), \textit{ pour tout compact } K \subset \Omega \},$$

où χ_K est la fonction caractéristique de sous-ensemble K, i.e :

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1 \textit{ si } x \in K \\ 0 \textit{ si } x \notin K \end{cases}$$

Théorème 1.1.1 (Inégalité de Hölder [19]). *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $p \in [1, +\infty]$; on désigne par q l'exposant conjugué de p, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Théorème 1.1.2 ([19]).

(i) Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est de Banach.

(ii) Pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.

(iii) Pour tout $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe et réflexif.

Quelques résultats d'intégration

Lemme 1.1.1 (Lemme de Fatou [19]). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que*

(i) Pour chaque n, $f_n(x) \geq 0$ presque partout sur Ω.

(ii) $\sup \int_\Omega f_n(x)\, dx < +\infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$, on pose

$$f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Alors, $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega f(x)\, dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx.$$

Théorème 1.1.3 (Convergence dominée de Lebesgue [19]). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que*

(i) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ presque partout sur Ω.

(ii) Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n, on a

$$|f_n(x)| \leq g(x), \ \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Alors,

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Théorème 1.1.4 (Fubini [19]). *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^N$. On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$, on a*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} F(x,y)\, dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$, on a

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} F(x,y)\, dy \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus, on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)\, dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)\, dx = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)\, dxdy.$$

Définition 1.1.1 ([46,48]). *On dit que $f : \Omega\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, si*

(i) la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est mesurable pour chaque $t \in \mathbb{R}$;

(ii) la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue presque partout $x \in \Omega$.

Définition 1.1.2 (Produit de convolution [19]). *Soient f et g deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^N$, la convolution de f et g comme*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\, dy, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Définition 1.1.3 ([19]). *Pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, toute fonction $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit la translation de f par*

$$\tau_a(f)(x) = f(x+a), \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Intégration en coordonnées polaires

Notation 1.1.1 ([37]). *Soient $N \in \mathbb{N}$ et $|\cdot| : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ la norme Euclidienne (canonique) sur $\mathbb{R}^N$, définie par*

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On dénote par,

1. *$B(x,r)$ ou bien $B_r(x)$ la boule ouvert de centre x et rayon $r > 0$, i.e.*
$$B(x,r) := \left\{y \in \mathbb{R}^N \ : \ |x-y| < r\right\}.$$
2. *$S(x,r)$ ou bien $S_r(x)$ la Sphère de centre x et rayon $r > 0$ (le bord de la Boule), i.e.*
$$S(x,r) := \left\{y \in \mathbb{R}^N \ : \ |x-y| = r\right\} = \partial B(x,r).$$

En particulier, on note la Boule et la Sphère unitaire de dimension $(N-1)$ dans $\mathbb{R}^N$ par

$$B^{N-1} = B_1(0) := \left\{x \in \mathbb{R}^N \ : \ |x| < 1\right\}.$$

et

$$S^{N-1} = S_1(0) := \left\{x \in \mathbb{R}^N \ : \ |x| = 1\right\}.$$

Corollaire 1.1.1 ([36]). *Soit $N \in \mathbb{N}$, si f est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^N$, non négatif ($f \geq 0$) ou intégrable (i.e. $f \in L^p$), tel que $f(x) = g(|x|)$ pour une fonction g sur $]0,\infty[$, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx = \sigma(S^{N-1}) \int_0^\infty g(r) r^{n-1}\, dr = N\alpha(N) \int_0^\infty g(r) r^{N-1}\, dr,$$

où σ noté aussi par $|\cdot|_\sigma$ est la mesure de Lebesgue et $\alpha(N) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}$ le volume de la boule unitaire (i.e. $|B^{N-1}|_\sigma = N^{-1}|S^{N-1}|_\sigma$).

Remarque 1.1.1. *Si $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, les coordonnées polaires de x sont*

$$x = rx', \text{ où } r = \|x\|_2 \text{ et } x' = \frac{\partial}{\partial x}(\|x\|_2) = \frac{x}{\|x\|_2} \in S^{N-1}$$

1.2 Dérivées et points critiques

Dans cette section, nous fournissons une brève introduction à la théorie des dérivées et des points critiques dans le cas régulier et non régulier, qui est fondamentale pour notre étude.

1.2.1 Théorie régulière

On commence par introduire le concept de la dérivées de Gâteaux (faible).

Définition 1.2.1 (Dérivée au sens de Gâteaux [44]). *Soient X un espace de Banach et une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est différentiable au sens de Gâteaux (ou Gâteaux différentiable) en $u \in X$, s'il existe $\ell \in X^*$ tel que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(u+tv) - f(u)}{t} = \langle \ell(u), v\rangle := \ell(u;v).$$

C'est à dire, f a une dérivée directionnelle dans chaque direction $v \in X$. La fonction ℓ est appelée la dérivée de Gâteaux de f en u et on la note par $f'_G := \ell$.

Dans ce qui suit, on introduit la dérivée classique ou la dérivé de Fréchet (forte).

Définition 1.2.2 (Dérivée au sens de Fréchet [44]). *Soient X un espace de Banach et une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est différentiable au sens de Fréchet (ou Fréchet différentiable) en $u \in X$, s'il existe $\ell \in X^*$ tel que*

$$\lim_{\|v\|_X \to 0} \frac{f(u+v) - f(u) - \langle \ell(u), v\rangle}{\|v\|_X} = 0$$

ou bien, en utilisant le symbole de Landau o, on a

$$f(u+v) - f(u) - \langle \ell(u), v\rangle = o(\|v\|_X) \text{ avec } \lim_{\|v\|_X \to 0} \frac{o(\|v\|_X)}{\|v\|_X} = 0.$$

Ainsi, si f est différentiable, alors ℓ est unique et on la note $f' := \ell$.

Proposition 1.2.1 ([44]). *Soient X un espace de Banach et Ω un ouvert de X. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est Fréchet différentiable en un point $u \in \Omega$. Alors f est continue au point u.*

Preuve. *Comme $u \in \Omega$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $(u+v) \in \Omega$ et $\|v\| \leq \varepsilon_1$. Ainsi, puisque f est Fréchet différentiable en un point $u \in \Omega$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que*

$$|f(u+v) - f(u) - \langle f'(u), v\rangle| \leq \varepsilon \|v\|_X\,, \text{ si } \|v\| \leq \varepsilon_2.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} |f(u+v) - f(u)| &= |f(u+v) - f(u) - \langle f'(u), v\rangle + \langle f'(u), v\rangle| \\ &\leq |f(u+v) - f(u) - \langle f'(u), v\rangle| + |\langle f'(u), v\rangle| \\ &\leq |f(u+v) - f(u) - \langle f'(u), v\rangle| + \|f'\|_{X^*} \|v\|_X\,. \end{aligned}$$

Soit $\delta = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|f(u+v) - f(u)| \leq (\varepsilon + \|f'\|_{X^*}) \|v\|_X\,, \text{ si } \|v\| \leq \delta.$$

Par conséquent, il existe une constante $c > 0$ tel que

$$|f(u+v) - f(u)| \leq c \|v\|_X\,, \text{ si } \|v\| \leq \delta.$$

D'où découle la continuité de f en u. □

Proposition 1.2.2 ([44]). *Soient X un espace de Banach et une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est Gâteaux différentiable en $u \in X$ et on suppose que l'application $u \longmapsto f'_G(u)$ est continue au voisinage de u. Alors, f est Fréchet différentiable et sa dérivée (classique) $f'(u)$ coïncide $f'_G(u)$*

Preuve. *Soit v un point au voisinage de $u \in X$. En défini l'application*

$$\begin{aligned} g :\ &\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &t \longmapsto g(t) := f(u+tv) - f(u) - t\,\langle f'_G(u), v\rangle\,. \end{aligned}$$

Puisque g est différentiable, d'après le Théorème des accroissements finis, on a

$$g(1) - g(0) = g'_G(t), \ \ \forall t \in [0,1].$$

Ainsi, comme

$$g'_G(t) = \langle f'_G(u+tv), v\rangle - \langle f'_G(u), v\rangle .$$

Donc,

$$f(u+v) - f(u) - \langle f'_G(u), v\rangle = \langle f'_G(u+tv) - f'_G(u), v\rangle .$$

Étant donné que, l'application $w \longmapsto f'_G(w)$ est continue au voisinage de u, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|w-u\|_X \leq \delta \Longrightarrow \|f'_G(w) - f'_G(u)\|_{X^*} \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, si $\|v\|_X \leq \delta$, on a

$$\begin{aligned} |f(u+v) - f(u) - \langle f'_G(u), v\rangle| &\leq \|f'_G(u+tv) - f'_G(u)\|_{X^*} \|v\|_X \\ &\leq \varepsilon \|v\|_X . \end{aligned}$$

Alors,

$$|f(u+v) - f(u) - \langle f'_G(u), v\rangle| \leq \varepsilon \|v\|_X \quad \textit{avec} \quad \|v\|_X \leq \delta,$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\lim_{\|v\|_X \to 0} \frac{f(u+v) - f(u) - \langle f'_G(u), v\rangle}{\|v\|_X} = 0$$

et

$$f'_G(u) = f'(u).$$

□

Remarque 1.2.1. *En général, il est plus facile de calculer la dérivée au sens de Gâteaux et ensuite de vérifier qu'elle est continue, au lieu de prouver directement la différentiabilité au sens de Fréchet.*

Définition 1.2.3 ([44]). *Soit X un espace de Banach. On note l'ensemble des fonction continûment différentiable de X dans $\mathbb{R}$ par $C^1(X,\mathbb{R})$. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en tout $u \in X$ et sa dérivée f' est continue. Alors, f est dit de classe $C^1(X,\mathbb{R})$ (ou $f \in C^1(X,\mathbb{R})$) dans X.*

Définition 1.2.4 ([19]). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $k \in \mathbb{N}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors, On dénote par :*

- ▶ *$C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions f k-fois continûment différentiables sur Ω.*
- ▶ *$C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues à support compact dans Ω.*

On mentionne également que

$$C^k_c(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

En particulier, si $k = \infty$ alors $C^\infty_c(\Omega)$ est l'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω et ont un support compact contenu dans Ω.

Maintenant, on peut introduire la notion de point et de valeur critique via les définitions suivantes.

Définition 1.2.5 (Point critique et régulier [44])**.** *Soient X un espace de Banach et $f \in C^1(X, \mathbb{R})$. On dit que $u \in X$ est un point critique de f, si $f'(u) = 0$. Par ailleurs, si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de f.*

Définition 1.2.6 (Valeur critique et régulier [44])**.** *Soient X un espace de Banach et $f \in C^1(X, \mathbb{R})$. On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de f, s'il existe $u \in X$ tel que $f(u) = c$ et $f'(u) = 0$. Autrement, si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur régulier de f.*

Lemme 1.2.1. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de $C^1(\mathbb{R})$ définie par*

$$g(t) = |t|^p \circ V = |V(t)|^p, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } p > 1.$$

Alors, sa dérivée est donner par

$$g^{'}(t) = pV^{'}(t)|V(t)|^{p-2}V(t)$$

Preuve. *On commence par poser*

$$\phi_p(t) = |t|^p, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } p > 1. \tag{1.2}$$

d'où

$$\phi_p(t) = \begin{cases} t^p & \text{si } t > 0 \\ (-1)^p t^p & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

Donc, pour $p > 1$ on a

$$\phi_p^{'}(t) = \begin{cases} pt^{p-1} & \text{si } t > 0 \\ p(-1)^p t^{p-1} & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Plus précisément, on a

$$\phi_p^{'}(t) = \begin{cases} pt^{p-2}t & \text{si } t > 0 \\ p(-1)^{p-2} t^{p-2}t & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

Ce qui implique que

$$\phi_p^{'}(t) = \begin{cases} pt^{p-2}t & \text{si } t > 0 \\ p(-t)^{p-2}t & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\phi_p^{'}(t) = p|t|^{p-2}t, \quad \text{pour } p > 1. \tag{1.3}$$

Maintenant, par (1.2) on a

$$g(t) = |t|^p \circ V = (\phi_p \circ V)(t).$$

Ainsi, d'après (1.3) on obtient

$$\begin{aligned} g^{'}(t) &= (\phi_p \circ V)^{'}(t) \\ &= V^{'}(t)\phi_p^{'}(V(t)) \\ &= V^{'}(t)\left(p|V(t)|^{p-2}V(t)\right) \end{aligned}$$

Alors,

$$g^{'}(t) = pV^{'}(t)|V(t)|^{p-2}V(t).$$

□

Nous introduisons quelques conditions de compacité nécessaires à la recherche des points critiques d'une fonctionnelle, initialement présentées par Palais et Smale [56].

Définition 1.2.7 ([59]). *Soient X un espace de Banach et $f \in C^1(X,\mathbb{R})$. On dit que f vérifie la condition de Palais-Smale (dénoter par (PS)), si tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que*

(i) $\{f(u_n)\}$ *est bornée, i.e.* $f(u_n) \leq d := \sup\limits_n \{f(u_n)\}$,

(ii) $\|f'(u_n)\|_{X^*} \longrightarrow 0$ *as* $n \to +\infty$,

possède une sous suite convergente.

Remarque 1.2.2. *Dans un cas plus faible, on peut prendre f une fonction Gâteaux différentiable.*

Brézis, Coron et Nirenberg ont introduit une condition plus faible dans [20], appelée conditions de Palais-Smale locales

Définition 1.2.8 ([20]). *Soient X un espace de Banach et $f \in C^1(X,\mathbb{R})$. On dit que f vérifie la condition de Palais-Smale au niveau $c \in \mathbb{R}$ (dénoter par $(PS)_c$), si tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que*

(i) $f(u_n) \longrightarrow c$ *as* $n \to +\infty$,

(ii) $\|f'(u_n)\|_{X^*} \longrightarrow 0$ *as* $n \to +\infty$,

possède une sous suite convergente.

Remarques 1.2.1. *On remarque que :*

1. *Selon cette définition, toute suite de Palais-Smale possède une sous-suite (fortement) convergente.*
2. *Évidemment, la condition (PS) est équivalente à la condition $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.*
3. *La condition $(PS)_c$ implique que l'ensemble $\mathbb{K}_c$ des points critiques de f au niveau $c \in \mathbb{R}$, i.e;*
$$\mathbb{K}_c := \{u \in X \ ; \ f(u) = c \ \text{ et } \ f'(u) = 0\}$$
est compact.

1.2.2 Théorie non régulière

Dans cette section, X désigne un espace de Banach muni par la norme $\|\cdot\|_X$, X^* désigne l'espace dual de X et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit de dualité entre X^* et X. Nous introduisons les définitions bien connue suivantes.

Théorème 1.2.1 (Théorème de Hahn-Banach [19]). *Soient X un espace de Banach et $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application homogène, sous-additif, i.e :*

$$\textit{(homogène)} \quad I(\lambda u) = \lambda I(u), \quad \forall u \in X, \forall \lambda > 0,$$

$$\textit{(sous-additif)} \quad I(u+v) = \lambda I(u) + I(v), \quad \forall u, v \in X.$$

D'autre part, soient $Y \subset X$ un sous espace de X et $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire, telle que

$$g(u) \leq I(u), \quad \forall u \in X.$$

Alors, il existe une forme linéaire $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge g, i.e.

$$g(u) = f(u), \text{ pour tout } u \in Y \ \text{ et } \ f(u) \leq I(u), \text{ pour tout } u \in X.$$

Définition 1.2.9 (semi-continuité [19]). *Soit X un espace de Banach. Une fonctionnelle $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite semi continue supérieurement (respectivement faiblement semi continue supérieurement) en u, si pour toute suite (u_n) convergeant fortement (respectivement convergeant faiblement) vers u on a*

$$\limsup_{n\to+\infty} I(u_n) \leq I(u)$$

et dite fonction semi continue inférieurement (respectivement faiblement semi continue inférieurement), si

$$I(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(u_n).$$

Notez qu'une fonction semi-continue supérieurement et inférieurement est continue.

Définition 1.2.10 ([38]). *Soit X un espace de Banach. Une fonctionnelle $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive, si*

$$I(u) \longrightarrow \infty \ \text{ quand } \ \|u\|_X \longrightarrow \infty.$$

Définition 1.2.11 (Convexité [19]). *Soit X un espace de Banach. Une fonctionnelle $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$I(tu + (1-t)v) \leq tI(u) + (1-t)I(v), \quad \forall u, v \in X, \quad \forall t \in [0,1].$$

Définition 1.2.12 ([24, 33]). *On dit qu'une fonctionnelle $I : X \to \mathbb{R}$ est localement Lipschitzienne, si pour tout $u \in X$, il existe un voisinage V de u dans X et une constante $K > 0$ telle que*

$$|I(v) - I(w)| \leq K\|v - w\|_X, \quad \forall v, w \in V.$$

Gradient généralisé

La théorie classique de la dérivabilité ne fonctionne pas dans le cas des fonctions localement Lipschitzienne. Cependant, une approche de calcul sous-différentiel appropriée a été développée par Clarke et Chang [26, 27]. Nous allons introduire une notion plus générale de dérivée directionnelle, qui nous permettra également d'étudier des fonctions non différentiables.

Définition 1.2.13 ([24, 33]). *Soient $I : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle localement Lipschitzienne et pour $x, v \in X$. La dérivée directionnelle généralisée de I en x dans la direction v est dénoter par I° et défini comme suit*

$$I^\circ(x; v) = \limsup_{\substack{y\to x \\ t\downarrow 0}} \frac{I(y + tv) - I(y)}{t}.$$

Remarque 1.2.3. *Notons que cette définition ne présuppose pas l'existence d'aucune limite, $I^\circ(x, v)$ est un nombre fini pour tout v dans X.*

Proposition 1.2.3 ([24, 33]). *Si $I, J : X \to \mathbb{R}$ sont des fonctionnelles localement Lipschitziennes, alors les propriétés suivantes sont vérifiées*

(i) La fonctionnelle $I^\circ(x, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ est sous-additif, positivement homogène et satisfait l'inégalité suivante

$$|I^\circ(x; v)| \leq K\|v\|_X, \quad \forall v \in X,$$

où $K > 0$ est la constante de Lipschitz de I près de $x \in X$.

(ii) La fonctionnelle $v \in X \longmapsto I^\circ(x;v) \in \mathbb{R}$ est Lipschitzienne de rang K.

(iii) La fonctionnelle $(x,v) \in X \times X \longmapsto I^\circ(x;v) \in \mathbb{R}$ est semi continue supérieurement.

(iv) Pour tout $v \in X$, $I^\circ(x;-v) = (-I^\circ)(x,v)$.

(v) Pour tout $x, v \in X$, $(I+J)^\circ(x;v) = I^\circ(x;v) + J^\circ(x;v)$.

Preuve. *(i) D'après la définition, il est évident que f est positivement homogène, pour $\lambda > 0$ et $s = \lambda t$ on a*

$$\begin{aligned} I^\circ(x;\lambda v) &= \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{I(y+\lambda t v) - I(y)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{y\to x\\ s\downarrow 0}} \frac{I(y+sv) - I(y)}{\lambda^{-1}s} \\ &= \lambda \limsup_{\substack{y\to x\\ s\downarrow 0}} \frac{I(y+sv) - I(y)}{s} \\ &= \lambda I^\circ(x;v). \end{aligned}$$

Pour démontrer la sous-additivité de $I^\circ(x,\cdot)$, il faut montrer que

$$I^\circ(x,u+v) \leq I^\circ(x,u) + I^\circ(x,v), \quad \forall u,v \in X.$$

Observons que

$$\begin{aligned} I^\circ(x;u+v) &= \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{I(y+t[u+v]) - I(y)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{I(y+tu+tv) - I(y+tv) + I(y+tv) - I(y)}{t} \\ &\leq \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{I(y+tv+tu) - I(y+tv)}{t} + \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{I(y+tv) - I(y)}{t}. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $z = y + tv$ et $z \to x$ quand $y \to x$ et $t \downarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} I^\circ(x;u+v) &\leq \limsup_{\substack{z\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{I(z+tu) - I(z)}{t} + \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{I(y+tv) - I(y)}{t} \\ &= I^\circ(x;u) + I^\circ(x;v). \end{aligned}$$

Finalement, puisque I est localement lipschitzienne, on a

$$\begin{aligned} |I^\circ(x;u)| &\leq \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{|I(y+tv) - I(y)|}{t} \\ &\leq \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{K\|y+tv-y\|_X}{t} \\ &= K\|v\|_X. \end{aligned}$$

(ii) Soient $v, u \in X$. Si $(y+tv),\ (y+tu) \in B(x,\varepsilon)$, alors

$$I(y+tv) - I(y+tu) \leq Kt\|v-u\|_X,$$

et donc

$$\limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{|I(y+tv)-I(y)|}{t} - \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{|I(y+tu)-I(y)|}{t} \leq K\|v-u\|_X,$$

d'où

$$I^\circ(x,v) - I^\circ(x,u) \leq K\|v-u\|_X.$$

En inversant les rôles de v et u on obtient

$$I^\circ(x,u) - I^\circ(x,v) \leq K\|v-u\|_X.$$

Par conséquent

$$|I^\circ(x,u) - I^\circ(x,v)| \leq K\|v-u\|_X.$$

Alors, I° est lipschitzienne.

(iii) On définit une famille de fonctions, une pour chaque $i \in \mathbb{N}$, par

$$h_i(z,s) \coloneqq \frac{I(z+sv_i)-I(z)}{s}$$

et sa limite supérieure par,

$$I^\circ(x_i;v_i) \coloneqq \limsup_{\substack{z\to x_i\\ s\downarrow 0}} \frac{I(z+sv_i)-I(z)}{s} = \limsup_{\substack{z\to x_i\\ s\downarrow 0}} h_i(z,s).$$

Par définition de la limite supérieure, il existe au moins une suite (z_j, s_j) qui tends vers $(x_i, 0)$ quand $j \to +\infty$, faisant approcher $h_i(z_j,s_j)$ de $I^\circ(x_i;v_i)$, c'est à dire, on a

$$\lim_{j\to+\infty} h_i(z_j,s_j) = I^\circ(x_i;v_i)$$

En particulier, on pose $y_i \coloneqq z_{j_i}$ et $t_i \coloneqq s_{j_i}$, tel que

$$I^\circ(x_i;v_i) - \frac{1}{i} \leq h_i(y_i,t_i)$$

et

$$\|y_i - x_i\|_X + t_i < \frac{1}{i}.$$

Maintenant, on a

$$\begin{aligned}
I^\circ(x_i;v_i) - \frac{1}{i} &= \limsup_{\substack{y\to x_i\\ t\downarrow 0}} h_i(y,t) - \frac{1}{i}\\
&\leq h_i(y_i,t_i)\\
&= \frac{I(y_i+t_iv_i) - I(y_i+t_iv) + I(y_i+t_iv) - I(y_i)}{t_i}\\
&= \frac{I(y_i+t_iv_i) - I(y_i+t_iv)}{t_i} + \frac{I(y_i+t_iv) - I(y_i)}{t_i}.
\end{aligned}$$

Puisque I est localement lipschitzienne, pourvu que $(y_i+t_iv_i)$, $(y_i+t_iv) \in B(x,\varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{|I(y_i+t_iv_i) - I(y_i+t_iv)|}{t_i} &\leq \frac{K\,\|t_iv_i - t_iv\|_X}{t_i}\\
&= K\,\|v_i - v\|_X \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

On applique la limite supérieure, on obtient

$$\limsup_{i\to+\infty} I^\circ(x_i; v_i) \leq \limsup_{i\to+\infty} \frac{I(y_i + t_i v) - I(y_i)}{t_i} \leq I^\circ(x; v),$$

ce qui implique la semi continuité supérieure.

(iv) En effet, Par le changement de variable $z = y - tv$ et $z \to x$ quand $y \to x$ et $t \downarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
I^\circ(x; -v) &= \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{I(y - tv) - I(y)}{t}\\
&= \limsup_{\substack{y\to x\\ s\downarrow 0}} \frac{I(y - tv) - I(y - tv + tv)}{t}\\
&= -\limsup_{\substack{y\to x\\ s\downarrow 0}} \frac{I(y - tv + tv) - I(y - tv)}{t}\\
&= -\limsup_{\substack{z\to x\\ s\downarrow 0}} \frac{(-I)(z + tv) - (-I)(z)}{t}\\
&= (-I)^\circ(x; v).
\end{aligned}$$

(v) Par définition de la dérivée directionnelle généraliser, on a

$$\begin{aligned}
(I + J)^\circ (x; v) &= \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{(I + J)(y + tv) - (I + J)(y)}{t}\\
&= \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{I(y + tv) + J(y + tv) - I(y) - J(y)}{t}\\
&= \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{I(y + tv) - I(y)}{t} + \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{J(y + tv) - J(y)}{t}\\
&= I^\circ(x; v) + J^\circ(x; v).
\end{aligned}$$

Définition 1.2.14 ([24, 33]). *Le gradient généralisé d'une fonctionnelle localement Lipschitz I en $x \in X$, noté $\partial I(x)$ est un sous-ensemble de X^* défini par*

$$\partial I(x) = \{\zeta \in X^* \ : \ \langle \zeta, v\rangle \leq I^\circ(x; v), \quad \forall v \in X\}.$$

Remarque 1.2.4. *On remarque que, si $I : X \to \mathbb{R}$ est de classe $C^1(X, \mathbb{R})$, alors*

$$\partial I(x) = \{I'(x), \quad \forall v \in X\}.$$

Proposition 1.2.4 ([24, 33]). *Soient $I, J : X \to \mathbb{R}$ des fonctionnelles localement Lipschitziennes. Alors, pour toute $x \in X$, les propriétés suivantes sont vérifier*

(i) $\partial I(x)$ est non vide, convexe et faible*-compact tel que

$$\|\zeta\|_{X^*} \leq K, \quad \forall \zeta \in \partial I(x),$$

où $K > 0$ est la constante de Lipschitz de I près de $x \in X$.

(ii) Pour tout $v \in X$, $I^\circ(x; v) = \max\{\langle \zeta, v\rangle \ : \ \zeta \in \partial I(x)\}$.

(iii) La multifonction $x \longmapsto \partial I(x)$ est semi continue supérieurement.

(iv) La fonction $\lambda(x) = \min_{\zeta \in \partial I(x)} \|\zeta\|_{X^*}$ existe et $\lambda(x)$ est semi continue inférieurement (i.e. $\lambda(x_0) \leq \lim_{x \to x_0} \lambda(x)$).

Preuve. *(i) D'après Proposition 1.2.3(i), La fonctionnelle $I^\circ(x, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ est sous-additif et positivement homogène. Alors, selon le Théorème 1.2.1 de Hahn-Banach, il existe un élément $\zeta \in X^*$ tel que*

$$\langle \zeta, v \rangle \leq I^\circ(x; v), \quad \forall v \in X,$$

ce qui signifie par Définition 1.2.14 que $\partial I(x)$ n'est pas vide. Concernant la convexité, Soient $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial I(x)$ et $\lambda \in [0, 1]$. alors

$$\begin{aligned} \langle \lambda\zeta_1 + (1-\lambda)\zeta_2, v \rangle &= \lambda \langle \zeta_1, v \rangle + (1-\lambda) \langle \zeta_2, v \rangle \\ &\leq \lambda I^\circ(x; v) + (1-\lambda) I^\circ(x; v) \\ &= I^\circ(x; v), \end{aligned}$$

d'où $(\lambda\zeta_1 + (1-\lambda)\zeta_2) \in \partial I(x)$, donc $\partial I(x)$ est convexe. Ensuite, pour démontrer la compacité, il suffit de montrer que $\partial I(x)$ est bornée et fermée. Par Proposition 1.2.3(i), pour $v = \zeta$ on a

$$\|\zeta\|^2_{X^*} = |\langle \zeta, \zeta \rangle| \leq |I^\circ(x; \zeta)| \leq K \|\zeta\|_{X^*}.$$

Ainsi,

$$\|\zeta\|_{X^*} \leq K, \quad \forall \zeta \in \partial I(x).$$

Cela signifie que, $\partial I(x)$ est bornée. Maintenant, soit $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \partial I(x)$ un suite tel que $\zeta_i \to \zeta$. Alors

$$\langle \zeta, v \rangle = \lim_{i \to +\infty} \langle \zeta_i, v \rangle \leq \lim_{i \to +\infty} I^\circ(x; v) = I^\circ(x; v).$$

Ce qui implique que $\zeta \in \partial I(x)$ et donc $\partial I(x)$ est fermé.

(ii) D'après la Définition 1.2.14, on obtient

$$I^\circ(x; v) \geq \max \{ \langle \zeta, v \rangle \ : \ \zeta \in \partial I(x) \}, \quad \forall v \in X.$$

Si $v_1 \in X$, tel que

$$I^\circ(x; v_1) > \max \{ \langle \zeta, v_1 \rangle \ : \ \zeta \in \partial I(x) \},$$

alors par le Théorème de Hahn-Banach, il existe $\zeta_1 \in X^*$ tel que

$$I^\circ(x; v) \geq \langle \zeta_1, v \rangle, \ \textit{pour tout} \ \ v \in X \ \ \textit{et} \ \ I^\circ(x; v_1) = \langle \zeta_1, v_1 \rangle.$$

Il s'ensuit que $\zeta_1 \in \partial I(x)$ et

$$I^\circ(x; v_1) > \max \{ \langle \zeta, v_1 \rangle \ : \ \zeta \in \partial I(x) \} \geq \langle \zeta_1, v_1 \rangle = I^\circ(x; v_1),$$

ce qui est impossible. Ainsi

$$I^\circ(x; v) = \max \{ \langle \zeta, v \rangle \ : \ \zeta \in \partial I(x) \}, \quad \forall v \in X.$$

(iii) Soient $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ et $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \partial I(x)$, tel que $y_i \to y$ et $\zeta_i \to \zeta$. Alors, on a

$$\langle \zeta, v \rangle = \lim_{i \to +\infty} \langle \zeta_i, v \rangle \leq \lim_{i \to +\infty} I^\circ(y_i; v), \quad \forall v \in X.$$

D'après Proposition 1.2.3 (iii), $I^\circ(y;\cdot)$ est semi-continue supérieurement, donc

$$\langle \zeta, v\rangle \leq I^\circ(y;v), \quad \forall v \in X.$$

Par suite, $\zeta \in \partial I(x)$ et $\partial I(x)$ est semi-continue supérieurement.

(iv) D'après (i) et le fait que la fonction $\zeta \longmapsto \|\zeta\|_{X^*}$ est semi-continue inférieurement et bornée, alors pour tout $x_0 \in X$, il existe $\zeta_0 \in \partial I(x)$ tel que

$$\|\zeta_0\|_{X^*} = \lambda(x_0).$$

Pour montrer que $\lambda(x)$ est semi-continue inférieurement, supposons qu'il existe une suite $x_n \to x_0$ et $\zeta_n \in \partial I(x_n)$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda(x_n) < \lambda(x_0) \ \text{ et } \ \|\zeta_n\|_{X^*} = \lambda(x_n).$$

Alors, par (iii) on peut choisir une sous suite $\zeta_{n_i} \to \zeta_0 \in \partial I(x_0)$, mais,

$$\liminf_{i\to+\infty} \|\zeta_{n_i}\|_{X^*} \geq \|\zeta_0\|_{X^*} \geq \lambda(x_0),$$

ce qui est impossible. □

Proposition 1.2.5 ([24,33]). *Soient $I, J : X \to \mathbb{R}$ des fonctionnelles localement Lipschitziennes. Alors, pour toute $x \in X$, les propriétés suivantes sont vérifiées*

(i) Pour tout $x \in X$, $\partial(I+J)(x) \subset \partial I(x) + \partial J(x)$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\partial(\lambda I)(x) = \lambda \partial I(x)$.

Preuve.

(i) D'après la proposition 1.2.3 (v), on obtient

$$\zeta \in \partial(I+J)(x) \Longleftrightarrow \langle \zeta, v\rangle \leq (I+J)^\circ(x;v) = I^\circ(x;v) + J^\circ(x;v), \quad \forall v \in X. \tag{1.4}$$

Par absurde, on suppose que $\zeta \notin \partial I(x) + \partial J(x)$. Alors, par (ii) et pour tout $u \in X$ on

$$\begin{aligned}\langle \zeta, u\rangle &> \max\{\langle \zeta, u\rangle \ : \ \zeta \in \partial I(x) + \partial J(x)\}\\ &= \max\{\langle \zeta_1, u\rangle \ : \ \zeta_1 \in \partial I(x)\} + \max\{\langle \zeta_2, u\rangle \ : \ \zeta_2 \in \partial J(x)\}\\ &= I^\circ(x;v) + J^\circ(x;v),\end{aligned}$$

qui contredit (1.4), ce qui prouve la proposition.

(ii) Si $\lambda = 0$, la propriété est évidente. Ainsi, si $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned}\zeta \in \partial(\lambda I)(x) &\Longleftrightarrow \langle \zeta, v\rangle \leq (\lambda I)^\circ(x;v) = \lambda I^\circ(x;v), \quad \forall v \in X\\ &\Longleftrightarrow \left\langle \frac{1}{\lambda}\zeta, v\right\rangle \leq \frac{1}{\lambda}\lambda I^\circ(x;v) = I^\circ(x;v), \quad \forall v \in X\\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}\zeta \in \partial I(x)\\ &\Longleftrightarrow \zeta \in \lambda \partial I(x).\end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, d'après Proposition 1.2.3 (iv) on a

$$\begin{aligned}
\zeta \in \partial(\lambda I)(x) &\Longleftrightarrow \langle \zeta, v\rangle \leq (\lambda I)^{\circ}(x;v) = \lambda I^{\circ}(x;v), \quad \forall v \in X \\
&\Longleftrightarrow \left\langle \frac{1}{\lambda}\zeta, v\right\rangle = -\frac{1}{\lambda}\langle \zeta, -v\rangle \leq -\frac{1}{\lambda}\lambda I^{\circ}(x;-v) = -\frac{1}{\lambda}\lambda(-I)^{\circ}(x;v), \quad \forall v \in X \\
&\Longleftrightarrow \left\langle \frac{1}{\lambda}\zeta, v\right\rangle \leq \left(-\frac{1}{\lambda}\right)(-\lambda)\, I^{\circ}(x;v) = I^{\circ}(x;v), \quad \forall v \in X \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}\zeta \in \partial I(x) \\
&\Longleftrightarrow \zeta \in \lambda \partial I(x).
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $\lambda \geq 0$, $\partial(\lambda I)(x) = \lambda \partial I(x)$.

Gradient généralisé des fonctionnelles intégrales

Lemme 1.2.2 ([26]). *Soient Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$, $u : X \to \mathbb{R}$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable localement bornée (i.e. $f \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$) satisfaisant la condition de croissance suivante*

$$|f(x,t)| \leq \alpha + \beta\, |t|^{\sigma}\,, \quad \forall \alpha, \beta > 0 \;\; \textit{et} \;\; \forall \sigma > 0. \tag{1.5}$$

On définit la fonctionnel suivante par

$$g(u) = \int_{\Omega} F(x,u)\, dx, \tag{1.6}$$

où $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,s)\, ds$. Alors, g est localement Lipschitzienne sur $L^{\sigma+1}(\Omega)$.

Preuve. *Par la définition (1.6) de g, on calcule*

$$\begin{aligned}
|g(u) - g(v)| &= \left| \int_{\Omega} F(x,u(x))\, dx - \int_{\Omega} F(x,v(x))\, dx \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} \left[F(x,u(x)) - F(x,v(x))\right]\, dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} \left| \int_0^{u(x)} f(x,s)\, ds - \int_0^{v(x)} f(x,s)\, ds \right|\, dx \\
&= \int_{\Omega} \left| \int_0^{u(x)} f(x,s)\, ds + \int_{v(x)}^{0} f(x,s)\, ds \right|\, dx \\
&= \int_{\Omega} \left| \int_{v(x)}^{u(x)} f(x,s)\, ds \right|\, dx.
\end{aligned}$$

Par la condition (1.5), on a

$$\begin{aligned}
|g(u) - g(v)| &\leq \int_{\Omega} \left| \int_{v(x)}^{u(x)} \left[\alpha + \beta\, |s|^{\sigma}\right]\, ds \right|\, dx \\
&= \int_{\Omega} \left| \left[\alpha\, |s| + \beta \frac{|s|^{\sigma+1}}{\sigma+1} \right]_{v(x)}^{u(x)} \right|\, dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left| \alpha\, |u(x) - v(x)| + \beta \frac{|u(x)-v(x)|^{\sigma+1}}{\sigma+1} \right|\, dx \\
&\leq \alpha \int_{\Omega} |u(x) - v(x)|\, dx + \frac{\beta}{\sigma+1} \int_{\Omega} |u(x)-v(x)|^{\sigma+1}\, dx
\end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.1.1 de l'inégalité de Hölder, pour $P = \frac{\sigma+1}{\sigma}$ et $Q = \sigma + 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
|g(u) - g(v)| &\leq \alpha \left(\int_\Omega dx \right)^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} \left(\int_\Omega |u(x) - v(x)|^\sigma \ dx \right)^{\frac{1}{\sigma+1}} \\
&\quad + \beta \left(\int_\Omega |u(x) - v(x)|^{\sigma+1} \ dx \right)^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} \left(\int_\Omega |u(x) - v(x)|^{\sigma+1} \ dx \right)^{\frac{1}{\sigma+1}} \\
&= \left(\alpha \, |\Omega|^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} + \beta \, \|u - v\|^\sigma_{L^{\sigma+1}(\Omega)} \right) \|u - v\|_{L^{\sigma+1}(\Omega)} \, .
\end{aligned}$$

Il existe un voisinage U de u, tel que

$$\begin{aligned}
|g(u) - g(v)| &\leq \left(\alpha \, |\Omega|^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} + \beta \max_{w \in U} \|w\|^\sigma_{L^{\sigma+1}(\Omega)} \right) \|u - v\|_{L^{\sigma+1}(\Omega)} \\
&= K \, \|u - v\|_{L^{\sigma+1}(\Omega)} \, .
\end{aligned}$$

Pour $K = \left(\alpha \, |\Omega|^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} + \beta \max_{w \in U} \|w\|^\sigma_{L^{\sigma+1}(\Omega)} \right) > 0$, la constante le Lipschitz, alors g est localement Lipschitzienne. □

Remarque 1.2.5. *On observe le calcul de gradient généralisé d'une forme plus simple suivante :*

$$F(t) = \int_0^t f(s) \, ds, \quad \forall f \in L^\infty_{loc}(\Omega).$$

Pour $\sigma > 0$, on note

$$\underline{f}(t) := \liminf_{s \to t} f(s) \ \text{ et } \ \overline{f}(t) = \limsup_{n \to +\infty} f(s).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
F^\circ(t; v) &= \limsup_{\substack{s \to t \\ \delta \downarrow 0}} \frac{F(s + \delta v) - F(s)}{\delta} \\
&= \limsup_{\substack{s \to t \\ \delta \downarrow 0}} \frac{\left[\int_0^{s + \delta v(x)} f(\xi) \, d\xi - \int_0^s f(\xi) \, d\xi \right]}{\delta} \\
&= \limsup_{\substack{s \to t \\ \delta \downarrow 0}} \frac{1}{\delta} \int_s^{s + \delta v(x)} f(\xi) \, d\xi.
\end{aligned}$$

Donc,

$$F^\circ(t; v) = \begin{cases} \overline{f}(t) v(x) & \text{si } \ v(x) > 0 \\ \underline{f}(t) v(x) & \text{si } \ v(x) < 0, \end{cases}$$

d'où

$$\partial f(t) \subset \left[\underline{f}(t), \overline{f}(t) \right].$$

En particulier, on suppose que $f(t \pm 0)$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\underline{f}(t) = \min \left\{ f(t - 0), f(t + 0) \right\}$$

et

$$\overline{f}(t) = \max \left\{ f(t - 0), f(t + 0) \right\},$$

d'où

$$f(t \pm 0) \leq F^\circ(t; v), \ \text{pour tout } v.$$

Puisque $\partial F(t)$ est un intervalle,

$$\partial F(t) = \left[\underline{f}(t), \overline{f}(t) \right]$$

Théorème 1.2.2 ([26]). *Soient $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable localement bornée (i.e. $f \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$) satisfaisant la condition (1.5). Alors, la fonctionnelle $g : L^{\sigma+1}(\Omega) \to \mathbb{R}$, définie par (1.6) localement Lipschitzienne et sont gradient généralisé est donné par*

$$\partial g(u) \subset \partial F(x,u) \subseteq \left\{\zeta \in L^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}(\Omega) \ : \ \zeta(x) \in \left[\underline{f}(x,u), \overline{f}(x,u)\right] \text{ p.p. } x \in \Omega\right\}.$$

Preuve. *Par la définition 1.2.13 de la dérivée directionnelle généraliser, ils existent $w \to u$ et $\delta_n \downarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$, telle que*

$$\begin{aligned} g^{\circ}(u;v) &= \lim_{n\to\infty} \frac{g(w+\delta_n v)-g(w)}{\delta_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\int_\Omega F(x,w+\delta_n v)\,dx - \int_\Omega F(x,w)\,dx\right]}{\delta_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{\left[\int_0^{w+\delta_n v} f(x,\xi)\,d\xi - \int_0^{w} f(x,\xi)\,d\xi\right]}{\delta_n}\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{\delta_n}\int_w^{w+\delta_n v} f(x,\xi)\,d\xi\,dx. \end{aligned}$$

On suppose $w \to u$ et $\delta_n \downarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$, d'après le Lemme 1.1.1 de Fatou, on conclue que

$$\begin{aligned} g^{\circ}(u;v) &\le \int_\Omega F^{\circ}(x,u(x);v(x))\,dx \\ &= \int_\Omega \max\left\{\langle\zeta(x),v(x)\rangle \ : \ \zeta \in \partial f(x,u(x))\right\}\,dx \\ &= \int_{\{v(x)<0\}} \underline{f}(x,u(x))v(x)\,dx + \int_{\{v(x)>0\}} \overline{f}(x,u(x))v(x)\,dx. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Pour $\zeta \in \partial g(u)$, nous voulons prouver que

$$\zeta(x) \in \left[\underline{f}(x,u(x)), \overline{f}(x,u(x))\right] \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Supposons qu'il existe un ensemble positif $E \subset \Omega$, tel que

$$\zeta(x) < \underline{f}(x,u(x)), \quad \forall x \in E. \tag{1.8}$$

Soit $v(x) = -\chi_E(x)$ dans (1.7), la fonction caractéristique de E, en utilisant la définition du gradient généralisé on obtient

$$-\int_E \zeta(x)\,dx = \int_\Omega \zeta(x)(-\chi_E(x))\,dx \le -\int_\Omega \underline{f}(x,u(x))\chi_E(x)\,dx = -\int_E \underline{f}(x,u(x))\,dx.$$

Cela contredit (1.8). Par conséquent nous avons

$$\underline{f}(x,u(x)) \le \zeta(x), \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

De même, on a $\zeta(x) \le \overline{f}(x,u(x))$, p.p. $x \in \Omega$. Alors, si $\zeta(x) \in \partial g(u)$, on a

$$\zeta(x) \in \left[\underline{f}(x,u(x)), \overline{f}(x,u(x))\right] \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

□

Définition 1.2.15 ([26]). *Soit f une fonction localement Lipschitzienne dans un espace de Banach X, un point $u \in X$ est dit un point critique de f, si $0 \in \partial f(u)$.*

Nous introduisons maintenant la condition de Palais-Smale étendue aux fonctions localement de Lipschitzienne

Définition 1.2.16 ([26]). *Soient X un espace de Banach et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne. On dit que f satisfait la condition de Palais-Smale au niveau $c \in \mathbb{R}$ (dénoter par $(PS)_c$), si pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, tel que*

(i) $f(u_n) \longrightarrow c$ *as* $n \to +\infty$,

(ii) $\lambda(u_n) = \min\limits_{\zeta \in \partial I(u_n)} \|\zeta\|_{X^*} \longrightarrow 0$ *as* $n \to +\infty$,

possède une sous suite convergente.

1.3 Méthode variationnelle

Dans cette section, tout en s'inspirant des cours de Chabrowski [25] et B. Yan [68] sur le sujet, nous introduisons quelques méthodes et résultats pour résoudre le problème aux limites pour nos équations aux dérivées partielles non linéaires. Tous ces problèmes peuvent s'écrire sous la forme abstraite suivante

$$\begin{cases} \mathcal{A}[u] = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{B}[u] = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

Où

- $\mathcal{A}$ désigne une équation aux dérivées partielles donnée, éventuellement nonlinéaire et nonlocale pour un inconnu u.
- $\mathcal{B}$ est une condition aux limites donnée.

Les méthodes variationnelles classiques identifient une classe importante de problèmes qui peuvent être résolues à l'aide de techniques d'analyse fonctionnelle non linéaire très simples ; Il s'agit de la classe de problèmes variationnels, à savoir que, l'équations aux dérivées partielles (EDP) de la forme (1.9) peut être formulée de telle sorte que

$$\mathcal{A}[u] = E^{'}(u),$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est la dérivée d'une fonctionnelle énergétique appropriée E également appelée fonction d'Euler-Lagrange, qui est au moins Fréchet différentiable sur un espace de Banach X. Plus précisément, puisque $\mathcal{A} : X \longrightarrow X^*$, alors le problème (1.9) peut être formulé faiblement comme suit

$$\left\langle E^{'}(u), v \right\rangle = 0, \quad \forall v \in X.$$

L'intérêt de cette nouvelle formulation est de résoudre (au moins faiblement) le problème (1.9) revient à trouver les points critiques de E sur X. Ces points peuvent être relativement faciles à trouver, par exemple en utilisant la méthode de minimisation où nous résolvons le problème variationnel (1.9) en trouvant les minimiseurs de sa fonctionnelle d'énergie associée.

Une version importante du théorème d'Ambrosetti et Rabinowitz pour les fonctionnelles localement Lipschitzienne est donnée par le résultat suivant

Théorème 1.3.1 (Théorème du col d'Ambrosetti-Rabinowitz [26]). *Soient X un espace de Banach et $E : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle localement Lipschitzienne satisfaisant la condition de $(PS)_c$. On suppose que $E(0) = 0$ et*

(i) Il existe $\rho, \alpha > 0$ tel que $\|u\|_X = \rho$ et $E(u) \geq \alpha$, pour tout $u \in X$.

(ii) Il existe $e \in X$ tel que $\|e\|_X > \rho$ et $E(e) \leq 0$.
Alors, E possède une valeur critique $c \geq \alpha$. De plus c peut être caractérisé comme

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} E(\gamma(t)),$$

où

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \; : \; \gamma(0) = 0, \; \gamma(1) = e\}.$$

Alors, c est une valeur critique de E et $c \geq \alpha$.

D'autres résultats qu'on va utilisé par la suite.

Théorème 1.3.2 ([26]). *Soient X un espace de Banach et $E : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne vérifiant la condition de $(PS)_c$. Si E est borné inférieurement, alors $c = \inf_{u \in X} E(u)$ est une valeur critique de E.*

Théorème 1.3.3 (Bonanno [18]). *Soient X un espace de Banach réel et $\Phi, \Psi : X \to \mathbb{R}$ deux fonctionnelles continûment Gâteaux différentiables tel que Φ est borné inférieurement et $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$. Fixons $r > 0$ tel que*

$$\sup_{\{\Phi(u) < r\}} \Psi(u) < +\infty$$

et supposons que pour chaque

$$\lambda \in \left]0, \frac{r}{\sup_{\{\Phi(u)<r\}} \Psi(u)}\right[,$$

la fonctionnelle $E_\lambda := \Phi - \lambda\Psi$ satisfait la condition de (PS) et elle est non bornée inférieurement. Alors, pour chaque $\lambda \in]0, \frac{r}{\sup_{\{\Phi(u)<r\}} \Psi(u)}[$, la fonctionnelle E_λ admet deux points critiques distincts.

Théorème 1.3.4 (Ricceri [60]). *Soient X un espace de Banach réel et $\Phi, \Psi : X \to \mathbb{R}$ deux fonctionnelles continûment Gâteaux différentiables telles que Φ est fortement continue, faiblement semi-continue inférieurement et coercive. De plus, supposons que Ψ est faiblement semi-continue supérieurement. Pour chaque $r > \inf_X \Phi$, posons*

$$\varphi(r) := \inf_{u \in \Phi^{-1}(]-\infty, r[)} \frac{\left(\sup_{\{v \in \Phi^{-1}(]-\infty,r[)\}} \Psi(v)\right) - \Psi(u)}{r - \Phi(u)}.$$

Alors, pour chaque $r > \inf_X \Phi$ et chaque $\lambda \in]0, 1/\varphi(r)[$, la restriction de $E_\lambda := \Phi - \lambda\Psi$ à $\Phi^{-1}(]-\infty, r[)$ admet un minimum global, qui est un point critique (minima locaux) de E_λ dans X.

1.4 Espace de Sobolev fractionnaire

Définition 1.4.1 ([16,28]). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et l'exposant fractionnaire $s \in]0,1[$. Pour tout $p \in [1,+\infty)$, on définit l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ par*

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \ : \ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\};$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

où le terme suivant

$$[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \, dxdy \right)^{\frac{1}{p}},$$

est la semi-norme de Gagliardo de u.

Théorème 1.4.1 ([16,28]). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et l'exposant fractionnaire $s \in]0,1[$. Alors, on a*

(i) Pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est de Banach.

(ii) Pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est séparable.

(iii) Pour tout $1 < p < \infty$, l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est uniformément convexe et réflexif.

On définit le sous espace suivant qui est notre espace principal, le plus utilisé dans les travaux à venir.

Définition 1.4.2 ([42]). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $s \in]0,1[$. Pour tout $p \in [1,+\infty)$, on définit le sous espace linéaire fermé, noté W_0 par*

$$W_0 := \left\{ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \ : \ u(x) = 0 \ \text{ p.p. dans } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \right\},$$

qui est normé de manière équivalente par

$$\|u\|_{W_0} := [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Théorème 1.4.2 ([42]). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $s \in]0,1[$. Alors, l'espace W_0 est de Banach et uniformément convexe pour tout $1 < p < \infty$.*

Proposition 1.4.1. *Soient $0 < s \leq s' < 1$, $p \in [1,\infty)$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Alors, il existe une constante $C = C(N,s,p) \geq 1$ tel que*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}, \ \forall u \in W^{s',p}(\Omega).$$

En particulier,

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Proposition 1.4.2. *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,\infty)$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ continument lipschitzien avec frontière borné. Alors, il existe une constante $C = C(N,s,p) \geq 1$ tel que*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

En particulier,

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Théorème 1.4.3. *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,\infty)$, l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ des fonctions infiniment différentiables est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Théorème 1.4.4 ([4, 28]). *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,\infty)$, l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ des fonctions infiniment différentiables avec un support compact contenu est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

La preuve du Théorème 1.4.4 est établie dans [35, Theorem 6.]

Définition 1.4.3 ([28]). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on désigne par $D^{s,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans la norme $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$, i.e.*

$$D^{s,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}}$$

Remarque 1.4.1. *On remarque que, d'aprés le Théorème 1.4.4, on a*

$$D^{s,p}(\mathbb{R}^N) = W^{s,p}(\mathbb{R}^N),$$

ce qui n'est pas vrai en général, pour $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, i.e. $C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{s,p}(\Omega)$.

1.4.1 Injections continus et compacts

Cette partie est consacrée aux injections continus et compacts des espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,p}$ dans les espaces de Lebesgue classiques L^q. Ces résultats sont déjà traités de manière exhaustive dans [28].

Nous commençons par rappeler quelques résultats essentiel pour les preuves

Lemme 1.4.1 ([28]). *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp < N$. On fixe $T > 1$; Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $(a_k)_k$ une suite bornée, non négative et décroissante avec $a_k = 0$ pour tout $k \geq n$. Alors,*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^{\frac{N-sp}{N}} T^k \leq C \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}} a_{k+1} a_k^{\frac{-sp}{N}} T^k$$

pour une constante $C = C(N,p,s,T) > 0$ indépendante de n.

Lemme 1.4.2 ([28]). *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp < N$. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support compact. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose*

$$A_k := \left\{|u| > 2^k\right\} \ \text{ et } \ a_k := |A_k|\,.$$

Alors,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \geq C \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}} a_{k+1} a_k^{\frac{-sp}{N}} 2^{2k},$$

pour une constante $C = C(N,p,s) > 0$.

Lemme 1.4.3 ([28]). *Soient $q \in [1,+\infty[$ et $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$u_n(x) := \max\left\{\min\left\{u(x), n\right\}, -n\right\}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\,.$$

Prenant en considération ces Lemmes précédents, nous pouvons donner la preuve élémentaire des Théorèmes suivants

Théorème 1.4.5 ([28]). *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp < N$. Alors, il existe une constante positive $C = C(N,p,s)$ tel que, pour toute fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mesurable à support compact, on a*

$$\|u\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy, \tag{1.10}$$

i.e.

$$W^{s,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^{p_s^*}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

où l'exposant critique fractionnaire

$$p_s^* := \begin{cases} \frac{Np}{N-sp} & \text{if } N > ps \\ \infty & \text{if } N \leq ps. \end{cases} \tag{1.11}$$

Preuve. *Tout d'abord, remarquons que si le membre de droite*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \geq +\infty,$$

alors l'affirmation du théorème s'ensuit clairement. Donc, on peut supposer que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy < +\infty.$$

Cas 1 : *si $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors on peut poser*

$$a_k := |A_k| \quad \text{avec} \quad A_k := \left\{|u| > 2^k\right\}.$$

On aura,

$$\begin{aligned} \|u_n\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{A_k \backslash A_{k+1}} |u(x)|^{p_s^*} dx \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{A_k \backslash A_{k+1}} \left(2^{k+1}\right)^{p_s^*} dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(k+1)p_s^*} |A_k \backslash A_{k+1}|. \end{aligned}$$

Puisque, $A_k \backslash A_{k+1} \subset A_k$, on a

$$\begin{aligned} \|u_n\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)} &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(k+1)p_s^*} |A_k| \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(k+1)p_s^*} a_k. \end{aligned}$$

D'où

$$\|u_n\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{kp_s^*} 2^{p^*} a_k\right)^{\frac{p}{p^*}}.$$

Comme $\frac{p}{p_s^*} = \frac{N-sp}{N} < 1$, donc

$$\|u_n\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq 2^p \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{kp} a_k^{\frac{N-sp}{N}}.$$

Si nous choisissons $T = 2^p$ et appliquons le Lemme 1.4.1, on obtient

$$\|u_n\|^p_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^N)} \leq C \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}} a_{k+1} a_k^{\frac{-sp}{N}} 2^{kp}.$$

Finalement, d'après le Lemme 1.4.2, on obtient le résultat attendu, pour la constante $C = C(N,p,s)$.

Cas 2 : *si $u \notin L^\infty(\mathbb{R}^N)$, donc on peut prendre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite borné, tel que*

$$u_n(x) := \max\{\min\{u(x), n\}, -n\},\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)},\ \forall q \in [1, +\infty[.$$

Alors, d'après le premier cas, on a

$$\|u_n\|^p_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^N)} \leq C \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^N)}.$$

De plus,d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on aura que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy,$$

ce qui implique que

$$\|u\|^p_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^N)} \leq C \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy,$$

où $C = C(N,p,s)$. □

Corollaire 1.4.1 ([28]). *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < N$. Alors, il existe une constante positive $C = C(N,p,s)$ tel que, pour toute fonction $u \in W^{s,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, on a*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\, \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)},\ \forall q \in [p, p^*_s];$$

i.e. l'injection $W^{s,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ est continue pour tout $q \in [p, p^*_s]$.

Preuve. *On a $1 \leq p \leq p^* < \infty$ et $q \in [p, p^*_s]$, soit $\alpha \in [0,1]$ alors*

$$\frac{1}{q} \in \left[\frac{1}{p}, \frac{1}{p^*_s}\right] \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{(1-\alpha)}{p^*_s}.$$

Puisque $f \in W^{s,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, donc $u \in L^q\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^{p^*_s}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et d'après l'inégalité d'interpolation [19, Remarque 2.], on a

$$u \in L^q\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|^\alpha_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^N)}.$$

On applique l'inégalité de Young, pour $P = \frac{1}{\alpha}$ *et* $P' = \frac{1}{1-\alpha}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\le \frac{1}{P}\|u\|^{\alpha P}_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{P'}\|u\|^{(1-\alpha)P'}_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)} \\ &= \alpha\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + (1-\alpha)\|u\|_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.4.5 et $\alpha < 1$, *on aura*

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\le \alpha\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + (1-\alpha)C^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \alpha\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + C^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right)^{\frac{1}{p}} - \alpha C^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + C^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \le C\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)},$$

avec $C = C(N, p, s)$. □

Pour étendre une fonction $u \in W^{s,p}(\Omega)$ à une fonction $\tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, il faut établir d'autres hypothèses de régularité sur Ω (voir [28, Section 5]).

Remarque 1.4.2. *Un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^N$ *est dite domaine d'extension pour* $W^{s,p}(\Omega)$, *s'il est continument lipschitzien avec frontière borné. En effet,* Ω *satisfait les hypothèses de régularités de telle sorte, on peut prolonger les fonctions de* $W^{s,p}(\Omega)$ *vers les fonctions de* $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 1.4.6 ([28]). *Soient* $s \in]0,1[$, $p \in [1,+\infty[$ *tel que* $sp < N$ *et* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *domaine d'extension pour* $W^{s,p}(\Omega)$. *Alors, il existe un constant positive* $C = C(N,p,s,\Omega)$ *tel que, pour tout* $u \in W^{s,p}(\Omega)$, *on a*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \ \forall q \in [p, p_s^*]; \tag{1.12}$$

i.e. l'injection $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *est continue pour tout* $q \in [p, p_s^*]$.

En particulier, si Ω *est bornée, alors l'injection* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *est continue pour tout* $q \in [1, p_s^*]$.

Preuve. *Soit* $u \in W^{s,p}(\Omega)$, *puisque* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *est un domaine d'extension pour* $W^{s,p}(\Omega)$. *Alors, il existe un constant* $C_1 = C_1(N,p,s,\Omega) > 0$ *tel que*

$$\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \le C_1\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \tag{1.13}$$

avec $\tilde{u}(x) = u(x)$ *pour p.p.* $x \in \Omega$.

D'autre part, d'après le Corollaire 1.4.1, on a l'injection $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ *est continue pour tout* $q \in [p, p_s^*]$. *i.e. il existe une constante* $C_2 = C_2(N,p,s) > 0$ *tel que*

$$\|\tilde{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \le C_2\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.14}$$

D'après (1.13) avec (1.14), on obtient

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{L^q(\Omega)} \le \|\tilde{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \le C_2\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \le C_2C_1\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

en choisissant $C = C_2C_1$, *on a l'inégalité recherchée.*

En particulier, dans le cas où Ω *est borné, l'injection pour* $q \in [1, p_s^*]$ *découle directement de (1.12), en utilisant le Théorème 1.1.1 de l'inégalité de Hölder.* □

Théorème 1.4.7 ([28]). *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp < N$. Soient $q \in [p, p_s^*[$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ domaine d'extension pour $W^{s,p}(\Omega)$ et $\mathscr{T}$ sous espace borné de $L^p(\Omega)$. Supposons que*

$$\sup_{u\in\mathscr{T}} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy < +\infty.$$

Alors, $\mathscr{T}$ est pré-compact dans $L^q(\Omega)$.

Théorème 1.4.8 (L'inégalité de Hardy fractionnaire [39]). *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp < N$. Alors, il existe une constante positive c_H tel que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx \leq c_H \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy, \qquad \forall u \in W_0. \tag{1.15}$$

La version classique de cette inégalité peut être trouvée dans [10, Lemma 2.1.].

Définition 1.4.4 ([17,34,43]). *Soient $0 \leq \alpha \leq sp$ et $p_s^*(\alpha) = p(N-\alpha)/(N-sp) \leq p_s^*(0) = p_s^*$, on définit la meilleure constante de Hardy-Sobolev fractionnaire H_α par*

$$H_\alpha = \inf_{\substack{u\in D^{s,p}(\mathbb{R}^N)\\ u\neq 0}} \frac{[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha}\, dx}. \tag{1.16}$$

En particulier, pour $\alpha = 0$ et $p_s^*(0) = p_s^*$, H_0 est la meilleure constante de l'inégalité de Sobolev (1.10), tel que

$$H_0 = \inf_{u\in D^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}}{\|u\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)}}$$

et pour $\alpha = sp < N$ et $p_s^*(sp) = p \leq p_s^*(0) = p_s^*$, H_{sp} est la meilleure constante de l'inégalité de Hardy fractionnaire (1.15), tel que

$$H_{sp} = 1/c_H = \inf_{\substack{u\in D^{s,p}(\mathbb{R}^N)\\ u\neq 0}} \frac{[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx}. \tag{1.17}$$

1.4.2 Le principe de concentration-compacité pour l'espace de Sobolev fractionnaire

Dans cette sous-section, nous introduisons le théorème suivant qui fournit un variant du principe de concentration-compacité (voir [52]) dans l'espace de Sobolev fractionnaire. Ce résultat est utile pour la preuve de la propriété de semi-continuité des fonctionnelles.

Théorème 1.4.9. *Soient Ω un sous ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^N$, $\alpha \in (0, sp]$ et $p_s^*(\alpha) \in [p, p_s^*]$. Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0$ une suite faiblement convergente de limite faible u. Alors, il existe deux mesures positives finies μ et ν dans $\mathbb{R}^N$, telles que la convergence suivante tient faiblement au sens des mesures,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dydx \rightharpoonup \mu \tag{1.18}$$

et

$$\frac{|u_n(x)|^{p_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} dx \rightharpoonup \nu. \tag{1.19}$$

De plus, il existe deux nombres non négatifs μ_0, v_0 tels que

$$\nu = \frac{|u(x)|^{p_s^*(\alpha)}}{|x|^{\alpha}} dx + \nu_0 \delta_0, \tag{1.20}$$

$$\mu \geq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \, dydx + \mu_0 \delta_0 \tag{1.21}$$

et

$$0 \leq H_\alpha \, \nu_0^{p/p_s^*(\alpha)} \leq \mu_0, \tag{1.22}$$

où H_α est la constante de Hardy-Sobolev fractionnaire donnée par (1.16) et δ_0 désigne la masse de Dirac à 0.

La preuve de ce résultat peut être trouvée dans [34, Theorem 1.1.].

1.5 Opérateur p-Laplacien fractionnaire

Dans cette partie, on introduit l'opérateur p-Laplacien fractionnaire et certaines de ses propriétés importantes.

Définition 1.5.1 ([22, 42]). *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < N$. L'opérateur p-Laplacien fractionnaire, noté $(-\Delta)_p^s$ qui jusqu'à une certaine constante de normalisation dépendant de N, p et s, est définit par*

$$\begin{aligned}(-\Delta)_p^s u(x) &:= 2 \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} \, dy \\ &:= 2P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} \, dy,\end{aligned}$$

où $B_\varepsilon(x)$ est la boule ouverte ε de centre $x \in \mathbb{R}^N$ et de rayon ε et $P.V.$ est une abréviation couramment utilisée pour dire "dans le sens de la valeur principale".

Remarques 1.5.1 ([42]). *On remarque que :*

1. *Pour $p \neq 2$, l'opérateur p-Laplacien fractionnaire est non linéaire.*
2. *L'opérateur p-Laplacien fractionnaire est non local, c'est-à-dire sa valeur $u(x)$ dépend non seulement des valeurs x sur tout l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, mais en fait sur tout l'ensemble $\mathbb{R}^N$.*
3. *Lorsque $p = 2$, l'opérateur p-Laplacien fractionnaire représente une généralisation de l'opérateur Laplacien fractionnaire noté $(-\Delta)^s$, défini par*
$$(-\Delta)^s u(x) := 2C(N,s)P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} \, dy, \ \forall x \in \mathbb{R}^N,$$
où $C(N,s) > 0$ est la constante de normalisation.
4. *Pour $s = 1$, l'opérateur p-Laplacien fractionnaire est exactement le p-Laplacien noté $(-\Delta)_p$, défini par*
$$(-\Delta)_p u(x) := div \left(|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \right), \ \forall x \in \Omega$$
et
$$|\nabla u(x)|^{p-2} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \right]^{\frac{p-1}{2}}.$$

Proposition 1.5.1. *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp < N$. Alors, l'opérateur $(-\Delta)_p^s : W_0 \longrightarrow W_0^*$ est bien défini, vérifiant les propriétés suivante :*

(i) Pour tous $u, v \in W_0$, on a

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy.$$

(ii) Pour tous $u, v \in W_0$, on a

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle \leq \|u\|_{W_0}^{p-1} \|v\|_{W_0}$$

et

$$\left\| (-\Delta)_p^s u \right\|_{W_0^*} \leq \|u\|_{W_0}^{p-1}.$$

Preuve.

(i) Soit $u \in W_0$, par définition de l'opérateur p-Laplacien fractionnaire, on a

$$(-\Delta)_p^s u(x) := 2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dy. \tag{1.23}$$

Pour tous $u, v \in W_0$ et d'après le Théorème 1.1.4 de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle &= 2 \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dy\, v(x)\, dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} v(x)\, dxdy.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} v(x)\, dxdy &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} (v(x)-v(y))\, dxdy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} v(y)\, dxdy.\end{aligned}$$

On inverse le rôle de x et y dans la deuxième intégrale, on aura

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} v(x)\, dxdy &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} (v(x)-v(y))\, dxdy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} v(x)\, dxdy,\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$2\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} v(x)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} (v(x)-v(y))\, dxdy.$$

Alors,

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy.$$

(ii) Selon (i), on a

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy, \quad \forall u, v \in W_0.$$

D'après le Théorème 1.1.1 de l'inégalité de Hölder, on a

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{(N+sp)\left(\frac{p-1+1}{p}\right)}}\,dxdy$$
$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors,

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle \leq \|u\|_{W_0}^{p-1} \|v\|_{W_0}.$$

□

Proposition 1.5.2. *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp < N$. Alors, l'opérateur $(-\Delta)_p^s : W_0 \longrightarrow W_0^*$ est continue.*

Preuve. *Pour montrer que l'opérateur p-Laplacien fractionnaire est continue, il faut montrer que*

$$(-\Delta)_p^s u_n \longrightarrow (-\Delta)_p^s u \text{ dans } W_0^*, \text{ quand } u_n \longrightarrow u \text{ dans } W_0.$$

D'après Proposition 1.5.1, on a

$$\left\| (-\Delta)_p^s (u_n - u) \right\|_{W_0^*} \leq \|u_n - u\|_{W_0}^{p-1}.$$

Puisque $u_n \longrightarrow u$ dans W_0, donc pour une sous suite u_n, il existe une fonction $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^N.$$

et

$$|u_n(x)| \leq g(x), \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^N.$$

Par conséquent, d'après le Théorème 1.1.3 de convergence dominée de Lebesgue, on constate que

$$\|u_n - u\|_{W_0}^{p-1} \longrightarrow 0, \text{ quand } n \to \infty,$$

ce qui implique que, $(-\Delta)_p^s u_n$ converge vers $(-\Delta)_p^s u$ dans W_0^*. □

Pour plus de détails sur les propriétés de l'opérateur du type p-Laplacien fractionnaire, nous invitions le lecteur à consulter [22, 42].

Introduisons maintenant le problème des valeurs propres associé à l'opérateur p-Laplacien fractionnaire qui est important pour la preuve de notre résultat principal

Problème de valeur propre.

On considère le problème des valeurs propres non linéaire

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.24}$$

où le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.
Plus précisément, nous considérons la formulation faible de (4.20), qui inclut le problème des valeurs propres suivant

$$\begin{cases} \langle Au, v \rangle = \lambda \displaystyle\int_\Omega |u|^{p-2} uv\,dx, & \forall v \in W_0 \\ u \in W_0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Définition 1.5.2. *[40, 51] Soit $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une p-valeur propre fractionnaire à condition qu'il existe une solution faible non triviale $u \in W_0$ de (1.25). La fonction u est la p-fonction propre correspondante.*

Proposition 1.5.3. *[63] Soient $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ avec $N > ps$ et Ω est un ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors, le problème (1.25) admet une valeur propre λ_1 positive et qui peut être caractérisée comme suit*

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in W_0 \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy \tag{1.26}$$

ou, de manière équivalente

$$\lambda_1 = \min_{u \in W_0 \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy}{\displaystyle\int_{\Omega} |u(x)|^p\, dx} \right\}.$$

Proposition 1.5.4. *[42] On dénote par $\sigma(s,p)$ le spectre de $(-\Delta)_p^s$ dans W_0. Alors, les valeurs propres et les fonctions propres de (1.25) ont les propriétés suivantes :*

- *i)* $\lambda_1 = \min \sigma(s,p)$ *est un point isolé de* $\sigma(s,p)$,
- *ii) toutes les fonctions λ_1-propre sont proportionnelles et si u est une fonction λ_1-propre, alors soit $u(x) > 0$ p.p. dans Ω ou $u(x) < 0$ p.p. dans Ω,*
- *iii) si $\lambda \in \sigma(s,p) \setminus \{\lambda_1\}$ et u est une fonction λ-propre, alors u change de signe dans Ω,*
- *iv) toutes les fonctions propres sont dans $L^\infty(\Omega)$,*
- *v) $\sigma(s,p)$ est un ensemble fermé.*

Remarque 1.5.1. *De manière similaire au cas classique du p-Laplacien, la structure de $\sigma(s,p)$ n'est pas encore entièrement connue, mais plusieurs propriétés ont été identifiées par divers auteurs. Voir par exemple les références [40, 51].*

Chapitre 2

Résultats d'existence pour un problème elliptique singulier impliquant le p-Laplacien fractionnaire avec terme de diffusion

Ce chapitre est le développement d'une partie de l'article [3].

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions faibles pour le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u - \beta \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{sp}} = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où λ est un paramètre positif, Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, $p > 1$, $s \in (0,1)$, $(N > ps)$ contenant l'origine et de frontière régulière, $0 \leq \beta < 1/c_H$ où c_H est la constante de l'inégalité (1.15) de Hardy fractionnaire, $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance sous-critique suivante

(H1) $|f(x,t)| \leq \alpha_1 + \alpha_2 |t|^{q-1}, \quad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

pour une constante non négative α_1, α_2 et $q \in]1, p_s^*[$, où p_s^* est l'exposant critique fractionnaire défini dans (1.11).

Dans le cas local $(s = 1)$, Ferrara et Bisci [32] ont montré l'existence d'au moins une solution non triviale du problème elliptique suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} + \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $-\Delta_p u := \text{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$ désigne le p-Laplacien, $\lambda, \mu > 0$.

Par conséquent, nous considérons l'équivalent non local du problème (2.2). En utilisant une structure variationnelle de notre problème et basée sur une version du théorème du point critique contenue dans [60] (Voir Théorème 1.3.4), on montre que le problème (2.1) admet au moins une solution non triviale.

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2.2, nous établissons quelques résultats nécessaires à la preuve de nos résultats. La section 2.3, concerne la preuve du Théorème 2.3.1 principal et finalement quelques remarques utiles liées à notre problème (2.1).

2.2 Résultats préliminaires

Tout au long de ce chapitre, nous notons $(W_0^*, \|\cdot\|_{W_0^*})$ l'espace dual de $(W_0, \|\cdot\|_{W_0})$ et nous définissons l'opérateur non linéaire $A : W_0 \to W_0^*$ par

$$\langle A(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy - \beta \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-2}}{|x|^{sp}} u(x)v(x)\, dx,$$

où $\langle \cdot, \cdot\rangle$ désigne le produit scalaire sur W_0.

Avant d'introduire la fonctionnelle d'énergie associée à notre problème, nous démontrons le lemme essentiel suivant

Lemme 2.2.1. *Pour $u, v \in W_0$, l'opérateur non linéaire A est bien défini et vérifie*

$$\langle A(u), v\rangle \leq \|u\|_{W_0}^{p-1} \|v\|_{W_0}$$

et

$$\|A(u)\|_{W_0^*} \leq \|u\|_{W_0}^{p-1}.$$

Preuve. *Pour tout $u, v \in W_0$, on a*

$$\begin{aligned}
\langle A(u), v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy - \beta \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-2}}{|x|^{sp}} u(x)v(x)\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}|u(x)-u(y)||v(x)-v(y)|}{|x-y|^{(N+sp)\left(\frac{p-1+1}{p}\right)}}\, dxdy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{(N+sp)\left(\frac{p-1}{p}\right)}} \frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{\left(\frac{N+sp}{p}\right)}}\, dxdy.
\end{aligned}$$

Alors, par l'inégalité de Hölder (1.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle A(u), v\rangle &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{W_0}^{p-1}\|v\|_{W_0} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\|A(u)\|_{W_0^*} \leq \|u\|_{W_0}^{p-1}.$$

□

Maintenant, on définit la fonctionnelle d'énergie associée à notre problème et ses propriétés importantes

Définition 2.2.1. *La fonctionnelle d'Euler-Lagrange $E_\lambda : W_0 \to \mathbb{R}$ associée au problème (2.1) est définie par*

$$E_\lambda(u) := \Phi(u) - \lambda\Psi(u), \quad \forall u \in W_0,$$

où

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy - \beta\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx\right)$$

et

$$\Psi(u) := \int_\Omega F(x, u(x))\, dx,$$

où $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$, pour chaque $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Lemme 2.2.2. *Pour tous $u \in W_0$, la fonctionnelle Φ est bien définie et coercive, telle que*

$$\left(\frac{1-\beta c_H}{p}\right)\|u\|_{W_0}^p \leq \Phi(u) \leq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p.$$

Preuve. *Selon l'inégalité de Hardy fractionnaire (1.15), on a*

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \frac{\beta}{p}\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p - \frac{\beta c_H}{p}\|u\|_{W_0}^p \\ &\geq \left(\frac{1-\beta c_H}{p}\right)\|u\|_{W_0}^p.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \frac{\beta}{p}\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx \\ &\leq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que,

$$\left(\frac{1-\beta c_H}{p}\right)\|u\|_{W_0}^p \leq \Phi(u) \leq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p.$$

Ainsi, $\Phi(u)$ est bien définie et coercive dans W_0. □

Lemme 2.2.3. *La fonctionnelle d'énergie E_λ est bien défini, de classe C^1 et sa dérivée est donnée par*

$$\langle E_\lambda'(u), v\rangle = \langle \Phi'(u), v\rangle - \lambda\langle \Psi'(u), v\rangle, \quad \forall u, v \in W_0,$$

où

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v(x)-v(y))\,dxdy - \beta\int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-2}u(x)}{|x|^{sp}}v(x)\,dx$$

et

$$\langle \Psi'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)\,dx.$$

Preuve. *Tout d'abord, nous montrons que E_λ est bien définie ;*

Soit $u \in W_0$ et par Lemme 2.2.2, on a

$$\Phi(u) \leq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p < +\infty.$$

*De plus, d'après **(H1)**, on a*

$$\begin{aligned}|F(x,t)| &= \left|\int_0^t f(x,s)\,ds\right| \\ &\leq \alpha_1\left|\int_0^t ds\right| + \alpha_2\left|\int_0^t |s|^{q-1}\,ds\right| \\ &= \alpha_1|t| + \alpha_2\frac{|t|^q}{q}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|F(x,u)| \leq \alpha_1|u| + \alpha_2\frac{|u|^q}{q}.$$

Puisque $W_0 \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour chaque* $q \in [1, p^*)$*, on obtient*

$$|\Psi(u)| \leq \int_\Omega |F(x,u)|\, dx \leq \alpha_1 C_1 \|u\|_{W_0} + \frac{\alpha_2}{q}\left(C_q\|u\|_{W_0}\right)^q < +\infty,$$

et en déduire que

$$F(x,u) \in L^1(\Omega).$$

Alors, E_λ *est bien définie.*

Il ne reste qu'à prouver que E_λ *est de classe* $C^1(W_0, \mathbb{R})$ *et sa dérivée est*

$$\langle E_\lambda^{'}(u), v\rangle = \langle \Phi^{'}(u), v\rangle - \lambda\langle \Psi^{'}(u), v\rangle, \quad \forall v \in W_0.$$

Nous rappelons que

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy - \beta\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx\right) \;\; et \;\; \Psi(u) := \int_\Omega F(x,u)\, dx.$$

► *On commence par démontrer que* $\Psi \in C^1(W_0, \mathbb{R})$.

D'après Définition 1.2.1, on montre que sa dérivée $\Psi^{'}$ *existe en calculant*

$$\begin{aligned}\langle \Psi^{'}(u), v\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{\Psi(u+tv)-\Psi(u)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\int_\Omega F(x,u+tv)\, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}\, dx.\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{array}{rcccl} G & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & & y & \longmapsto & G(y) = F(x, u+ytv)\end{array}$$

G *est continue sur* $[0,1]$ *et dérivable sur* $]0,1[$. *Ainsi, en utilisant le Théorème des accroissements finis,* $\exists\theta \in (0.1)$ *tel que*

$$G^{'}(\theta) = \frac{G(1)-G(0)}{1-0},$$

ce qui signifie

$$tvF^{'}(x, u+\theta tv) = F(x,u+tv) - F(x,u).$$

Puisque $F^{'}(x,t) = f(x,t)$*, alors*

$$f(x,u+\theta tv)v = \frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t},$$

ce qui implique que

$$\langle \Psi^{'}(u), v\rangle = \lim_{t\to 0}\int_\Omega f(x,u+\theta tv)v\, dx.$$

Par ailleurs, on sait que f est continue, alors

$$\lim_{t\to 0} f(x,u+\theta tv)v\;dx = f(x,u)v.$$

Ainsi, pour tout $u,v\in W_0$ et en utilisant ***(H1)*** *on a*

$$\begin{aligned}|f(x,u+\theta tv)v| &\leq \left|\left(\alpha_1+\alpha_2|u+\theta tv|^{q-1}\right)v(x)\right|\\ &\leq \alpha_1|v(x)|+\alpha_2|u+\theta tv|^{q-1}|v(x)|.\end{aligned}$$

Pour chaque $q\in[1,p^*)$ et $a,b\geq 0$, utilisant l'inégalité suivante

$$|a+b|^q \leq 2^{q-1}(|a|^q+|b|^q).$$

En posant $a=u$, $b=v$ et comme $\theta t\in[0,1]$, on déduit que

$$\begin{aligned}|f(x,u+\theta tv)v| &\leq \alpha_1|v(x)|+\alpha_2 2^{q-2}\left(|u(x)|^{q-1}+|v(x)|^{q-1}\right)|v(x)|\\ &= \alpha_1|v(x)|+\alpha_2 2^{q-2}\left(|u(x)|^{q-1}|v(x)|+|v(x)|^q\right).\end{aligned}$$

Ensuite, on applique le Théorème 1.1.3 de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega f(x,u+\theta tv)v\;dx = \int_\Omega f(x,u)v\;dx,$$

d'où

$$\langle \Psi'(u),v\rangle = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)\;dx.$$

De plus, pour $u,v\in W_0$ on montre que Ψ' est continue

$$\begin{aligned}\left|\langle \Psi'(u),v\rangle\right| &\leq \int_\Omega |f(x,u(x))v(x)|\;\;dx\\ &\leq \int_\Omega \left(\alpha_1|v(x)|+\alpha_2|u(x)|^{q-1}|v(x)|\right)\;dx\\ &= \alpha_1\int_\Omega |v(x)|\;dx+\alpha_2\int_\Omega |u(x)|^{q-1}|v(x)|\;dx.\end{aligned}$$

Par inégalité de Hölder (1.1), on a

$$\left|\langle \Psi'(u),v\rangle\right| \leq \alpha_1\|v\|_{L^1(\Omega)}+\alpha_2\|u\|^{q-1}_{L^q(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Puisque $W_0\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour chaque $q\in[1,p^*)$, alors

$$\begin{aligned}\left|\langle \Psi'(u),v\rangle\right| &\leq \alpha_1C_1\|v\|_{W_0}+\alpha_2C_2\|u\|^{q-1}_{W_0}\|v\|_{W_0}\\ &= \left(\alpha_1C_1+\alpha_2C_2\|u\|^{q-1}_{W_0}\right)\|v\|_{W_0}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\Psi'\in W_0^*$ et $\Psi\in C^1(W_0,\mathbb{R})$.

► *Ensuite, nous prouvons que $\Phi\in C^1(W_0,\mathbb{R})$.*

En effet, on montre que sa dérivée Φ' existe par Définition 1.2.1, on calcule

$$
\begin{aligned}
\langle \Phi'(u), v\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t}\\
&= \frac{1}{p}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|(u+tv)(x)-(u+tv)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy-\beta\int_{\Omega}\frac{|(u+tv)(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx\right.\\
&\quad\left.-\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy+\beta\int_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx\right\}\\
&= \frac{1}{p}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|(u+tv)(x)-(u+tv)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy-\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy\right.\\
&\quad\left.-\beta\left(\int_{\Omega}\frac{|(u+tv)(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx-\int_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

On pose

$$
\begin{array}{rccl}
K & : & [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R}\\
 & & y & \longmapsto K(y)=\dfrac{|u(x)+ytv(x)|^p}{|x|^{sp}}
\end{array}
$$

K *est continue sur* $[0,1]$ *et dérivable sur* $]0,1[$. *Ainsi, en utilisant le Théorème des accroissements finis,* $\exists\theta\in(0.1)$ *tel que*

$$K'(\theta)=\frac{K(1)-K(0)}{1-0}.$$

Ainsi, d'après Lemme 1.2.1 on a

$$ptv(x)\frac{|u(x)+\theta tv(x)|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))}{|x|^{sp}}=\frac{|u(x)+tv(x)|^p-|u(x)|^p}{|x|^{sp}}.$$

Alors,

$$\frac{1}{pt}\frac{|u(x)+tv(x)|^p-|u(x)|^p}{|x|^{sp}}=\frac{|u(x)+\theta tv(x)|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))}{|x|^{sp}}v(x), \tag{2.3}$$

De même, on définit

$$
\begin{array}{rccl}
Q & : & [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R}\\
 & & y & \longmapsto Q(y)=\dfrac{|(u(x)+ytv(x))-(u(y)+ytv(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}}
\end{array}
$$

Q *est continue sur* $[0,1]$ *et dérivable sur* $]0,1[$. *Ainsi, en utilisant le Théorème des accroissements finis,* $\exists\theta\in(0.1)$ *tel que*

$$Q'(\theta)=\frac{Q(1)-Q(0)}{1-0},$$

Donc, d'après Lemme 1.2.1 on a

$$
\begin{aligned}
&pt(v(x)-v(y))\frac{|(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))}{|x-y|^{N+sp}}\\
&\quad=\frac{|(u(x)+tv(x))-(u(y)+tv(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}}-\frac{|(u(x)+u(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}}
\end{aligned}
$$

Alors,

$$\frac{1}{pt}\left(\frac{|(u(x)+tv(x))-(u(y)+tv(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}}-\frac{|(u(x)+u(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}}\right)$$
$$=\frac{|(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v(x)-v(y)). \tag{2.4}$$

Par (3.7) et (3.8), on obtient

$$\langle\Phi^{'}(u),v\rangle=\lim_{t\to 0}\left\{-\beta\int_\Omega\frac{|u(x)+\theta tv(x)|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))}{|x|^{sp}}v(x)\,dx\right.$$

$$\left.+\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v(x)-v(y))\,dxdy\right\}.$$

Ensuite, on applique le Théorème 1.1.3 de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\langle\Phi^{'}(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v(x)-v(y))\,dxdy-\beta\int_\Omega\frac{|u(x)|^{p-2}u(x)}{|x|^{sp}}v(x)\,dx.$$

De plus, pour $u,v\in W_0$ on montre que $\Phi^{'}$ est continue, nous constatons que

$$\langle\Phi^{'}(u),v\rangle=\langle A(u),v\rangle.$$

D'après le lemme 2.2.1 nous avons

$$\langle\Phi^{'}(u),v\rangle\le\|u\|_{W_0}^{p-1}\|v\|_{W_0}.$$

On en déduit que $\Phi^{'}\in W_0^*$ et $\Phi\in C^1(W_0,\mathbb{R})$. Ce qui conclut la preuve. $\square$

Les solutions de notre problème sont introduites par la définition suivante

Définition 2.2.2. *En fixant le paramètre réel λ, une fonction $u:\Omega\to\mathbb{R}$ est dite solution faible du problème (2.1), si $u\in W_0$ et*

$$\langle\Phi^{'}(u),v\rangle=\langle A(u),v\rangle=\lambda\langle\Psi^{'}(u),v\rangle,\quad v\in W_0,$$

où

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v(x)-v(y))\,dxdy-\beta\int_\Omega\frac{|u(x)|^{p-2}}{|x|^{sp}}u(x)v(x)\,dx$$
$$=\lambda\int_\Omega f(x,u(x))v(x)\,dx,$$

pour chaque $v\in W_0$. Ainsi, les points critiques de E_λ sont exactement les solutions faibles du problème (2.1).

2.3 Résultat principal

Dans cette section, nous établissons le résultat principal de ce chapitre qui est le théorème suivant

Théorème 2.3.1. *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction avec $f(x,0) \neq 0$ dans Ω satisfaisant la condition **(H1)**. Alors, il existe un nombre positif Λ donné par*

$$\Lambda := q \sup_{\{\rho>0\}} \left\{ \frac{\rho^{p-1}}{q\alpha_1 c_1 \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 c_q^q \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{q}{p}} \rho^{q-1}} \right\},$$

où β, α_1, α_2, c_1, c_q et c_H sont des constantes positives. Tel que, pour tout $\lambda \in]0,\Lambda[$, le problème elliptique de Dirichlet (2.1) suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u - \beta \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{sp}} = \lambda f(x,u) & \textit{dans } \ \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

admet au moins une solution faible non triviale $u_\lambda \in W_0$. De plus,

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|u_\lambda\|_{W_0} = 0$$

et la fonction $g(\lambda) := E_\lambda(u_\lambda)$ est négative et strictement décroissante en $]0,\Lambda[$.

Pour accomplir la preuve de ce résultat, nous devons montrer les lemmes suivants :

Lemme 2.3.1. *Soit $s \in (0,1)$ et $N > ps$. Alors, la fonctionnelle Φ est coercive et faiblement semi continue inférieurement sur W_0, i.e :*

$$\Phi(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} \Phi(u_n) \ \textit{ si } \ u_n \longrightarrow u \ \textit{ faiblement dans } \ W_0.$$

Preuve. *D'après Lemme 2.2.2, on a que pour tout $u \in W_0$,*

$$\Phi(u) \geq \left(\frac{1-\beta c_H}{p}\right) \|u\|_{W_0}^p.$$

Nous concluons que

$$\Phi(u) \longrightarrow +\infty, \ \textit{quand } \|u\|_{W_0}^p \longrightarrow +\infty,$$

ce qui signifie que $\Phi(u)$ est coercive sur W_0.

Maintenant, via le Théorème 1.4.4 on sait que $C_c^\infty(\Omega)$ est un sous-ensemble dense de W_0. Donc, pour prouver que Φ est faiblement semi continue inférieurement sur W_0, il suffit de montrer que la fonctionnelle

$$\Phi \textit{ est faiblement semi continue inférieurement sur } C_c^\infty(\Omega). \tag{2.5}$$

Alors, soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $C_c^\infty(\Omega)$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \quad \textit{faiblement dans } \ W_0, \ \textit{quand } n \to +\infty, \tag{2.6}$$

Ainsi, on appliquant le Théorème 1.4.9 pour $\alpha = sp$ et $p_s^*(sp) = p \leq p_s^*(0) = p_s^*$, donc il existe deux mesures positives finies μ et ν dans $\mathbb{R}^N$, et deux nombres positifs μ_0, ν_0 tel que la convergence suivante soit faible au sens des mesures,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dydx \rightharpoonup \mu \geq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dydx + +\mu_0\delta_0, \tag{2.7}$$

$$\frac{|u_n(x)|^p}{|x|^{sp}}dx \rightharpoonup \nu = \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}dx + \nu_0\delta_0 \tag{2.8}$$

et d'après la Définition 1.4.4, on sait que la meilleure constante de l'inégalité de Hardy fractionnaire H_{sp} est donnée par (1.17), tel que

$$0 \leq \nu_0 \leq c_H\ \mu_0, \tag{2.9}$$

où c_H est la constante de l'inégalité de Hardy fractionnaire (1.15) et δ_0 désigne la masse de Dirac au point 0.

De la continuité d'injection $W_0 \hookrightarrow L^p(\Omega)$, pour tout $p \in [1, p^*]$, on a que

$$u_n \longrightarrow u \quad \textit{fortement dans} \ \ L^p(\Omega), \ \textit{quand} \ n \to +\infty. \tag{2.10}$$

Par (2.7), (2.8), (2.9) et (2.10) on obtient

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} \Phi(u_n) &= \liminf_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \frac{\beta}{p}\int_\Omega \frac{|u_n(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx\right]\\
&\geq \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy + \mu_0\right) - \frac{\beta}{p}\left(\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx + \nu_0\right)\\
&= \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \beta\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx\right) + \frac{1}{p}\mu_0 - \frac{\beta}{p}\nu_0\\
&\geq \Phi(u) + \frac{\mu_0}{p} - \frac{\beta c_H \mu_0}{p}\\
&= \Phi(u) + (1-\beta c_H)\,\frac{\mu_0}{p}\\
&\geq \Phi(u),
\end{aligned}$$

puisque $\beta < 1/c_H$, Ceci nous amène à déduire l'affirmation énoncée dans (2.5).

En outre, soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans W_0 satisfaisant la même condition (2.6). Alors, en utilisant les arguments de densité, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\{u_n^j\}_{j\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\Omega)$ tel que

$$u_n^j \longrightarrow u_n \quad \textit{fortement dans} \ \ W_0, \ \textit{quand} \ j \to +\infty. \tag{2.11}$$

À partir de (2.6) et (2.11), on a que pour tout $\varphi \in W_0$

$$\langle u_n^j - u, \varphi\rangle = \langle u_n^j - u_n, \varphi\rangle + \langle u_n - u, \varphi\rangle \to 0, \ \textit{quand} \ n, j \to +\infty.$$

Alors,

$$u_n^j \longrightarrow u \quad \textit{faiblement dans} \ \ W_0, \ \textit{quand} \ n, j \to +\infty. \tag{2.12}$$

Puisque $\{u_n^j\}_{j\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\Omega)$ et l'affirmation (2.5) est vérifie, on peut déduire que

$$\liminf_{n,j\to+\infty} \Phi(u_n^j) \geq \Phi(u). \tag{2.13}$$

De plus, par (2.11) il est évident que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_{j\to+\infty} \Phi(u_n^j) = \Phi(u_n),$$

de sorte qu'en passant à $\liminf$, on obtient

$$\liminf_{n,j\to+\infty} \Phi(u_n^j) = \liminf_{n\to+\infty}\lim_{j\to+\infty} \Phi(u_n^j) = \liminf_{n\to+\infty} \Phi(u_n). \tag{2.14}$$

D'après (2.13) et (2.14) on obtient que

$$\liminf_{n\to+\infty} \Phi(u_n) \geq \Phi(u).$$

Par conséquent, Φ *est faiblement semi continue inférieurement sur* W_0. □

Lemme 2.3.2. *Soit **(H1)** satisfaite. Alors, la fonctionnelle* Ψ *est faiblement semi continue.*

Preuve. *Soit* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est borné dans* W_0 *qui est un espace réflexif. Alors, pour une sous suite notée de même par* u_n*, il existe* $u \in W_0$*, tel que*

$$\begin{array}{ll} u_n \longrightarrow u & \textit{faiblement dans } \ W_0, \\ u_n \longrightarrow u & \textit{fortement dans } \ L^p(\Omega), \\ u_n(x) \longrightarrow u(x) & \textit{p.p. dans } \ \Omega, \end{array}$$

*Ainsi, par hypothèse **(H1)** on a que*

$$\begin{aligned} |F(x,t)| &= \left| \int_0^t f(x,s)\, ds \right| \\ &\leq \alpha_1 \left| \int_0^t \, ds \right| + \alpha_2 \left| \int_0^t |s|^{q-1}\, ds \right| \\ &= \alpha_1 |t| + \alpha_2 \frac{|t|^q}{q}. \end{aligned}$$

De plus, selon l'injection compact $W_0 \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour tout* $q \in [1, p^*)$*, on obtient*

$$|\Psi(u_n)| \leq \int_\Omega |F(x,u_n)|\, dx \leq \alpha_1 c_1 \|u_n\|_{W_0} + \frac{\alpha_2}{q} \left(c_q \|u_n\|_{W_0}\right)^q < +\infty,$$

Ensuite, on applique le théorème 1.1.3 de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{n\to 0} \int_\Omega \Psi(u_n)\, dx = \int_\Omega \Psi(u)\, dx.$$

Alors, la fonctionnelle Ψ *est faiblement semi continue.* □

Preuve de Théorèm 2.3.1. Pour démontrer ce résultat, on applique le Théorème 1.3.4 au problème (2.1) avec l'espace $X = W_0$ et les fonctionnelles Φ, Ψ introduites dans la Définition 2.2.1.

D'après Lemme 2.2.1 et Lemme 2.3.1, Φ est continue, coercive et faiblement semi continue inférieurement, ainsi que son $\inf\limits_{u\in W_0} \Phi(u) = 0$. De plus, Ψ est continue, a une dérivée compacte et faiblement semi continue selon Lemme 2.3.2.

Nous prouvons le théorème dans les étapes suivantes.

Étape 1. On commence par prouver que le problème (2.1) admet au moins une solution faible non triviale $u_\lambda \in W_0$.

Par l'hypothèse **(H1)**, on a

$$|F(x,t)| \leq \alpha_1 |t| + \alpha_2 \frac{|t|^q}{q}, \ \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

En utilisant l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}\Psi(u) &= \int_{\Omega} |F(x,u(x))| dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left[\alpha_1 |u(x)| + \alpha_2 \frac{|u(x)|^q}{q}\right] dx \\ &\leq \int_{\Omega} \alpha_1 |u(x)|\, dx + \frac{\alpha_2}{q}\int_{\Omega} |u(x)|^q\, dx \\ &= \alpha_1 \|u\|_{L^1(\Omega)} + \frac{\alpha_2}{q}\|u\|^q_{L^q(\Omega)}\end{aligned}$$

Et d'après l'injection compact $W_0 \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, p^*)$, on a

$$\Psi(u) \leq \alpha_1 c_1 \|u\|_{W_0} + \frac{\alpha_2}{q}\left(c_q \|u\|_{W_0}\right)^q.$$

D'autre part, on déduit de Lemme 2.2.2 que

$$\|u\|_{W_0} < \left(\frac{pr}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall u \in W_0,\ \Phi(u) < r. \tag{2.16}$$

D'où, par (2.16) on a

$$\Psi(u) < \alpha_1 c_1 \left(\frac{pr}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 \frac{c_q^q}{q}\left(\frac{pr}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{q}{p}},$$

Alors,

$$\sup_{\{u\in\Phi^{-1}(]-\infty,r[)\}} \Psi(u) < \alpha_1 c_1 \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 \frac{c_q^q}{p}\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{q}{p}} r^{\frac{q}{p}}.$$

Ainsi, pour tout $r \in]0, +\infty[$ nous obtenons

$$\frac{\left(\sup_{\{u\in\Phi^{-1}(]-\infty,r[)\}} \Psi(u)\right)}{r} \leq \alpha_1 c_1 \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{1-p}{p}} + \alpha_2 \frac{c_q^q}{q}\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{q}{p}} r^{\frac{q-p}{p}}.$$

En particulier, pour $r = \rho^p$ on a

$$\frac{\left(\sup_{\{u\in\Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)\}} \Psi(u)\right)}{\rho^p} \leq \alpha_1 c_1 \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} \rho^{1-p} + \alpha_2 \frac{c_q^q}{q}\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{q}{p}} \rho^{q-p}. \tag{2.17}$$

En outre, posant la fonction $u_0 \in W_0$ définie comme suit

$$u_0(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \Omega, \text{ tel que } u_0 \in \Phi^{-1}(]-\infty, \rho^p[). \tag{2.18}$$

Aussi, on observons que

$$\Phi(u_0) = \frac{1}{p}\|u_0\|^p_{W_0} + \frac{\beta}{p}\int_{\Omega} \frac{|u_0(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx = 0 \tag{2.19}$$

et

$$\Psi(u_0) = \int_{\Omega} F(x, u_0(x))\, dx = 0. \tag{2.20}$$

Donc, d'après (2.18), (2.19) et (2.20), on obtient que

$$\begin{aligned}\varphi(\rho^p) &:= \inf_{u\in\Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)} \frac{\left(\sup_{\{v\in\Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)\}}\Psi(v)\right)-\Psi(u)}{\rho^p-\Phi(u)}\\ &\leq \frac{\left(\sup_{\{v\in\Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)\}}\Psi(v)\right)-\Psi(u_0)}{\rho^p-\Phi(u_0)}\\ &= \frac{\left(\sup_{\{v\in\Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)\}}\Psi(v)\right)}{\rho^p}.\end{aligned}$$

Ainsi, par (2.17) on a

$$\varphi(\rho^p) \leq \alpha_1 c_1 \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} \rho^{1-p} + \alpha_2 \frac{c_q^q}{q}\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{q}{p}} \rho^{q-p}.$$

Par ailleurs, puisque $0<\lambda<\Lambda$

$$\varphi(\rho^p) \leq \alpha_1 c_1 \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} \rho^{1-p} + \alpha_2 \frac{c_q^q}{q}\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{q}{p}} \rho^{q-p} := \frac{1}{\Lambda(\rho)} < \frac{1}{\lambda}.$$

D'où

$$0<\lambda<\Lambda(\rho) := \frac{q\rho^{p-1}}{q\alpha_1 c_1\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 c_q^q\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{q}{p}}\rho^{q-1}} \leq \frac{1}{\varphi(\rho^p)}.$$

Alors,

$$\lambda \in \left]0,\Lambda(\rho)\right[\subseteq \left]1, \frac{1}{\varphi(\rho^p)}\right[.$$

En conclusion, d'après le théorème 1.3.4, il existe un point critique $u_\lambda \in \Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)$ pour E_λ dans W_0 qui est un minimum global de la restriction E_λ à $\Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)$. De plus, la fonction $u_\lambda \neq 0$ puisque $f(x,0)\neq 0$ dans Ω.

Étape 2. On montre que $\lim_{\lambda\to 0^+}\|u_\lambda\|_{W_0}=0$ et que la fonctionnelle $g(\lambda):=E_\lambda(u_\lambda)$ est négatif et strictement décroissante dans $]0,\Lambda(\rho)[$.

Comme Φ est coercive, alors $u_\lambda\in\Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)$ est bornée dans W_0, c'est à dire

$$\|u_\lambda\|_{W_0} \leq K, \text{ pour } K>0.$$

Ainsi, du fait de la compacité de l'opérateur Ψ', il existe une constante $C>0$ telle que

$$\left|\langle\Psi'(u_\lambda),u_\lambda\rangle\right| \leq \|\Psi'(u_\lambda)\|_{W_0^*}\|u_\lambda\|_{W_0} < CK^2,\ \forall\lambda\in\left]0,\Lambda(\rho)\right[. \tag{2.21}$$

D'autre part, puisque u_λ est un point critique de E_λ, alors

$$\langle E_\lambda'(u_\lambda),u_\lambda\rangle = 0,$$

ce qui implique que

$$\langle\Phi'(u_\lambda)-\lambda\Psi'(u_\lambda),u_\lambda\rangle = 0,\ \forall\lambda\in\left]0,\Lambda(\rho)\right[.$$

Alors,

$$p\Phi(u_\lambda) = \langle\Phi'(u_\lambda),u_\lambda\rangle = \lambda\langle\Psi'(u_\lambda),u_\lambda\rangle,\ \forall\lambda\in\left]0,\Lambda(\rho)\right[. \tag{2.22}$$

Par suite, par (2.21) et (2.22), on obtient

$$\lim_{\lambda\to 0^+} p\Phi(u_\lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+} \lambda\langle \Psi'(u_\lambda), u_\lambda\rangle = 0, \ \forall p<1. \tag{2.23}$$

De plus, d'après Lemme 2.2.2 on a

$$\|u_\lambda\|_{W_0}^p \leq \frac{p\Phi(u_\lambda)}{1-\beta c_H}, \ \forall \lambda \in\,]0, \Lambda(\rho)[\,. \tag{2.24}$$

Ensuite, on déduit des conditions (2.23) et (2.24) que

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \|u_\lambda\|_{W_0} = 0.$$

Dès lors, puisque la restriction E_λ à $\Phi^{-1}(]-\infty, \rho^p[)$ admet un minimum global, qui est un minimum local de E_λ dans W_0, la fonction $g(\lambda) := E_\lambda(u_\lambda)$ est négative dans $]0, \Lambda(\rho)[$, car $u_\lambda \neq 0$ et $E_\lambda(0) = 0$.

Enfin, on démontre que la fonction $g(\lambda) := E_\lambda(u_\lambda)$ est négative et strictement décroissante en $]0, \Lambda[$, en observant que

$$E_\lambda(u) = \lambda\left(\frac{\Phi(u)}{\lambda} - \Psi(u)\right).$$

Ensuite, on suppose que $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2} \in W_0$ sont des points critiques de E_λ, pour chaque $\lambda_1, \lambda_2 \in\,]0, \Lambda(\rho)[$, avec $\lambda_1 < \lambda_2$. De plus, nous posons

$$I_{\lambda_i} := \inf_{u\in\Phi^{-1}(]-\infty,\gamma^p[)}\left(\frac{\Phi(u)}{\lambda_i} - \Psi(u)\right) = \frac{1}{\lambda_i}E_{\lambda_i}(u_{\lambda_i}), \ i = 1,2.$$

Évidemment, comme étant donné précédemment que $I_{\lambda_i} < 0$ pour $i = 1,2$, et depuis $\lambda_1 < \lambda_2$, on a

$$I_{\lambda_2} \leq I_{\lambda_1}.$$

Par conséquent,

$$E_{\lambda_2}(u_{\lambda_2}) = \lambda_2 I_{\lambda_2} \leq \lambda_2 I_{\lambda_1} < \lambda_1 I_{\lambda_1} = E_{\lambda_1}(u_{\lambda_1}).$$

En conclusion, comme $\lambda \in\,]0, \Lambda[$ est arbitraire, les résultats ci-dessus sont toujours vraies dans $]0, \Lambda[$. La preuve est donc terminée. □

Remarque 2.3.1. *Pour obtenir le maximum de Λ, nous devons calculer sa première dérivée*

$$\Lambda'(\rho) = -\left[\frac{\alpha_1 c_1\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}}(1-p)\rho^{-p} + \alpha_2\frac{c_q^q}{q}\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{q}{p}}(q-p)\rho^{q-p-1}}{\left(\alpha_1 c_1\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}}\rho^{1-p} + \alpha_2\frac{c_q^q}{q}\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{q}{p}}\rho^{q-p}\right)^2}\right].$$

En particulier, on pose $\Lambda'(\rho)$ égal à zéro et on obtient

$$\alpha_1 c_1\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}}(1-p)\rho^{-p} + \alpha_2\frac{c_q^q}{q}\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{q}{p}}(q-p)\rho^{q-p-1} = 0.$$

Alors,

$$\rho_{\max} := \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{-\frac{1}{p}}\left[q\frac{\alpha_1 c_1}{\alpha_2 c_q^q}\left(\frac{1-p}{p-q}\right)\right]^{\frac{1}{q-1}}.$$

Ce qui nous amène à conclure que Λ est défini comme suit

$$\Lambda(\rho) = \begin{cases} +\infty & \textit{si } \ 1 < q < p \\ \frac{1-\beta c_H}{\alpha_2 c_q^q} & \textit{si } \ q = p \\ \frac{q\rho_{\max}^{p-1}}{q\alpha_1 c_1 \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 c_q^q \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{q}{p}} \rho_{\max}^{q-1}} & \textit{si } \ q \in]p, p^*[. \end{cases}$$

*Remarquons d'après ce dernier que, si f satisfait l'hypothèse **(H1)** à l'infini, avec $q \in]1, p[$. Alors, d'après le théorème 2.3.1 nous confirmons que pour chaque $\lambda > 0$, notre problème (2.1) admet au moins une solution faible non triviale.*

Chapitre 3

Résultats d'existence pour un problème elliptique singulier impliquant le p-Laplacien fractionnaire avec terme d'absorption

Ce chapitre est le développement d'une partie de l'article [3].

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions faibles pour le problème de type suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u + \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{sp}} = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où λ est un paramètre positif, Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, $p > 1$, $s \in (0,1)$, $(N > ps)$ contenant l'origine et de frontière régulière, $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance sous-critique **(H1)**.

De toute évidence, le problème (3.1) représente une version similaire du problème (2.1) précédemment introduit dans chapitre 1.5, la seule différence cruciale entre les deux problèmes est le changement de signe qui précède notre terme singulier.

Dans le cadre local $(s = 1)$, M. Khodabakhshi et al. [45] ont étudié l'existence de solutions au problème (3.1) qui était motivé par le travail de Ferrara et Bisci [32]. On Mentionne également la publication de Khodabakhshi et Hadjian dans [46] lorsque les auteurs prouvent l'existence de trois solutions faibles au problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

où f et g sont des fonctions Carathéodory.

Par conséquent, dans ce chapitre, nous considérons l'équivalent non local du problème (3.2) lorsque $\mu = 0$. En utilisant une structure variationnelle de notre problème et basée sur une version du théorème du point critique contenue dans [18] (Voir Théorème 1.3.3), On prouve l'existence de deux solutions faibles au problème (3.1).

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 3.2, nous introduisons les principaux opérateurs de notre problème ainsi que la preuve de certains lemmes essentiels et propriétés importantes. La section 3.3, est consacrée à introduire et prouver notre résultat principal et enfin quelques remarques utiles liées à notre problème (3.1).

3.2 Résultats préliminaires

De même, comme dans chapitre 1, notre problème se pose dans l'espace noté $(W_0, \|\cdot\|_{W_0})$ de dual $(W_0^*, \|\cdot\|_{W_0^*})$. On introduit l'opérateur non linéaire $A : W_0 \to W_0^*$ par

$$\langle A(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy + \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-2}}{|x|^{sp}} u(x)v(x)\, dx,$$

Dans un premier temps, pour introduire la fonctionnelle d'Euler Lagrange associée au problème (3.1), on démontre les lemmes suivant qui est essentiels pour la caractérisation de sa nature

Lemme 3.2.1. *Pour $u, v \in W_0$ et il existe une constante $k \geq 1$, alors l'opérateur non linéaire A est bien défini et vérifier*

$$\langle A(u), v\rangle \leq k\|u\|_{W_0}^{p-1}\|v\|_{W_0}$$

et

$$\|A(u)\|_{W_0^*} \leq k\|u\|_{W_0}^{p-1}.$$

Preuve. *Pour tout $u, v \in W_0$, on a*

$$\begin{aligned}
\langle A(u), v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy + \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-2}}{|x|^{sp}} u(x)v(x)\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}|u(x)-u(y)||v(x)-v(y)|}{|x-y|^{(N+sp)\left(\frac{p-1+1}{p}\right)}}\, dxdy + \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-2}}{|x|^{(sp)\left(\frac{p-1+1}{p}\right)}} |u(x)||v(x)|\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{(N+sp)\left(\frac{p-1}{p}\right)}} \frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{\left(\frac{N+sp}{p}\right)}}\, dxdy + \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-1}}{|x|^{(sp)\left(\frac{p-1}{p}\right)}} \frac{|v(x)|}{|x|^{\frac{ps}{p}}}\, dx.
\end{aligned}$$

Alors, par l'inégalité de Hölder (1.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle A(u), v\rangle \leq &\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega \frac{|v(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Pour tout $\beta \in (0,1)$ et $a, b, c, d > 0$, on utilise l'inégalité suivante

$$a^\beta c^{1-\beta} + b^\beta d^{1-\beta} \leq (a+b)^\beta (c+d)^{1-\beta},$$

en posant $\beta = \frac{p-1}{p}$ et

$$\begin{aligned}
a &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy \\
b &= \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx \\
c &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy \\
d &= \int_\Omega \frac{|v(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx,
\end{aligned}$$

Alors, d'après l'inégalité de Hardy fractionnaire (1.15) nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle A(u), v\rangle &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy + c_H \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad\times \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy + c_H \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (c_H+1)\|u\|_{W_0}^{p-1}\|v\|_{W_0} \\ &\leq k\|u\|_{W_0}^{p-1}\|v\|_{W_0} \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Où $k = c_H + 1$ et $k \geq 1$. De plus, on a

$$\|A(u)\|_{W_0^*} \leq k\|u\|_{W_0}^{p-1}.$$

□

Maintenant, on présentant la fonctionnelle d'énergie associée à notre problème et ses propriétés importantes

Définition 3.2.1. *La fonctionnelle d'Euler-Lagrange $E_\lambda : W_0 \to \mathbb{R}$ associée au problème (3.1) est définie par*

$$E_\lambda(u) := \Phi(u) - \lambda\Psi(u), \quad \forall u \in W_0,$$

où

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy + \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx\right)$$

et

$$\Psi(u) := \int_\Omega F(x,u(x))\,dx,$$

où $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$, pour chaque $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Lemme 3.2.2. *Pour tous $u \in W_0$, la fonctionnelle Φ est bien définie et coercive, telle que*

$$\frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p \leq \Phi(u) \leq \left(\frac{c_H+1}{p}\right)\|u\|_{W_0}^p.$$

Preuve. *Selon l'inégalité de Hardy fractionnaire (1.15), on a*

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy + \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx \\ &\leq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p + \frac{c_H}{p}\|u\|_{W_0}^p \\ &\leq \left(\frac{c_H+1}{p}\right)\|u\|_{W_0}^p\end{aligned}$$

De même,

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p + \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx \geq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p \tag{3.3}$$

Il s'ensuit que,

$$\frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p \leq \Phi(u) \leq \left(\frac{c_H+1}{p}\right)\|u\|_{W_0}^p.$$

Ainsi, $\Phi(u)$ est bien défini et coercive dans W_0. □

Proposition 3.2.1. *L'opérateur non linéaire A vérifie les propriétés suivantes :*

1) *$A : W_0 \to W_0^*$ est un opérateur continu, borné et strictement monotone, i.e : si $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle > 0$, $\forall u \neq v$.*
2) *A est une application de type (S_+), i.e : si $u_n \to u$ faiblement dans W_0 et $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle A(u_n) - A(u), u_n - u\rangle \leq 0$, alors $u_n \to u$ fortement dans W_0.*
3) *$A : W_0 \to W_0^*$ est un homomorphisme.*

Preuve.

1) En utilisant le Lemme 3.2.1, il existe une constante $k \geq 1$ telle que

$$|\langle A(u), v\rangle| \leq k\|u\|_{W_0}^{p-1}\|v\|_{W_0}, \ \forall u, v \in W_0.$$

De cette inégalité, il est évident que A est continu et borné.

Ainsi, par un calcul direct, on a

$$\begin{aligned}
\langle A(u) - A(v), u - v\rangle &= \langle A(u), u - v\rangle - \langle A(v), u - v\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))((u-v)(x) - (u-v)(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy \\
&\quad + \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-2}}{|x|^{sp}} u(x)(u-v)(x)\, dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))((u-v)(x) - (u-v)(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy \\
&\quad - \int_\Omega \frac{|v(x)|^{p-2}}{|x|^{sp}} v(x)(u-v)(x)\, dx \\
&= \Bigg[\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x-y|^{N+sp}} \left[(u(x) - u(y)) - (v(x) - v(y))\right]\, dxdy \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+sp}} \left[(u(x) - u(y)) - (v(x) - v(y))\right]\, dxdy\Bigg] \\
&\quad + \int_\Omega \left[\frac{|u(x)|^{p-2}u(x)}{|x|^{sp}} - \frac{|v(x)|^{p-2}v(x)}{|x|^{sp}}\right] [u(x) - v(x)]\, dx \\
&= I_1 + I_1,
\end{aligned}$$

où

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \left[\frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x-y|^{N+sp}} - \frac{|v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+sp}}\right] \left[(u(x) - u(y)) - (v(x) - v(y))\right]\, dxdy$$

et

$$I_2 = \int_\Omega \left[\frac{|u(x)|^{p-2}u(x)}{|x|^{sp}} - \frac{|v(x)|^{p-2}v(x)}{|x|^{sp}}\right] [u(x) - v(x)]\, dx.$$

D'aprés l'inégalités algébriques de Simon (voir [65, formule (2.2)]) qui dit que ; pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, pour $p > 1$ il existe une constante positive C_p telle que

$$\langle |\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta\rangle \geq \begin{cases} C_p\, |\xi - \eta|^p & \text{if } p \geq 2, \\ C_p\, |\xi - \eta|^2 \left(|\xi|^p + |\eta|^p\right)^{(p-2)/p} & \text{if } 1 < p < 2. \end{cases} \tag{3.4}$$

Alors, en appliquant l'inégalité (3.4) sur I_1 et I_2, telle que

Pour I_1 on prend $\xi = u(x) - u(y)$ et $\eta = v(x) - v(y)$.

et

Pour I_2 on prend $\xi = u(x)$ et $\eta = v(x)$.

Pour tout $u, v \in W_0$ avec $u \neq v$, si $p \geq 2$ on a

$$I_1 \geq C_p \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u(x)-u(y))-(v(x)-v(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy$$

et

$$I_2 \geq C_p \int_{\Omega} \frac{|(u(x)-v(x))|^p}{|x|^{sp}}\, dxdy.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\langle A(u)-A(v), u-v\rangle &= I_1 + I_2 \\
&\geq C_p \left[\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u(x)-u(y))-(v(x)-v(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy \right.\\
&\qquad \left. + \int_{\Omega} \frac{|(u(x)-v(x))|^p}{|x|^{sp}}\, dxdy\right] \\
&= C_p p \Phi(u-v).
\end{aligned}$$

Alors, d'après Lemme 3.2.2 on aura

$$\langle A(u)-A(v), u-v\rangle \geq C_p \|u-v\|_{W_0}^p > 0, \quad p \geq 2. \tag{3.5}$$

Ainsi, si $1 < p < 2$ on a

$$I_1 \geq C_p \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u(x)-u(y))-(v(x)-v(y))|^2 \left(|u(x)-u(y)|^p + |v(x)-v(y)|^p\right)^{\frac{p-2}{p}}}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy$$

et

$$I_2 \geq C_p \int_{\Omega} \frac{|(u(x)-v(x))|^2 \left(|u(x)|^p + |v(x)|^p\right)^{\frac{p-2}{p}}}{|x|^{sp}}\, dxdy.$$

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et $a, b \in \mathbb{R}^N$, on utilise l'inégalité suivante

$$|a-b|^p \leq (|a|+|b|)^p \leq 2^{p-1}\left(|a|^p + |b|^p\right).$$

Pour I_1, on pose $a = u(x)-u(y)$ et $b = v(x)-v(y)$, on obtient que

$$I_1 \geq 2^{\frac{(1-p)(p-2)}{p}} C_p \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u(x)-u(y))-(v(x)-v(y))|^2 \,|(u(x)-u(y))-(v(x)-v(y))|^{p-2}}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy.$$

De même, pour I_2, on pose $a = u(x)$ et $b = v(x)$, on aura

$$I_2 \geq 2^{\frac{(1-p)(p-2)}{p}} C_p \int_{\Omega} \frac{|(u(x)-v(x))|^2 \,|u(x)-v(x)|^{p-2}}{|x|^{sp}}\, dxdy.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\langle A(u)-A(v), u-v\rangle &= I_1 + I_2 \\
&\geq C \left[\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u(x)-u(y))-(v(x)-v(y))|^2 \,|(u(x)-u(y))-(v(x)-v(y))|^{p-2}}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy \right.\\
&\qquad \left. + \int_{\Omega} \frac{|(u(x)-v(x))|^2 \,|u(x)-v(x)|^{p-2}}{|x|^{sp}}\, dxdy\right] \\
&= C \left[\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u(x)-u(y))-(v(x)-v(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy + \int_{\Omega} \frac{|u(x)-v(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dxdy\right] \\
&= C p \Phi(u-v).
\end{aligned}$$

où $C = 2^{\frac{(1-p)(p-2)}{p}} C_p > 0$ est une constante.

Par conséquent, d'après Lemme 3.2.2 on aura

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq C\|u - v\|_{W_0}^p > 0, \quad 1 < p < 2. \tag{3.6}$$

Ce qui nous amène à conclure que A est strictement monotone.

2) Comme W_0 est un espace de Banach réflexif et uniformément convexe selon Théorème 1.4.2. Ainsi, on sait que la convergence faible et convergence de norme impliquent une convergence forte. Il nous suffit donc de montrer que $\|u_n\|_{W_0} \to \|u\|_{W_0}$.

De plus, on a que si $u_n \to u$ faiblement dans W_0 et

$$\limsup_{n\to\infty} \langle A(u_n) - A(u), u_n - u \rangle \leq 0.$$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle A(u_n) - A(u), u_n - u \rangle = \lim_{n\to+\infty} \left(\langle A(u_n), u_n - u \rangle - \langle A(u), u_n - u \rangle \right) = 0.$$

En combinant (3.5) avec (3.6) de 1), on obtient que $u_n \to u$ fortement dans W_0 quand $n \to +\infty$ et ceci nous amène à conclure que A est une application de type (S_+).

3) Par 1), on sait que A est strictement monotone, ce qui implique que A est injective. puis, d'après le Lemme 3.2.1, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\|u\|_{W_0}\to+\infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|_{W_0}} &= \lim_{\|u\|_{W_0}\to+\infty} \frac{\left(\|u\|_{W_0}^p + \displaystyle\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx \right)}{\|u\|_{W_0}} \\
&= \lim_{\|u\|_{W_0}\to+\infty} \|u\|_{W_0}^{p-1} + \lim_{\|u\|_{W_0}\to+\infty} \|u\|_{W_0}^{-1} \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hardy fractionnaire (1.15), il existe une constante $c_H > 0$ tel que

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx \leq c_H \|u\|_{W_0}^p < +\infty,$$

ce qui implique que

$$\lim_{\|u\|_{W_0}\to+\infty} \|u\|_{W_0}^{-1} \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{\|u\|_{W_0}\to+\infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|_{W_0}} &= \lim_{\|u\|_{W_0}\to+\infty} \|u\|_{W_0}^{p-1} \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

puisque $1 < p < \frac{N}{s}$ et A est continue et bornée selon 1), donc A est coercive sur W_0. Alors, d'après le Théorème de Minty-Browder (voir [69, Théorème 26.A]), on conclut que A est surjective.

Ainsi, A a une application inverse $A^{-1}: W_0^* \to W_0$. Par conséquent, la continuité de A^{-1} est suffisante pour garantir que A est une homéomorphisme.

Supposons que $g_n, g \in W_0$ avec $g_n \to g$ dans W_0. Soit $u_n = A^{-1}(g_n)$ et $u = A^{-1}(g)$. Alors $A(u_n) = g_n$ et $A(u) = g$. Évidemment, $\{u_n\}$ est borné dans W_0. Donc, il existe $u_0 \in W_0$ et une sous suite de $\{u_n\}$ encore notée $\{u_n\}$ telle que $u_n \rightharpoonup u_0$ et puisque

$$g_n \longrightarrow g \text{ dans } W_0,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle A(u_n) - A(u_0), u_n - u_0\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle g_n, u_n - u_0\rangle = 0.$$

Étant donné que A satisfait la condition (S_+) par 2), nous obtenons que $u_n \to u_0$ dans W_0. En outre, $u = u_0$ p.p. dans Ω. Donc,

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } W_0,$$

de sorte que A^{-1} est continu. □

Lemme 3.2.3. *La fonctionnelle d'énergie E_λ est bien défini, de classe C^1 et sa dérivé est donné par*

$$\langle E_\lambda'(u), v\rangle = \langle \Phi'(u), v\rangle - \lambda\langle \Psi'(u), v\rangle, \quad \forall u, v \in W_0.$$

Où

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v(x)-v(y))\,dxdy + \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-2}u(x)}{|x|^{sp}} v(x)\,dx$$

et

$$\langle \Psi'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)\,dx.$$

Preuve. *Initialement, on montre que E_λ est bien défini ;*

Soit $u \in W_0$ et par Lemme 3.2.2, on a

$$\Phi(u) \le \left(\frac{c_H + 1}{p}\right) \|u\|_{W_0}^p < +\infty.$$

*De plus, d'après **(H1)**, on a*

$$\begin{aligned} |F(x,t)| &= \left|\int_0^t f(x,s)\,ds\right| \\ &\le \alpha_1 \left|\int_0^t ds\right| + \alpha_2 \left|\int_0^t |s|^{q-1}\,ds\right| \\ &= \alpha_1|t| + \alpha_2\frac{|t|^q}{q}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|F(x,u)| \le \alpha_1|u| + \alpha_2\frac{|u|^q}{q}.$$

Puisque $W_0 \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour chaque $q \in [1, p^*)$, on obtient

$$|\Psi(u)| \le \int_\Omega |F(x,u)|\,dx \le \alpha_1 c_1 \|u\|_{W_0} + \frac{\alpha_2}{q}\left(c_q\|u\|_{W_0}\right)^q < +\infty,$$

et en déduire que

$$F(x,u) \in L^1(\Omega).$$

Alors, E_λ est bien défini.

Il ne reste qu'à prouver que E_λ est de classe $C^1(W_0,\mathbb{R})$ et sa dérivée est

$$\langle E_\lambda^{'}(u),v\rangle = \langle \Phi^{'}(u),v\rangle - \lambda\langle \Psi^{'}(u),v\rangle, \quad \forall v \in W_0.$$

Nous rappelons que

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy + \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx\right) \text{ et } \Psi(u) := \int_\Omega F(x,u)\,dx.$$

► *On commence par démontrer que $\Psi \in C^1(W_0,\mathbb{R})$.*

D'après Définition 1.2.1, on montre que sa dérivée $\Psi^{'}$ existe en calculant

$$\begin{aligned}\langle \Psi^{'}(u),v\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{\Psi(u+tv)-\Psi(u)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\int_\Omega F(x,u+tv)\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}\,dx.\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{array}{rcccl} G & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & & y & \longmapsto & G(y)=F(x,u+ytv)\end{array}$$

G est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. Ainsi, en utilisant le Théorème des accroissements finis, $\exists\theta \in (0.1)$ tel que

$$G^{'}(\theta) = \frac{G(1)-G(0)}{1-0},$$

ce qui signifie

$$tvF^{'}(x,u+\theta tv) = F(x,u+tv)-F(x,u).$$

Puisque $F^{'}(x,t)=f(x,t)$, alors

$$f(x,u+\theta tv)v = \frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t},$$

ce qui implique que

$$\langle \Psi^{'}(u),v\rangle = \lim_{t\to 0}\int_\Omega f(x,u+\theta tv)v\,dx.$$

Par ailleurs, on sait que f continu, alors

$$\lim_{t\to 0} f(x,u+\theta tv)v\,dx = f(x,u)v.$$

*Ainsi, pour tout $u,v\in W_0$ et en utilisant **(H1)** on a*

$$\begin{aligned}|f(x,u+\theta tv)v| &\leq \left|\left(\alpha_1+\alpha_2|u+\theta tv|^{q-1}\right)v(x)\right|\\ &\leq \alpha_1|v(x)| + \alpha_2|u+\theta tv|^{q-1}|v(x)|.\end{aligned}$$

Pour chaque $q \in [1, p^*)$ *et* $a, b \geq 0$*, utilisant l'inégalité suivante*

$$|a+b|^q \leq 2^{q-1}(|a|^q + |b|^q).$$

En posant $a = u$*,* $b = v$ *et comme* $\theta t \in [0,1]$*, on déduit que*

$$\begin{aligned} |f(x, u+\theta t v)v| &\leq \alpha_1 |v(x)| + \alpha_2 2^{q-2}\left(|u(x)|^{q-1} + |v(x)|^{q-1}\right)|v(x)| \\ &= \alpha_1 |v(x)| + \alpha_2 2^{q-2}\left(|u(x)|^{q-1}|v(x)| + |v(x)|^q\right). \end{aligned}$$

Ensuite, on applique le Théorème 1.1.3 de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega f(x, u+\theta t v)v\, dx = \int_\Omega f(x,u)v\, dx,$$

d'où

$$\langle \Psi'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)\, dx.$$

De plus, pour $u, v \in W_0$ *on montre que* Ψ' *est continue*

$$\begin{aligned} \left|\langle \Psi'(u), v\rangle\right| &\leq \int_\Omega |f(x,u(x))v(x)|\; dx \\ &\leq \int_\Omega \left(\alpha_1|v(x)| + \alpha_2|u(x)|^{q-1}|v(x)|\right)\; dx \\ &= \alpha_1 \int_\Omega |v(x)|\, dx + \alpha_2 \int_\Omega |u(x)|^{q-1}|v(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Par inégalité de Hölder (1.1), on a

$$\left|\langle \Psi'(u), v\rangle\right| \leq \alpha_1 \|v\|_{L^1(\Omega)} + \alpha_2 \|u\|^{q-1}_{L^q(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Puisque $W_0 \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour chaque* $q \in [1, p^*)$*, alors*

$$\begin{aligned} \left|\langle \Psi'(u), v\rangle\right| &\leq \alpha_1 c_1 \|v\|_{W_0} + \alpha_2 c_2 \|u\|^{q-1}_{W_0} \|v\|_{W_0} \\ &= \left(\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 \|u\|^{q-1}_{W_0}\right)\|v\|_{W_0}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\Psi' \in W_0^*$ *et* $\Psi \in C^1(W_0, \mathbb{R})$.

► *Ensuite, nous prouvons que* $\Phi \in C^1(W_0, \mathbb{R})$.

En effet, on montre que sa dérivée Φ' *existe par Définition 1.2.1, on calcule*

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(u), v\rangle &= \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u+tv) - \Phi(u)}{t} \\ &= \frac{1}{p}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u+tv)(x) - (u+tv)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy + \int_\Omega \frac{|(u+tv)(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy - \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx\right\} \\ &= \frac{1}{p}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u+tv)(x) - (u+tv)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy - \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy \right. \\ &\quad \left. + \int_\Omega \frac{|(u+tv)(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx - \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx\right\}. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{array}{rcl} K : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & K(y) = \dfrac{|u(x)+ytv(x)|^p}{|x|^{sp}} \end{array}$$

K est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. Ainsi, en utilisant le Théorème des accroissements finis, $\exists\theta \in (0.1)$ tel que

$$K^{'}(\theta) = \frac{K(1)-K(0)}{1-0}.$$

Ainsi, d'après Lemme 1.2.1 on a

$$ptv(x)\frac{|u(x)+\theta tv(x)|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))}{|x|^{sp}} = \frac{|u(x)+tv(x)|^p - |u(x)|^p}{|x|^{sp}}.$$

Alors,

$$\frac{1}{pt}\frac{|u(x)+tv(x)|^p-|u(x)|^p}{|x|^{sp}} = \frac{|u(x)+\theta tv(x)|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))}{|x|^{sp}}v(x), \tag{3.7}$$

De même, on définit

$$\begin{array}{rcl} Q : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & Q(y) = \dfrac{|(u(x)+ytv(x))-(u(y)+ytv(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}} \end{array}$$

Q est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. Ainsi, en utilisant le Théorème des accroissements finis, $\exists\theta \in (0.1)$ tel que

$$Q^{'}(\theta) = \frac{Q(1)-Q(0)}{1-0},$$

Donc, d'après Lemme 1.2.1 on a

$$\begin{aligned} pt(v(x)-v(y))&\frac{|(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))}{|x-y|^{N+sp}} \\ &= \frac{|(u(x)+tv(x))-(u(y)+tv(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}} - \frac{|(u(x)+u(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}} \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{pt}\left(\frac{|(u(x)+tv(x))-(u(y)+tv(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}} - \frac{|(u(x)+u(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}}\right) \\ &= \frac{|(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v(x)-v(y)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Par (3.7) et (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} \langle\Phi^{'}(u),v\rangle = \lim_{t\to 0}\Bigg\{&\int_\Omega \frac{|u(x)+\theta tv(x)|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))}{|x|^{sp}}v(x)\,dx \\ +\int_{\mathbb{R}^{2N}} &\frac{|(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v(x)-v(y))\,dxdy\Bigg\}. \end{aligned}$$

Ensuite, on applique le Théorème 1.1.3 de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\langle\Phi^{'}(u),v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v(x)-v(y))\,dxdy + \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-2}u(x)}{|x|^{sp}}v(x)\,dx.$$

De plus, pour $u, v \in W_0$ on montre que Φ' est continue, nous constatons que

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \langle A(u), v\rangle.$$

D'après le lemme 3.2.1 nous avons

$$\langle \Phi'(u), v\rangle \leq k\|u\|_{W_0}^{p-1}\|v\|_{W_0}.$$

On en déduit que $\Phi' \in W_0^*$ et $\Phi \in C^1(W_0, \mathbb{R})$. Ce qui conclut la preuve. □

Les solutions de notre problème sont introduites par la définition suivante

Définition 3.2.2. *En fixant le paramètre réel λ, une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite solution faible du problème (3.1), si $u \in W_0$ et*

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \langle A(u), v\rangle = \lambda\langle \Psi'(u), v\rangle, \quad v \in W_0,$$

où

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v(x)-v(y))\, dxdy + \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-2}}{|x|^{sp}}u(x)v(x)\, dx$$
$$= \lambda \int_\Omega f(x,u(x))v(x)\, dx,$$

pour chaque $v \in W_0$. Ainsi, les points critiques de E_λ sont exactement les solutions faibles du problème (3.1).

3.3 Résultat principal

Dans cette section, nous établissons le résultat principal de ce travail qui est le théorème suivant

Théorème 3.3.1. *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition **(H1)**. De plus, on suppose que*

(H2) *il existe $\theta > p$ et $M > 0$ de telle sorte que*

$$0 < \theta F(x,t) \leq tf(x,t),$$

pour tout $x \in \Omega$ et $|t| \geq M$.

Alors, pour chaque $\lambda \in]0, \overline{\lambda}[$, le problème elliptique de Dirichlet (3.1) suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u + \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{sp}} = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

admet au moins deux solutions faibles distinctes, où

$$\overline{\lambda} := \frac{q}{q\alpha_1 c_1 p^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 c_q^q p^{\frac{q}{p}}}$$

avec α_1, α_2, c_1 et c_q sont des constantes positives.

Pour obtenir la preuve de ce résultat, on décompose la preuve du théorème 3.3.1 en une séquence de propositions :

Proposition 3.3.1. *Pour chaque $\lambda > 0$ et les hypothèses **(H1)**, **(H2)** sont vérifiées. Alors, $E_\lambda = \Phi - \lambda\Psi$ satisfait la condition de Palais-Smale.*

Preuve. *Pour démontrer que E_λ satisfait la condition de Palais-Smale pour tout $\lambda > 0$. en effet, montrer que toute suite de Palais-Smale est bornée dans W_0 et admet une sous-suite convergente. Nous procédons par étapes.*

Étape 1. *La suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans W_0.*

Pour n assez grand, d'après (i) dans la Définition 1.2.7, on a

$$\begin{aligned}
E_\lambda(u_n) &= \Phi(u_n) - \lambda\Psi(u_n) \\
&= \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy + \int_\Omega \frac{|u_n(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx\right) - \lambda\int_\Omega F(x,u_n(x))\,dx \\
&\leq d.
\end{aligned}$$

*D'autre part, par **(H2)** on a*

$$\begin{aligned}
E_\lambda(u_n) &\geq \frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W_0} - \frac{\lambda}{\theta}\int_\Omega f(x,u_n(x))u_n(x)\,dx \\
&\geq \frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W_0} - \frac{\lambda}{\theta}\int_\Omega f(x,u_n(x))u_n(x)\,dx + \frac{1}{\theta}\|u_n\|^p_{W_0} - \frac{1}{\theta}\|u_n\|^p_{W_0} \\
&> \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^p_{W_0} + \frac{1}{\theta}\left(\|u_n\|^p_{W_0} - \lambda\int_\Omega f(x,u_n(x))u_n(x)\,dx\right) \\
&\geq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^p_{W_0} + \frac{1}{\theta}\langle E'_\lambda(u_n),u_n\rangle.
\end{aligned}$$

Grâce à (ii) dans la Définition 1.2.7, on a $\theta > p > 1$ et $\varepsilon \to 0$ tel que

$$\|E'_\lambda(u_n)\|_{W_0^*} \leq \varepsilon$$

et

$$\begin{aligned}
-\left|\frac{1}{\theta}\right|\langle E'_\lambda(u_n),u_n\rangle &\leq \|\left(E^{p,1}_\lambda\right)'(u_n)\|_{W_0^*}\|u_n\|_{W_0} \\
&\leq \varepsilon\|u_n\|_{W_0}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)\|u\|^p_{W_0} \leq E^{p,1}_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle E'_\lambda(u_n),u_n\rangle \leq d + \varepsilon\|u_n\|_{W_0}.$$

Il résulte de cette inégalité que $\{u_n\}$ est borné dans W_0.

Étape 2. *la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente.*

*D'après le théorème d'Eberlian-Smulyan (voir [70, Theorem 21.D.]), en passant à une sous-séquence si nécessaire, on peut supposer que $u_n \rightharpoonup u$. Alors, par la compacité de Ψ' grâce à la condition **(H1)** et du à l'injection compact $W_0 \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1,p^*)$ nous avons*

$$\Psi'(u_n) \longrightarrow \Psi'(u),$$

Puisque

$$E_\lambda^{'}(u_n) = \Phi^{'}(u_n) - \lambda\Psi^{'}(u_n) \longrightarrow 0,$$

alors

$$\Phi^{'}(u_n) = E_\lambda^{'}(u_n) + \lambda\Psi^{'}(u_n) \longrightarrow 0 + \lambda\Psi^{'}(u).$$

De plus, comme $\Phi^{'}$ est un homéomorphisme selon Lemme 3.2.1, alors $u_n \to u$ dans W_0 et donc E_λ satisfait la condition (PS). □

Lemme 3.3.1. *Supposons que f vérifie **(H2)**. Alors, il existe une constante c positive telle que*

$$F(x,t) \geq c|t|^\theta, \quad \forall x \in \Omega, \ \ |t| > M. \tag{3.9}$$

Preuve. *On commence par poser $a(x) := \min\limits_{|\xi|=M} F(x,\xi)$ et*

$$\varphi_t(s) := F(x,st), \quad \forall s > 0. \tag{3.10}$$

*Par l'hypothèse **(H2)**, on a pour tout $x \in \Omega$ et $|t| > M$ que*

$$0 < \theta\varphi_t(s) = \theta F(x,st) \leq stf(x,st) = s\varphi_t^{'}(s), \ \ \forall s > \frac{M}{|t|}.$$

Par conséquent,

$$\theta\varphi_t(s) \leq s\varphi_t^{'}(s).$$

Ainsi,

$$\int_{\frac{M}{|t|}}^{1} \frac{\theta}{s}\, ds \leq \int_{\frac{M}{|t|}}^{1} \frac{\varphi_t^{'}(s)}{\varphi_t(s)}\, ds.$$

On voit que,

$$\int_{\frac{M}{|t|}}^{1} \left(\ln|s|^\theta\right)^{'} ds \leq \int_{\frac{M}{|t|}}^{1} \left(\ln|\varphi_t(s)|\right)^{'} ds,$$

$$\left[\ln|s|^\theta\right]_{\frac{M}{|t|}}^{1} \leq \left[\ln|\varphi_t(s)|\right]_{\frac{M}{|t|}}^{1},$$

$$-\ln\left[\frac{M}{|t|}\right]^\theta \leq \ln|\varphi_t(1)| - \ln\left|\varphi_t\left(\frac{M}{|t|}\right)\right|.$$

Alors,

$$\ln\varphi_t\left(\frac{M}{|t|}\right) - \ln\frac{M^\theta}{|t|^\theta} \leq \ln\varphi_t(1).$$

On a

$$-\ln\frac{M^\theta}{|t|^\theta} = -\left[\ln M^\theta - \ln|t|^\theta\right] = \ln|t|^\theta - \ln M^\theta = \ln\frac{|t|^\theta}{M^\theta}.$$

D'où

$$\ln\varphi_t\left(\frac{M}{|t|}\right) + \ln\frac{|t|^\theta}{M^\theta} \leq \ln\varphi_t(1),$$

$$e^{\ln\varphi_t\left(\frac{M}{|t|}\right)+\ln\frac{|t|^\theta}{M^\theta}} = e^{\ln\left[\varphi_t\left(\frac{M}{|t|}\right)\frac{|t|^\theta}{M^\theta}\right]} \leq e^{\ln\varphi_t(1)}.$$

Donc,

$$\varphi_t\left(\frac{M}{|t|}\right)\frac{|t|^\theta}{M^\theta} \leq \varphi_t(1).$$

En tenant compte de (3.10), on obtient

$$c|t|^{\theta} \leq a(x)\frac{|t|^{\theta}}{M^{\theta}} \leq F\left(x, \frac{M}{|t|}t\right)\frac{|t|^{\theta}}{M^{\theta}} \leq F(x,t),$$

où $c \geq 0$ est une constante. Alors, (3.9) est prouvé. □

Ensuite, on prouve la proposition 3.3.2 suivante en utilisant le lemme 3.3.1 prouvé précédent.

Proposition 3.3.2. *Pour tout $\lambda > 0$ et l'hypothèse* ***(H2)*** *est vérifiée. Alors, E_λ est non bornée inférieurement.*

Preuve. *On pose $u_0 \in W_0 \backslash \{0\}$ et pour chaque $t > 1$, on a*

$$\begin{aligned} E_\lambda(tu_0) &= \Phi(tu_0) - \lambda\Psi(tu_0) \\ &= \frac{t^p}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_0(x)-u_0(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy + \int_\Omega \frac{|u_0(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx\right) - \lambda\int_\Omega F(x,u_0(x))\,dx. \end{aligned}$$

Donc, d'après Lemme 3.3.1 et de l'inégalité de Hardy Fractionnaire (1.15) on a

$$\begin{aligned} E_\lambda(tu_0) &\leq \frac{t^p(c_H+1)}{p}\|u_0\|^p_{W_0} - \lambda\int_\Omega c\,|tu_0(x)|^{\theta}\,dx \\ &\leq \frac{t^p(c_H+1)}{p}\|u_0\|^p_{W_0} - \lambda c t^{\theta}\int_\Omega |u_0(x)|^{\theta}\,dx \\ &< 0 \end{aligned}$$

L'hypothèse ***(H2)*** *assure que $\theta > p$, ce qui garantit que*

$$E_\lambda(tu_0) \longrightarrow -\infty, \quad \textit{quand } t \to +\infty,$$

Alors, on déduit que E_λ est non bornée inférieurement. □

Preuve de Théorèm 3.3.1. Fixant $\lambda \in]0, \overline{\lambda}[$, on essaie d'appliquer le théorème 1.3.3 au problème (3.1) dans le cas $r = 1$ à l'espace $X := W_0$ et aux fonctionnelles Φ, Ψ présenter dans la Définition 3.2.1.

La fonctionnelle Φ est continue et $\Phi' : W_0 \to W_0^*$ est un homéomorphisme selon la proposition 3.2.1. De plus, grâce à la condition **(H1)** et l'injection compact $W_0 \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, p^*)$. Alors, Ψ est continue d'une dérivée compacte.

Via la proposition 3.3.1 et la proposition 3.3.2, on a établi que E_λ est non bornée inférieurement et satisfait la condition de Palais-Smale. Par conséquent, nous pouvons appliquer notre outil principal, le théorème 1.3.3 et il ne reste plus qu'à prouver que $\lambda \in]0, \overline{\lambda}[\subseteq]0, \frac{1}{\sup_{\{\Phi(u)<1\}}\Psi(u)}[$ où $\overline{\lambda} := \frac{q}{q\alpha_1 c_1 p^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 c_q^q p^{\frac{q}{p}}}$.

A partir de (3.3), on a

$$\frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0} \leq \Phi(u) < r, \text{ tel que } u \in \Phi^{-1}(]-\infty, r[).$$

Pour $r = 1$, on obtient

$$\|u\|_{W_0}^p < p.$$

Alors, pour chaque $u \in W_0$

$$\|u\|_{W_0} < p^{\frac{1}{p}}, \text{ tel que, } u \in \Phi^{-1}(]-\infty, 1[). \tag{3.11}$$

De plus, d'après **(H1)**, on a

$$\begin{aligned}
|F(x,t)| &= \left| \int_0^t f(x,s)\, ds \right| \\
&\leq \alpha_1 \left| \int_0^t ds \right| + \alpha_2 \left| \int_0^t |s|^{q-1}\, ds \right| \\
&= \alpha_1 |t| + \alpha_2 \frac{|t|^q}{q}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &= \int_\Omega |F(x,u(x))| dx \\
&\leq \int_\Omega \left[\alpha_1 |u(x)| + \alpha_2 \frac{|u(x)|^q}{q} \right] dx \\
&\leq \alpha_1 \int_\Omega |u(x)|\, dx + \frac{\alpha_2}{q} \int_\Omega |u(x)|^q\, dx \\
&= \alpha_1 \|u\|_{L^1(\Omega)} + \frac{\alpha_2}{q} \|u\|_{L^q(\Omega)}^q
\end{aligned}$$

En utilisant l'injection compact $W_0 \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p^*)$ et pour chaque $u \in \Phi^{-1}(]-\infty, 1[)$, on a

$$\Psi(u) \leq \alpha_1 c_1 \|u\|_{W_0} + \frac{\alpha_2}{q} \left(c_q \|u\|_{W_0} \right)^q.$$

Et par (3.11), on obtient

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &< \alpha_1 c_1 p^{\frac{1}{p}} + \frac{\alpha_2}{q} c_q^q p^{\frac{q}{p}} \\
&= \frac{q \alpha_1 c_1 p^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 c_q^q p^{\frac{q}{p}}}{q}.
\end{aligned}$$

Puisque $\lambda \in]0, \overline{\lambda}[$, on obtient

$$\sup_{\{u \in \Phi^{-1}(]-\infty,1[)\}} \Psi(u) < \frac{q \alpha_1 c_1 p^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 c_q^q p^{\frac{q}{p}}}{q} =: \frac{1}{\overline{\lambda}} < \frac{1}{\lambda},$$

de ce dernier, on a

$$0 < \lambda < \overline{\lambda} := \frac{q}{q \alpha_1 c_1 p^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 c_q^q p^{\frac{q}{p}}} < \frac{1}{\sup_{\{\Phi(u)<1\}} \Psi(u)}.$$

Donc,

$$\lambda \in]0, \overline{\lambda}[\subseteq \left] 0, \frac{1}{\sup_{\{\Phi(u)<1\}} \Psi(u)} \right[.$$

Maintenant que toutes les hypothèses du théorème 1.3.3 sont vérifiées. Nous concluons que pour chaque $\lambda \in]0, \overline{\lambda}[$, la fonctionnelle E_λ admet deux points critiques distincts qui sont des solutions faibles du problème (3.1). □

Remarque 3.3.1. *Remarquez que le théorème 3.3.1 confirme l'existence de deux solutions faibles positives pour le problème (3.1), si la fonction f est positive et $f(x,0) \neq 0$ dans Ω.*

Chapitre 4

Sur un problème p-Laplacien fractionnaire avec des nonlinéarités discontinues

Ce chapitre est le développement de l'article [1].

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et de la multiplicité des solutions du problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, $p \in (1,\infty), s \in (0,1)$, $(N > ps)$ de frontière régulière $\partial\Omega$ et f est une fonction discontinue par rapport à u, donné par

$$f(x,u) = m(x)\sum_{i=1}^{n} H(u-\mu_i), \tag{4.2}$$

pour telles $\mu_i > 0$ vérifiant la condition

$$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$$

et $m \in L^\infty(\Omega)$ change de signe. La fonction H est la fonction de Héaviside i.e.

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Le problème (4.1) avec la non-linéarité (4.2) peut être considéré comme un problème de frontière libre avec une région inconnue à caractériser.

Peu de travaux considère un problème avec le p-Laplacien fractionnaire impliquant une nonlinéarité discontinue. L'une des raisons de considérer les discontinuités est due à de nombreux problèmes aux frontières libres qui peuvent être réduits à un problème aux limites avec une discontinuité au second terme. Pour un bref panorama des travaux traitant des nonlinéarités discontinues, voir [5–7, 9, 12, 13, 26, 41].

Plus précisément, notre problème peut être reformulé comme suit

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = nm(x) & \text{dans } u > \mu_n \\ (-\Delta)_p^s u = (n-1)m(x) & \text{dans } \mu_{n-1} < u < \mu_n \\ \quad\vdots & \\ (-\Delta)_p^s u = im(x) & \text{dans } \mu_i < u < \mu_{i+1} \\ \quad\vdots & \\ (-\Delta)_p^s u = 0 & \text{dans } u < \mu_1 \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

Nous voulons trouver (u, Ω_{μ_i}) tel que le problème (4.3) soit vérifié où $\Omega_{\mu_i} = \{x \in \Omega \,:\, u(x) > \mu_i\}$ et $\partial\Omega_{\mu_i} := \Gamma_i$ sont les frontières libres à déterminer. Nous pouvons remarquer que notre discontinuité génère n frontières libres qui ne sont pas données explicitement et demande plus d'attention surtout la régularité de l'ensemble Γ_i.

Dans le cadre local $(s = 1, p \neq 2)$ sans la fonction m et lorsque f n'a qu'une seule discontinuité, le problème (4.1) a été étudié par D. Arcoya et M. Calahorrano dans [9].

Pour le Laplacien classique $(s = 1, p = 2)$, le problème (4.1) a été analysé dans [6] par A. Ambrosetti et M. Badiale. Après ces travaux remarquables, de nombreuses généralisations sont obtenues dans la littérature. Par exemple, voir [5–7, 9, 12–14].

Récemment, un problème non local fractionnaire avec des nonlinéarités discontinues a été étudié dans [11], où l'auteur prouve l'existence de solutions du problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f(u)H(u-\mu) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

où $(-\Delta)^s$ est le laplacien fractionnaire $(p = 2)$ et f est une fonction donnée qui satisfait des conditions appropriées.

Dans ce chapitre, nous étudierons la généralisation du problème (4.4) pour le p-Laplacien fractionnaire avec des nonlinéarités qui change de signe et n discontinuités. Cette étude a été motivée par des résultats récents étendant les résultats classiques de l'opérateur p-Laplacien. Une autre motivation est l'impact de notre terme nonlinéaire dans plusieurs applications comme la théorie des réactions chimiques, les réseaux de neurones et la théorie du climat. nous citons [15] pour plus de détails.

Ainsi, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = m(x) \sum_{i=1}^{n} H(u-\mu_i) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

En utilisant l'approche variationnelle, nous définissons la fonctionnelle d'Euler-Lagrange associée au problème (4.5) par

$$E(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \, dxdy - \int_\Omega m(x) G(u(x)) \, dx,$$

où $G : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est $G(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t H(s-\mu_i) \, ds.$

On remarque que la fonctionnelle E n'est pas Fréchet différentiable ce qui signifie que les méthodes variationnelles classiques ne sont pas applicables. Par conséquent, en posant des hypothèses appropriées sur les fonctions m et G et en utilisant la théorie de Chang [26] pour les fonctions non différentiables due à Clarke [27], nous prouvons que la fonctionnelle E n'est que localement Lipschitzienne continue. Par conséquent, selon la version non régulière de théorème du col, nous pouvons montrer l'existence de solutions du problème (4.5).

On a organisé ce chapitre comme suit. Dans la section 4.2, nous rappelons quelques définitions et résultats préliminaires. Dans la section 4.3, nous énonçons et démontrons notre résultat principal.

4.2 Résultats préliminaires

Tout au long de ce chapitre, notons $(W_0^*, \|\cdot\|_{W_0^*})$ l'espace dual de $(W_0, \|\cdot\|_{W_0})$ et nous définissons l'opérateur non linéaire $A : W_0 \to W_0^*$ par

$$\langle A(u), v\rangle = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy, \quad \forall v \in W_0,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur W_0.

Posant

$$g(u) := \sum_{i=1}^{n} H(u-\mu_i)$$

et on considère le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u(x) = m(x)g(u(x)) & \text{p.p. } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

Considérant la structure variationnelle de problème (4.6), on présente sa fonctionnelle énergétique correspondante ainsi que ses propriétés importantes

Définition 4.2.1. *La fonctionnelle d'Euler-Lagrange $E : W_0 \to \mathbb{R}$ associée au problème (4.6) est définie par*

$$E(u) := \Phi(u) - J(u), \quad \forall u \in W_0,$$

où

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy$$

et

$$J(u) := \int_\Omega m(x)G(u(x))\, dx,$$

où $G(t) = \int_0^t g(s)\, ds$ et $g(s) := \sum_{i=1}^{n} H(s-\mu_i)$.

On présente quelque propriétés essentielles de E ainsi que son gradient généralisé à travers le lemme suivant

Lemme 4.2.1. *La fonctionnelle d'énergie E est bien défini et localement Lipschitzienne dans W_0. Le gradient généralisé de E est donné par*

$$\langle \partial E(u), v\rangle = \langle \Phi'(u), v\rangle - \langle \partial J(u), v\rangle, \quad \forall u, v \in W_0$$

où

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \langle A(u), v\rangle$$

et

$$\partial J(u) \subseteq m(x)\partial g(u(x)) = \left\{\zeta \in W_0 \;:\; \zeta(x) \in \left[m(x)\underline{g}(u), m(x)\overline{g}(u)\right] \text{ p.p. } x \in \Omega\right\}.$$

Preuve. *Principalement, on montre que E est bien défini ;*

Soit $u \in W_0$ et par définition de Φ, on a

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p < +\infty.$$

Ainsi, on a

$$G(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^n H(s-\mu_i)\ ds \leq n\int_0^t\ ds,$$

ce qui implique que

$$G(u(x)) \leq nu(x). \tag{4.7}$$

Donc,

$$\begin{aligned}|J(u)| &= \left|\int_\Omega nm(x)u(x)\ dx\right| \\ &\leq n\|m\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |u(x)|\ dx \\ &= n\|m\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Puisque $W_0 \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour chaque $q \in [1, p^*)$, on obtient

$$|J(u)| \leq \int_\Omega |m(x)G(u(x))|\ dx \leq nC_1\|m\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{W_0} < +\infty,$$

ce qui permet de déduire que

$$J(u) \in L^1(\Omega).$$

Alors, E est bien défini.

D'autre part, on démontre que E est localement Lipschitzienne dans W_0 et son gradient généralisé est donné par

$$\langle \partial E(u), v\rangle = \langle \Phi^{'}(u), v\rangle - \langle \partial J(u), v\rangle,$$

► *On commence par démontrer que J localement Lipschitzienne dans W_0 et si $\zeta \in \partial J(u)$, Alors $\zeta(x) \in m(x)\partial g(u(x))$. on a*

$$\begin{aligned}|J(u) - J(v)| &= \left|\int_\Omega m(x)G(u(x))\ dx - \int_\Omega m(x)G(v(x))\ dx\right| \\ &= \left|\int_\Omega m(x)\left[G(u(x)) - G(v(x))\right]\ dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |m(x)|\left|\int_0^u \sum_{i=1}^n H(s-\mu_i)\ ds - \int_0^v \sum_{i=1}^n H(s-\mu_i)\ ds\right|\ dx \\ &\leq \int_\Omega |m(x)|\left|n\int_0^u\ ds - n\int_0^v\ ds\right|\ dx \\ &\leq \int_\Omega n\,|m(x)|\left|\int_v^0\ ds + \int_0^u\ ds\right|\ dx \\ &\leq \int_\Omega n\,|m(x)|\left|\int_v^u\ ds\right|\ dx \\ &= n\|m\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |u(x) - v(x)|\ dx.\end{aligned}$$

En utilisant l'injection $W_0 \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour chaque* $q \in [1, p^*)$, *on obtient*

$$|J(u) - J(v)| \leq n\|m\|_{L^\infty(\Omega)} C_1 \|u(x) - v(x)\|_{W_0}, \ \forall u, v \in W_0.$$

D'après la Définition 1.2.12, la fonctionnel J *est localement Lipschitzienne dans* W_0.

De plus, d'après la Définition 1.2.13 de la dérivée directionnelle généralisée, ils existes $w \to u$ *et* $\delta_n \downarrow 0$ *quand* n *tend vers* $+\infty$, *telle que*

$$\begin{aligned}
J^\circ(u; v) &= \lim_{n\to\infty} \frac{J(w + \delta_n v) - J(w)}{\delta_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\int_\Omega m(x) G(w + \delta_n v)\, dx - \int_\Omega m(x) G(w)\, dx\right]}{\delta_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{m(x) \left[\int_0^{w+\delta_n v} g(\xi)\, d\xi - \int_0^w g(\xi)\, d\xi\right]}{\delta_n}\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{m(x)}{\delta_n} \int_w^{w+\delta_n v} g(\xi)\, d\xi\, dx.
\end{aligned}$$

On suppose $w \to u$ *et* $\delta_n \downarrow 0$ *quand* n *tend vers* $+\infty$, *d'après le Lemme 1.1.1 de Fatou, on conclue que*

$$\begin{aligned}
J^\circ(u; v) &\leq \int_\Omega m(x) G^\circ(x, u(x); v(x))\, dx \\
&= \int_\Omega m(x) \max\left\{\langle \zeta(x), v(x)\rangle \ : \ \zeta \in \partial g(u(x))\right\}\, dx \\
&= \int_{\{v(x)<0\}} m(x) \underline{g}(u(x)) v(x)\, dx + \int_{\{v(x)>0\}} m(x) \overline{g}(u(x)) v(x)\, dx.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Pour $\zeta \in \partial J(u)$, *nous voulons prouver que*

$$m(x)\underline{g}(u(x)) \leq \zeta(x) \leq m(x)\overline{g}(u(x)), \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Supposons qu'il existe un ensemble positif $\mathcal{E} \subset \Omega$, *tel que*

$$\zeta(x) < m(x)\underline{g}(u(x)), \ \ \forall x \in \mathcal{E}. \tag{4.9}$$

Soit $v(x) = -\chi_{\mathcal{E}}(x)$ *dans (4.8), la fonction caractéristique de* $\mathcal{E}$, *en utilisant la définition du gradient généralisé on obtient*

$$-\int_{\mathcal{E}} \zeta(x)\, dx = \int_\Omega \zeta(x)(-\chi_{\mathcal{E}}(x))\, dx \leq -\int_\Omega m(x)\underline{g}(u(x))\chi_{\mathcal{E}}(x)\, dx = -\int_{\mathcal{E}} m(x)\underline{g}(u(x))\, dx.$$

Cela contredit (4.9). Par conséquent nous avons

$$m(x)\underline{g}(u(x)) \leq \zeta(x), \ \text{p.p. } x \in \Omega.$$

De même, on a $\zeta(x) \leq m(x)\overline{g}(u(x)),$ p.p. $x \in \Omega$. *Alors, si* $\zeta(x) \in \partial J(u)$, *on a*

$$\zeta(x) \in \left[m(x)\underline{g}(u(x)), m(x)\overline{g}(u(x))\right] \ \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Alors, Ψ *est localement lipschitzien* W_0 *et si* $\zeta \in \partial J(u)$, *Alors* $\zeta(x) \in m(x)\partial g(u(x))$.

► *Ensuite, nous prouvons que $\Phi \in C^1(W_0, \mathbb{R})$.*

En effet, on montre que sa dérivée Φ' existe par Définition 1.2.1, on calcule

$$\begin{aligned}\langle \Phi'(u), v\rangle &= \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t}\\ &= \frac{1}{p}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u+tv)(x)-(u+tv)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy\right\}.\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{array}{rcccl} Q & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & y & \longmapsto & Q(y) = \dfrac{|(u(x)+ytv(x))-(u(y)+ytv(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}} \end{array}$$

Q est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. Ainsi, en utilisant le Théorème des accroissements finis, $\exists \theta \in (0.1)$ tel que

$$Q'(\theta) = \frac{Q(1)-Q(0)}{1-0},$$

Donc, d'après Lemme 1.2.1 on a

$$\begin{aligned} &pt(v(x)-v(y))\frac{|(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))}{|x-y|^{N+sp}}\\ &\qquad = \frac{|(u(x)+tv(x))-(u(y)+tv(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}} - \frac{|(u(x)+u(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}}\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{pt}\left(\frac{|(u(x)+tv(x))-(u(y)+tv(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}} - \frac{|(u(x)+u(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}}\right)\\ &= \frac{|(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v(x)-v(y)). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Par (4.10), on obtient

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))-(u(y)+\theta tv(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v(x)-v(y))\,dxdy.$$

Ensuite, on applique le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v(x)-v(y))\,dxdy.$$

De plus, pour $u, v \in W_0$ on montre que Φ' est continue, nous constatons que

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \langle A(u), v\rangle.$$

et d'après Proposition 1.5.1 on a

$$\langle \Phi'(u), v\rangle \leq \|u\|_{W_0}^{p-1}\|v\|_{W_0}.$$

On en déduit que $\Phi' \in W_0^*$ et $\Phi \in C^1(W_0, \mathbb{R})$. Ce qui conclut la preuve. $\square$

Définition 4.2.2. *Une solution faible du problème (4.6) est une fonction $u \in W_0$ telle que*

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \langle \partial J(u), v\rangle, \quad \forall u, v \in W_0,$$

i.e.

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \zeta(x)v(x)\,dx, \quad v \in W_0$$

où

$$\zeta(x) \in \bigcup_{i=1}^{n} [(i-1)m(x),\ im(x)] \quad \textit{a.e.} \quad x \in \Omega.$$

4.3 Résultats principaux

Dans cette section, nous établissons le résultat principal de ce chapitre. Avant d'énoncer le résultat, nous introduisons les hypothèses importantes suivantes :

(H1) La fonction $m \in L^\infty(\Omega)$ et change de signe en Ω.

(H2) L'ensemble $\Omega^+ = \{x \in \Omega \ :\ m(x) > 0\}$ est un domaine de classe C^1 tel que $\Omega^+ \subset\subset \Omega$.

(H3) Pour $p' = \frac{p}{p-1}$, $p > 1$

$$\frac{\overline{\lambda}_1^{\,-(\frac{1}{1-p})}}{\mu_n} > p' \, \|m^+\|_{L^\infty(\Omega^+)} |\Omega^+| \left[\frac{\|\varphi_1\|_{L^p(\Omega^+)}}{\int_{\Omega^+} m(x)\varphi_1(x)\,dx}\right]^{\frac{p}{p-1}},$$

où $m^+(x) = \max\{m(x), 0\}$, $|\cdot|$ est la mesure de Lebesgue et φ_1 est la première fonction propre du problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s \varphi_1 = \overline{\lambda}_1 |\varphi_1|^{p-2}\varphi_1 & \text{dans } \Omega^+ \\ \varphi_1 = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega^+. \end{cases} \tag{4.11}$$

Remarque 4.3.1. *On sait que, si u est un point critique de E, alors u résout le problème (4.6) dans le sens suivant*

$$(-\Delta)_p^s u(x) \in \bigcup_{i=1}^{n} [(i-1)m(x), im(x)] \quad \textit{p.p dans} \quad \Omega.$$

Les points critiques de E résolvent le problème aux limites dans un sens multivalué, si les frontières libres $\Gamma_i = \{x \in \Omega \ :\ u(x) = \mu_i\}$ ont une mesure nulle. Ainsi, il est possible d'obtenir que les points critiques seront solutions presque partout dans Ω.

L'énoncé de notre théorème principal est le suivant

Théorème 4.3.1. *Supposons que l'hypothèse **(H1)**, **(H2)** et **(H3)** sont vérifiée, alors pour $s \in (0,1)$ et $p \in (1,\infty)$, le problème multivalué associé à (4.6)*

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u(x) \in m(x)\widehat{g}(u(x)) & \textit{p.p.} \ x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{4.12}$$

admet au moins $2n$ solutions non nulles distinctes dans W_0 où $\widehat{g}$ est la fonction multivaluée obtenue en remplissant les sauts à $u = \mu_1, \cdots, u = \mu_n$ et défini par

$$\widehat{g}(s) = \begin{cases} \{g(s)\} & \textit{si} \ \ s \neq \mu_i \\ [(i-1),\ i] & \textit{si} \ \ s = \mu_i \end{cases} \quad \forall i = \overline{1, n},$$

Comme mentionné précédemment, si les frontières libres $\Gamma_i = \{x \in \Omega \ :\ u(x) = \mu_i\}$ ont une mesure $|\Gamma_i| = 0$, alors les solutions de (4.12) sont les solutions du problème (4.5).

L'idée principale de la preuve du théorème 4.3.1 est l'application de la théorie irréguliers des points critiques combinée à l'estimation appropriée concernant le $p-$Laplacien fractionnaire.

Remarque 4.3.2. *D'après Lemme 4.2.1 et 4.2.2, on a conclut que E est localement lipschitzienne et son gradient généraliser est donner par*

$$\partial E(u) = A(u) - \partial J(u).$$

Alors, par Définition 1.2.15 u est un point critique de E (i.e. $0 \in \partial E(u)$), si et seulement s'il existe

$$\zeta \in \partial J(u) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left[(i-1)m(x),\ im(x)\right],$$

tel que $Au(x) = \zeta(x) \in m(x)\widehat{g}(u(x))$ p.p. dans Ω.

Pour assurer l'existence de points critiques de la fonctionnelle E. nous devons prouver que E vérifie les hypothèses du Théorème 1.3.1 et du Théorème 1.3.2.

Par conséquent, on repartie la preuve du théorème 4.3.1 en une suite de propositions

Proposition 4.3.1. *Supposons que **(H1)** est vérifie. Alors il existe un minimum global $u \neq 0$.*

La preuve de la proposition 4.3.1 consistera à prouver que E est borné inférieurement et vérifie la condition de Palais-Smale.

On a d'abord le lemme suivant

Lemme 4.3.1. *Soient $N > ps$, $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ et les hypothèses **(H1)** vérifiées. Alors, la fonctionnelle localement Lipschitzienne E est bornée inférieurement.*

Preuve. *On a pour $u \in W_0$,*

$$E(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \int_\Omega m(x)G(u(x))\,dx.$$

On remarque que

$$G(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{n} H(s-\mu_i)\,ds \leq n\int_0^t\,ds.$$

Donc,

$$G(t) \leq nt. \tag{4.13}$$

*Ainsi, en utilisant l'hypothèse **(H1)** et l'estimation (4.13), on a*

$$E(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p - n\|m\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega u(x)\,dx.$$

Comme $W_0 \hookrightarrow L^p(\Omega)$, for all $p \in [1,p^*)$, On aura

$$\begin{aligned} E(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p - n\|m\|_{L^\infty(\Omega)}C_1\|u\|_{W_0} \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p - \widetilde{C}_1\|u\|_{W_0}, \end{aligned}$$

où $\widetilde{C}_1$ est une constante donnée.

Alors, la fonctionnelle E est bornée inférieurement et coercive. □

Ensuite, on vérifie la validité de la condition de Palais-Smale à travers le Lemme suivant

Lemme 4.3.2. *Soient $N > ps$, $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ et les hypothèses **(H1)** vérifiées. Alors la fonctionnelle E vérifie la condition de Palais-Smale, si $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite dans W_0 telle que*

$$E(u_j) \ \text{ est bornée.} \tag{4.14}$$

et

$$\lambda(u_j) := \min_{w\in\partial E(u_j)} \|w\|_{W_0^*} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.15}$$

Alors, il existe $u \in W_0$ tel que, jusqu'à une sous-suite, $\|u_j - u\|_{W_0} \to 0$ as $j \to +\infty$.

Preuve. *Pour vérifier que E satisfait la condition de Palais-Smale, il suffit de montrer que toute suite de Palais-Smale est bornée dans W_0 et admet une sous-suite convergente. Nous procédons par étapes.*

Étape 1. *La séquence $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans W_0.*
D'après l'hypothèse (4.15), il existe $w \in \partial E(u_j) = A(u_j) - \partial J(u_j)$, tel que

$$\lambda(u_j) = \|w\|_{W_0^*} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, il existe $v_j \in \partial J(u_j) \subset \bigcup_{i=1}^{n} [(i-1)m(x),\ im(x)]$, tel que

$$\lambda(u_j) = \|Au_j - v_j\|_{W_0^*} = |\langle Au_j - v_j, \varphi\rangle| \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall\varphi \in W_0.$$

En particulier, pour $\varphi = u_j \in W_0$, on a

$$|\langle Au_j - v_j, u_j\rangle| \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

i.e. $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall j \in \mathbb{N}$ et $\forall j \geq N_\varepsilon$, on obtient que

$$|\langle Au_j - v_j, u_j\rangle| = \left| -\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_j(x) - u_j(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy + \int_\Omega v_j(x)u_j(x)\,dx \right| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_j(x) - u_j(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy + \int_\Omega v_j(x)u_j(x)\,dx \leq \varepsilon. \tag{4.16}$$

De plus, par hypothèse (4.14) on a une constante $M > 0$ telle que

$$\left| \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_j(x) - u_j(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \int_\Omega m(x)G(u_j(x))\,dx \right| \leq M.$$

Ainsi, pour $k > 0$, on a

$$\frac{k}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_j(x) - u_j(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \int_\Omega km(x)G(u_j(x))\,dx \leq kM. \tag{4.17}$$

En ajoutant (4.16) et (4.17), on obtient

$$\left(\frac{k-1}{p}\right)\|u_j\|^p_{W_0}+\int_\Omega\left[v_j(x)u_j(x)-km(x)G(u_j(x))\right]\,dx\leq kM+\varepsilon.$$

D'autre part, nous avons

$$G(t)=\int_0^t\sum_{i=1}^n H(s-\mu_i)\,ds=\int_0^{\mu_1}\sum_{i=1}^n H(s-\mu_i)\,ds+\int_{\mu_1}^{\mu_2}\sum_{i=1}^n H(s-\mu_i)\,ds$$
$$+\ldots+\int_{\mu_n}^t\sum_{i=1}^n H(s-\mu_i)\,ds\geq n(t-\mu_i)\geq(t-\mu_n). \tag{4.18}$$

Maintenant, en utilisant l'estimation (4.18), nous obtenons

$$\left(\frac{k-1}{p}\right)\|u_j\|^p_{W_0}+\int_\Omega\left[v_j(x)u_j(x)-km(x)(u_j(x)-\mu_n)\right]\,dx\leq kM+\varepsilon.$$

Puisque $k>1$, $0\leq v_j(x)\leq nm(x)$ et m vérifie ***(H1)****, on obtient*

$$\left(\frac{k-1}{p}\right)\|u_j\|^p_{W_0}+\int_\Omega\left[(n-k)\,\|m\|_{L^\infty(\Omega)}u_j(x)+k\|m\|_{L^\infty(\Omega)}\mu_n\right]\,dx\leq kM+\varepsilon.$$

Alors,

$$\left(\frac{k-1}{p}\right)\|u_j\|^p_{W_0}\leq kM+\varepsilon-k\|m\|_{L^\infty(\Omega)}\mu_n|\Omega|+(k-n)\,\|m\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega u_j(x)\,dx$$
$$\leq C_1+C_2\int_\Omega u_j(x)\,dx,$$

où $C_1:=kM+\varepsilon-k\|m\|_{L^\infty(\Omega)}\mu_n|\Omega|$ et $C_2:=(k-n)\,\|m\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Puisque, $W_0\hookrightarrow L^p(\Omega)$, pour tout $p\in[1,p^*)$, on aura

$$\left(\frac{k-1}{p}\right)\|u_j\|^p_{W_0}\leq C_1+\widetilde{C}_2\|u_j\|_{W_0},$$

où $\widetilde{C}_2$ est une constante donnée.

Par conséquent, nous concluons que la suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans W_0.

Étape 2. *la suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente.*
Puisque $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est borné dans W_0 et W_0 est un espace réflexif. Alors, jusqu'à une sous-suite notée de même u_j, il existe une $u\in W_0$, tel que

$$\begin{aligned}&u_j\longrightarrow u\quad\textit{faiblement dans}\;\; W_0,\\&u_j\longrightarrow u\quad\textit{fortement dans}\;\; L^p(\Omega),\\&\textit{By } \textbf{(H1)},\; m\;\textit{ est borné dans }\; L^p(\Omega).\end{aligned} \tag{4.19}$$

De plus, on observe que

$$\partial E(u_j)=Au_j-\partial J(u_j),$$

où, $\partial J(u_j)\subset\bigcup_{i=1}^n\left[(i-1)m(x),\;im(x)\right]$.

L'hypothèse (4.15) implique qu'il existe une suite $\rho_j \in \partial J(u_j)$, telle que

$$\langle Au_j - \rho_j, \varphi \rangle \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0.$$

Par (4.19), (ρ_j) est borné dans $L^p(\Omega)$, en utilisant le fait que $W_0 \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compact, on a

$$\rho_j \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} \rho \in W_0^* \quad (\textit{fortement}).$$

Donc,

$$\langle Au_j - \rho, \varphi \rangle \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0.$$

Puisque A est un opérateur monotone et continu, on déduit que $\rho = Au$ et

$$\langle Au_j - Au, u \rangle \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall \varphi = u \in W_0.$$

Ainsi,

$$\langle Au_j, u_j \rangle = \frac{1}{p} \|u_j\|_{W_0}^p \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} \langle Au, u \rangle = \frac{1}{p} \|u\|_{W_0}^p$$

de sorte que

$$\|u_j\|_{W_0}^p \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} \|u\|_{W_0}^p.$$

Alors,

$$\|u_j - u\|_{W_0}^p \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} = 0.$$

Par conséquent, on obtient que u_j converge vers u dans W_0. □

Remarque 4.3.3. *Remarquons qu'à partir du lemme 4.3.1, la fonctionnelle E est bornée inférieurement et coercive, alors on peut conclure immédiatement que la suite (u_j) est bornée dans W_0. D'où l'étape 1 de la preuve du lemme 4.3.2 concerne le cas où E non borné inférieurement.*

Preuve de Proposition 4.3.1.
D'après le lemme 4.3.1 et le lemme 4.3.2 , on confirme que la fonctionnelle E satisfait les conditions du théorème 1.3.2, ce qui nous amène à conclure que E a un minimum $u \neq 0$ dans W_0. □

Pour montrer l'existence d'un second point critique, nous utilisons le théorème du cols irrégulier. on a

Proposition 4.3.2. *Supposons que **(H1)**, **(H2)** et **(H3)** vérifiée. Alors, il existe un point critique du col $v \neq 0$.*

Pour prouver la proposition 4.3.2, nous devons vérifier que la fonctionnelle E a une structure géométrique comme indiqué dans le théorème du col 1.3.1. Nous commençons par vérifier ces caractéristiques géométriques à travers ces Lemmes :

Lemme 4.3.3. *Soient $N > ps$, $s \in (0,1)$, $p \in (1, \infty)$ et l'hypothèse **(H1)** vérifiée. Alors, il existe $\rho, a > 0$ tel que pour tout $u \in W_0$ avec $\|u\|_{W_0} = \rho$, on a $E(u) \geqslant a$.*

Preuve. *Comme dans la preuve précédente, en utilisant l'estimation (4.13), l'hypothèse* ***(H1)*** *et le fait que $W_0 \hookrightarrow L^p(\Omega)$, pour tout p $dans [1, p^*)$, on obtient ce qui suit*

$$E(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p - \widetilde{C}_1\|u\|_{W_0},$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p \left(1 - \widetilde{C}_1 p\|u\|_{W_0}^{1-p}\right) \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p \left(1 - k_1\|u\|_{W_0}^{1-p}\right), \end{aligned}$$

où $k_1 = \widetilde{C}_1 p$.

Soit $u \in W_0$ avec $\|u\|_{W_0} = \rho$. On voit qu'il existe ρ qui vérifie $\rho^{p-1} > k_1$. Alors, il existe $a > 0$ tel que

$$E(u) \geq \frac{1}{p}\rho^p \left(1 - k_1\rho^{1-p}\right) := a.$$

□

Lemme 4.3.4. *Supposons que les hypothèses* ***(H1)***, ***(H2)*** *et* ***(H3)*** *vérifiée. Alors, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\widehat{\varphi}_1 \in W_0$ tels que $E(t_0\widehat{\varphi}_1) < 0$.*

Preuve. *Rappelons que φ_1 est la première fonction propre du problème de Dirichlet suivant*

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s \varphi_1 = \overline{\lambda}_1 |\varphi_1|^{p-2}\varphi_1 & \text{dans } \Omega^+ \\ \varphi_1 = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega^+, \end{cases} \tag{4.20}$$

où l'on note $\overline{\lambda}_1 = \lambda_1 m^+(x)$ et λ_1 la valeur propre principale de $(-\Delta)_p^s$.

Donc, on pose $\widehat{\varphi}_1$ l'extension nulle de φ_1 sur Ω^+. Grâce à (4.18), on obtient pour $t > 0$

$$G(t_0\widehat{\varphi}_1) \geq t_0\widehat{\varphi}_1 - \mu_n.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} E(t_0\widehat{\varphi}_1) &= \frac{t_0^p}{p}\|\widehat{\varphi}_1\|_{W_0}^p - \int_\Omega m(x)G(t_0\widehat{\varphi}_1(x))\,dx \\ &\leq \frac{t_0^p\overline{\lambda}_1}{p}\int_{\Omega^+}\varphi_1^p(x)dx - \int_{\Omega^+} m(x)(t_0\varphi_1(x) - \mu_n)\,dx \\ &\leq \frac{t_0^p\overline{\lambda}_1}{p}\int_{\Omega^+}\varphi_1^p(x)dx - t_0\int_{\Omega^+} m(x)\varphi_1(x)dx + \mu_n\|m^+\|_{L^\infty(\Omega^+)}|\Omega^+|. \end{aligned}$$

Prenant

$$t_0 = \left(\frac{\int_{\Omega^+} m(x)\varphi_1(x)\,dx}{\overline{\lambda}_1\int_{\Omega^+}\varphi_1^p(x)dx}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad \forall p > 1.$$

On aura

$$
\begin{aligned}
E(t_0\widehat{\varphi}_1) &\leq \frac{\left(\int_{\Omega^+} m(x)\varphi_1(x)\,dx\right)^{\frac{p}{p-1}}}{p\left(\overline{\lambda}_1 \int_{\Omega^+} \varphi_1^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p-1}}} - \frac{p\left(\int_{\Omega^+} m(x)\varphi_1(x)\,dx\right)^{\frac{p}{p-1}}}{p\left(\overline{\lambda}_1 \int_{\Omega^+} \varphi_1^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p-1}}} + \|m^+\|_{L^\infty(\Omega^+)}\mu_n|\Omega^+| \\
&\leq \left(\frac{1-p}{p}\right)\frac{\left(\int_{\Omega^+} m(x)\varphi_1(x)\,dx\right)^{\frac{p}{p-1}}}{\left(\overline{\lambda}_1 \int_{\Omega^+} \varphi_1^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p-1}}} + \|m^+\|_{L^\infty(\Omega^+)}\mu_n|\Omega^+| \\
&\leq -\left(\frac{p-1}{p}\right)\frac{\left(\int_{\Omega^+} m(x)\varphi_1(x)\,dx\right)^{\frac{p}{p-1}}}{\left(\overline{\lambda}_1 \int_{\Omega^+} \varphi_1^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p-1}}} + \|m^+\|_{L^\infty(\Omega^+)}\mu_n|\Omega^+|.
\end{aligned}
$$

En prenant $p' = \left(\frac{p}{p-1}\right)$ *on obtient*

$$
E(t_0\widehat{\varphi}_1) \leq -\frac{1}{p'}\frac{\left(\int_{\Omega^+} m(x)\varphi_1(x)\,dx\right)^{\frac{p}{p-1}}}{\left(\overline{\lambda}_1 \int_{\Omega^+} \varphi_1^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p-1}}} + \mu_n\|m^+\|_{L^\infty(\Omega^+)}|\Omega^+|.
$$

Donc, par l'hypothèse ***(H3)****, on a*

$$
E(t_0\widehat{\varphi}_1) \leq -\frac{1}{p'}\left[\frac{\int_{\Omega^+} m(x)\varphi_1(x)\,dx}{\overline{\lambda}_1^{\frac{1}{p}}\ \|\varphi_1\|_{L^p(\Omega^+)}}\right]^{\frac{p}{p-1}} + \mu_n\|m^+\|_{L^\infty(\Omega^+)}|\Omega^+| < 0.
$$

□

Preuve de Proposition 4.3.2.
En tenant compte du fait que le Lemme 4.3.1, le Lemme 4.3.3 et le Lemme 4.3.4 sont vrais. Par conséquent, nous pouvons appliquer le théorème du Col (voir Théorème 1.3.1), et nous confirmons l'existence d'un autre point critique $v \neq 0$ de la fonctionnelle E. □

Preuve de Théorèm 4.3.1.
En combinant la proposition 4.3.1 et la proposition 4.3.2, nous concluons l'existence de deux solutions à savoir u et v. Pour chaque solution, il existe n frontières libres correspondantes. Ceci conduit à conclure qu'il existe $2n$ solutions.
La condition fondamentale $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$ garantit que notre non-linéarité est non décroissante et donc l'équation $u(x) = \mu_i$ est vérifiée. Évidemment, pour $i = 1, \ldots, n$, on suppose au moins l'existence d'unique x_i vérifiant $u(x_i) = \mu_i$ $(v(x_i) = \mu_i)$. □

Chapitre 5

Problème elliptique singulier impliquant le p-Laplacien fractionnaire avec une nonlinéarité discontinue

Ce chapitre est le développement de l'article [2].

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, notre objectif principal est d'obtenir de nouveaux résultats d'existence pour le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \beta \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{sp}} + \lambda f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

où Ω est un domaine régulier borné dans $\mathbb{R}^N(N \geq 2)$ contenant l'origine, $p > 1$, $s \in (0,1)$, $(N > ps)$, $0 \leq \beta < 1/c_H$ où c_H est la constante de l'inégalité (1.15) de Hardy fractionnaire, $\lambda > 0$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction nonlinéaire discontinue par rapport à u. En particulier, f est donné par

$$f(u) = H(u - \mu),$$

où $\mu > 0$ et H est la fonction de Héaviside, i.e.

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Remarquez que le problème (5.1) peut être formulé par le problème de frontière libre suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \beta \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{sp}} + \lambda & \text{dans } \{u > \mu\} \\ (-\Delta)_p^s u = \beta \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{sp}} & \text{sur } \{u \leq \mu\} \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{5.3}$$

On s'intéresse à trouver (u, Ω_μ) tel que le problème (5.3) soit vérifié où

$$\Omega_\mu = \{x \in \Omega \ : \ u(x) > \mu\}$$

et $\partial\Omega_\mu \coloneqq \Gamma$ est la frontière libre à déterminer.

En utilisant l'approche variationnelle, nous définissons la fonctionnelle d'énergie associée pour le problème (5.1) par

$$E_\lambda(u) \coloneqq \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}}\, dxdy - \beta \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx\right) - \lambda \int_\Omega F(u(x))\, dx,$$

où $F \ : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est $F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$ et $f(t) = H(t - \mu)$. Notez que E n'est pas de classe C^1 en raison de la présence de discontinuité, alors les méthodes classiques ne peuvent pas être appliquées.

Dans ce travail, nous utilisons une technique d'approximation pour résoudre ce problème. A notre connaissance, c'est la première fois dans la littérature que le problème (5.1) est considéré lorsque f est une nonlinéarité discontinue (ainsi que dans le cas où $s = 1$) et lorsque la méthode d'approximation est utilisée pour donner un résultat d'existence. Plus précisément, on considère le problème d'approximation suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u_{\lambda,\varepsilon} - \beta \dfrac{|u_{\lambda,\varepsilon}|^{p-2}u_{\lambda,\varepsilon}}{|x|^{sp}} = \lambda H_\varepsilon(u_{\lambda,\varepsilon}) & \text{dans } \Omega \\ u_{\lambda,\varepsilon} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{5.4}$$

où $H_\varepsilon(u_{\lambda,\varepsilon})$ est une approximation régulière de la fonction de Héaviside H (voir la construction de H_ε ci-dessous).

Dans un premier temps, nous donnons l'existence de la solution $u_{\lambda,\varepsilon}$ du problème (5.4) en utilisant le principe variationnel de Ricceri (voir [60]). Deuxièmement, nous prouvons que $u_{\lambda,\varepsilon}$ converge vers u_λ, solution du problème (5.1) quand $\varepsilon \to 0$ dans l'espace approprié.

Remarquons que, lorsque $s = 1$, le problème (5.1) devient

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \beta \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} + \lambda H(u-\mu) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.5}$$

Nous conjecturons que dans le cas local $(s = 1)$, le même résultat de notre article est vrai.

Dans ce chapitre, nous procédons comme suit. Dans la section 5.2, nous énonçons et démontrons nos principaux résultats en utilisant les même propositions préliminaire présentées chapitre 1.5.

5.2 Résultat principal

Considérant la structure du problème variationnel (5.1), on rappelle la définition de sa fonctionnelle énergétique correspondante

Définition 5.2.1. *La fonctionnelle d'Euler-Lagrange $E_\lambda : W_0 \to \mathbb{R}$ associée au problème (5.1) est définie par*

$$E_\lambda(u) := \Phi(u) - \lambda\Psi(u), \quad \forall u \in W_0,$$

où

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \beta\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx\right) \tag{5.6}$$

et

$$\Psi(u) := \int_\Omega F(u(x))\,dx, \tag{5.7}$$

où $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ et $f(s) = H(s-\mu)$.

Lemme 5.2.1. *Pour tous $u \in W_0$, la fonction Φ est bien définie et coercive, telle que*

$$\left(\frac{1-\beta c_H}{p}\right)\|u\|_{W_0}^p \le \Phi(u) \le \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p.$$

Preuve. *Selon l'inégalité de Hardy fractionnaire (1.16), on a*

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \frac{\beta}{p}\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx \\ &\ge \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p + \frac{\beta c_H}{p}\|u\|_{W_0}^p \\ &\ge \left(\frac{1-\beta c_H}{p}\right)\|u\|_{W_0}^p \end{aligned} \tag{5.8}$$

De même,

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p - \frac{\beta}{p}\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx \leq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p$$

Il s'ensuit que,

$$\left(\frac{1-c_H}{p}\right)\|u\|_{W_0}^p \leq \Phi(u) \leq \frac{1}{p}\|u\|_{W_0}^p.$$

Ainsi, $\Phi(u)$ *est bien défini et coercive dans* W_0. □

Définition 5.2.2. *Une solution faible du problème (5.1) est une fonction* $u \in W_0$ *telle que*

$$\langle \Phi^{'}(u), v\rangle = \langle \partial\Psi(u), v\rangle, \quad \forall u, v \in W_0,$$

i.e.

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \zeta(x)v(x)\,dx, \quad v \in W_0$$

où

$$\zeta(x) \in [0,\ 1] \quad \textit{p.p.} \quad x \in \Omega.$$

Remarque 5.2.1. *On sait que, si* u *est un point critique de* E*, alors* u *résout le problème (5.1) dans le sens suivant ; on considère son problème multivalué*

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u(x) \in \lambda \widehat{f}(u(x)) & \textit{p.p.} \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{5.9}$$

où $\widehat{f}$ *est la fonction multivaluée défini par*

$$\widehat{f}(s) = \begin{cases} \{f(s)\} & \textit{si} \quad s \neq \mu \\ [0,\ 1] & \textit{si} \quad s = \mu, \end{cases}$$

Les points critiques de E *résolvent le problème aux limites dans un sens multivalué (5.9), si les frontières libres* $\Gamma_i = \{x \in \Omega \ : \ u(x) = \mu_i\}$ *ont une mesure nulle. Ainsi, il est possible d'obtenir que les points critiques seront solutions presque partout dans* Ω.

Notre objectif principal est de montrer l'existence de solutions du problème (5.1) par une procédure d'approximation. Pour cela, on considère que $u_{\lambda,\varepsilon}$ est la solution de

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u_{\lambda,\varepsilon} - \beta\dfrac{|u_{\lambda,\varepsilon}|^{p-2}u_{\lambda,\varepsilon}}{|x|^{sp}} = \lambda H_\varepsilon(u_{\lambda,\varepsilon}) & \text{in} \quad \Omega \\ u_{\lambda,\varepsilon} = 0 & \text{on} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{5.10}$$

où H_ε est donné par

$$H_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t > \mu + \varepsilon, \\ \frac{t-\mu}{\varepsilon-\mu} & \text{si} \quad \mu \leq t \leq \mu + \varepsilon, \\ 0 & \text{si} \quad t < \mu. \end{cases} \tag{5.11}$$

La fonction H_ε est une approximation continue et régulière de la fonction de Héaviside H. En effet, on peut facilement obtenir que $H_\varepsilon(u) \to h(u)$ quand $\varepsilon \to 0$ avec $h(u) = 0$ si $u < \mu$, $h(u) = 1$ si $u > \mu$ et $0 \leq h(u) \leq 1$ dans $\Gamma = \{x \in \Omega \ : \ u(x) = \mu\}$. Si $|\Gamma| = 0$, alors $u = \mu$ p.p. dans Γ. Par conséquent, $h(u) = H(u - \mu)$.

Maintenant, on peut présenter la fonctionnelle énergétique associée au problème approximé (5.10) ainsi que ses propriétés importantes

Définition 5.2.3. *La fonctionnelle d'Euler-Lagrange $E_{\lambda,\varepsilon} : W_0 \to \mathbb{R}$ associée au problème (5.10) est définie par*

$$E_{\lambda,\varepsilon}(u_{\lambda,\varepsilon}) := \Phi(u_{\lambda,\varepsilon}) - \lambda\Psi(u_{\lambda,\varepsilon}), \quad \forall u_{\lambda,\varepsilon} \in W_0,$$

où

$$\Phi(u_{\lambda,\varepsilon}) := \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_{\lambda,\varepsilon}(x) - u_{\lambda,\varepsilon}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy - \beta\int_\Omega \frac{|u_{\lambda,\varepsilon}(x)|^p}{|x|^{sp}}\, dx\right) \tag{5.12}$$

et

$$\Psi(u_{\lambda,\varepsilon}) := \int_\Omega F_\varepsilon(u_{\lambda,\varepsilon}(x))\, dx, \tag{5.13}$$

où $F_\varepsilon : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est $F_\varepsilon(t) = \int_0^t H_\varepsilon(s)\, ds$.

Définition 5.2.4. *Pour $\lambda > 0$, la fonction $u_{\lambda,\varepsilon}$ est dite solution faible du problème (5.10), si $\{u_{\lambda,\varepsilon}\}_{\varepsilon>0} \subset W_0$ et*

$$\langle \Phi'(u_{\lambda,\varepsilon}), v_\varepsilon\rangle = \langle A(u_{\lambda,\varepsilon}), v_\varepsilon\rangle = \lambda\langle \Psi'(u_{\lambda,\varepsilon}), v_\varepsilon\rangle, \quad v_\varepsilon \in W_0$$

où

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_{\lambda,\varepsilon}(x) - u_{\lambda,\varepsilon}(y)|^{p-2}(u_{\lambda,\varepsilon}(x) - u_{\lambda,\varepsilon}(y))}{|x-y|^{N+sp}}(v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y))\, dxdy$$
$$-\beta\int_\Omega \frac{|u_{\lambda,\varepsilon}(x)|^{p-2}}{|x|^{sp}} u_{\lambda,\varepsilon}(x)v_\varepsilon(x)\, dx = \lambda\int_\Omega H_\varepsilon(u_{\lambda,\varepsilon}(x))v_\varepsilon(x)\, dx,$$

pour chaque $v_\varepsilon \in W_0$. Donc, les points critiques de $E_{\lambda,\varepsilon}$ sont exactement les solutions faibles du problème (5.10).

Dans cette section, nous établissons le résultat principal de ce travail qui est la proposition suivante

Proposition 5.2.1. *Pour les constantes positives β, c_0, c_1 et c_H, il existe un nombre positif Λ donné par*

$$\Lambda := \sup_{\{\rho>0\}}\left\{\frac{\rho^p}{c_1\left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}}\rho + c_0|\Omega|}\right\},$$

tel que, pour tout $\lambda \in]0,\Lambda[$, le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u_{\lambda,\varepsilon} = \beta\dfrac{|u_{\lambda,\varepsilon}|^{p-2}u_{\lambda,\varepsilon}}{|x|^{sp}} + \lambda H_\varepsilon(u_{\lambda,\varepsilon}) & \textit{in } \Omega \\ u_{\lambda,\varepsilon} = 0 & \textit{on } \mathbb{R}^N\setminus\Omega, \end{cases}$$

admet au moins une solution faible non triviale $u_{\lambda,\varepsilon} \in W_0$. Ainsi,

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\|u_{\lambda,\varepsilon}\|_{W_0} = 0$$

et la fonction $g(\lambda) := E_{\lambda,\varepsilon}(u_{\lambda,\varepsilon})$ est négative et strictement décroissante dans $]0,\Lambda[$.

Pour parvenir à la preuve de ce résultat, nous devons démontrer les lemmes suivants :

Lemme 5.2.2. *Soient $s \in (0,1)$, $N > ps$ et $\beta \in [0, H_{sp}]$. Alors, la fonctionnelle Φ est coercive et faiblement semicontinue inférieureurement sur W_0, i.e :*

$$\Phi(u_{\lambda,\varepsilon}) \le \liminf_{n\to+\infty}\Phi(u^n_{\lambda,\varepsilon}) \textit{ si } u^n_{\lambda,\varepsilon} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_{\lambda,\varepsilon} \textit{ faiblement dans } W_0.$$

Preuve. *En utilisant l'inégalité de Hardy fractionnaire (1.15), on obtient que pour tout* $u_{\lambda,\varepsilon} \in W_0$,

$$\begin{aligned}\Phi(u_{\lambda,\varepsilon}) &= \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_{\lambda,\varepsilon}(x)-u_{\lambda,\varepsilon}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \beta\int_\Omega \frac{|u_{\lambda,\varepsilon}(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx\right)\\ &\geq \left(\frac{1-\beta c_H}{p}\right)\|u_{\lambda,\varepsilon}\|^p_{W_0}.\end{aligned}$$

Puisque $\beta c_H < 1$, *nous concluons que*

$$\Phi(u_{\lambda,\varepsilon}) \longrightarrow +\infty, \text{ as } \|u_{\lambda,\varepsilon}\|^p_{W_0} \longrightarrow +\infty,$$

which means that $\Phi(u_{\lambda,\varepsilon})$ *is coercive on* W_0.

Maintenant, par le Théorème 1.4.4 nous savons que $\mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ *est un sous-ensemble dense de* W_0. *Ainsi, en utilisant des arguments de densité, pour prouver que* Φ *est faiblement semicontinue inférieurement sur* W_0, *il suffit de montrer que la fonctionnelle*

$$\Phi \text{ est faiblement semicontinue inférieurement sur } \mathbb{C}_c^\infty(\Omega). \tag{5.14}$$

Donc, soit $\{u^n_{\lambda,\varepsilon}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ *tel que*

$$u^n_{\lambda,\varepsilon} \longrightarrow u_{\lambda,\varepsilon} \quad \text{faiblement dans } \ W_0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{5.15}$$

Ainsi, on appliquant le Théorème 1.4.9 pour $\alpha = sp$ *et* $p_s^*(sp) = p \leq p_s^*(0) = p_s^*$, *donc il existe deux mesures positives finies* μ *et* ν *dans* $\mathbb{R}^N$, *et deux nombres positifs* μ_0, ν_0 *tel que la convergence suivante soit faible au sens des mesures,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u^n_{\lambda,\varepsilon}(x)-u^n_{\lambda,\varepsilon}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dydx \rightharpoonup \mu \geq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_{\lambda,\varepsilon}(x)-u_{\lambda,\varepsilon}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dydx + \mu_0\delta_0, \tag{5.16}$$

$$\frac{|u^n_{\lambda,\varepsilon}(x)|^p}{|x|^{sp}}dx \rightharpoonup \nu = \frac{|u_{\lambda,\varepsilon}(x)|^p}{|x|^{sp}}dx + \nu_0\delta_0, \tag{5.17}$$

et selon la Définition 1.4.4, on sait que la meilleure constante de l'inégalité de Hardy fractionnaire H_{sp} *est donnée par (1.17), tel que*

$$0 \leq \nu_0 \leq c_H\mu_0, \tag{5.18}$$

où c_H *est la constante de l'inégalité de Hardy fractionnaire (1.15) et* δ_0 *désigne la masse de Dirac au point* 0.

De la continuité de l'injection $W_0 \hookrightarrow L^p(\Omega)$, *pour tout* $p \in [1, p^*]$, *on a que*

$$u^n_{\lambda,\varepsilon} \longrightarrow u_{\lambda,\varepsilon} \quad \text{fortement dans } \ L^p(\Omega), \text{ as } n \to +\infty. \tag{5.19}$$

Par (5.16)–(5.18) et (5.19) on obtient

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty}\Phi(u^n_{\lambda,\varepsilon}) &= \liminf_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u^n_{\lambda,\varepsilon}(x)-u^n_{\lambda,\varepsilon}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \frac{\beta}{p}\int_\Omega \frac{|u^n_{\lambda,\varepsilon}(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx\right]\\ &\geq \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_{\lambda,\varepsilon}(x)-u_{\lambda,\varepsilon}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy + \mu_0\right) - \frac{\beta}{p}\left(\int_\Omega \frac{|u_{\lambda,\varepsilon}(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx + \nu_0\right)\\ &= \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_{\lambda,\varepsilon}(x)-u_{\lambda,\varepsilon}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \beta\int_\Omega \frac{|u_{\lambda,\varepsilon}(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx\right) + \frac{1}{p}\mu_0 - \frac{\beta}{p}\nu_0\\ &\geq \Phi(u_{\lambda,\varepsilon}) + \frac{\mu_0}{p} - \frac{\beta c_H\mu_0}{p}\\ &= \Phi(u_{\lambda,\varepsilon}) + (1-\beta c_H)\,\frac{\mu_0}{p}\\ &\geq \Phi(u_{\lambda,\varepsilon}).\end{aligned}$$

Pourvu que $\beta < 1/c_H$, on déduit l'affirmation énoncé dans (5.14).

Ainsi, soit $\{u^n_{\lambda,\varepsilon}\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans W_0 satisfaisant la même condition (5.15). Alors, en utilisant les arguments de densité, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\{u^{n,j}_{\lambda,\varepsilon}\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\infty_c(\Omega)$ tel que

$$u^{n,j}_{\lambda,\varepsilon} \longrightarrow u^n_{\lambda,\varepsilon} \quad \textit{fortement dans} \;\; W_0, \; \textit{as} \; j \to +\infty. \tag{5.20}$$

De (5.15) et (5.20), on a cela pour tout $\varphi \in W_0$

$$\langle u^{n,j}_{\lambda,\varepsilon} - u_{\lambda,\varepsilon}, \varphi\rangle = \langle u^{n,j}_{\lambda,\varepsilon} - u^n_{\lambda,\varepsilon}, \varphi\rangle + \langle u^n_{\lambda,\varepsilon} - u_{\lambda,\varepsilon}, \varphi\rangle \to 0, \; \textit{quand} \; n, j \to +\infty.$$

Alors,

$$u^{n,j}_{\lambda,\varepsilon} \longrightarrow u_{\lambda,\varepsilon} \quad \textit{weakly in} \;\; W_0, \; \textit{as} \; n, j \to +\infty. \tag{5.21}$$

Puisque $\{u^{n,j}_{\lambda,\varepsilon}\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\infty_c(\Omega)$ et que l'assèrtion (5.14) est satisfaite, on en déduit que

$$\liminf_{n,j\to+\infty} \Phi(u^{n,j}_{\lambda,\varepsilon}) \geq \Phi(u_{\lambda,\varepsilon}). \tag{5.22}$$

De plus, par (5.20) il est facile de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_{j\to+\infty} \Phi(u^{n,j}_{\lambda,\varepsilon}) = \Phi(u^n_{\lambda,\varepsilon}),$$

de sorte qu'en passant à $\liminf$ *on obtient*

$$\liminf_{n,j\to+\infty} \Phi(u^{n,j}_{\lambda,\varepsilon}) = \liminf_{n\to+\infty} \lim_{j\to+\infty} \Phi(u^{n,j}_{\lambda,\varepsilon}) = \liminf_{n\to+\infty} \Phi(u^n_{\lambda,\varepsilon}). \tag{5.23}$$

Par (5.22) et (5.23) on obtient que

$$\liminf_{n\to+\infty} \Phi(u^n_{\lambda,\varepsilon}) \geq \Phi(u_{\lambda,\varepsilon}).$$

Par conséquent, Φ est faiblement semicontinue inférieurement sur W_0. □

Lemme 5.2.3. *Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une constante positive c_0 telle que*

$$|F_\varepsilon(t)| \leq |t| + c_0.$$

Preuve. *Par définition des fonctionnelles F_ε et H_ε, on a*

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(t)| &= \left| \int_0^t H_\varepsilon(s)\, ds \right| \\ &= \left| \int_0^\mu H_\varepsilon(s)\, ds + \int_\mu^{\mu+\varepsilon} H_\varepsilon(s)\, ds + \int_{\mu+\varepsilon}^t H_\varepsilon(s)\, ds \right|. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(t)| &= \left| \int_\mu^{\mu+\varepsilon} \frac{s-\mu}{\varepsilon-\mu}\, ds + \int_{\mu+\varepsilon}^t \, ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{\varepsilon-\mu} \left[\int_\mu^{\mu+\varepsilon} s\, ds - \mu \int_\mu^{\mu+\varepsilon} \, ds \right] + \int_{\mu+\varepsilon}^t \, ds \right| \\ &\leq |t| + \mu + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2\,|\varepsilon-\mu|}. \end{aligned}$$

Alors,

$$|F_\varepsilon(t)| \leq |t| + c_0,$$

où $c_0 := \mu + \varepsilon + \dfrac{\varepsilon^2}{2\,|\varepsilon-\mu|}$. □

Lemme 5.2.4. *Soit $u_{\lambda,\varepsilon} \in W_0$. Alors, la fonctionnelle Ψ est faiblement semicontinue sur W_0.*

Preuve. *Soit $\{u^n_{\lambda,\varepsilon}\}_{n\in\mathbb{N}}$ borné dans W_0 et W_0 est un espace réflexif . Alors, à une sous-suite notée $u^n_{\lambda,\varepsilon}$, il existe $u_{\lambda,\varepsilon} \in W_0$, tel que*

$$\begin{array}{ll} u^n_{\lambda,\varepsilon} \longrightarrow u_{\lambda,\varepsilon} & \textit{faiblement dans } \ W_0, \\ u^n_{\lambda,\varepsilon} \longrightarrow u_{\lambda,\varepsilon} & \textit{fortement dans } \ L^p(\Omega), \\ u^n_{\lambda,\varepsilon}(x) \longrightarrow u_{\lambda,\varepsilon}(x) & \textit{p.p. dans } \ \Omega, \end{array}$$

D'après Lemme 5.2.3, on a

$$\begin{aligned} |\Psi(u^n_{\lambda,\varepsilon})| &\leq \int_\Omega |F_\varepsilon(u^n_{\lambda,\varepsilon})| \, dx \\ &\leq \int_\Omega \left(|u^n_{\lambda,\varepsilon}(x)| + c_0\right) \, dx \\ &\leq \int_\Omega |u^n_{\lambda,\varepsilon}(x)| \, dx + c_0 \int_\Omega \, dx \\ &= \|u^n_{\lambda,\varepsilon}\|_{L^1(\Omega)} + c_0|\Omega|. \end{aligned}$$

De plus, selon l'injection compact $W_0 \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p^*)$, on obtient

$$|\Psi(u^n_{\lambda,\varepsilon})| \leq c_1\|u^n_{\lambda,\varepsilon}\|_{W_0} + c_0|\Omega| < +\infty,$$

Donc, on applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \Psi(u^n_{\lambda,\varepsilon}) \, dx = \int_\Omega \Psi(u_{\lambda,\varepsilon}) \, dx.$$

Alors, la fonctionel Ψ est faiblement semicontinue sur W_0. □

Preuve de Proposition 5.2.1. Pour démontrer ce résultat, on applique le Théorème 1.3.4 au problème approximé (5.10) du problème (5.1) avec l'espace $X = W_0$ et aux fonctionnelles Φ et Ψ défini dans la Définition 5.2.1 et 5.2.3 par (5.12) et (5.13) respectivement.

D'après Lemme 2.2.1 et le Lemme 5.2.2, la fonction Φ est continue, coercitive et faiblement semi-continue inférieurement, ainsi que sa $\inf\limits_{u_{\lambda,\varepsilon}\in W_0} \Phi(u_{\lambda,\varepsilon}) = 0$. De plus, la fonctionnelle Ψ est continue, a une dérivée compacte et faiblement semicontinue selon le lemme 5.2.4. Nous prouvons le théorème dans les étapes suivantes :

Étape 1. On commence par prouver que le problème (5.10) admet au moins une solution faible non triviale $u_{\lambda,\varepsilon} \in W_0$.

D'après le Lemme 5.2.3, on a

$$\begin{aligned} \Psi(u_{\lambda,\varepsilon}) &\leq \int_\Omega |F_\varepsilon(u_{\lambda,\varepsilon})| \, dx \\ &\leq \int_\Omega \left[|u_{\lambda,\varepsilon}(x)| + c_0\right] \, dx \\ &= \|u_{\lambda,\varepsilon}\|_{L^1(\Omega)} + c_0|\Omega|. \end{aligned}$$

Et d'après l'injection compact $W_0 \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, p^*)$, on a

$$|\Psi(u_{\lambda,\varepsilon})| \leq c_1 \|u_{\lambda,\varepsilon}\|_{W_0} + c_0|\Omega| < +\infty.$$

D'autre part, on déduit de (5.8) que

$$\|u_{\lambda,\varepsilon}\|_{W_0} < \left(\frac{pr}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall u_{\lambda,\varepsilon} \in W_0, \ \Phi(u_{\lambda,\varepsilon}) < r. \tag{5.24}$$

Maintenant, par (5.24), on a

$$\Psi(u_{\lambda,\varepsilon}) < c_1 \left(\frac{pr}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} + c_0|\Omega|,$$

pour tout $u_{\lambda,\varepsilon} \in W_0$ tel que $\Phi(u_{\lambda,\varepsilon}) < r$. Alors,

$$\sup_{\{u_{\lambda,\varepsilon} \in \Phi^{-1}(]-\infty,r[)\}} \Psi(u_{\lambda,\varepsilon}) < c_1 \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{1}{p}} + \beta c_0|\Omega|.$$

Donc, pour tout $r \in]0, +\infty[$ on a

$$\frac{\left(\sup_{\{u_{\lambda,\varepsilon} \in \Phi^{-1}(]-\infty,r[)\}} \Psi(u_{\lambda,\varepsilon})\right)}{r} \leq c_1 \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{1-p}{p}} + \frac{c_0}{r}|\Omega|.$$

En particulier, pour $r = \rho^p$ on a

$$\frac{\left(\sup_{\{u_{\varepsilon} \in \Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)\}} \Psi(u_{\lambda,\varepsilon})\right)}{\rho^p} \leq c_1 \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} \rho^{1-p} + c_0\rho^{-p}|\Omega|. \tag{5.25}$$

Maintenant, en définissant la fonction $u_0 \in W_0$ définie comme suit

$$u_0(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \Omega, \text{ tel que } u_0 \in \Phi^{-1}(]-\infty, \rho^p[). \tag{5.26}$$

Ainsi, on observe que

$$\Phi(u_0) = \frac{1}{p}\|u_0\|_{W_0}^p + \frac{\beta}{p}\int_\Omega \frac{|u_0(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx = 0 \tag{5.27}$$

et

$$\Psi(u_0) = \int_\Omega F_\varepsilon(u_0(x))\,dx = 0. \tag{5.28}$$

Donc, par (5.26), (5.27) et (5.28), on obtient que

$$\begin{aligned}
\varphi(\rho^p) &:= \inf_{u_{\lambda,\varepsilon} \in \Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)} \frac{\left(\sup_{\{v_{\lambda,\varepsilon} \in \Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)\}} \Psi(v_{\lambda,\varepsilon})\right) - \Psi(u_{\lambda,\varepsilon})}{\rho^p - \Phi(u_{\lambda,\varepsilon})} \\
&\leq \frac{\left(\sup_{\{v_{\lambda,\varepsilon} \in \Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)\}} \Psi(v_{\lambda,\varepsilon})\right) - \Psi(u_0)}{\rho^p - \Phi(u_0)} \\
&= \frac{\left(\sup_{\{v_{\lambda,\varepsilon} \in \Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)\}} \Psi(v_{\lambda,\varepsilon})\right)}{\rho^p}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, par (5.25) on a

$$\varphi(\rho^p) \leq c_1 \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} \rho^{1-p} + c_0\rho^{-p}|\Omega|.$$

De plus, puisque $0 < \lambda < \Lambda$

$$\varphi(\rho^p) \leq c_1 \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} \rho^{1-p} + c_0\rho^{-p}|\Omega| =: \frac{1}{\Lambda(\rho)} < \frac{1}{\lambda}.$$

Donc,

$$0 < \lambda < \Lambda(\rho) := \frac{\rho^p}{c_1 \left(\frac{p}{1-\beta c_H}\right)^{\frac{1}{p}} \rho + c_0|\Omega|} \leq \frac{1}{\varphi(\rho^p)}.$$

Alors,

$$\lambda \in \left]0, \Lambda(\rho)\right[\subseteq \left]1, \frac{1}{\varphi(\rho^p)}\right[.$$

En conclusion, d'après le théorème 1.3.4, il existe un point critique $u_{\lambda,\varepsilon} \in \Phi^{-1}(]-\infty, \rho^p[)$ pour $E_{\lambda,\varepsilon}$ dans W_0 qui est un minimum global de la restriction $E_{\lambda,\varepsilon}$ à $\Phi^{-1}(]-\infty, \rho^p[)$.

Step 2. On montre que $\lim_{\lambda\to 0^+} \|u_{\lambda,\varepsilon}\|_{W_0} = 0$ et que la fonctionnelle $g(\lambda) := E_{\lambda,\varepsilon}(u_{\lambda,\varepsilon})$ est négatif et strictement décroissant en $]0, \Lambda(\rho)[$.

Comme Φ est coercive, alors $u_{\lambda,\varepsilon} \in \Phi^{-1}(]-\infty, \rho^p[)$ est borné dans W_0, c'est-à-dire

$$\|u_{\lambda,\varepsilon}\|_{W_0} \leq K, \text{ pour } K > 0. \tag{5.29}$$

Ainsi, du fait de la compacité de l'opérateur Ψ', il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left|\langle \Psi'(u_{\lambda,\varepsilon}), u_{\lambda,\varepsilon}\rangle\right| \leq \|\Psi'(u_{\lambda,\varepsilon})\|_{W_0^*}\|u_{\lambda,\varepsilon}\|_{W_0} < CK^2, \ \forall\lambda \in]0, \Lambda(\rho)[\,. \tag{5.30}$$

D'autre part, puisque $u_{\lambda,\varepsilon}$ est un point critique de $E_{\lambda,\varepsilon}$, alors

$$\langle E'_{\lambda,\varepsilon}(u_{\lambda,\varepsilon}), u_{\lambda,\varepsilon}\rangle = 0,$$

ce qui implique que

$$\langle \Phi'(u_{\lambda,\varepsilon}) - \lambda\Psi'(u_{\lambda,\varepsilon}), u_{\lambda,\varepsilon}\rangle = 0, \ \forall\lambda \in]0, \Lambda(\rho)[\,.$$

Donc,

$$p\Phi(u_{\lambda,\varepsilon}) = \langle \Phi'(u_{\lambda,\varepsilon}), u_{\lambda,\varepsilon}\rangle = \lambda\langle \Psi'(u_{\lambda,\varepsilon}), u_{\lambda,\varepsilon}\rangle, \ \forall\lambda \in]0, \Lambda(\rho)[\,. \tag{5.31}$$

Par conséquent, par (5.30) et (5.31), on obtient

$$\lim_{\lambda\to 0^+} p\Phi(u_{\lambda,\varepsilon}) = \lim_{\lambda\to 0^+} \lambda\langle \Psi'(u_{\lambda,\varepsilon}), u_{\lambda,\varepsilon}\rangle = 0, \ \forall p < 1. \tag{5.32}$$

De plus, par (5.8) on a

$$\|u_{\lambda,\varepsilon}\|^p_{W_0} \leq \frac{p\Phi(u_{\lambda,\varepsilon})}{1-\beta c_H}, \ \forall\lambda \in]0, \Lambda(\rho)[\,. \tag{5.33}$$

Alors, on conclut par les conditions (5.32) et (5.33) que

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \|u_{\lambda,\varepsilon}\|_{W_0} = 0$$

De plus, puisque la restriction $E_{\lambda,\varepsilon}$ à $\Phi^{-1}(]-\infty,\rho^p[)$ admet un minimum global, qui est un minimum local de $E_{\lambda,\varepsilon}$ dans W_0, l'application $g(\lambda) := E_{\lambda,\varepsilon}(u_{\lambda,\varepsilon})$ est négative dans $]0,\Lambda(\rho)[$, car $u_{\lambda,\varepsilon} \neq 0$ et $E_{\lambda,\varepsilon}(0) = 0$.

Enfin, on démontre que la fonction $g(\lambda) := E_{\lambda,\varepsilon}(u_{\lambda,\varepsilon})$ est négative et strictement décroissante en $]0,\Lambda[$, observant que

$$E_{\lambda,\varepsilon}(u_{\lambda,\varepsilon}) = \lambda\left(\frac{\Phi(u_{\lambda,\varepsilon})}{\lambda} - \Psi(u_{\lambda,\varepsilon})\right).$$

Ainsi, on suppose que $u_{\lambda_1,\varepsilon}, u_{\lambda_2,\varepsilon} \in W_0$ sont les points critiques de $E_{\lambda,\varepsilon}$, pour chaque $lambda_1, \lambda_2 \in]0,\Lambda(\rho)[$, avec $\lambda_1 < \lambda_2$. De plus, on pose

$$I_{\lambda_i} := \inf_{u_{\lambda,\varepsilon}\in\Phi^{-1}(]-\infty,\gamma^p[)}\left(\frac{\Phi(u_{\lambda_i,\varepsilon})}{\lambda_i} - \Psi(u_{\lambda_i,\varepsilon})\right) = \frac{1}{\lambda_i}E_{\lambda_i,\varepsilon}(u_{\lambda_i,\varepsilon}),\ i = 1,2.$$

Évidemment, comme mentionné précédemment $I_{\lambda_i} < 0$ pour $i = 1,2$, et depuis $\lambda_1 < \lambda_2$, on a $I_{\lambda_2} \leq I_{\lambda_1}$. Par conséquent,

$$E_{\lambda_2,\varepsilon}(u_{\lambda_2,\varepsilon}) = \lambda_2 I_{\lambda_2} \leq \lambda_2 I_{\lambda_1} < \lambda_1 I_{\lambda_1} = E_{\lambda_1,\varepsilon}(u_{\lambda_1,\varepsilon}).$$

Nous concluons que, comme $\lambda \in]0,\Lambda[$ est arbitraire, les conclusions ci-dessus sont toujours vraies dans $]0,\Lambda[$. $\square$

Dans ce qui suit, On énonce et prouve l'existence résultat du problème (5.1).

Théorème 5.2.1. *Il existe une constante positive Λ (donnée dans la proposition 5.2.1) telle que pour tout $\lambda \in (0,\Lambda)$, le problème (5.1) admet au moins une non triviale solution faible $u_\lambda \in W_0$ où $u_\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0} u_{\lambda,\varepsilon}$ dans W_0.*

Preuve de Théorèm 5.2.1. Pour démontrer ce théorème, il suffit de montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0} u_{\lambda,\varepsilon} = u_\lambda$ dans W_0 où $u_{\lambda,\varepsilon}$ est la solution du problème approché (5.10).

Pour $v \in W_0$, en multipliant notre équation du problème (5.1) par $v(x)$ et en l'intégrant par rapport à x dans Ω, on obtient par le théorème de Fubini

$$2\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}v(x)\,dxdy - \beta\int_\Omega \frac{|v(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx = \lambda\int_\Omega H(v(x)-\mu)v(x)\,dx.$$

Dans l'autre partie, on a

$$\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}v(x)\,dxdy = \int_{\Omega\times\Omega}\frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))^2}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy + \int_{\Omega\times\Omega}\frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}v(y)\,dxdy$$

Dans la seconde intégrale, on inverse le rôle de x et y, on obtient

$$\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}v(x)\,dxdy = \int_{\Omega\times\Omega}\frac{|v(x)-v(y)|^{p}}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy - \int_{\Omega\times\Omega}\frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}v(x)\,dxdy.$$

Alors,

$$2\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}v(x)\,dxdy=\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|v(x)-v(y)|^{p}}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy,$$

ce qui implique que

$$\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|v(x)-v(y)|^{p}}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy-\beta\int_{\Omega}\frac{|v(x)|^p}{|x|^{sp}}\,dx=\lambda\int_{\Omega}H(v(x)-\mu)v(x)\,dx.$$

Maintenant, en fixant $v=u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda$ et par l'inégalité de Hardy fractionnaire, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-\beta c_H}{p}\right)\|u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda\|_{W_0}^p &\leq \lambda\int_{\Omega}H((u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)-\mu)(u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)\,dx\\ &=\lambda\int_{\Omega}H((u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)-\mu)(u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)\,dx\\ &\quad-\lambda\int_{\Omega}H_\varepsilon((u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)-\mu)(u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)\,dx\\ &\quad+\lambda\int_{\Omega}H_\varepsilon((u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)-\mu)(u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)\,dx.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-\beta c_H}{p}\right)\|u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda\|_{W_0}^p &\leq \lambda\int_{\Omega}\left[H((u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)-\mu)-H_\varepsilon((u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)-\mu)\right](u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)\,dx\\ &\quad+\lambda\int_{\Omega}H_\varepsilon((u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)-\mu)(u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)\,dx.\end{aligned}$$

Comme

$$\int_{\Omega}H_\varepsilon((u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)-\mu)(u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)\,dx\geq 0$$

et

$$H(v(x)-\mu)-H_\varepsilon(v(x)-\mu)=\begin{cases}0 & \text{if } v(x)>\mu+\varepsilon,\\ 1-\frac{v(x)-\mu}{\varepsilon-\mu} & \text{si } \mu\leq v(x)\leq\mu+\varepsilon,\\ 0 & \text{si } v(x)<\mu\end{cases}$$

on a,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-\beta c_H}{p}\right)\|u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda\|_{W_0}^p &\leq \lambda\int_{\Omega\bigcap\{0\leq((u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)-\mu)\leq\varepsilon\}}\left[1-\frac{((u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)-\mu)}{\varepsilon-\mu}\right](u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)\,dx\\ &\leq\lambda\int_{\{0\leq(u_{\lambda,\varepsilon}(x)-u_\lambda(x)-\mu)\leq\varepsilon\}}\left[1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\mu}\right](u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)\,dx\\ &\leq\lambda\int_{\{0\leq(u_{\lambda,\varepsilon}(x)-u_\lambda(x)-\mu)\leq\varepsilon\}}\left[(u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda)(x)-\mu+\mu\right]\,dx\\ &=\lambda\,(\varepsilon+\mu)\,|\{0\leq(u_{\lambda,\varepsilon}(x)-u_\lambda(x)-\mu)\leq\varepsilon\}|\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|u_{\lambda,\varepsilon}-u_\lambda\|_{W_0}^p\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0,$$

ce qui nous amène à conclure que $u_{\lambda,\varepsilon}$ converge vers u_λ dans W_0. □

Conclusion et perspectives

In this thesis, we investigate a class of fractional elliptic problems involving a second member that varies from a singular term of diffusion, absorption or a nonlinear discontinuity which changes sign and also in the case where this second member is a combination of these previous terms, under different assumptions, we obtain the existence and multiplicity results using variational methods, critical point theory and an approximation technique.

L'originalité de notre recherche provient du traitement des problèmes elliptiques impliquant le p-Laplacien fractionnaire lorsque la nonlinéarité f est discontinue, elle est souvent accompagnée d'un terme singulier, ce qui est difficile, complexe et rarement exploré dans la littérature en raison de l'apparition de nombreux défis tels que : les problèmes aux frontières libres, le manque de compacité et en général la non-régularité de l'ensemble des opérateurs et des estimations qui sont indispensables au processus de résolution de ces problèmes. Ceci dit, d'autres travaux restent à explorer. Voici quelques uns :

1) Nous conjecturons que le résultat principal du chapitre 4 est aussi vrai pour $(-\Delta)^s_{p,\beta}$ défini par
$$(-\Delta)^s_{p,\beta}u(x) := PV\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}|x|^\beta|y|^\beta}\,dy,$$
avec $0 \leq \beta < \frac{N-ps}{2}$, $1 < p < N$, $s \in (0,1)$ et $N > ps$.

2) Le résultat du théorème 5.2.1 du chapitre 5 est vérifié dans le cas local $(s = 1)$ avec des modifications mineures.

3) Il est très intéressant de caractériser la frontière libre $\Gamma = \{x \in \Omega : u(x) = \mu\}$ du problème (5.1). Dans le cas de p-Laplacien $(s = 1)$, en général, on utilise le Théorème de Stampacchia (Théorème 6.19 de [50]) pour conclure que $|\Gamma| = 0$ (voir aussi [9]). Une version fractionnaire du théorème de Stampacchia reste un problème ouvert.

4) Dans le problème principal (4.1) du chapitre 4, lorsque $m(x) = \lambda > 0$, le phénomène de bifurcation par rapport à λ peut apparaître. Il est intéressant de dériver un diagramme de bifurcation donnant des informations importantes sur les solutions.

5) Un problème plus général peut être étudié avec n frontières libres et m singularités. Nous conjecturons que le résultat de notre travail est toujours vrai pour le problème suivant (avec les modifications appropriées)
$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p u = \beta\sum_{i=1}^{n}\frac{|u|^{p-2}u}{|x-\alpha_i|^{sp}} + \lambda\sum_{i=1}^{n} H(u-\mu_i) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N\setminus\Omega, \end{cases}$$
où $\alpha_i, \mu_i > 0$.

Bibliographie

[1] Achour, H., and Bensid, S. On a fractional p-laplacian problem with discontinuous nonlinearities. *Mediterranean Journal of Mathematics 18*, 6 (2021), 1–17. 66

[2] Achour, H., and Bensid, S. Singular elliptic problem involving a fractional p-laplacian with discontinuous nonlinearity. *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications 13*, 3 (2022), 41. 80

[3] Achour, H., and Bensid, S. Existence results for singular elliptic problem involving a fractional p-laplacian. *Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis accepted* (2023). 35, 50

[4] Adams, R. Sobolev spaces. *Pure and Applied Mathematics 65* (1975). 26

[5] Alexander, R., and Rabinowitz, P. A discontinuous nonlinear eigenvalue/free boundary problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences 4*, 1 (1982), 131–142. 67, 68

[6] Ambrosetti, A., and Badiale, M. The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities. *Journal of mathematical analysis and applications 140*, 2 (1989), 363–373. 2, 67, 68

[7] Ambrosetti, A., and Turner, R. Some discontinuous variational problems. *Differential and Integral Equations 1*, 3 (1988), 341–349. 67, 68

[8] Ambrosio, V. Nontrivial solutions for a fractional p-laplacian problem via rabier theorem. *Complex Variables and Elliptic Equations 62*, 6 (2017), 838–847. 2

[9] Arcoya, D., and Calahorrano, M. Some discontinuous problems with a quasilinear operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 187*, 3 (1994), 1059–1072. 2, 67, 68, 92

[10] Azorero, J. G., and Alonso, I. P. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems. *Journal of Differential Equations 144*, 2 (1998), 441–476. 30

[11] Bensid, S. Existence and multiplicity of solutions for fractional elliptic problems with discontinuous nonlinearities. *Mediterranean Journal of Mathematics 15*, 3 (2018), 1–15. 2, 68

[12] Bensid, S., and Bouguima, S. On a free boundary problem. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications 68*, 8 (2008), 2328–2348. 67, 68

[13] Bensid, S., and Bouguima, S. M. Existence and multiplicity of solutions to elliptic problems with discontinuities and free boundary conditions. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE) 2010* (2010), 1–16. 67, 68

[14] Bensid, S., and Bouguima, S. M. A note on discontinuous problem with a free boundary. *J. Egyptian Math. Soc 19* (2011), 86–87. 68

[15] BENSID, S., AND KAID, Z. Multiple stationary solutions of parabolic problem with discontinuous nonlinearities and their stability. *Complex Variables and Elliptic Equations 66*, 3 (2021), 487–506. 68

[16] BISCI, G. M., RĂDULESCU, V. D., AND SERVADEI, R. *Variational methods for nonlocal fractional problems*, vol. 162. Cambridge University Press, 2016. 25

[17] BOCCARDO, L., ORSINA, L., AND PERAL, I. A remark on existence and optimal summability of solutions of elliptic problems involving hardy potential. *Discrete and Continuous Dynamical Systems 16*, 3 (2006), 513–523. 30

[18] BONANNO, G. Relations between the mountain pass theorem and local minima. *Advances in Nonlinear Analysis 1*, 3 (2012), 205–220. 24, 51

[19] BREZIS, H. Analyse fonctionnelle. *Théorie et applications* (1987). 7, 8, 11, 13, 14, 28

[20] BRÉZIS, H., CORON, J. M., AND NIRENBERG, L. Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of p. rabinowitz. *Communications on pure and applied mathematics 33*, 5 (1980), 667–684. 13

[21] CABRÉ, X., AND TAN, J. Positive solutions of nonlinear problems involving the square root of the laplacian. *Advances in Mathematics 224*, 5 (2010), 2052–2093. 1

[22] CAFFARELLI, L. Nonlocal equations, drifts and games, non. *Partial Diff. Eq., Abel Symposia 7* (2012), 37–52. 1, 2, 31, 33

[23] CAFFARELLI, L., AND SILVESTRE, L. An extension problem related to the fractional laplacian. *Communications in partial differential equations 32*, 8 (2007), 1245–1260. 1

[24] CARL, S., LE, V. K., AND MOTREANU, D. *Nonsmooth variational problems and their inequalities : comparison principles and applications*. Springer Science & Business Media, 2007. 14, 17, 19

[25] CHABROWSKI, J. Introduction to the theory of critical points : the mountain pass theorem ekeland's variation principle. *Instructional Workshop on Analysis and Geometry, Part 3 34* (1996), 137–183. 23

[26] CHANG, K.-C. Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 80*, 1 (1981), 102–129. 14, 20, 22, 23, 24, 67, 68

[27] CLARKE, F. H. Generalized gradients and applications. *Transactions of the American Mathematical Society 205* (1975), 247–262. 14, 68

[28] DI NEZZA, E., PALATUCCI, G., AND VALDINOCI, E. Hitchhikers guide to the fractional sobolev spaces. *Bulletin des sciences mathématiques 136*, 5 (2012), 521–573. 1, 25, 26, 27, 28, 29, 30

[29] DÍAZ, J. I. Nonlinear partial differential equations and free boundaries, vol. i. *Elliptic equations* (1985). 2

[30] DIAZ, J. I., MOREL, J.-M., AND OSWALD, L. An elliptic equation with singular nonlinearity. *Communications in Partial Differential Equations 12*, 12 (1987), 1333–1344. 2

[31] DOS SANTOS, G. C., AND TAVARES, L. S. Existence and behavior of the solutions for an elliptic equation with a nonlocal operator involving critical and discontinuous nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 493*, 1 (2021), 124530. 2

[32] FERRARA, M., AND BISCI, G. M. Existence results for elliptic problems with hardy potential. *Bulletin des Sciences Mathématiques 138*, 7 (2014), 846–859. 3, 36, 51

[33] FERRERA, J. *An introduction to nonsmooth analysis*. Academic Press, 2013. 14, 17, 19

[34] FISCELLA, A., AND PUCCI, P. Kirchhoff–hardy fractional problems with lack of compactness. *Advanced Nonlinear Studies 17*, 3 (2017), 429–456. 30, 31

[35] FISCELLA, A., SERVADEI, R., AND VALDINOCI, E. Density properties for fractional sobolev spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math 40*, 1 (2015), 235–253. 26

[36] FOLLAND, G. B. *Real analysis : modern techniques and their applications*, vol. 40. John Wiley & Sons, 1999. 9

[37] FOLLAND, G. B. How to integrate a polynomial over a sphere. *The American Mathematical Monthly 108*, 5 (2001), 446–448. 9

[38] FONSECA, I., AND LEONI, G. *Modern Methods in the Calculus of Variations : L ˆ p Spaces*. Springer Science & Business Media, 2007. 14

[39] FRANK, R. L., AND SEIRINGER, R. Non-linear ground state representations and sharp hardy inequalities. *Journal of Functional Analysis 255*, 12 (2008), 3407–3430. 30

[40] FRANZINA, G., AND PALATUCCI, G. Fractional p-eigenvalues. *Riv. Mat. Univ. Parma* (2013), 795–826. 34

[41] HALIDIAS, N. Elliptic problems with discontinuities. *Journal of mathematical analysis and applications 276*, 1 (2002), 13–27. 67

[42] IANNIZZOTTO, A., LIU, S., PERERA, K., AND SQUASSINA, M. Existence results for fractional p-laplacian problems via morse theory. *Advances in Calculus of Variations 9*, 2 (2016), 101–125. 2, 25, 31, 33, 34

[43] KASSYMOV, A., AND SURAGAN, D. Fractional hardy–sobolev inequalities and existence results for fractional sub-laplacians. *Journal of Mathematical Sciences 250*, 2 (2020). 30

[44] KAVIAN, O. *Introduction à la théorie des points critiques : et applications aux problèmes elliptiques*, vol. 13. Springer, 1993. 9, 10, 11, 12

[45] KHODABAKHSHI, M., AMINPOUR, A., AFROUZI, G., AND HADJIAN, A. Existence of two weak solutions for some singular elliptic problems. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas 110*, 2 (2016), 385–393. 51

[46] KHODABAKHSHI, M., AND HADJIAN, A. Existence of three weak solutions for some singular elliptic problems. *Complex Variables and Elliptic Equations 63*, 1 (2018), 68–75. 3, 8, 51

[47] KIM, Y.-H. Existence of a weak solution for the fractional p-laplacian equations with discontinuous nonlinearities via the berkovits-tienari degree theory. *Topological Methods in Nonlinear Analysis 51*, 2 (2018), 371–388. 2

[48] KUBIŃSKA, E. Approximation of carathéodory functions and multifunctions. *Real Analysis Exchange 30*, 1 (2005), 351–359. 8

[49] LEHRER, R., MAIA, L. A., AND SQUASSINA, M. On fractional p-laplacian problems with weight. *Differential and Integral Equations 28*, 1/2 (2015), 15–28. 2

[50] LIEB, E. H., AND LOSS, M. *Analysis*, vol. 14. American Mathematical Soc., 1997. 92

[51] LINDGREN, E., AND LINDQVIST, P. Fractional eigenvalues. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations 49*, 1-2 (2014), 795–826. 34

[52] LIONS, P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the limit case, part 2. *Revista matemática iberoamericana 1*, 2 (1985), 45–121. 30

[53] MOSCONI, S., PERERA, K., SQUASSINA, M., AND YANG, Y. The brezis–nirenberg problem for the fractional p-laplacian. *Calculus of variations and partial differential equations 55*, 4 (2016), 1–25. 2

[54] MUKHERJEE, T., AND SREENADH, K. On dirichlet problem for fractional p-laplacian with singular non-linearity. *Advances in Nonlinear Analysis 8*, 1 (2019), 52–72. 2

[55] NACHMAN, A., AND CALLEGARI, A. A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids. *SIAM Journal on Applied Mathematics 38*, 2 (1980), 275–281. 2

[56] PALAIS, R. S., AND SMALE, S. A generalized morse theory. *Bulletin of the American Mathematical Society 70*, 1 (1964), 165–172. 13

[57] PERERA, K., SQUASSINA, M., AND YANG, Y. Bifurcation and multiplicity results for critical fractional p-laplacian problems. *Mathematische Nachrichten 289*, 2-3 (2016), 332–342. 2

[58] PIERSANTI, P., AND PUCCI, P. Existence theorems for fractional p-laplacian problems. *Analysis and Applications 15*, 05 (2017), 607–640. 2

[59] RABINOWITZ, P. H., ET AL. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. (Regional conference series in mathematics, no.65. American Mathematical Soc., 1986. 13

[60] RICCERI, B. A general variational principle and some of its applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics 113*, 1-2 (2000), 401–410. 24, 36, 82

[61] SAOUDI, K., PANDA, A., AND CHOUDHURI, D. A singular elliptic problem involving fractional p-laplacian and a discontinuous critical nonlinearity. *Journal of Mathematical Physics 62*, 7 (2021), 071505. 2

[62] SERVADEI, R., AND VALDINOCI, E. Mountain pass solutions for non-local elliptic operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 389*, 2 (2012), 887–898. 1

[63] SERVADEI, R., AND VALDINOCI, E. Variational methods for non-local operators of elliptic type. *Discrete & Continuous Dynamical Systems 33*, 5 (2013), 2105–2137. 1, 34

[64] SERVADEI, R., AND VALDINOCI, E. The brezis-nirenberg result for the fractional laplacian. *Transactions of the American Mathematical Society 367*, 1 (2015), 67–102. 1

[65] SIMON, J. Régularité de la solution d'une équation non linéaire dans $\mathbb{R}^N$. *Journées d'Analyse Non Linéaire* (1978), 205–227. 54

[66] XIANG, M., AND ZHANG, B. A critical fractional p-kirchhoff type problem involving discontinuous nonlinearity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-S 12*, 2 (2019), 413. 2

[67] XIANG, M., ZHANG, B., AND RĂDULESCU, V. D. Existence of solutions for perturbed fractional p-laplacian equations. *Journal of Differential Equations 260*, 2 (2016), 1392–1413. 2

[68] YAN, B. Introduction to variational methods in partial differential equations and applications. *A summer course at Michigan State University (Math 890, Summer 2008)* (2008). 23

[69] ZEIDLER, E. *Nonlinear functional analysis and its applications : II/ B : nonlinear monotone operators*. Springer Science & Business Media, 1990. 56

[70] ZEIDLER, E., AND BORON, L. F. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications : II/ A : Linear Monotone Operators*. Springer, 1989. 62

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions une classe de problèmes elliptiques fractionnaires impliquant un second membre qui varie en terme singulier de diffusion, d'absorption ou d'une discontinuité nonlinéaire qui change de signe et aussi dans le cas où ce second membre est une combinaison de ces termes précédents, sous différentes hypothèses, nous obtenons les résultats d'existence et de multiplicité en utilisant des méthodes variationnelles, la théorie du point critique et une technique d'approximation.

Mots-clés: Problème singulier, nonlinéarités discontinues, frontières libres, p-Laplacien fractionnaire, inégalité de Hardy fractionnaire, point critique, méthode variationnelle, approche par approximation.

Abstract

In this thesis, we investigate a class of fractional elliptic problems involving a second member that varies from a singular term of diffusion, absorption or a nonlinear discontinuity which changes sign and also in the case where this second member is a combination of these previous terms, under different assumptions, we obtain the existence and multiplicity results using variational methods, critical point theory and an approximation technique.

Keywords: Singular problem, discontinuous nonlinearities, free boundaries, fractional p-Laplacian, fractional Hardy inequality, critical point, variational method, approximation approach.

ملخص

في هذه الأطروحة، نتحرى عن فئة من المشاكل الإهليلجية الكسرية التي تتضمن عضواً ثانٍ يختلف من حالة فردية من حيث الانتشار أو الامتصاص أو يأخذ صفة إنقطاعية غير خطية و يغير العلامة وأيضاًا في الحالة التي يكون فيها هذا العضو الثاني مزيجاًا من هذه الحالات السابقة، في ظل افتراضات مختلفة ، نحصل على نتائج الوجود والتعدد باستخدام طرق التباين ونظرية النقطة الحرجة وتقنية التقريب.

الكلمات المفتاحية: المشكلة التغير ، الخطيات الغير مستمرة ، الحدود الحرة ،ص-لابلاسيان الكسري ، متراجحة هاردي الكسرية ، النقطة الحرجة ، طريقة التغير ، التقنية التقريبية.