République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr BelKaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de
MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

Option : **Systèmes Dynamiques et Applications**

Titre du Mémoire

Équations différentielles d'ordre fractionnaires dans des espaces de Banach

Présenté par : SLMANE MEHDI

Soutenu le : 12 / 01 /2012

Devant le Jury :

Président:	Mr S.M .BOUGUIMA ,	Prof.	U.Tlemcen
Examinateurs:	Mr A. LAKMECHE ,	Prof.	U. S.B.A
	Mr M. YEBEDRI ,	Prof.	U.Tlemcen
Encadreur :	Mr M. BENCHOHRA ,	Prof.	U. S.B.A

Année Universitaire
2012-2013

Dedicaces

Ce travail est dédié à :

Mes parents.

Mes fréres et soeurs.

Ma femme et mes enfans Aek et Marwa.

M. Slimane

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.
En tout premier lieu, je tiens à remercier le professeur Mouffak Benchohra d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux.
Je remercie vivement le professeur Bouguima Sidi Mohammed de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.
Je remercie également le professeur Yebedri Mustapha et le professeur Lakmeche Abdelkader membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail et pour leurs conseils durant la réalisation de ce mémoire.
Il m'aurait été impossible de réaliser ce travail sans le soutien de ma famille, en particulier mon père et mon épouse de l'affection dont elle a su m'entourer depuis toujours.
J'adresse également mes remerciements envers mes amis et mes collègues pour leur soutien.
Enfin, je dédie ce travail à celle qui ma soutenu avec toute sa tendresse et son affection ma mère, que dieu la bénisse.

Table des matières

Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie, ...etc [19, 22, 20].

Dans ce mémoire, nous allons nous inspirer des articles de [1, 3, 7, 10, 12, 11] pour faire le point sur toutes ces études en donnant plusieurs résultats d'existence des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire, moyennant la dérivée fractionnaire de Caputo dans des espaces de *Banach* de dimension infini. Cette étude se fera principalement à l'aide de théorème de point fixe de *Mönch* combiné avec la technique de la mesure de non compacité de $Kuratowski$.

Ce mémoire comprend sept chapitres.

Le premier chapitre intitulé *"Préliminaires"*, contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude. Il est divisé comme suit :

– Dans la section 1, nous donnons en quelques lignes l'Histoire de la dérivation d'ordre non entier.
– La section 2, sera consacrée aux différentes définitions de base .
– La section 3, nous donnons quelques définitions et outils sur les applications multivoques.
– La section 4, sera réservée à un petit rappel sur la mesure de non compacité au sens de Kuratowski.

- Dans la section 5, sous le titre Dérivée et Intégrales fractionnaires, sera consacrée aux définitions et résultas (lemmes) importants concernant la théorie du calcul fractionnaires.
- La section 6, nous donnons quelques théorèmes de point fixe, et le Lemme d'Ascoli-Arzéla.

Le deuxième chapitre intitulé *"Problème aux limites pour des équations fractionnaire*s", on traitera l'existence des solutions pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo suivantes :

$$^cD^\alpha y(t) \;=\; f(t, y(t)),\ t \in J = [0, T],\ 1 < \alpha < 2, \tag{1}$$

$$y(0) = y_0,\ y(T) = y_T. \tag{2}$$

où $^cD^\alpha$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times E \to E$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard, y_0, $y_T \in E$ et E est un espace de Banach avec la norme $\|.\|$.

Le troisième chapitre intitulé *"Problème aux limites avec des conditions intégrales"*, on s'intéresse à l'existence des solutions pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire toujours de type Caputo suivantes :

$$^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)),\ t \in J = [0, T]\ ,\ 1 < \alpha \leq 2, \tag{3}$$

$$y(0) - y'(0) = \int_0^T g(s, y(s))\,ds, \tag{4}$$

$$y(T) - y'(T) = \int_0^T h(s, y(s))\,ds, \tag{5}$$

où $^cD^\alpha$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f,\ g,\ et\, h : J \times E \to E$ sont des fonctions données vérifiants certaines hypothèses qui seront précisées plus tard, et E est un espace de Banach avec la norme $\|.\|$.
Finalement, on donnera un exemple pour voir l'utilité du notre résultat.

Le quatrième chapitre intitulé *"Problèmes aux limites pour les inclusions differentielles d'ordre fractionnaire"*, sera consacré à l'existence des solutions pour le problème aux limites suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) \in F\left(t, y(t)\right), \ t \in J = [0, T], \quad 1 < \alpha < 2, \tag{6}$$

$$y\left(0\right) = y_0, \ y\left(T\right) = y_T, \tag{7}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ est dérivée au sens de Caputo $F : J \times E \to \mathcal{P}\left(E\right)$ est une application multivoque, $y_0, \ y_T \in E$ et $(E, \|.\|)$ désigne un espace de Banach.

Le cinquième chapitre intitulé “Équations différentielles fractionnaires impulsives”, sera consacré à l'existence des solutions pour le problème suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y\left(t\right)), \ t \in J = [0, T], t \neq t_k, \ k = 1, ..., m, \ 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{8}$$

$$\Delta y \mid_{\ t=t_k} = I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right), \ k = 1, ..., m, \tag{9}$$

$$y(0) = y_0, \tag{10}$$

où $f : J \times E \to E$ est une fonction donnée, $I_k : E \to E, k = 1, ..., m$ et $y_0 \in E$, $0 = t_0 < t_1 ... t_m < t_{m+1} = T$ $\Delta y \mid_{\ t=t_k} = y\left(t_k^+\right) - y\left(t_k^-\right)$, $y\left(t_k^+\right) = \lim\limits_{h \to 0^+} y\left(t_k + h\right)$ et $y\left(t_k^-\right) = \lim\limits_{h \to 0^-} y\left(t_k + h\right)$ représentent les limites à droite et à gauche de $y(t)$ au $t = t_k$, $k = 1, ..., m$.

Puis, nous présenterons un résultat d'existence pour le problème non local suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y\left(t\right)), \ t \in J = [0, T], t \neq t_k, \ k = 1, ..., m, \ 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{11}$$

$$\Delta y \mid_{\ t=t_k} = I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right), \ k = 1, ..., m, \tag{12}$$

$$y(0) + g\left(y\right) = y_0, \tag{13}$$

où $f, I_k, k = 1, ..., m$ sont comme le probléme (8)-(10), et $g : PC(J, E) \to E$ est une fonction continue.

Le sixième chapitre intitulé *“Problème de Darboux”*, on s'intéresse a l'existence des solutions pour les problèmes a valeur initial suivant :

$$\left(\ ^{c}D_0^{\alpha}u\right)(t, y) = f\left(t, y, u\left(t, y\right)\right), \ (t, y) \in J \ , \tag{14}$$

$$u(t, 0) = \varphi\left(t\right), \ u\left(0, y\right) = \psi\left(y\right), \ t \in [0, a], \ y \in [0, b], \tag{15}$$

où ${}^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de type Caputo d'ordre $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in (0,1] \times (0,1]$, $f : J \times E \to E$, est une fonction donnée, $\varphi : [0,a] \to E$ et $\psi : [0,b] \to E$ sont des fonctions absolument continues, $\varphi(0) = \psi(0)$.
Puis, nous examinons le problème non local suivant :

$$\left({}^{c}D^{\alpha}u \right)(t,y) = f\left(t, y, u\left(t,y\right)\right), \ (t,y) \in J, \tag{16}$$

$$u(t,0) + Q\left(u\right) = \varphi\left(t\right), \ u\left(0,y\right) + K\left(u\right) = \psi\left(y\right), \ t \in [0,a], \ y \in [0,b], \tag{17}$$

où f, φ, ψ, sont comme dans le problème (6.1)-(6.2) et $Q, K : C(J,E) \to E$ sont des fonctions continues.

Le septième chapitre intitulé *"Problème de Darboux avec impulsions"*, nous présentons un résultat d'existence des solutions pour les problèmes a valeur initial suivantes :

$$\left({}^{c}D_{0}^{\alpha}u \right)(t,y) = f\left(t, y, u\left(t,y\right)\right), \ (t,y) \in J, \ t \neq t_k, k = 1, ..., m, \tag{18}$$

$$u(t_k^+, y) = u(t_k^-, y) + I_k\left(u(t_k^-, y)\right) \ \text{ si } y \in [0,b], k = 1, ..., m, \tag{19}$$

$$u(t,0) = \varphi\left(t\right), u\left(0,y\right) = \psi\left(y\right), \ t \in [0,a], y \in [0,b], \tag{20}$$

où $J = [0,a] \times [0,b], a, b > 0$, ${}^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de type Caputo d'ordre $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in (0,1] \times (0,1], 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} < a$, $f : J \times E \to E$, est une fonction donnée, $\varphi : [0,a] \to E$ et $\psi : [0,b] \to E$ sont des fonctions absolument continues ,$\varphi(0) = \psi(0)$ et E est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$.

Puis, nous examinons le problème non locale suivant :

$$\left({}^{c}D_{0}^{\alpha}u \right)(t,y) = f\left(t, y, u\left(t,y\right)\right), \ (t,y) \in J \ , \ t \neq t_k, k = 1, ..., m, \tag{21}$$

$$u(t_k^+, y) = u(t_k^-, y) + I_k\left(u(t_k^-, y)\right), \ y \in [0,b]\, 0, k = 1, ..., m, \tag{22}$$

$$u(t,0)+Q\left(u\right)=\varphi\left(t\right),u\left(0,y\right)+K\left(u\right)=\psi\left(y\right),\ t\in\left[0,a\right],y\in\left[0,b\right], \tag{23}$$

où $f,\varphi,\psi,I_k;k = 1,...,m$, sont comme dans le problème (18)-(20) et Q,K : $PC\left(J,E\right)\to E$ sont des fonctions continues.

Puis on donne une conclusion du travail effectué. On termine ce mémoire par une bibliographie riche.

Phrases et mots clés : Équations différentielles, fractionnaires, existence de solutions, dérivée fractionnaire de type Caputo, intégral fractionnaire, point fixe, espaces de Banach, mesure de non compacité.

Classifications A.M.S : 26**A**33, 34**A**37, 34**A**60, 34**B**15, 34**G**20.

CHAPITRE UN

Préliminaire

1.1 Un aperçu historique sur la dérivation fractionnaire

Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier ou non entier, réel ou complexe. Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann et de Liouville, alors que l'interrogation sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne. En effet, l'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de Leibniz, à qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire. Il introduisit le symbole de dérivation d'ordre n, $\frac{d^n y}{dx^n} D^n y$, où n est un entier positif. Ce fut peut être un jeu naïf des symboles qui poussa l'Hospital à s'interroger sur la possibilité d'avoir n dans $\mathbb{Q}$. Il posa la question : et si $n = \frac{1}{2}$? En 1695, dans une lettre à l'Hospital, Leibniz écrivit prophétiquement : « Ainsi il s'ensuit que $d^{\frac{1}{2}} x$ sera égal à $x \sqrt[2]{dx : x}$, un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences ».

Sur ces questions, nous retrouvons les contributions de grands mathématiciens tels qu'Euler ou Lagrange au $XVIII^e$ siècle, Laplace, Fourier, Liouville (1832 ; 1837) ou Riemann (1847) au XIX^e siècle, ainsi que Grünwald (1867) et Letnikov (1868) dans la seconde moitié du même siècle. Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée ; de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionnants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Pendant ces trois dernières décennies, plus d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire et les champs d'applications se sont diversifiés.(voir[25, 18])

Dans ce qui suit, nous allons donner d'abord quelque notions, des définitions et des lemmes utilisées.

1.2 Notations et définitions

Dans la suite de ce chapitre, nous introduisons les notations, définitions, préliminaires et théorémes nécessaires pour cette étude.
Soit $J := [0, T]$, $T > 0$ et E est un espace de Banach, muni de la norme$\|\cdot\|$.
Notons $C(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions continues $y : J \to E$, muni de la norme

$$\|y\|_\infty := \sup\{\|y(t)\|, t \in J\}.$$

Définition 1.2.1. [31] *Une fonction $f : J \to E$ est intégrable au sens de* **Bochner** *si il existe une suite $\{y_n\}$ de fonctions en escalier qui converge vers y p.p. et telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|y_n(s) - y(s)\| \, ds = 0.$$

▷ Si y est Bochner intégrable, on a alors

$$\int_0^T y(s) \, ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^T y_n(s) \, ds.$$

▷ On note par $L^1(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $y : J \to E$ qui sont Bochner intégrable, muni de la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^T \|y(t)\| dt.$$

▷ Soit $L^\infty(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $y : J \to E$ qui sont essentiellement bornées, muni de la norme

$$\|y\|_{L^\infty} = \inf\{c > 0 : \|y(t)\| \leqslant c \ , p.p. \, t \in J\}.$$

Proposition :[31] Soit $y : [0, T] \longrightarrow E$ une fonction mesurable. y est Bochner integrable si et seulement si la fonctions scalaire $t \longmapsto \|y(t)\|$ est Lebesgue integrable.

Définition 1.2.2. [31] *Une fonction $f : J \to E$ est dite* ***absolument continue*** *si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition finie $[a_i, b_i]_{i=1}^p$ vérifiant*

$$\sum_{i=1}^p (b_i - a_i) < \delta,$$

alors

$$\sum_{i=1}^{p} \|y(b_i) - y(a_i)\| < \varepsilon.$$

▷ On note par $AC^1(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions dérivables $y : J \to E$ dont la première dérivée est absolument continue.

Définition 1.2.3. [31] *Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$ et $T : E \to E$ une application. Un élément x de E est dit* ***point fixe*** *de T si $Tx = x$.*

Définition 1.2.4. *On appelle fonction* ***Gamma*** *eulérienne (ou intégrale eulérienne de seconde espèce) la fonction notée Γ définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

ou x est un nombre complexe quelconque tel que $Re(x) > 0$.

Définition 1.2.5. *La fonction $B(p, q)$est la fonction* ***Bêta*** *(ou intégrale eulerienne de première espèce), défini par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx \quad p > 0,\ q > 0.$$

On a une égalité exprimant le lien entre l'intégrale eulerienne de première et seconde espèce :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Définition 1.2.6. [31] *L'application $f : J \times E \to E$ est dite* ***Carathéodory*** *si*
(i) $t \to f(t, u)$ est mesurable pour tout $u \in E$,
(ii) $u \to f(t, u)$ est continue presque par tous $t \in J$.

De plus, si

(iii) pour tout $r > 0$, il existe une fonction $\phi_r \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $u \in \mathbb{R}$ avec $\|u\| \leqslant r$;

$$\|f(t,u)\| \leqslant \phi_r(t) \quad p.p. \quad t \in J\ ;$$

alors *l'application f est dite* ***L^1- Carathéodory.***

1.3 Quelques définitions et propriétés d'analyse multivoque

Soient X, Y deux ensembles, $N : X \to 2^Y$ une application $A \subset Y$. Nous définissons le graphe de N par

$$graph\,(N) = \{(x, y) : x \in X, y \in N\,(X)\}\,.$$

▷ On note :
$\mathcal{P}\,(E) = \{Y \subset E : Y \neq \emptyset\}$,
$\mathcal{P}_{cl}\,(E) = \{Y \subset \mathcal{P}\,(E) : Y \text{ fermé}\}$,
$\mathcal{P}_{b}\,(E) = \{Y \subset \mathcal{P}\,(E) : Y \text{ borné}\}$,
$\mathcal{P}_{cv}\,(E) = \{Y \subset \mathcal{P}\,(E) : Y \text{ convexe}\}$,
$\mathcal{P}_{cp}\,(E) = \{Y \subset \mathcal{P}\,(E) : Y \text{ compact}\}$,
$\mathcal{P}_{cv,cp}\,(E) = \mathcal{P}_{cv}\,(E) \cap \mathcal{P}_{cp}\,(E)$.

Pour plus de détails sur l'analyse multivoque voir les livres de Deimling [16] et Hu et Papageorgiou[23].
Soient $R > 0$,

$$B = \{x \in E : |x| \leqslant R\}\,,$$

et

$$U = \{x \in C\,(J, E) : \|x\| < R\}\,.$$

Il est clair que $\overline{U} = C\,(J, B)\,.$

Définition 1.3.1. Une fonction $F : X \to E$ est dit semi-continue superieurement (s.c.s.) si pour tout $x_0 \in X$ et tout ouvert W de E tel que $F\,(x_0) \subset W$, il existe un voisinage $V\,(x_0)$de x_0 dans X tel que :$F\,(V\,(x_0)) \subset W$.

Définition 1.3.2. Une application multivoque $F : J \times E \to \mathcal{P}(E)$ est dite de Carathéodory si

(i) $t \to F(t,u)$ est mesurable pour chaque $u \in E$,

(ii) $u \to F(t,u)$ est semi-continue supérieurement pour presque tout $t \in J$.

De plus, si

(iii)pour tout $q > 0$, il existe une fonction $\varphi_q \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $u \in E$ avec $\|u\| \leqslant q$;

$$\|F(t,u)\| = \{\|v\| : v \in F(t,u)\} \leqslant \varphi_q(t) \quad p.p. \quad t \in J\ ;$$

alors l'application f est dite ***L^1- Caratheodory.***

Pour chaque $y \in C(J,E)$, on définit l'ensemble des sélections de F par

$$S_{F,y} = \left\{ f \in L^1(J,E) : f(t) \in F(t, y(t)) \, \text{pour } \text{ p.p.} t \in J \right\}.$$

Lemme 1.3.3. *[24]Soit J un intervalle réel compact. Soit $F : J \times E \to \mathcal{P}_{cv,cp}(E)$ est une application multivoque de type Carathéodory et soit Θ une application linéaire continue de $L^1(J,E) \to C(J,E)$, alors*

$$\Theta \circ S_{F,y} : C(J,E) \to \mathcal{P}_{cv,cp}(C(J,E)), y \to (\Theta \circ S_{F,y})(y) = \Theta(S_{F,y})$$

est un opérateur à graphe fermé dans $C(J,E) \times C(J,E)$.

1.4 Intégrale, Dérivée fractionnaire

Dans cette Section, nous donnons quelques définitions et résultats concernant le calcul Intégrale et Dérivée fractionnaire de type Caputo.

Définition 1.4.1. [29, 28] L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $h \in L^1[a,b]$ d'ordre $r \in R_+$; est définie par

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t \frac{h(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds,$$

où Γ est la fonction Gamma. Lorsque $a = 0$ nous écrivons $I^\alpha h(t) = h(t) * \varphi_\alpha(t)$ où $\varphi_{r\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *pour* $t > 0$, $\varphi_\alpha(t) = 0$ *pour* $t \leqslant 0$, et $\varphi_\alpha \longrightarrow \delta$ quand $\alpha \longrightarrow 0$.

Exemple 1.4.2. Soit $h(t) = (t-a)^{\mu}$ ou $\mu > -1$.

$$I_a^{\alpha} h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{h(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{(t-a)^{\mu}}{(t-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $s = a + (t-a)x$, on obtient,

$$I_a^{\alpha} h(t) = \frac{(t-a)^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (1-x)^{\alpha-1} x^{\mu} d\tau = \frac{(t-a)^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha.\mu+1)$$

$$= \frac{(t-a)^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+\alpha)}$$

D'où

$$I_a^{\alpha} (t-a)^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+\alpha)} (t-a)^{\mu+\alpha}.$$

Proposition 1.4.3. *Nous avons les propriétés suivantes :*

i)$I_0^0 h(t) = I_d h(t) = h(t)$,

ii)$I_0^{\alpha} I_0^{\beta} h(t) = I_0^{\alpha+\beta} h(t)$,

iii) l'operateur integral I_0^{α} *est linéaire.*

Définition 1.4.4. [29] Pour une fonction donnée h sur l'intervalle $[a,b]$ la dérivée d'ordre fractionnaire Caputo de h, d'ordre $r > 0$ est définie par

$$^{c}D^{\alpha} h(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h^n(s) ds,$$

ici $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désignent la partie entière de α.
Par exemple, pour $0 < \alpha < 1$ et $h : [a,b] \to E$ une fonction absolument continue alors la dérivée d'ordre fractionnaire α de h existe.

Lemme 1.4.5. *[30, 32] Soit* $\alpha > 0$, *alors l'équation différentielle*

$$^{c}D^{\alpha} h(t) = 0$$

a les solutions

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}, c_i \in E, i = 0, l, ...n—1,\ n = [\alpha] + 1.$$

Lemme 1.4.6. *[30, 32] Soit* $\alpha > 0$, *alors*

$$I^{\alpha\,c}D^{\alpha}h(t) = h\,(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1},$$

avec $c_i \in E$, $i \in 0, 1, ..., n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Définition 1.4.7. [30, 32] Soit $J = [0,a] \times [0,b]$ $a_1 \in [0,a]$, $z^+ = (a_1, 0) \in J, J_z = [a_1, a] \times [0, b]\,; \alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha)$ pour $f \in L^1(J_z, E)$, l'intégrale mixte Riemann-Liouville d'ordre α de f est définie par :

$$\left(I^{\alpha}_{z^+} f\right)(t,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)} \int_{a_1}^{t} \int_{0}^{y} (t-s)^{\alpha_1 - 1} (y-x)^{\alpha_2 - 1} f\,(s,x)\,dsdx,$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction Euler gamma .
Notons $D^2_{ty} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial y}$ la dérivée partielle mixte de deuxième ordre.
Pour une fonction $h \in L^1(J)$ ou $D^2_{ty}h$ est Lebesgue intégrable sur J la dérivée d'ordre fractionnaire Caputo de h d'ordre α est définie par

$$\left({}^{c}D^{\alpha}_{z^+}h\right)(t,y) = \left(I^{\alpha}_{z^+} D^2_{ty} h\right)(t,y)\,.$$

1.5 La mesure de non compacité au sens de ***Kuratowski***

Nous présentons dans cette section quelques propriétés fondamentales de la mesure de non compacité au sens de *Kuratowski*.

Définition 1.5.1. [5, 6] La mesure de non compacité au sens de *Kuratowski est l'application* $\gamma : \mathcal{P}_b(E) \to \mathbb{R}^+$ *définie par*

$$\gamma(B) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i \; diam\,(B_i) \leqslant \varepsilon\right\};\; B \in \mathcal{P}_b(E)\,.$$

Propriétés : La mesure de non compacité au sens de *Kuratowski* satisfait les propriétés suivants :[5, 6]
(a) $\gamma(B) = 0 \Leftrightarrow \overline{B}\, est\, compacte\, (B\, est\, relativement\, compacte)$.
(b) $\gamma(B) = \gamma\left(\overline{B}\right)$.
(c) $A \subseteq B \Rightarrow \gamma(A) \leqslant \gamma(B)$.
(d) $\gamma(A+B) \leqslant \gamma(A) + \gamma(B)$.
(e) $\gamma(cA) = \mid c \mid \gamma(B)\,; c \in \mathbb{R}$.
(f) $\gamma(convB) = \gamma(B)$.

Puis on a cette résultat suivante

Théorème 1.5.2. *[21] Soit* $C \subset L^1(J,E)$ *un ensemble dénombrable avec* $\|u(t)\| \leqslant h(t)$ *pour p.p.* $t \in J$ *et tout* $u \in C$*; où* $h \in L^1(J)$ *: alors la fonction* $\phi : t \to \gamma(C(t))$ *appartient à* $L^1(J)$ *et satisfait*

$$\gamma\left(\left\{\int_0^T u(s)\,ds : u \in C\right\}\right) \leqslant 2\int_0^T \gamma(C(s))\,ds.$$

1.6 Théorèmes de point fixe

Pour les applications ultérieures, nous avons besoin de des théorèmes de point fixe suivants :

Théorème 1.6.1. *(Mönch,[4, 26]) Soit* D *un sous-ensemble fermé, borné et convexe d'un espace de Banach tel que* $0 \in D$ *et soit* N *une application continue dans* D *sur lui-même. Si l'implication*

$$V = \overline{conv}N(V)\,ou\,V = N(V) \cup \{0\} \Rightarrow \gamma(V) = 0$$

est valide pour chaque sous-ensemble V *de* D *alors* N *a un point fixe.*

Théorème 1.6.2. *[27] Soit* K *un sous-ensemble fermé, convexe d'un espace de Banach* $E; U$ *un sous-ensemble relativement ouvert de* K *et* $N : \overline{U} \to P_c(K)$*Supposons que le graph*$(N)$ *est fermé,* N *est un application d'ensemble compact dans des ensembles relativement compacts, et que pour certains* $x_0 \in U$*; les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\left.\begin{array}{c} M \subset \overline{U}, M \subset conv\left(x_0 \cup N(M)\right) \\ et\, \overline{M} = \overline{C} avec\, C \subset M \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overline{M}\, compacte,$$

$$x \notin (1-\lambda)\,x_0 + \lambda N(x)\, pour\ tout \qquad x \in \overline{U} \setminus U,\ \lambda \in (0,1)\,.$$

Alors il existe $x \in \overline{U}$ *avec* $x \in N(x)$ *.*

Lemme 1.6.3. *(Ascoli-Arzela) Soit* A *un sous ensemble de* $C(J,E)$*,* A *est relativement compact dans* $C(J,E)$ *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) l'ensemble A est borné. i.e. il existe une constante $K > 0$ Tel que :

$$\|f(x)\| \leqslant K \qquad pour\,tout \quad x \in J\,et\,tout\,f \in A,$$

ii) l'ensemble A est équicontinu. i.e Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leqslant \varepsilon \qquad \textit{pour tous} \quad t_1, t_2 \in J \, et \, tout \, f \in A,$$

iii) pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), \ f \in A\} \subset E$ est relativement compacte.

Chapitre Deux

Problème aux limites pour des équations fractionnaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse au résultat d'existence des solutions pour le problème aux limites :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)),\ t \in J = [0, T],\ 1 < \alpha < 2, \tag{2.1}$$

$$y(0) = y_0, \qquad y(T) = y_T. \tag{2.2}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times E \to E$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard, y_0, $y_T \in E$ et E est un espace de Banach avec la norme $\|.\|$. Le résultat de ce chapitre est basé sur le Théorème de point fixe de *Mönch* 1.6.1 combiné avec la mesure de non compacité de *Kuratowski*.

2.1 Existence des solutions

Tout d'abord, nous définissons ce que nous exprimons être une solution du problème aux limites (2.1)-(2.2).

Définition 2.1.1. Une fonction $y \in AC^1(J, E)$ est dite une solution du problème (2.1)-(2.2) si y satisfait l'équation (2.1), et les conditions (2.2).

Lemme 2.1.2. *Soit* $1 < \alpha < 2$ *et* $h : J \to E$ *une fonction continue. Le problème aux limites linéaire*

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t),\ \ t \in J \tag{2.3}$$

$$y(0) = y_0, y(T) = y_T. \tag{2.4}$$

a une solution unique donnée par

$$y(t) = g(t) + \int_0^T G(t,s)\, h(s)\, ds, \tag{2.5}$$

où

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T,$$

et

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \begin{array}{cc} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si\, 0 \leqslant s \leqslant t \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si\, t \leqslant s \leqslant T. \end{array} \right\}.$$

Preuve. Supposons que y le problème (2.3)-(2.4), d'aprés le lemme (1.4.6), on obtient :

$$\begin{aligned} y(t) &= I_a^\alpha h(t) + c_0 + c_1 t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds + c_0 + c_1 t, \end{aligned}$$

pour certaines constantes $c_0, c_1 \in E$. les conditions (2.4) donnent

$$c_0 = y_0$$

et

$$c_1 = \frac{1}{T} y_T - \frac{1}{T} y_0 - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds.$$

Ensuite, la solution de (2.3)-(2.4)est

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\ &\quad + \left(1 - \frac{t}{T}\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t \left[(t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} \right] h(s)\, ds - \frac{t}{T} \int_t^T (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \right] \\ &\quad + \left(1 - \frac{t}{T}\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T. \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons (2.5).

□

Lemme 2.1.3. *Le problème aux limites (2.1)-(2.2) a une solution y, si et seulement si y satisfait l'équation intégral*

$$y(t) = g(t) + \int_0^T G(t,s) f(s, y(s))\, ds, \tag{2.6}$$

où

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T,$$

et

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \begin{array}{cc} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si\, 0 \leqslant s \leqslant t \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si\, t \leqslant s \leqslant T. \end{array} \right\}.$$

Il est évident que $G(t,s)$ est continue sur $[0,T] \times [0,T]$.
Notons

$$G^\star = \sup \left\{ \|G(t,s)\|,\ (t,s) \in J \times J \right\}.$$

La fonction g est continue sur J, donc il existe $g* = \sup \|g(t)\|$. Pour établir notre résultat principal concernant l'existence de solutions de (2.1)-(2.2), nous donnons des conditions appropriées sur les fonctions impliquées dans ce problème.
Nous supposons que :
(H1) $f : J \times E \to E$ satisfait aux conditions de Carathéodory.
(H2) Il existe $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$, de telle sorte que

$$\|f(t,y)\| \leqslant p(t)\|y\|, pour\ t \in J\ et\ chaque\ y \in E.$$

(H3) Pour chaque $t \in J$ et chaque borné $B \subset E$ nous avons

$$\gamma(f(t,B)) \leqslant p(t)\gamma(B).$$

Théorème 2.1.4. *Supposons que les hypothèses (H1) - (H3) sont vérifiées. Si*

$$G^\star \int_0^T p(s)\, ds < 1, \tag{2.7}$$

alors le problème aux limites (2.1)-(2.2) a au moins une solution.

Preuve. Transformons le problème (2.1)-(2.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $N : C(J,E) \to C(J,E)$ défini par

$$N(y)(t) = g(t) + \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds,$$

d'apés le lemme 2.1.3, les points fixes de l'opérateur N sont des solutions du problème (2.1)-(2.2). Soit

$$R > \frac{g^\star}{1 - G^\star \int_0^T p\,(s)\,ds} \tag{2.8}$$

et l'ensemble

$$D_R = \{y \in C\,(J,E) : \|y\|_\infty \leqslant R\}\,.$$

D_R est un sous-ensemble fermé, borné et convexe. Nous allons montrer que N satisfait les hypothèses du Théorème 1.6.1 La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape 1 : *N est continue.*
Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \to y$ dans $C(J,E)$ alors pour chaque $t \in J$

$$\begin{aligned}
\|N(y_n)(t) - N(y)(t)\| &= \left\| \int_0^T G\,(t,s)\,[f\,(s,y_n\,(s)) - f\,(s,y\,(s))]\,ds \right\| \\
&\leqslant \int_0^T \|G\,(t,s)\|\,\|f\,(s,y_n\,(s)) - f\,(s,y\,(s))\|\,ds \\
&\leqslant G^\star \int_0^T \|f\,(s,y_n\,(s)) - f\,(s,y\,(s))\|\,ds.
\end{aligned}$$

Comme f est de type Carathéodory, alors par le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\|N(y_n) - N(y)\|_\infty \to 0\,quand\,n \to \infty.$$

Étape 2 : *N est un application de D_R dans lui-même.*
Pour chaque $y \in D_R$ d'après (H2) et (2.8) nous avons pour chaque $t \in J$

$$\begin{aligned}
\|N(y)(t)\| &\leqslant \|g\,(t)\| + \int_0^T \|G\,(t,s)\|\,\|f\,(s,y\,(s))\|\,ds \\
&\leqslant \|g\,(t)\| + \int_0^T \|G\,(t,s)\|\,p\,(s)\,\|y\,(s)\|\,ds \\
&\leqslant g^\star + G^\star R \int_0^T p\,(s)\,ds \\
&\leqslant R.
\end{aligned}$$

L'étape 3 : *$N(D_R)$ est bornée et équicontinue.*
D'après l'étape 2 nous avons $N(D_R) = \{N(y) : y \in D_R\} \subset D_R$. Ainsi, pour chaque $y \in D_R$nous avons $\|N(y)\|_\infty \leqslant R$ ce qui signifie que $N(D_R)$ est bornée.
Pour l'équicontinuité de $N(D_R)$. Soit $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2$ et $y \in D_R$. Alors

$$\begin{aligned} \|N(y)(t_1) - N(y)(t_2)\| &\leqslant \|g(t_2) - g(t_1)\| \\ &\quad + \left\| \int_0^T [G(t_1, s) - G(t_2, s)] f(s, y(s))\, ds \right\| \\ &\leqslant \|g(t_2) - g(t_1)\| + R \left\| \int_0^T [G(t_1, s) - G(t_2, s)] p(s)\, ds \right\|. \end{aligned}$$

Comme $t_1 \to t_2$, 1e second membre droit de l'inégalité ci-dessus tend ver zéro.

Maintenant soit V un sous-ensemble de D_R tel que $V \subset \overline{conv}(N(V) \cup \{0\})$. V est bornée et équicontinue et donc la fonction $v \to v(t) = \gamma(V(t))$ est continue sur J. Puisque la fonction g est continue sur J, l'ensemble $\overline{\{g(t), t \in J\}} \subset E$ est compact. En utilisant ce fait, (H3) et les propriétés de la mesure γ, nous avons pour chaque $t \in J$

$$\begin{aligned} v(t) &\leqslant \gamma(N(V)(t) \cup \{0\}) \\ &\leqslant \gamma(N(V)(t)) \\ &\leqslant \int_0^T \|G(t, s)\| p(s) \gamma(V(s))\, ds \\ &\leqslant G^\star \int_0^T p(s) v(s)\, ds \\ &\leqslant \|v\|_\infty G^\star \int_0^T p(s)\, ds. \end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$\|v\|_\infty \leqslant \|v\|_\infty G^\star \int_0^T p(s)\, ds.$$

D'abrès la condition (2.7) nous obtenons $\|v\|_\infty = 0$, c'est a dire $v(t) = 0$ pour chaque $t \in J$, et ensuite $V(t)$ est relativement compact dans E. En vue du lemme d'$Ascoli - Arzela$, V est relativement compact dans D_R. En appliquant maintenant le Théorème 1.6.1, nous concluons que N a un point fixe qui est une solution du problème (2.1)-(2.2).

□

2.2 Exemple :

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats. Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{aligned} &{}^cD^{\alpha}y_n(t) = \frac{2}{19+e^t}\left|y_n(t)\right|, \ t \in J = [0,1], 1 < \alpha < 2, \\ &y_n(0) = 0, \ y_n(1) = 1, \end{aligned} \tag{2.9}$$

où $n \in \mathbb{N}$

Posons

$$E = l^1 = \left\{ y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) : \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty \right\}$$

avec la norme

$$\|y\|_E = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|.$$

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \ \text{et} \ f = (f_1, f_2, ..., f_n, ...)$$

$$f_n(t, x_n) = \frac{2}{19+e^t} x_n \ , \ (t, x_n) \in J \times E$$

Il est clair que les conditions (Hl) et (H2) sont vérifiées avec

$$p(t) = \frac{2}{3+e^t}.$$

De (3.7) la fonction G est donnée par

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & , 0 \leqslant s \leqslant t, \\ -\frac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & , t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Un calcul simple donne

$$G^{\star} < \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.$$

La condition (2.7) est satisfaite avec $T = 1$. En effet

$$\begin{aligned} G^{\star} \int_0^T p(s)\,ds &< \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{1+e^t} ds \\ &< \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{2} ds \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \\ &< 1 \end{aligned}$$

est satisfait pour chaque $\alpha \in (1, 2)$. Alors d'après le Théorème 2.1.4, le problème (2.9) a une solution sur $[0, 1]$.

Chapitre Trois

Problème aux limites avec des conditions intégrales

Ce chapitre est consacré à létude de lexistence des solutions du problème aux limites avec des conditions intégrales suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)),\ t \in J = [0, T]\ ,\ 1 < \alpha \leqslant 2, \tag{3.1}$$

$$y(0) - y'(0) = \int_0^T g(s, y(s))\, ds, \tag{3.2}$$

$$y(T) - y'(T) = \int_0^T h(s, y(s))\, ds, \tag{3.3}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f,\ g\ et\ h : J \times E \to E$ sont des fonctions données vérifiants certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et E est un espace de Banach avec la norme $\|.\|$. Nous consacrons la première section à l'éxistence des solutions du problème (3.1)-(3.3) qui est basé sur le Théorème du point fixe de Mönch 1.6.1 et la deuxième section sera réservée à un exemple illustrant l'applicabilité des conditions imposées.

3.1 Existence des Solutions.

Nous commençons par donner la définition de ce que nous exprimons comme solution du problème (3.1)-(3.3).

Définition 3.1.1. Une fonction $y \in AC^1(J, E)$ est dite une solution de (3.1)-(3.3) si elle satisfait l'équation (3.1) sur J, et les conditions (3.2)-(3.3).

Lemme 3.1.2. *[8]Soit $1 < \alpha \leqslant 2$ et σ, ρ_1, $\rho_2 : J \to E$ des fonctions continues. Le problème aux limites linéaire*

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = \sigma(t),\ t \in J = [0, T],\ 1 < \alpha \leqslant 2 \tag{3.4}$$

$$y(0) - y'(0) = \int_0^T \rho_1(s)\,ds, \tag{3.5}$$

$$y(T) - y'(T) = \int_0^T \rho_2(s)\,ds. \tag{3.6}$$

a une solution unique donnée par

$$y(t) = P(t) + \int_0^T G(t,s)\sigma(s)ds,$$

avec

$$P(t) = \frac{(T+1-t)}{T-2}\int_0^T \rho_1(s)\,ds + \frac{t+1}{T-2}\int_0^T \rho_2(s)\,ds,$$

et

$$G(t,s) \quad = \quad \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)} \ , & 0 \leqslant s \leqslant t \\ -\frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)} \ , & t \leqslant s < T. \end{cases} \tag{3.7}$$

Lemme 3.1.3. *Le problème aux limites (3.1)-(3.3)a une solution y, si et seulement si $y \in C(J,E)$ satisfait l'équation intégrale*

$$y(t) = P_y(t) + \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds,$$

avec

$$P_y(t) = \frac{(T+1-t)}{T-2}\int_0^T g(s)\,ds + \frac{t+1}{T-2}\int_0^T h(s)\,ds,$$

et

$$G(t,s) \quad = \quad \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)} \ , & 0 \leqslant s \leqslant t \\ -\frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(T-s)^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)} \ , & t \leqslant s < T. \end{cases} \tag{3.8}$$

Remarque 3.1.4. Il est clair que la fonction $t \to \int_0^T |G(t,s)|\,ds$ est continue sur J, et est donc bornée. Soit

$$\tilde{G} = \sup\left\{\int_0^T |G(t,s)|\,ds, t \in J\right\}.$$

Nous introduisons les hypothèses suivantes :
(H1) Les fonctions $f, g, h : J \times E \to E$ satisfont aux conditions de Carathéodory.
(H2) Ils existent $p_f, p_g, p_h \in L^{\infty}(J, \mathbb{R}^+)$ tel que

$$\|f(t,y)\| \leq p_f(t)\|y\| \quad p.p.\, t \in J; \quad y \in E,$$

$$\|g(t,y)\| \leq p_g(t)\|y\| \quad p.p.\, t \in J, \quad y \in E,$$

$$\|h(t,y)\| \leq p_h(t)\|y\| \quad p.p.\, t \in J, \quad y \in E.$$

(H3) Pour p.p. $t \in J$ et chaque ensemble borné $B \subset E$ nous avons

$$\gamma(f(t,B)) \leqslant p_f(t)\gamma(B),$$

$$\gamma(g(t,B)) \leqslant p_g(t)\gamma(B),$$

$$\gamma(h(t,B)) \leqslant p_h(t)\gamma(B).$$

Théorème 3.1.5. *Supposons que les hypothèses (H1) - (H3) sont vérifiées.Si*

$$\frac{T(T+1)}{T+2}\left[\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}\right] + \tilde{G}\|p_f\|_{L^\infty} < 1, \tag{3.9}$$

alors le problème aux limites (3.1)-(3.3) a au moins une solution.

Preuve. On transforme le problème(3.1)-(3.3) en un problème de point fixe. Considèrons l'operateur $N : C(J,E) \to C(J,E)$ défini par :

$$(Ny)(t) = P_y(t) + \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds$$

où

$$P_y(t) = \frac{T+1-t}{T+2}\int_0^T g(s,y(s))\,ds + \frac{t+1}{T+2}\int_0^T h(s,y(s))\,ds$$

et la fonction $G(t,s)$ est donnée par (3.8).
D'après le Lemme 3.1.3 les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème (3.2). Soit $R > 0$ et considérer l'ensemble

$$D_R = \{y \in C(J,E) : \|y\|_\infty \leqslant R\}.$$

Il est clair que le sous-ensemble D_R est fermé, borné, et convexe. Nous allons montrer que N satisfait les hypothèses du Théorème 1.6.1. La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape l : *N est continu*

Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \to y$ dans $C(J,E)$. Alors, pour chaque $t \in J$:

$$\begin{aligned}
\|N(y_n)(t) - N(y)(t)\| &\leqslant \frac{T+1}{T+2}\int_0^T \|g(s,y_n(s)) - g(s,y(s))\|\,ds \\
&\quad + \frac{T+1}{T+2}\int_0^T \|h(s,y_n(s)) - h(s,y(s))\|\,ds \\
&\quad + \int_0^T |G(t,s)|\,\|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\|\,ds.
\end{aligned}$$

Soit $\rho > 0$ tel que

$$\|y_n\|_\infty \leqslant \rho, \quad \|y\|_\infty \leqslant \rho.$$

Par (H2) nous avons

$$\begin{aligned}
\|g(s,y_n(s)) - g(s,y(s))\| &\leqslant 2\rho p_g(s) = \sigma_1(s)\,; \quad \sigma_1 \in L^1(J,\mathbb{R}_+)\,, \\
\|h(s,y_n(s)) - h(s,y(s))\| &\leqslant 2\rho p_h(s) = \sigma_2(s)\,; \quad \sigma_2 \in L^1(J,\mathbb{R}_+)\,, \\
|G(.,s)| \quad \|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\| &\leqslant 2\rho\,|G(.,s)|\,p_f(s) = \sigma_3(s)\,; \quad \sigma_3 \in L^1(J,\mathbb{R}_+)\,.
\end{aligned}$$

Puisque f, g et h sont des fonctions Carathéodory, le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\|N(y_n) - N(y)\|_\infty \longrightarrow 0\,quand\,n \longrightarrow \infty.$$

Étape 2 : *N est un opérteur de D_R dans lui-même.*

Pour chaque $y \in D_R$ par (H2) et (3.9) nous avons pour chaque $t \in J$

$$\begin{aligned}
\|(Ny)(t)\| &\leqslant \frac{T+1}{T+2}\int_0^T \|g(s,y(s))\|\,ds + \frac{T+1}{T+2}\int_0^T \|h(s,y(s))\|\,ds \\
&\quad + \int_0^T |G(t,s)|\,\|f(s,y(s))\|\,ds \\
&\leqslant R\left[\frac{T(T+1)}{T+2}\|p_g\|_{L^\infty} + \frac{T(T+1)}{T+2}\|p_h\|_{L^\infty} + \tilde{G}\,\|p_f\|_{L^\infty}\right] \\
&\leqslant R.
\end{aligned}$$

Étape 3 : *$N(D_R)$ est bornée et équicontinue.*

Par l'étape 2, il est évident que $N(D_R) \subset C(J,E)$ est bornée.
Pour l'équicontinuité de $N(D_R)$. Soit $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$ et $y \in D_R$. Alors

$$\begin{aligned}
\|(Ny)(t_2) - (Ny)(t_1)\| &= \left\| -\frac{t_2 - t_1}{T+2} \int_0^T g(s, y(s))\, ds + \frac{t_2 - t_1}{T+2} \int_0^T h(s, y(s))\, ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^T [G(t_2, s) - G(t_1, s)]\, f(s, y(s))\, ds \right\| \\
&\leqslant \frac{t_2 - t_1}{T+2} TR \left[\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty} + \tilde{G} \|p_f\|_{L^\infty} \right] \\
&\quad + R \|p_f\|_{L^\infty} \int_0^T |G(t_2, s) - G(t_1, s)|\, ds.
\end{aligned}$$

Comme $t_1 \to t_2$ le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.

Maintenant, soit V un sous-ensemble de D_R telles que $V \subset \overline{conv}(N(y)U\{0\})$. V est borné et équicontinu, et donc la fonction $v \to v(t) = \gamma(V(t))$ est continue. Par (H3), et les propriétés de la mesure γ nous avons pour chaque $t \in J$:

$$\begin{aligned}
v(t) &< \gamma(N(V)(t) \cup \{0\}) \\
&\leqslant \gamma(N(V)(t)) \\
&\leqslant \int_0^T \left| \frac{T+1-t}{T+2} \right| p_g(s)\, \gamma(V(s))\, ds + \int_0^T \left| \frac{T+1}{T+2} \right| p_h(s)\, \gamma(V(s))\, ds \\
&\quad + \int_0^T |G(t,s)|\, p_f(s)\, \gamma(V(s))\, ds \\
&\leqslant \frac{T(T+1)}{T+2} \|p_g\|_{L^\infty} v(s) + \frac{T(T+1)}{T+2} \|p_h\|_{L^\infty} v(s) + \tilde{G} \|p_f\|_{L^\infty} v(s) \\
&\leqslant \|v\|_\infty \frac{T(T+1)}{T+2} \left[\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty} + \|p_f\|_{L^\infty} \right].
\end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$\|v\|_\infty \left(1 - \left[\frac{T(T+1)}{T+2} \left[\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty} + \|p_f\|_{L^\infty} \right] \right] \right) \leqslant 0.$$

Par(3.9) il s'ensuit que $\|v\|_\infty = 0$, c'est-à-dire $v(t) = 0$ pour chaque $t \in J$ et $V(t)$ est relativement compact dans E. selon le Lemme d'$Ascoli - Arzela$, V est relativement compact dans D_R.
Appliquons maintenant le Théorème 1.6.1, nous concluons que N a un point fixe qui est une solution du problème (3.1)- (3.3).

□

3.2 Exemple :

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats. Considérons le problème fractionnaire aux limites suivant :

$$\begin{aligned} {}^cD^{\alpha}y_n(t) &= \frac{2}{19+e^t}\left|y_n(t)\right|, \ t \in J = [0,1], \ 1 < \alpha \leqslant 2, \\ y_n(0) - y_n'(0) &= \int_0^1 \frac{2}{5+e^{5s}}\left|y_n(s)\right| ds, \\ y_n(1) - y_n'(1) &= \int_0^1 \frac{2}{3+e^{3s}}\left|y_n(s)\right| ds, \end{aligned} \tag{3.10}$$

où $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$E = l^1 = \left\{ y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) : \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty \right\},$$

avec la norme

$$\|y\|_E = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|.$$

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \ \text{ et } \ f = (f_1, f_2, ..., f_n, ...),$$

$$\begin{aligned} f(t, x_n) &= \frac{2}{19+e^t}x_n \ , \ (t, x_n) \in J \times E, \\ g(t, x_n) &= \frac{1}{5+e^{5t}}x_n \ , \ (t, x_n) \in J \times E, \\ h(t, x_n) &= \frac{2}{3+e^{3t}}x_n \ , \ (t, x_n) \in J \times E. \end{aligned}$$

Il est clair que les conditions (H1) et (H2) sont vérifiées avec

$$p_f(t) = \frac{2}{19+e^t} \quad , \quad p_g(t) = \frac{1}{5+e^{5t}} \quad , \quad p_h(t) = \frac{2}{3+e^{3t}}.$$

De (3.7) la fonction G est donnée par

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} & , 0 \leqslant s \leqslant t, \\ -\frac{(1+t)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} & , t \leqslant s < 1. \end{cases}$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^1 G(t,s)\,ds &= \int_0^t G(t,s)\,ds + \int_t^1 G(t,s)\,ds \\ &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1+t)(1-t)^\alpha}{3\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(1+t)}{3\Gamma(\alpha+1)} \\ &\quad + \frac{(1+t)(1-t)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(1+t)}{3\Gamma(\alpha)} \\ &\quad - \frac{(1+t)(1-t)^\alpha}{3\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(1+t)(1-t)^\alpha}{3\Gamma(\alpha)}.\end{aligned}$$

Un calcul simple donne

$$\tilde{G} < \frac{3}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}.$$

La condition (3.9) est satisfaite avec $T = 1$. En effet

$$\begin{aligned}\frac{T(T+1)}{T+2}\left[\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty} + \|p_f\|_{L^\infty}\right] &< \frac{2}{3}\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right] + \frac{3}{10\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{10\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{5}{10} + \frac{3}{10\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{10\Gamma(\alpha)} \\ &< 1\end{aligned}$$

est satisfaite pour chaque $\alpha \in (1,2]$. Alors d'après le Théorème 3.1.5, le problème (3.10) a une solution sur $[0,1]$.

Chapitre Quatre

Problèmes aux limites pour des inclusions differentielles d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre, nous allons donner un résultat d'existence pour le problème aux limites pour des inclusions differentielles d'ordre fractionnaire suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) \in F\left(t, y(t)\right),\ t \in J = \left[0, T\right],\ 1 < \alpha < 2, \tag{4.1}$$

$$y\left(0\right) = y_0, \quad y\left(T\right) = y_T \tag{4.2}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ est dérivée au sens de Caputo $F : J \times E \to \mathcal{P}\left(E\right)$ est une application multivoque, y_0, $y_T \in E$ et $(E, \|.\|)$ désigne un espace de Banach. Nous introduisons quelques conditions suffisantes pour montrer l'éxistence de solutions du problème aux limites (4.1)-(4.2). Notre aproche est basée sur le Théorème de point fixe de Mönch 1.6.2.

4.1 Existence des solutions

Définition 4.1.1. Une fonction $y \in AC^1\left(J, E\right)$ est dite une solution de (4.1)-(4.2), s'il existe une fonction $f \in L^1\left(J, E\right)$ avec $f\left(t\right) \in F\left(t, y\left(t\right)\right)$ pour p.p. $t \in J$, telle que

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f\left(t\right),\ t \in J\ ,\ 1 < \alpha < 2,$$

et la fonction y satisfait les conditions (4.2).

Pour l'existence de solution pour le problème (4.1)-(4.2), nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant :

Lemme 4.1.2. *[9] Soit $f : J \to E$ une fonction intégrable. L'unique solution y du problème linéaire*

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f\left(t\right), \ \ t \in J,$$

$$y\left(0\right) = y_0, \ y\left(T\right) = y_T,$$

est donnée par

$$\begin{aligned} y\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} f\left(s\right)ds - \frac{t}{T\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha-1} f\left(s\right)ds \\ &\quad -\left(\frac{t}{T}-1\right)y_0 + \frac{t}{T}y_T. \end{aligned}$$

Soient les hypothèses suivantes :
(H1) $F : J \times E \to \mathcal{P}_{cv,cp}\left(E\right)$ est un application multivoque de type Carathéodory.
(H2) Pour chaque $R > 0$, il existe une fonction $p \in L^1\left(J, \mathbb{R}_+\right)$ telle que

$$\left\|F\left(t,y\right)\right\|_{\mathcal{P}} = \sup\left\{|v| : v\left(t\right) \in F\left(t,y\right)\right\} \leqslant p\left(t\right)$$

et pour chaque $(t,y) \in J \times E$ avec $|y| \leqslant R$, et

$$\liminf_{R\to+\infty} \frac{\int_0^T p\left(t\right)dt}{R} = \delta < \infty.$$

(H3) Il existe une fonction de Carathéodory $\psi : J \times [0, 2R] \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\alpha\left(F\left(t,M\right)\right) \leqslant \psi\left(t,\gamma\left(M\right)\right), \ \text{p.p.}t \in J \text{ et chaque } M \subset B,$$

et l'unique solution $\varphi \in C\left(J, [0, 2R]\right)$ de l'inégalité

$$\varphi\left(t\right) \leqslant 2\left[\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1}\psi\left(s,\varphi\left(s\right)\right)ds - \frac{t}{T\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha-1}\psi\left(s,\varphi\left(s\right)\right)ds\right],$$

$t \in J$ est $\varphi \equiv 0$.

Théorème 4.1.3. *Supposons que (H1) - (H3) sont satisfaites. Alors le problème (4.1)-(4.2) a au moins une solution sur $C\left(J, B\right)$, à condition que*

$$\delta < \frac{\Gamma\left(\alpha\right)}{2T} \tag{4.3}$$

Preuve. . Considérons l'opérateur multivoque $N : C(J,E) \to \mathcal{P}(C(J,E))$ défini par

$$
\begin{aligned}
N(y) &= \left\{ h \in C(J,E) : h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\,ds \right. \\
&\quad \left. -\frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s)\,ds - \left(\frac{t}{T}-1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T \ ,\ v \in S_{F,y} \right\}.
\end{aligned}
$$

Les points fixes de N sont des solutions de (4.1)-(4.2). Nous allons montrer que N satisfait les hypothèses du Théorème 1.6.2. La preuve sera donnée en cinq étapes.

Étape 1 : *$N(y)$ est convexe pour chaque $y \in C(J,E)$.*
Si h_1, h_2 appartiennent à $N(y)$, alors il existe $f_1, f_2 \in S_{F,y}$ telles que pour p.p. $t \in J$, nous avons

$$
\begin{aligned}
h_i(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f_i(s)\,ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f_i(s)\,ds \\
&\quad - \left(\frac{t}{T}-1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T \ ,\ i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Soit $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, pour chaque $t \in J$ nous avons

$$
\begin{aligned}
(\lambda h_1 + (1-\lambda) h_2)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2)(s)\,ds \\
&\quad - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} (\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2)(s)\,ds \\
&\quad - \left(\frac{t}{T}-1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.
\end{aligned}
$$

Depuis $S_{F,y}$ est convexe(car F a des valeurs convexes), nous avons

$$\lambda h_1 + (1-\lambda) h_2 \in N(y).$$

Étape 2 : *$N(M)$ est relativement compacte pour chaque compact $M \subset \overline{U}$.*
Pour le prouver, soit $M \subset \overline{U}$ un ensemble compact et (h_n) est une suite d'éléments de $N(M)$. Nous montrons que (h_n)est une suite convergente (en utilisant le Lemme *d'Ascoli-Arzelà*) dans $C(J,E)$. Puisque $(h_n) \in N(M)$, alors il existe $(y_n) \in M$ et $(f_n) \in S_{F,y_n}$telles que

$$
\begin{aligned}
h_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f_n(s)\,ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f_n(s)\,ds \\
&\quad - \left(\frac{t}{T}-1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.
\end{aligned}
$$

Utilisons le Théorème 4.3.1 et les propriétés de la mesure de Kuratowski, on obtient que

$$\begin{aligned}\gamma\left(\{h_n(t)\}\right) &\leqslant 2\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\gamma\left(\left\{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h_n(s)\right\}\right) ds\right. \\ &\left. -\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T \gamma\left(\left\{(T-s)^{\alpha-1} h_n(s)\right\}\right) ds\right]. \qquad (4.4)\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $M(s)$ est compact dans E, l'ensemble $\{f_n(s)\,;\, n \geqslant 1\}$ est compact. Par conséquent, $\gamma(\{f_n(s)\,;\, n \geqslant 1\}) = 0$ pour p.p.$s \in J$. De plus

$$\gamma\left(\left\{(T-s)^{\alpha-1} f_n(s)\,; n \geqslant 1\right\}\right) = (T-s)^{\alpha-1}\gamma\left(\{f_n(s)\,; n \geqslant 1\}\right) = 0,$$

et

$$\gamma\left(\left\{(t-s)^{\alpha-1} f_n(s)\,; n \geqslant 1\right\}\right) = (t-s)^{\alpha-1}\gamma\left(\{f_n(s)\,; n \geqslant 1\}\right) = 0 \text{ pour p.p. } t, s \in J.$$

Maintenant (4.4) implique que $\{h_n(t); n \geqslant 1\}$ est relativement compact dans E, pour chaque $t \in J$. En outre, pour chaque t_1 et t_2 de J, $t_1 < t_2$, nous avons $|h_n(t_2) - h_n(t_1)|$

$$\begin{aligned}
&= \left|\frac{t_2 - t_1}{T}(y_T - y_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}\right] f_n(s)\,ds\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1} f_n(s)\,ds + \frac{t_2-t_1}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f_n(s)\,ds\right| \\
&\leqslant |y_T - y_0|(t_2-t_1) + \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}\right] f_n(s)\,ds\right| \\
&\quad + \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1} f_n(s)\,ds\right| + \left|\frac{t_2-t_1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2} p(s)\,ds\right| \\
&\leqslant |y_T - y_0|(t_2-t_1) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left|(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}\right| p(s)\,ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\left|(t_2-s)^{\alpha-1}\right| p(s)\,ds + \frac{t_2-t_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T p(s)\,ds. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro quand $t_1 \to t_2$. Cela montre que $\{h_n; n \geqslant 1\}$ est équicontinue. Par conséquent, $\{h_n; n \geqslant 1\}$ est relativement compacte dans $C(J, E)$.

Étape 3 : *N a un graphe fermé.*

Soit $(y_n, h_n) \in graph\,(N)\,, n \geqslant 1$ avec $\|y_n - y\|\,, \|h_n - h\| \to 0$ quant $n \to \infty$. Nous devons montrer que $(y, h) \in graph\,(N)$.

$(y_n, h_n) \in graph\,(N)$ signifie que $h_n \in N\,(y_n)$ ce qui signifie qu'il existe $f_n \in S_{F,y_n}$, telle que pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} h_n\,(t) &= \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f_n\,(s)\,ds - \frac{t}{T\Gamma\,(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f_n\,(s)\,ds \\ &\quad - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T. \end{aligned}$$

Considérons l'opérateur linéaire continu

$$\Theta : L^1\,(J, E) \to C\,(J, E)\,,$$

$$f \to \Theta\,(f)\,(t) = \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\,(s)\,ds - \frac{t}{T\Gamma\,(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f\,(s)\,ds.$$

On a

$$\left\| \left[h_n\,(t) + \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 - \frac{t}{T} y_T\right] - \left[h\,(t) + \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 - \frac{t}{T} y_T\right] \right\| \to 0, n \to \infty.$$

Du Lemme 4.3.1, il s'ensuit que $\Theta \circ S_F$ est un opérateur a graphe fermé. Par ailleurs, nous avons

$$h_n\,(t) + \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 - \frac{t}{T} y_T \in \Theta\,(S_{F,y_n})\,.$$

Puisque $y_n \to y$, le lemme 4.4.1 implique que

$$h\,(t) + \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 - \frac{t}{T} y_T = \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\,(s)\,ds - \frac{t}{T\Gamma\,(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f\,(s)\,ds$$

pour certains $f \in S_{F,y}$.

Étape 4 : Supposons $M \subset \overline{U}$, $M \subset conv\,(\{0\} \cup N\,(M))$ et $\overline{M} = \overline{C}$ pour certains ensembles dénombrables $C \subset M$. En utilisant une estimation du type (4.5), nous voyons que $N\,(M)$ est équicontinue. Puis, à partir de $M \subset conv\,(\{0\} \cup N\,(M))\,,$ on déduit que M est aussi équicontinu . Afin d'appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà, il reste à montrer que $M\,(t))$ est relativement compact dans E pour chaque $t \in E$. Puisque $C \subset M \subset conv(\{0\} \cup N(M))$ et C est dénombrable, nous pouvons trouver un ensemble dénombrable $H = \{h_n : n \geqslant 1\} \subset N(M)$ avec $C \subset conv(\{0\} \cup H)$. Alors, il existe $y_n \in M$ et $f_n \in S_{F,y_n}$telles que

$$\begin{aligned} h_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f_n(s)\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f_n(s)\, ds \\ &\quad - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T. \end{aligned}$$

à partir de $M \subset \overline{C}, M \subset conv(\{0\} \cup H))$, et selon le Théorème 4.3.1, nous avons

$$\gamma(M(t)) \leqslant \left(\gamma\left(\overline{C}(t)\right)\right) \leqslant \gamma(H(t)) = \gamma(\{h_n(t); n \geqslant 1\})$$

En utilisant (4.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} \gamma(M(t)) &\leqslant 2\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \gamma\left(\left\{(t-s)^{\alpha-1} f_n(s); n \geqslant 1\right\}\right) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T \gamma\left(\left\{(T-s)^{\alpha-1} f_n(s); n \geqslant 1\right\}\right) ds\right]. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque$f_n(s) \in M(s)$ nous avons

$$\gamma\left(\left\{(T-s)^{\alpha-1} f_n(s); n \geqslant 1\right\}\right) = (T-s)^{\alpha-1} \alpha(M(s))$$

et

$$\gamma\left(\left\{(t-s)^{\alpha-1} f_n(s); n \geqslant 1\right\}\right) = (t-s)^{\alpha-1} \gamma(M(s)).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \gamma(M(t)) &\leqslant 2\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \gamma\left(\left\{(t-s)^{\alpha-1} \gamma(M(s)); n \geqslant 1\right\}\right) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T \gamma\left(\left\{(T-s)^{\alpha-1} \gamma(M(s)); n \geqslant 1\right\}\right) ds\right] \\ &\leqslant 2\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \gamma\left(\left\{(t-s)^{\alpha-1} \psi(s, \gamma(M(s))); n \geqslant 1\right\}\right) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T \gamma\left(\left\{(T-s)^{\alpha-1} \psi(s, \gamma(M(s))); n \geqslant 1\right\}\right) ds\right]. \end{aligned}$$

$$\tag{4.7}$$

En outre, la fonction donnée φ par $\varphi(t) = \gamma(M(t))$ appartient à $C(J, [0, 2R])$. En conséquence, par (H3), $\varphi \equiv 0$, alors $\gamma(M(t)) = 0$ pour tout $t \in J$. Maintenant, par le Lemme d'Ascoli-Arzelà, M est relativement compacte dans $C(J, E)$.

Étape 5 : Soit $h \in N(y)$ avec $y \in \overline{U}$. Depuis $|y(s)| \leqslant R$ et (H2), nous avons $N\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{U}$, car si ce n'est pas vrai, il existe une fonction $y \in \overline{U}$, mais $\|N(y)\|_{\mathcal{P}} > R$ et

$$h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T,$$

Pour une certaine $f \in S_{F,y}$. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
R &\leqslant \|N(y)\|_{\mathcal{P}} \\
&\leqslant |y_0| + |y_T.| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} |f(s)|\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s)|\, ds \\
&\leqslant |y_0| + |y_T.| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T p(s)\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T p(s)\, ds \\
&\leqslant |y_0| + |y_T.| + \frac{2T}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T p(s)\, ds.
\end{aligned}$$

En divisant les deux membres par R et en prenant la limite inférieure de $R \to \infty$, nous concluons que $\frac{2T}{\Gamma(\alpha)}\delta \geqslant 1$ ce qui contredit (4.3). Donc $N\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{U}$.

En conséquence des étapes 1 - 5 avec Théorème 1.6.2, nous pouvons conclure que N a un point fixe $y \in C(J, B)$ qui est une solution du problème (4.1)-(4.2).

$\square$

Chapitre Cinq

Equations différentielles fractionnaires impulsives

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions du problèmes à valeur initiale d'équations différentielles d'ordre fractionnaire avec impulsion.

Premièrement on va étudier le problème avec condition locale suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)),\ t \in J = [0, T],\ t \neq t_k,\ k = 1, ..., m,\ 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{5.1}$$

$$\Delta y \mid_{\ t=t_k} = I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right),\ k = 1, ..., m, \tag{5.2}$$

$$y(0) = y_0, \tag{5.3}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times E \to E$ est une fonction donnée, $I_k : E \to E, k = 1, ..., m$ et $y_0 \in E, 0 = t_0 < t_1 ... t_m < t_{m+1} = T, ,$ $\Delta y \mid_{\ t=tk} = y\left(t_k^+\right) - y\left(t_k^-\right)$, $y\left(t_k^+\right) = \lim\limits_{h \to 0^+} y(t_k + h)$ et $y\left(t_k^-\right) = \lim\limits_{h \to 0^-} y(t_k + h)$ représentent les limites à droite et à gauche de $y(t)$ a $t = t_k$, $k = 1, ..., m$.

Deuxièmement on va donner une résultat pour le problème avec condition non locale suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)),\ t \in J = [0, T],\ t \neq t_k,\ k = 1, ..., m,\ 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{5.4}$$

$$\Delta y \mid_{\ t=t_k} = I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right),\ \ k = 1, ..., m, \tag{5.5}$$

$$y(0) + g(y) = y_0, \tag{5.6}$$

où $f, I_k, k = 1, ..., m$ sont comme à la section 5. Soit $g : PC(J, E) \to E$ est une fonction continue. Les conditions non locales ont été initiées par Byszewski

[13] quand il a prouvé l'existence des solutions faibles et classiques de problèmes de Cauchy non local. Comme il est mentionné par Byszewsk [14, 15] que l'état non local ne peut être plus utile que la condition initiale standard pour décrire certains phénomènes physiques. Par exemple [17]

$$g(y) = \sum_{i=1}^{p} c_i y(\tau_i) \tag{5.7}$$

où $C_i, i = 1, ..., p$, sont des constantes données et $0 < \tau_1 < ... < \tau_p < T$ pour décrire le phénomène de diffusion d'une petite quantité de gaz dans un tube transparent. (5.16). Dans les deux resultats on va utiliser le Théorème de point fixe de Mönch 1.6.1.

5.2 Problème aux limites avec impulsions et conditions locales

Dans tout ce chapitre, $PC(J, E)$ designe l'espace de Banach défini par

$$\begin{aligned} PC(J,E) &= \Big\{ y : J \to E : y \in C\left((t_k, t_{k+1}], E\right), k = 0, ..., m+1, \text{ et il existe } y\left(t_k^-\right) \\ &\quad \text{et } y\left(t_k^+\right), \quad k = 1, ..., m \ \text{ avec } y\left(t_k^-\right) = y\left(t_k^+\right) \Big\} \end{aligned}$$

avec la norme

$$||y||_{PC} = \sup_{t \in J} ||y(t)||$$

Notons $J' = [0, T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$.
De plus, pour un ensemble donné V des fonctions $v : J \to E$, on note

$$\begin{aligned} V(t) &= \{v(t), v \in V\} \quad t \in J \\ V(J) &= \{v(t), v \in V, \ t \in J\} \ . \end{aligned}$$

Définition 5.2.1. Une fonction $y \in PC(J, E)$ est dite une solution de (5.2) si y satisfait l'équation (5.2) et les conditions (5.1)-(5.3)

Lemme 5.2.2. *Soit $h : J \to E$ continue. L'unique solution y de problème linéaire*

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = h\left(t\right) \text{ pour } \text{ tout}\, t \in J', \tag{5.8}$$

$$\Delta y\mid_{t=t_k} = a_k,\ k = 1, ..., m, \tag{5.9}$$

$$y(0) = y_0 \tag{5.10}$$

est donnée par

$$y\left(t\right) = \begin{cases} y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} h\left(s\right) ds & \text{si}\, t \in [0, t_1] \\ y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(t-s\right)^{\alpha-1} h\left(s\right) ds & \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t} \left(t-s\right)^{\alpha-1} h\left(s\right) ds + \sum_{i=1}^{k} a_i & \text{si}\, t \in \left(t_k, t_{k+1}\right], k = 1, ..., m. \end{cases} \tag{5.11}$$

Preuve. Supposons y satisfait (5.8), (5.9) et (5.10), si $t \in [0, t_1]$ alors

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = h\left(t\right).$$

Lemme 1.4.6 implique

$$y\left(t\right) = y_0 + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} h\left(s\right) ds$$

Si $t \in (t_1, t_2]$ alors d'après le Lemme (1.4.6)

$$\begin{aligned} y\left(t\right) &= y(t_1^+) + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{t_1}^t \left(t-s\right)^{r-1} h\left(s\right) ds \\ &= \Delta y\mid_{t=t_1} + y(t_1^-) + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{t_1}^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} h\left(s\right) ds \\ &= a_1 + y_0 + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^{t_1} \left(t-s\right)^{\alpha-1} h\left(s\right) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{t_1}^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} h\left(s\right) ds. \end{aligned}$$

Si $t \in (t_2, t_3]$ alors encore Lemme 1.4.6 implique

$$\begin{aligned}
y(t) &= y(t_2^+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t} (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\
&= \Delta y \mid_{t=t_2} + y(t_1^-) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t} (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\
&= a_2 + a_1 + y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t} (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Si $t \in (t_k, t_{k+1}]$ alors encore le lemme 1.4.6 implique (5.11).

$\square$

Lemme 5.2.3. *y est solution de problème (5.1)-(5.2)-(5.3), si et seulement si $y \in PC(J, E)$ et satisfait*

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\, ds, \ t \in [0, t_1] \\ y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \\ \times f(s, y(s))\, ds + \sum_{i=1}^{k} I_i\left(y\left(t_i^-\right)\right), \ t \in (t_k, t_{k+1}], k = 1, ..., m. \end{cases} \quad (5.12)$$

Nous donnons quelque conditions sur les fonctions associées à (5.2), on suppose que :

(H1) $f : J \times E \to E$ satisfait les conditions de Carathéodory.

(H2) Il existe $p \in C(J, \mathbb{R}_+)$, telle que

$$\|f(t, y)\| < p(t) \|y\|, \ \textit{pour chaque } t \in J \textit{ et chaque } y \in E.$$

(H3) Il existe $c > 0$, tel que

$$\|I_k(y)\| \leqslant c \|y\| \ \textit{pour chaque } y \in E.$$

(H4) Pour chaque ensemble borné $B \subset E$ nous avons

$$\gamma(I_k(y)) < c\gamma(B), \quad k = 1, ..., m.$$

(H5) Pour chaque $t \in J$ et Pour chaque ensemble borné $B \subset E$ nous avons

$$\gamma(f(t, B)) \leqslant p(t)\gamma(B).$$

Théorème 5.2.4. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H5) sont vérifiées.*
Soit

$$p^*{=}sup_{t\in J}p(t).$$

Si

$$\frac{(m+1)\,p^{\star}T^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}+mc<1 \tag{5.13}$$

alors le problème(5.1)-(5.3)a au moins une solution.

Preuve. Nous considérons l'opérateur $N : PC(J,E) \to PC(J,E)$ défini par

$$\begin{aligned} N\left(y\right)\left(t\right) &= y_0+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\sum_{0<t_k<t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(t_k-s\right)^{\alpha-1}f\left(s,y\left(s\right)\right)ds \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{t_k}^{t}\left(t-s\right)^{\alpha-1}f\left(s,y\left(s\right)\right)ds \\ &\quad +\sum_{0<t_k<t}I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 5.2.3 les points fixes de l'opérateur N sont des solution du problème (5.2). Soit

$$r\geqslant\frac{\|y_0\|}{1-mc-\frac{(m+1)p^{\star}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}} \tag{5.14}$$

et l'ensemble

$$D_r=\left\{y\in PC\left(J,E\right):\|y\|_{\infty}\leqslant r\right\}.$$

On a le sous-ensemble D_r est fermé, borné et convexe. Nous allons montrer que N satisfait les hypothèses du Théorème 1.6.1. La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape l : *N est continu.*
Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \to y$ dans $PC(J,E)$. Alors pour chaque $t \in J$

$$\begin{aligned} \|N(y_n)(t)-N(y)(t)\| &\leqslant \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\sum_{0<t_k<t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(t_k-s\right)^{\alpha-1}\left\|f\left(s,y_n\left(s\right)\right)-f\left(s,y\left(s\right)\right)\right\|ds \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{t_k}^{t}\left(t-s\right)^{\alpha-1}\left\|f\left(s,y_n\left(s\right)\right)-f\left(s,y\left(s\right)\right)\right\|ds \\ &\quad +\sum_{0<t_k<t}\left\|I_k\left(y_n\left(t_k^-\right)\right)-I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right)\right\|. \end{aligned}$$

Puisque I_k est continue et f est du type de Carathéodory, alors par le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\|N(y_n)-N(y)\|_{\infty}\to 0 \text{ quand } n\to\infty.$$

Étape 2 : *N est une application de D_r dans lui-même.*
Pour chaque $y \in D_r$ par (H2) et (5.13), nous avons pour chaque $t \in J$:

$$\begin{aligned}
\|N(y)(t)\| &\leqslant \|y_0\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} \|f(s, y(s))\| \, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \|f(s, y(s))\| \, ds \\
&\quad + \sum_{0<t_k<t} \left\| I_k \left(y \left(t_k^- \right) \right) \right\| \\
&\leqslant \|y_0\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} p(t) \|y\| \, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} p(t) \|y\| \, ds \\
&\quad + \sum_{0<t_k<t} c \|y\| \\
&\leqslant \|y_0\| + r \left(\frac{(m+1) p^\star T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + mc \right) \\
&\leqslant r.
\end{aligned}$$

Étape 3 : *$N(D_r)$ est bornée et équicontinue.*
Par l'étape 2, il est évident que $N(D_r) \subset PC(J, E)$ est bornée.
Pour la équicontinuité de $N(D_r)$. Soit $\tau_1, \tau_2 \in J$, $\tau_1 < \tau_2$ et soit $y \in D_r$

$$\begin{aligned}
\|N(y)(\tau_2) - N(y)(\tau_1)\| &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_0^{\tau_1} \left| (\tau_2 - s)^{\alpha-1} - (\tau_1 - s)^{\alpha-1} \right| \|f(s, y(s))\| \, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha-1} \|f(s, y(s))\| \, ds \\
&\quad + \sum_{0<t_k<\tau_2-\tau_1} \left\| I_k \left(y \left(t_k^- \right) \right) \right\| \\
&\leqslant \frac{r p^\star}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\tau_2^\alpha - \tau_1^\alpha \right] + \sum_{0<t_k<\tau_2-\tau_1} \left\| I_k \left(y \left(t_k^- \right) \right) \right\|.
\end{aligned}$$

Quand $\tau_1 \to \tau_2$ la partie droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.

Maintenant, soit V un sous-ensemble de D_r tel que $V \in \overline{conv}\,(N(V) \cup \{0\})$. V est bornée et équicontinu et donc la fonction $v \to v(t) = \gamma(V(t))$ est continue sur J. De (H4), (H5), et les propriétés de la mesure γ nous avons pour chaque

$t \in J$:

$$\begin{aligned}
v(t) &\leqslant \gamma(N(V)\cup\{0\}) \\
&\leqslant \gamma(N(V)) \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{0<t_k<t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{\alpha-1}p(s)\,\gamma(V(s))\,ds \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha-1}p(s)\,\gamma(V(s))\,ds \\
&\quad +\sum_{0<t_k<t}\gamma(V(s)) \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{0<t_k<t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{\alpha-1}p(s)\,\gamma(v(s))\,ds \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha-1}p(s)\,\gamma(v(s))\,ds \\
&\quad +\sum_{0<t_k<t}cv(s) \\
&\leqslant \|v\|_\infty\left(\frac{(m+1)\,p^\star T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+mc\right).
\end{aligned}$$

Cela signifie que

$$\|v\|_\infty\left(1-\left[\frac{(m+1)\,p^\star T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+mc\right]\right)\leqslant 0.$$

Par (5.13), il s'ensuit que $\|v\|_\infty = 0$ c'est-à-dire $v(t)=0$ pour chaque $t\in J$, ensuite $V(t)$ est relativement compact dans $PC(J,E)$ selon le Théorème d'Ascoli-Arzela, V est relativement compact dans D_r.

En appliquant maintenant le Théorème 1.6.1, nous concluons que N a un point fixe qui est une solution du problème (5.1)-(5.3).

□

5.3 Problème aux limites avec impulsions et conditions non locales

Nous présentons les conditions

(H6) Il existe une constante $M^{\star\star}>0$ telle que

$$|g(u)|\leqslant M^{\star\star}\quad u\in PC(J,E).$$

(H7) Pour chaque ensemble borné $B \subset PC(J,E)$ nous avons

$$\gamma(g(B)) \leqslant M^{\star\star}\gamma(B).$$

Théorème 5.3.1. *Supposons que (H1)-(H7) sont vérifiées. Si*

$$\frac{(m+1)\,p^{\star}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + mc + M^{\star\star} < 1$$

alors le problème non local (5.4)-(5.6) a au moins une solution sur J.

Preuve. Transformation du problème (5.4)-(5.6) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $\tilde{F} : PC(J,E) \to PC(J,E)$ défini par

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(y)(t) &= y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\, ds \\
&\quad + \sum_{0<t_k<t} I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right).
\end{aligned}$$

Alors les points fixes de l'opérateur $\tilde{F}$ sont les solutions du problème (5.4)-(5.6). De meme maniere on peut voir que les conditions du Théorème 1.6.1 sont satisfaites par $\tilde{F}$.

□

5.4 Exemple :

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos résultats. Considérons le problème suivant :

$$\begin{gathered}
{}^{c}D^{\alpha}y_n(t) = \frac{1}{9+e^{t}}y_n(t)\,,\ t \in J = [0,1]\,,\ t \neq \frac{1}{2},\ 0 < \alpha \leqslant 1, \\
\Delta y_n \mid_{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}y_n\left(\frac{1}{2}^{-}\right), \qquad (5.15) \\
y_n(0) = 0,
\end{gathered}$$

où $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$E = l^1 = \left\{ y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) : \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty \right\}$$

avec la norme

$$\|y\|_E = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \,,$$

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \,,\; f = (f_1, f_2, ..., f_n, ...) \,,$$

$$f(t, x_n) = \frac{1}{9 + e^t} x_n \quad , \quad (t, x_n) \in J \times E$$
$$\text{et } I_k(x_n) = \frac{1}{5} x_n \quad , \quad x_n \in E.$$

Il est clair que les conditions (H2) et (H3) sont vérifiées avec $p(t) = \frac{1}{9+e^t}$ et $c = \frac{1}{5}$. Nous allons vérifier que la condition (5.13) est satisfaite avec $T = 1$, $m = 1$ et $p^\star = \frac{1}{10}$.
En effet

$$\left[\frac{(m+1)\, p^\star T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{5}\right] < 1 \Longleftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > \frac{1}{4} \tag{5.16}$$

est satisfaite p.p. $\alpha \in (0, 1]$. Alors d'après le Théorème 5.2.4, le problème (5.15) a au moins une solution sur $[0, 1]$ pour les valeurs de α satisfaisant (5.16). Dans les deux resultats on va utiliser le Théorème de point fixe de Mönch 1.6.2.

Chapitre Six

Problème de Darboux pour des équations différentielles hyperboliques

Dans ce chapitre, nous allons donner un résultat d'existence pour le problème de Darboux . Plus précisément, nous étudions le problème suivant :

$$\left({}^{c}D_{0}^{\alpha}u\right)(t,y) = f\left(t,y,u\left(t,y\right)\right) \text{si} \left(t,y\right) \in J\ , \tag{6.1}$$

$$u(t,0) = \varphi\left(t\right), t \in [0,a]\ \ et\ u\left(0,y\right) = \psi\left(y\right), y \in [0,b]\,, \tag{6.2}$$

où ${}^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de type Caputo d'ordre $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in (0,1] \times (0,1]$, $f : J \times E \to E$, est une fonction donnée, $J = [0,a] \times [0,b]$, $a, b > 0$, $\varphi : [0,a] \to E$ et $\psi : [0,b] \to E$ sont des fonctions absolument continues, $\varphi(0) = \psi(0)$.

Puis, nous examinons le problème non local à valeur initiale suivant :

$$\left({}^{c}D^{\alpha}u\right)(t,y) = f\left(t,y,u\left(t,y\right)\right) \text{si} \left(t,y\right) \in J, \tag{6.3}$$

$$u(t,0) + Q\left(u\right) = \varphi\left(t\right), u\left(0,y\right) + K\left(u\right) = \psi\left(y\right), t \in [0,a]\,, y \in [0,b]\,, \tag{6.4}$$

où f, φ, ψ sont comme dans le problème (6.1)-(6.2) et $Q, K : C\left(J, E\right) \to E$ sont des fonctions continues avec $C(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions continues $u : J \to E$, muni de la norme

$$\|u\|_\infty = sup\left\{\|u(t,y)\|,\ (t,y) \in J\right\}.$$

Notre résultat d' éxistence pour (6.1)-(6.2) est basé sur le Théorème du point fixe de *Mönch* 1.6.1.

6.1 Introduction

– Soit $L^1(J,E)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $u : J \to E$ qui sont Bochner intégrable, muni de la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int_0^a \int_0^b \|u(t,y)\| dtdy.$$

– Soit $L^\infty(J,E)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $u : J \to E$ qui sont essentiellement bornées, muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\left\{c > 0 : \|u(t)\| \leqslant c\ , p.p.\ t \in J\right\}.$$

– De plus pour un ensemble donné V des fonctions $v : J \to E$ notons :

$$\begin{aligned} V(t,y) &= \{v(t,y), v \in V\},\ \ t \in J, \\ V(J) &= \{v(t), v \in V\ ,\ t \in J\}. \end{aligned}$$

6.2 Existence des solutions

Définition 6.2.1. Une fonction $u \in C(J,E)$ est dite une solution de (6.1)-(6.2) si elle satisfait l'équation (6.1) dans J et les conditions (6.2).

Soient $h \in C(J,E)\,,\ z_0 = (0,0)$ et

$$\mu(t,y) = u(t,0) + u(0,y) - u(0,0).$$

Pour l'existence de solutions pour le problème (6.1)-(6.2), nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 6.2.2. *L'unique solution u du problème linéaire*

$$\left({}^{c}D_{z_0}^{\alpha}u\right)(t,y)=h\,(t,y)\,;(t,y)\in J, \tag{6.5}$$

$$u(t,0)=\varphi\,(t)\,,t\in[0,a]\ \ et\ u\,(0,y)=\psi\,(y)\,,y\in[0,b] \tag{6.6}$$

est donnée par

$$u\,(t,y)=\mu\,(t,y)+\frac{1}{\Gamma\,(\alpha_1)\,\Gamma\,(\alpha_2)}\int_0^t\int_0^y(t-s)^{\alpha_1-1}\,(y-x)^{\alpha_2-1}\,h\,(s,x)\,dsdx. \tag{6.7}$$

Preuve. Soit $u\,(t,y)$ une solution de (6.5). Puis, à partir de la définition de $\left({}^{c}D_{z_0}^{\alpha}u\right)(x,y)$ nous avons

$$I_{z_0^+}^{1-\alpha}\left(D_{ty}^{2}u\right)(t,y)=h\,(t,y)$$

donc

$$I_{z_0^+}^{\alpha}\left(I_{z_0^+}^{1-\alpha}D_{ty}^{2}u\right)(t,y)=\left(I_{z_0^+}^{\alpha}h\right)(t,y)$$

alors

$$I_{z_0^+}^{1}D_{ty}^{2}u\,(t,y)=\left(I_{z_0^+}^{\alpha}h\right)(t,y)\,.$$

Depuis

$$I_{z_0^+}^{1}D_{ty}^{2}u\,(t,y)=u\,(t,y)-u\,(t,0)-u\,(0,y)+u\,(0,0)$$

nous avons

$$u\,(t,y)=\mu\,(t,y)+(I_{z^+}^{\alpha}h)\,(t,y).$$

Alors

$$u\,(t,y)=\mu\,(t,y)+\frac{1}{\Gamma\,(\alpha_1)\,\Gamma\,(\alpha_2)}\int_0^t\int_0^y(t-s)^{\alpha_1-1}\,(y-x)^{\alpha_2-1}\,h\,(s,x)\,dsdx.$$

□

Lemme 6.2.3. *u est une solution de problème (6.1)-(6.2), si et seulement si u satisfait l'équation intégral*

$$u(t,y) = \mu(t,y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t \int_0^y (t-s)^{\alpha_1 - 1} (y-x)^{\alpha_2 - 1} f(s,x,u(s,x))\, dsdx. \tag{6.8}$$

Soient les hypothèses suivantes :

(H1) $f : J \times E \to E$ satisfait aux conditions de Carathéodory.

(H2) Il existe $p \in L^\infty(J, \mathbb{R}_+)$, de telle sorte que,

$$\|f(t,y,u)\| \leqslant p(t,y)\|u\|, \text{ pour p.p.}(t,y) \in J \text{ et chaque } u \in E.$$

(H3) Pour chaque $(t,y) \in J$ et chaque ensemble bornée $B \in E$ nous avons :

$$\gamma(f((t,y),B)) \leqslant p(t,y)\gamma(B).$$

Posons

$$p^* = \|p\|_{L^\infty}.$$

Théorème 6.2.4. *Supposons que les (H1)-(H3) sont vérifièes. Si*

$$\frac{p^* a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)} < 1, \tag{6.9}$$

alors le problème (6.1)-(6.2) admet au moins une solution.

Preuve. On transforme le problème (6.1)-(6.2) à un problèmes du point fixe. À cette fin, nous considérons l'opérateur $N : C(J,E) \to C(J,E)$ défini par

$$\begin{aligned} N(u)(t,y) &= \mu(t,y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t \int_0^y (t-s)^{\alpha_1 - 1}(y-x)^{\alpha_2 - 1} \\ &\quad \times f(s,x,u(s,x))\, dsdx. \end{aligned}$$

Par le Lemme 6.2.3 les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème (6.1)-(6.2). Soients

$$r_0 \geqslant \frac{\|\mu\|}{1 - \frac{p^* a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)}} \tag{6.10}$$

et

$$D_{r_0} = \{u \in C(J,E) : \|u\|_\infty \leqslant r_0\}.$$

Il est clair que le sous-ensemble D_{r_0} est fermé, borné et convexe. Nous allons montrer que N satisfait les hypothèses du Théorème 1.6.1. La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape 1 : *N est continu.*
Soit $\{u_n\}$ une suite telle que $u_n \to u$ dans $C(J,E)$, alors pour chaque $(t,y) \in J$

$$\begin{aligned} & \|N(u_n)(t,y) - N(u)(t,y)\| \\ \leqslant & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t \int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} \|f(s,x,u_n(s,x)) - f(s,x,u(s,x))\| dsdx. \end{aligned}$$

Puisque f est du type de Carathéodory, alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\|N(u_n) - N(u)\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Étape 2 : *N est un opérateur de D_{r_0} dans lui-même.*
Pour chaque $u \in D_{r_0}$ par (H2) et(6.9) nous avons pour chaque $(t,y) \in J$:

$$\begin{aligned} \|N(u)(t,y)\| &\leqslant \|\mu(t,y)\| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_k}^t \int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} \|f(s,x,u(s,x))\| dsdx \\ &\leqslant \|\mu\| + r_0 \left(\frac{p^* a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)} \right) \\ &\leqslant r_0. \end{aligned}$$

Étape 3 :$N(D_{r_0})$ *est bornée et equicontinue.*

Par l'étape 2, il est évident que $N(D_{r_0}) \subset C(J,E)$ qui est bornée. Pour l'équicontinuité de $N(D_{r_0})$, soient $(\tau_1, y_1), (\tau_2, y_2) \in J$, $\tau_1 < \tau_2$ et $y_1 < y_2$ et soit $u \in D_{r_0}$. Alors

$$
\begin{aligned}
&\|N(u)(\tau_2,y_2)-N(u)(\tau_1,y_1)\| \\
\leqslant\ & \|\mu(\tau_1,y_1)-\mu(\tau_2,y_2)\| \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{\tau_1}\int_0^{y_1}\left[(\tau_2-s)^{\alpha_1-1}(y_2-x)^{\alpha_2-1}-(\tau_1-s)^{\alpha_1-1}(y_1-x)^{\alpha_2-1}\right] \\
&\times\|f(s,x,u(s,x))\|\,dsdx \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{y_1}^{y_2}(\tau_2-s)^{\alpha_1-1}(y_2-x)^{\alpha_2-1}\times\|f(s,x,u(s,x))\|\,dsdx \\
\leqslant\ & \|\mu(\tau_1,y_1)-\mu(\tau_2,y_2)\| \\
&+\frac{p^*r_0}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{\tau_1}\int_0^{y_1}\left[(\tau_2-s)^{\alpha_1-1}(y_2-x)^{\alpha_2-1}-(\tau_1-s)^{\alpha_1-1}(y_1-x)^{\alpha_2-1}\right]dsdx \\
&+\frac{p^*r_0}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{y_1}^{y_2}(\tau_2-s)^{\alpha_1-1}(y_2-x)^{\alpha_2-1}\,dsdx.
\end{aligned}
$$

Quand $\tau_1 \to \tau_2$ et $y_1 \to y_2$ la droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.

Maintenant, soit V un sous-ensemble de D_{r_0} tel que $V \subset \overline{conv}\,(N(V)\cup\{0\})$. V est borné et équicontinu et donc la fonction $v \to v(t,y) = \gamma(V(t,y))$ est continue sur J. Comme les fonctions ϕ et ψ sont continues sur J, l'ensemble $\overline{\{\phi(t)+\psi(y)-\phi(0)\,,(t,y)\in J\}} \subset E$ est compact. L'utilisation de ce fait, (H2), (H3), le Lemme 6.2.2 et les propriétés de la mesure γ nous avons pour chaque $(t,y)\in J$:

$$
\begin{aligned}
v(t,y) &\leqslant \gamma(N(V)(t,y)\cup\{0\}) \\
&\leqslant \gamma(N(V)(t,y)) \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^t\int_0^y(t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1}p(s,x)\,\gamma(V(s,x))\,dsdx \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^t\int_0^y(t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1}p(s,x)\,\gamma v(s,x)\,dsdx \\
&\leqslant \|v\|_\infty\left(\frac{p^*a^{\alpha_1}b^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)}\right).
\end{aligned}
$$

Cela signifie que

$$
\|v\|_\infty\left(1-\left[\frac{p^*a^{\alpha_1}b^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)}\right]\right)\leqslant 0.
$$

Par (6.9) il s'ensuit que $\|v\|_\infty = 0$, c'est-à-dire $v(t,y)=0$ pour chaque $(t,y)\in J$, puis $V(t,y)$ est relativement compact dans $C(J,E)$. D'après le Lemme d'Ascoli-Arzela, V est relativement compact dans D_{r_0}.

En appliquont maintenant le Théorème 1.6.1, nous concluons que N a un point fixe qui est une solution du problème (6.1)-(6.2)

□

6.3 Problème de Darboux avec conditions non locales

Maintenant, nous présentons un résultat d'existence pour le problème non local (6.3)-(6.4) .

Définition 6.3.1. Une fonction $u \in C(J, E)$ est dite une solution de (6.3)-(6.4), si u satisfait $({}^{c}D_{0}^{\alpha}u)(t, y) = f(t, y, u(t, y))$ sur J et les conditions (7.4)-(6.4) sont satisfaites.

Théorème 6.3.2. *Supposons que (H1) - (H3) et les conditions suivantes :*
(H4) Il existe $\tilde{k} > 0$ *tel que* $\|Q(u)\| \leqslant \tilde{k}\|u\|_{PC}$, *pour tout* $u \in C(J, E)$,
(H5) Il existe $k^{*} > 0$ *tel que* $\|K(u)\| \leqslant k^{*}\|u\|_{PC}$, *pour tout* $u \in C(J, E)$,
(H6) $\gamma(Q(B)) \leqslant \tilde{k}\gamma(B)$, *pour tout ensemble borné* $B \subset C(J, E)$,
(H7) $\gamma(K(B)) \leqslant k^{*}\gamma(B)$, *pour tout ensemble borné* $B \subset C(J, E)$
sont vérifiées.
Si

$$\tilde{k} + k^{*} + \frac{p^{*}a^{\alpha_1}b^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)} < 1,$$

alors il existe une solution pour le problème (6.3)-(6.4) sur J.

6.4 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos résultats. On considère le problème suivant

$$\left({}^{c}D_{0}^{\alpha}u_n\right)(t, y) = \frac{1}{8e^{t+y+3}}\frac{|u_n(t, y)|}{(1 + |u_n(t, y)|)}, \ (t, y) \in J = [0, 1] \times [0, 1], \quad (6.11)$$

$$u_n(t,0) = t\ ,\ u_n(0,y) = y^2\ ,\ t \in [0,1]\,, y \in [0,1]\,, n = 1,2,... \tag{6.12}$$

Soit

$$E = l^1 = \left\{ u = (u_1, u_2, ..., u_n, ...) : \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty \right\}$$

avec la norme

$$\|u\|_E = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|\,.$$

$$u = (u_1, u_2, ..., u_n, ...) \text{ et } f = (f_1, f_2, ..., f_n, ...)$$

$$f_n(t,y,u_n) = \frac{1}{8e^{t+y+3}} \frac{|u_n(t,y)|}{(1+|u_n(t,y)|)}, (t,y) \in [0,1] \times [0,1]\,.$$

Pour chaque u_n et $(t,y) \in [0,1] \times [0,1]$ nous avons

$$|f_n(t,y,u_n)| \leqslant \frac{1}{8e^{t+y+3}} |u_n|\,. \tag{6.13}$$

Ainsi les conditions (H1) et (H2) sont satisfaites avec

$$p(t,y) = \frac{1}{8e^{t+y+3}},$$

par (6.13) pour chaque ensemble borné $B \in l^1$ nous avons

$$\gamma(f(t,y,B)) \leqslant \frac{1}{8e^{t+y+3}} \gamma(B) \text{ pour chaque } (t,y) \in [0,1] \times [0,1]\,.$$

Ainsi (H3) est satisfaite. Nous allons montrer que la condition (7.15) est vérifiée avec $a = b = 1$ et $p^* = \frac{1}{8e^3}$. En effet

$$\frac{p^* a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)} = \frac{1}{8e^3 \Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)} < 1$$

est satisfait pour chaque $(\alpha_1, \alpha_2) \in (0,1] \times (0,1]$.

Par conséquent, le Théorème 6.2.4 implique que le problème (6.11)-(6.12) a une solution définie sur $[0,1] \times [0,1]$.

Chapitre Sept

Problème de Darboux avec impulsions

Dans ce chapitre, nous allons donner un résultat d'existence pour le problème de Darboux avec impulsion. Nous étudions un problème à valeurs initiales donné par :

$$\left({}^{c}D_{0}^{\alpha}u\right)(t,y) = f\left(t,y,u\left(t,y\right)\right),\ (t,y)\in J\ ,t\neq t_k,k=1,...,m, \tag{7.1}$$

$$u(t_k^+,y) = u(t_k^-,y) + I_k\left(u(t_k^-,y)\right),\ y\in[0,b]\,,\ k=1,...,m, \tag{7.2}$$

$$u(t,0) = \varphi\left(t\right),\ u\left(0,y\right) = \psi\left(y\right),\ t\in[0,a]\,,\ y\in[0,b]\,, \tag{7.3}$$

où $J=[0,a]\times[0,b]\,,a,b>0$, ${}^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de type Caputo d'ordre $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in(0,1]\times(0,1]\,,0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}<a$, $f:J\times E\rightarrow E$, est une fonction donnée, $\varphi:[0,a]\rightarrow E$ et $\psi:[0,b]\rightarrow E$ sont des fonctions absolument continues ,$\varphi\left(0\right)=\psi\left(0\right)$ et E est un espace de Banach avec la norme $\left\|\cdot\right\|$.
Puis, nous examinons le problème non locale suivant :

$$\left({}^{c}D_{0}^{\alpha}u\right)(t,y) = f\left(t,y,u\left(t,y\right)\right),\ (t,y)\in J\ ,\ t\neq t_k,k=1,...,m, \tag{7.4}$$

$$u(t_k^+, y) = u(t_k^-, y) + I_k\left(u(t_k^-, y)\right), \ y \in [0, b]\, 0, \ k = 1, ..., m, \tag{7.5}$$

$$u(t, 0) + Q\left(u\right) = \varphi\left(t\right), u\left(0, y\right) + K\left(u\right) = \psi\left(y\right) t \in [0, a], \ y \in [0, b]. \tag{7.6}$$

où $f, \varphi, \psi, I_k; k = 1, ..., m$, et α sont comme dans le problème (7.1)-(7.3) et $Q, K : PC\left(J, E\right) \rightarrow E$ sont des fonctions continues. Les résultats de ce chapitre sont basés sur le théorème de point fixe de *Mönch* 1.6.1 combiné avec la mesure de non compacité de $Kuratowski$.

7.1 Existence des solutions

$PC(J, E)$ est l'espace de Banach défini par

$$\begin{aligned} PC(J, E) \;\; = \;\; & \{u : J \rightarrow E : u \in C\left(\left(t_k, t_{k+1}\right] \times [0, b], E\right), \ k = 1, ..., m \text{ et il existe} \\ & u\left(t_k^-, y\right) \text{ et } y\left(t_k^+, y\right) \;\; k = 1, ..., m \;\; \text{avec } y\left(t_k^-, y\right) = y\left(t_k^+, y\right)\} \end{aligned} \tag{7.8}$$

avec la norme

$$||u||_{PC} = \sup_{(t,y) \in J} ||u(t, y)||.$$

L'ensemble $J' = [0, a] \times [0, b] \setminus \left\{(t_1, y)\, ..., (t_m, y)\, , y \in [0, b]\right\}$.

Définition 7.1.1. Une fonction $u \in PC\left(J, E\right)$ est dite une solution de (7.1)-(7.3) si elle satisfait l'équation (7.1) dans J' et les conditions (7.2)-(7.3).

Soient $h \in C\left(\left(t_k, t_{k+1}\right] \times [0, b], E\right), \ z_k = (t_k, 0)$ et

$$\mu_k\left(t, y\right) = u\left(t, 0\right) + u(t_k^+, y) - u(t_k^-, 0), \ k = 0, ..., m.$$

Pour l'existence de solutions pour le problème (6.1)-(6.2), nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 7.1.2. *Une fonction* $u \in C\left(\left(t_k, t_{k+1}\right] \times [0,b], E\right), k = 0, ..., m$ *est une solution de l'équation différentielle*

$$\left({}^{c}D^{\alpha}_{z_k} u\right)(t,y) = h(t,y)\,; (t,y) \in (t_k, t_{k+1}] \times [0,b], \tag{7.9}$$

alors

$$u(t,y) = \mu_k(t,y) + \left(I^{\alpha}_{z_k} h\right)(t,y),\ \ (t,y) \in (t_k, t_{k+1}] \times [0,b]. \tag{7.10}$$

Preuve. Soit u une solution de(7.9). Puis, à partir de la définition de $\left({}^{c}D^{\alpha}_{z_k^+} u\right)(x,y)$ nous avons

$$I^{1-\alpha}_{z_k^+}\left(D^2_{ty} u\right)(t,y) = h(t,y)$$

donc

$$I^{\alpha}_{z_k^+}\left(I^{1-\alpha}_{z_k^+} D^2_{ty} u\right)(t,y) = \left(I^{\alpha}_{z_k^+} h\right)(t,y)$$

alors

$$I^{1}_{z_k^+} D^2_{ty} u(t,y) = \left(I^{\alpha}_{z_k^+} h\right)(t,y).$$

Depuis

$$I^{1}_{z_k^+} D^2_{ty} u(t,y) = u(t,y) - u(t,0) - u\left(t_k^+, y\right) + u\left(t_k^+, 0\right)$$

nous avons

$$u(t,y) = \mu_k(t,y) + \left(I^{\alpha}_{z_k^+} h\right)(t,y).$$

□

Dans toute la suite on poses

$$\mu(t,y) = \mu_0(t,y)\,, (t,y) \in J.$$

Lemme 7.1.3. *Soit $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leqslant 1$ et $h : J \to E$ une fonction continue. Si u est une solution de problème*

$$^{c}D^{\alpha}u(t,y) = h\left(t,y\right), \ (t,y) \in J', \tag{7.11}$$

$$u(t_k^+, y) = u(t_k^-, y) + I_k\left(u(t_k^-, y)\right), \quad k = 1, ..., m. \tag{7.12}$$

alors

$$u\left(t,y\right) = \begin{cases} \mu\left(t,y\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t \int_0^y \left(t-s\right)^{\alpha_1 - 1} \left(y-x\right)^{\alpha_2 - 1} \\ \times h\left(s,x\right) dsdx, \ (t,y) \in [0,t_1] \times [0,b]\,, \\ \mu\left(t,y\right) + \sum_{i=1}^{k} \left(I_i\left(u\left(t_k^-, y\right)\right) - I_i\left(u\left(t_k^-, 0\right)\right)\right) \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_0^y \left(t_i - s\right)^{\alpha_1 - 1} \left(y-x\right)^{\alpha_2 - 1} h\left(s,x\right) dsdx \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_k}^t \int_0^y \left(t-s\right)^{\alpha_1 - 1} \left(y-x\right)^{\alpha_2 - 1} h\left(s,x\right) dsdx, \\ (t,y) \in [t_k, t_{k+1}] \times [0,b] \ \ k = 1, ..., m. \end{cases} \tag{7.13}$$

Preuve. Supposons que u satisfait (7.11)-(7.12). Si$(t,y) \in [0,t_1] \times [0,b]$ alors

$$^{c}D^{\alpha}u(t,y) = h\left(t,y\right).$$

Le Lemme 7.1.2 implique

$$u\left(t,y\right) = \mu\left(t,y\right) + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1\right)\Gamma\left(\alpha_2\right)} \int_0^t \int_0^y \left(t-s\right)^{\alpha_1 - 1} \left(y-x\right)^{\alpha_2 - 1} h\left(s,x\right) dsdx.$$

Si $(t,y) \in (t_1,t_2] \times [0,b]$ alors le Lemme 7.1.2 implique

$$\begin{aligned}
u(t,y) &= \mu_1(t,y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_1}^{t} \int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} h(s,x)\, dsdx \\
&= \varphi(t) + u\left(t_1^+,y\right) - u\left(t_1^+,0\right) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_1}^{t} \int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} h(s,x)\, dsdx \\
&= \varphi(t) + u\left(t_1^-,y\right) - u\left(t_1^-,0\right) + I_1\left(u\left(t_1^-,y\right)\right) - I_1\left(u\left(t_1^-,0\right)\right) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_1}^{t} \int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} h(s,x)\, dsdx \\
&= \varphi(t) + u(t_1,y) - u(t_1,0) + I_1\left(u\left(t_1^-,y\right)\right) - I_1\left(u\left(t_1^-,0\right)\right) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_1}^{t} \int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} h(s,x)\, dsdx \\
&= u(t,y) + I_1\left(u\left(t_1^-,y\right)\right) - I_1\left(u\left(t_1^-,0\right)\right) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{t_1} \int_0^y (t_1-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} h(s,x)\, dsdx \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_1}^{t} \int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} h(s,x)\, dsdx.
\end{aligned}$$

Si $(t,y) \in (t_2,t_3] \times [0,b]$ alors encore à partir du Lemme 7.1.2 on obtient

$$\begin{aligned}
u(t,y) &= \mu_2(t,y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^{t} \int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} h(s,x)\, dsdx \\
&= \varphi(t) + u\left(t_2^+,y\right) - u\left(t_2^+,0\right) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^{t} \int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} h(s,x)\, dsdx \\
&= \varphi(t) + u\left(t_2^-,y\right) - u\left(t_2^-,0\right) + I_2\left(u\left(t_2^-,y\right)\right) - I_2\left(u\left(t_2^-,0\right)\right) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^{t} \int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} h(s,x)\, dsdx \\
&= \varphi(t) + u(t_2,y) - u(t_2,0) + I_2\left(u\left(t_2^-,y\right)\right) - I_2\left(u\left(t_2^-,0\right)\right) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^{t} \int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} h(s,x)\, dsdx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u(t,y) &= u(t,y) + I_2\left(u\left(t_2^-,y\right)\right) - I_2\left(u\left(t_2^-,0\right)\right) + I_1\left(u\left(t_1^-,y\right)\right) - I_1\left(u\left(t_1^-,0\right)\right)\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{t_1}\int_0^y (t_1-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1}h(s,x)\,dsdx\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^y (t_2-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1}h(s,x)\,dsdx\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{t_2}^{t}\int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1}h(s,x)\,dsdx.
\end{aligned}
$$

Si $(t,y)\in(t_k,t_{k+1}]\times[0,b]$ alors encore du Lemme 7.3.1 on obtient (7.13).

□

Lemme 7.1.4. *u est solution du problème (7.1)-(7.3) si et seulement si u satisfait l'équation intégrale*

$$
u(t,y)=\begin{cases}
\mu(t,y)+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^t\int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1}h(s,x,u(s,x))\,dsdx,\\
(t,y)\in[0,t_1]\times[0,b],\\
\mu(t,y)+\sum_{i=1}^k\left(I_i\left(u\left(t_k^-,y\right)\right)-I_i\left(u\left(t_k^-,0\right)\right)\right)\\
+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\sum_{i=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_0^y (t_i-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1}h(s,x,u(s,x))\,dsdx\\
+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{t_k}^{t}\int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1}h(s,x,u(s,x))\,dsdx,\\
(t,y)\in[t_k,t_{k+1}]\times[0,b],\ k=1,...,m.
\end{cases}
\tag{7.14}
$$

Soient les hypothèses suivantes :

(H1) $f\ :J\times E\to E$ satisfait aux conditions de Carathéodory.

(H2) Il existe $p\in L^\infty(J,\mathbb{R}_+)$, de telle sorte que

$$\|f(t,y,u)\|\leqslant p(t,y)\|u\|\,,\text{pour p.p.}(t,y)\in J\text{ et chaque }u\in E.$$

(H3) Il existe $c>0$ tel que $\|I_k(u)\|\leqslant c\|u\|$ pour tout $u\in E$.

(H4) Pour chaque ensemble borné $B\in E$ nous avons $\gamma(I_k(B))\leqslant c\,\gamma(B)\,,\ k=1,...,m.$

(H5) Pour chaque $(t,y)\in J$ et chaque ensemble bornée $B\in E$ nous avons :

$$\gamma(f(t,y,B))\leqslant p(t,y)\,\gamma(B)\,.$$

Posons

$$p^* = \|p\|_{L^\infty}.$$

Théorème 7.1.5. *Supposons que les (H1)-(H5) sont vérifiées, si*

$$\frac{(m+1)\,p^* a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+1)\,\Gamma(\alpha_2+1)} + 2mc < 1, \tag{7.15}$$

alors le problème (7.1)-(7.3) admet au moins une solution.

Preuve. Nous considérons l'opérateur $N : PC(J,E) \to PC(J,E)$ défini par

$$\begin{aligned} N(u)(t,y) &= \mu(t,y) + \sum_{0<t_k<t}\left(I_k\left(u\left(t_k^-,y\right)\right) - I_k\left(u\left(t_k^-,0\right)\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_0^y (t_k-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} f(s,x,u(s,x))\,dsdx \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_k}^{t}\int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1} f(s,x,u(s,x))\,dsdx. \end{aligned}$$

Par le Lemme 7.1.4 les points fixes de l'opérateur N sont des solutions du problème (7.1)-(7.3).
Soient

$$r_0 \geqslant \frac{\|\mu\|}{1 - 2mc - \frac{(m+1)p^* a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)}} \tag{7.16}$$

et

$$D_{r_0} = \left\{u \in PC(J,E) : \|u\|_\infty \leqslant r_0\right\}.$$

De toute évidence, le sous-ensemble D_{r_0} est fermé, borné et convexe. Nous allons montrer que N satisfait les hypothèses du Théorème 1.6.1. La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape 1 : *N est continu.*

Soit $\{u_n\}$ une suite telle que $u_n \to u$ dans $PC(J,E)$, alors pour chaque $(t,y) \in J$

$\|N(u_n)(t,y) - N(u)(t,y)\|$

$$
\begin{aligned}
\leqslant\ & \sum_{k=1}^{m}\left(\left\|I_k\left(u_n\left(t_k^-,y\right)\right)-I_k\left(u\left(t_k^-,0\right)\right)\right\|+\left\|I_k\left(u_n\left(t_k^-,0\right)\right)-I_k\left(u\left(t_k^-,0\right)\right)\right\|\right)\\
& +\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1\right)\Gamma\left(\alpha_2\right)}\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_0^y\left(t_k-s\right)^{\alpha_1-1}\left(y-x\right)^{\alpha_2-1}\\
& \times\left\|f\left(s,x,u_n\left(s,x\right)\right)-f\left(s,x,u\left(s,x\right)\right)\right\|dsdx\\
& +\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1\right)\Gamma\left(\alpha_2\right)}\int_{t_k}^{t}\int_0^y\left(t-s\right)^{\alpha_1-1}\left(y-x\right)^{\alpha_2-1}\\
& \times\left\|f\left(s,x,u_n\left(s,x\right)\right)-f\left(s,x,u\left(s,x\right)\right)\right\|dsdx.
\end{aligned}
$$

Puisque $I_k,\ k=1,...,m$ sont continues et f est du type de Carathéodory, alors par le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\left\|N\left(u_n\right)-N\left(u\right)\right\|_\infty\to 0 \text{ quand } n\to\infty.$$

Étape 2 : *N est une application de D_{r_0} dans lui-même.*
Soit $u\in D_{r_0}$, par (H2), nous avons pour chaque $(t,y)\in J$

$$
\begin{aligned}
& \left\|N\left(u\right)\left(t,y\right)\right\|\\
\leqslant\ & \left\|\mu\left(t,y\right)\right\|+\sum_{k=1}^{m}\left(\left\|I_k\left(u_n\left(t_k^-,y\right)\right)-I_k\left(u\left(t_k^-,0\right)\right)\right\|\right)\\
& +\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1\right)\Gamma\left(\alpha_2\right)}\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_0^y\left(t_k-s\right)^{\alpha_1-1}\left(y-x\right)^{\alpha_2-1}\left\|f\left(s,x,u\left(s,x\right)\right)\right\|dsdx\\
& +\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1\right)\Gamma\left(\alpha_2\right)}\int_{t_k}^{t}\int_0^y\left(t-s\right)^{\alpha_1-1}\left(y-x\right)^{\alpha_2-1}\left\|f\left(s,x,u\left(s,x\right)\right)\right\|dsdx\\
\leqslant\ & \left\|\mu\right\|+r_0\left(\frac{\left(m+1\right)p^*a^{\alpha_1}b^{\alpha_2}}{\Gamma\left(\alpha_1+1\right)\Gamma\left(\alpha_2+1\right)}+2mc\right)\\
\leqslant\ & r_0.
\end{aligned}
$$

Étape 3 : *$N\left(D_{r_0}\right)$ est borné et équicontinu.*
Par l'étape 2, il est évident que $N\left(D_{r_0}\right)\subset PC\left(J,E\right)$ est borné.
Pour l'équicontinuité de $N\left(D_{r_0}\right)$, soit $\left(\tau_1,y_1\right),\left(\tau_2,y_2\right)\in J,\tau_1<\tau_2$ et $y_1<y_2$ et soit $u\in D_{r_0}$. Alors

$$\left\|N\left(u\right)\left(\tau_2,y_2\right)-N\left(u\right)\left(\tau_1,y_1\right)\right\|$$

$$
\begin{aligned}
\leqslant\ & \|\mu(\tau_1,y_1)-\mu(\tau_2,y_2)\|+\sum_{k=1}^{m}\left(\left\|I_k\left(u\left(t_k^-,y_1\right)\right)-I_k\left(u\left(t_k^-,y_2\right)\right)\right\|\right)\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_0^{y_1}(t_k-s)^{\alpha_1-1}\left[(y_2-x)^{\alpha_2-1}-(y_1-x)^{\alpha_2-1}\right]\\
&\times\|f(s,x,u(s,x))\|\,dsdx\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{y_1}^{y_2}(t_k-s)^{\alpha_1-1}(y_2-x)^{\alpha_2-1}\|f(s,x,u(s,x))\|\,dsdx\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{\tau_1}\int_0^{y_1}\left[(\tau_2-s)^{\alpha_1-1}(y_2-x)^{\alpha_2-1}-(\tau_1-s)^{\alpha_1-1}(y_1-x)^{\alpha_2-1}\right]\\
&\times\|f(s,x,u(s,x))\|\,dsdx\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{y_1}^{y_2}(\tau_2-s)^{\alpha_1-1}(y_2-x)^{\alpha_2-1}\times\|f(s,x,u(s,x))\|\,dsdx\\
\leqslant\ & \|\mu(\tau_1,y_1)-\mu(\tau_2,y_2)\|+\sum_{k=1}^{m}\left(\left\|I_k\left(u\left(t_k^-,y_1\right)\right)-I_k\left(u\left(t_k^-,y_2\right)\right)\right\|\right)\\
&+\frac{p^*r_0}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_0^{y_1}(t_k-s)^{\alpha_1-1}\left[(y_2-x)^{\alpha_2-1}-(y_1-x)^{\alpha_2-1}\right]dsdx\\
&+\frac{p^*r_0}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{y_1}^{y_2}(t_k-s)^{\alpha_1-1}(y_2-x)^{\alpha_2-1}\,dsdx\\
&+\frac{p^*r_0}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{\tau_1}\int_0^{y_1}\left[(\tau_2-s)^{\alpha_1-1}(y_2-x)^{\alpha_2-1}-(\tau_1-s)^{\alpha_1-1}(y_1-x)^{\alpha_2-1}\right]dsdx\\
&+\frac{p^*r_0}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{y_1}^{y_2}(\tau_2-s)^{\alpha_1-1}(y_2-x)^{\alpha_2-1}\,dsdx.
\end{aligned}
$$

Quand $\tau_1 \to \tau_2$ et $y_1 \to y_2$ la membre droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.

Maintenant, soit V un sous-ensemble de D_{r_0} tel que $V \subset \overline{conv}\,(N(V)\cup\{0\})$. V est borné et équicontinu et donc la fonction $v \to v(t,y) = \gamma(V(t,y))$ est continue sur J. Comme les fonctions ϕ et ψ sont continues sur J, l'ensemble $\overline{\{\phi(t)+\psi(y)-\phi(0),(t,y)\in J\}} \subset E$ est compact. L'utilisation de ce fait, (H4), (H5), le Lemme 7.3.1 et les propriétés de la mesure γ nous avons pour chaque $(t,y)\in J$

$$
\begin{aligned}
v(t,y) &\leqslant \gamma\left(N(V)(t,y)\cup\{0\}\right)\\
&\leqslant \gamma\left(N(V)(t,y)\right)\\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_0^y (t_k-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1}p(s,x)\gamma(V(s,x))\,dsdx\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{t_k}^{t}\int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1}p(s,x)\gamma(V(s,x))\,dsdx\\
&\quad+\sum_{k=1}^{m}2c\gamma(V(t_k,y))\\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_0^y (t_k-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1}p(s,x)\gamma v(s,x)\,dsdx\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{t_k}^{t}\int_0^y (t-s)^{\alpha_1-1}(y-x)^{\alpha_2-1}p(s,x)\gamma v(s,x)\,dsdx\\
&\quad+\sum_{k=1}^{m}2c\gamma v(t_k,y)\\
&\leqslant \|v\|_\infty\left(\frac{(m+1)\,p^*a^{\alpha_1}b^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)}+2mc\right).
\end{aligned}
$$

Cela signifie que

$$
\|v\|_\infty\left(1-\left[\frac{(m+1)\,p^*a^{\alpha_1}b^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)}+2mc\right]\right)\leqslant 0.
$$

Par (7.15) il s'ensuit que $\|v\|_\infty=0$, c'est-à-dire $v(t,y)=0$ pour chaque $(t,y)\in J$, puis $V(t,y)$ est relativement compact dans $PC(J,E)$. Par le Lemme d'Ascoli-Arzela, V est relativement compact dans D_{r_0}. En appliquont maintenant le Théorème 1.6.1, nous concluons que N a un point fixe qui est une solution du problème (6.1)-(6.2).

□

7.2 Problème de Darboux avec impulsions et conditions non locales

Maintenant, nous présentons un résultat d'existence pour le problème non local (6.3)-(6.4).

Définition 7.2.1. une fonction $u \in PC\left(J, E\right)$ est dite une solution de (6.3)-(6.4) , si elle satisfaite $\left({}^{c}D_{0}^{\alpha}u\right)\left(t, y\right) = f\left(t, y, u\left(t, y\right)\right)$ sur$J$' et les conditions (7.4)-(6.4).

Théorème 7.2.2. *Supposons que (H1) - (H5) et les conditions suivantes :*
(H6) Il existe $\tilde{k} > 0$ *tel que* $\left\|Q\left(u\right)\right\| \leqslant \tilde{k}\left\|u\right\|_{PC}$ *, pour tout* $u \in PC\left(J, E\right),$
(H7) Il existe $k^{*} > 0$ *tel que* $\left\|K\left(u\right)\right\| \leqslant k^{*}\left\|u\right\|_{PC}$*, pour tout* $u \in PC\left(J, E\right),$
(H8) $\gamma\left(Q\left(B\right)\right) \leqslant \tilde{k}\gamma\left(B\right),$ *pour tout ensemble borné* $B \subset PC\left(J, E\right),$
(H9) $\gamma\left(K\left(B\right)\right) \leqslant k^{*}\gamma\left(B\right),$ *pour tout ensemble borné* $B \subset PC\left(J, E\right),$
sont vérifiées.

Si

$$\tilde{k} + k^{*} + 2mc + \frac{\left(m+1\right)p^{*}a^{\alpha_{1}}b^{\alpha_{2}}}{\Gamma\left(\alpha_{1}+1\right)\Gamma\left(\alpha_{2}+1\right)} < 1,$$

alors il existe une solution pour le problème (6.3)-(6.4) sur J.

7.3 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats. On considère le problème

$$\left({}^{c}D_{0}^{\alpha}u_{n}\right)\left(t, y\right) = \frac{1}{8e^{t+y+3}}\frac{\left|u_{n}\left(t, y\right)\right|}{\left(1+\left|u_{n}\left(t, y\right)\right|\right)}, \text{si}\left(t, y\right) \in J = \left[0, 1\right] \times \left[0, 1\right], t \neq \frac{1}{3}, \tag{7.17}$$

$$u_{n}\left(\frac{1}{3}^{+}, y\right) = u_{n}\left(\frac{1}{3}^{-}, y\right) + \frac{1}{6e^{t+y+4}}\frac{\left|u_{n}\left(\frac{1}{3}^{-}, y\right)\right|}{\left(15+\left|u_{n}\left(\frac{1}{3}^{-}, y\right)\right|\right)} \text{ si } y \in \left[0, 1\right], \tag{7.18}$$

$$u_{n}\left(t, 0\right) = t\ ,\ u_{n}\left(0, y\right) = y^{2}\ ,\ t \in \left[0, 1\right], y \in \left[0, 1\right], n = 1, 2, ... \tag{7.19}$$

Soit

$$E = l^{1} = \left\{u = \left(u_{1}, u_{2}, ..., u_{n}, ...\right) : \sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{n}\right| < \infty\right\}$$

avec la norme

$$\|u\|_E = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| .$$

$$u = (u_1, u_2, ..., u_n, ...) \text{ et } f = (f_1, f_2, ..., f_n, ...)$$

$$f_n(t, y, u_n) = \frac{1}{8e^{t+y+3}} \frac{|u_n(t, y)|}{(1 + |u_n(t, y)|)}, (t, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

et

$$I_k\left(u_n\left(t_k^-, y\right)\right) = \frac{1}{6e^{t+y+4}} \frac{\left|u_n\left(t_k^-, y\right)\right|}{\left(15 + \left|u_n\left(t_k^-, y\right)\right|\right)}, y \in [0, 1] .$$

Pour chaque $u_n$et $(t, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ nous avons

$$|f_n(t, y, u_n)| \leqslant \frac{1}{8e^{t+y+3}} |u_n| \tag{7.20}$$

et

$$|I_k(u_n)| \leqslant \frac{1}{6e^4} |u_n| .$$

Ainsi les conditions (H1) et (H2) sont satisfaites avec $p(t, y) = \frac{1}{8e^{t+y+3}}$ et $c = \frac{1}{6e^4}$, par (7.20) pour chaque ensemble borné $B \in l^1$ nous avons

$$\gamma(f(t, y, B)) \leqslant \frac{1}{8e^{t+y+3}} \gamma(B) \text{ pour chaque } (t, y) \in [0, 1] \times [0, 1] .$$

Ainsi (H3) est satisfaite. Nous allons montrer que la condition (7.15) est vérifier avec $a = b = 1, m = 1$ et $p^* = \frac{1}{8e^3}$. En effet

$$2mc + \frac{(m+1) p^* a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1) \Gamma(\alpha_2 + 1)} = \frac{1}{4e^3} + \frac{1}{4e^3 \Gamma(\alpha_1 + 1) \Gamma(\alpha_2 + 1)} < 1$$

est satisfait pour chaque $(\alpha_1, \alpha_2) \in (0, 1] \times (0, 1]$. Par conséquent, le Théorème 7.1.5 implique que le problème (7.17)-(7.19) a une solution définie sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

Conclusion et Perspective

Notre but principal, dans ce mémoire, est de présenter plusieurs résultats d'existence pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec des conditions locales et non locales dans des espaces de *Banach* de dimension infinie. Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe de *Mönch* combiné avec la mesure de non compacité de *Kuratowski*.

Nous prévoyons dans le future l'étude qualitative de ces problèmes, en particulier, on examinera le comportement assymptotique des solutions.

Bibliographie

[1] S. Abbas, Contribution à l'étude de quelques classes d'équations et inclusions différentielles hyperboliques d'ordre fractionnaire, thèse de doctorat, université de Sidi Bel Abbès, 2011.

[2] S. Abbas, M. Benchohra, Upper and lower solutions method for impulsive partial hyperbolic differential equations with fractional order, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 4 (2010), 406-413.

[3] R.P. Agarwal, M. Benchohra and D. Seba, On the application of measure of noncompactness to the existence of solutions for fractional differential equations. Results Math. 55 (2009), no. 3-4, 221–230.

[4] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan, Fixed point theory and applications, Cambridge tracts in Mathematics, 141. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[5] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Patapov, A. E. Rodkina, B. N. Sadovskii, Measures of Noncompactness and Condensing Operators. Translated from the 1986 Russian original by A. Iacob. Operator Theory : Advances and Applications, 55. Birkhauser Verlag, Basel, 1992.

[6] J. Banas, K. Goebel, Measures of noncompactness in Banach spaces, In lecture notes in pure and applied mathematics, volume 60, Marcel Dekker, New York, 1980.

[7] M. Benchohra, A. Cabada, and D. Seba, An existence result for nonlinear fractional differential equations on Banach spaces. Bound. Value Probl. 2009, Art. ID 628916, 11 pp.

[8] M. Benchohra, J. R. Graef, and S. Hamani, Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations, Applicable Analysis, vol. 87, no. 7, pp. 851-863, 2008.

[9] M. Benchohra and S. Hamani, Nonlinear boundary value problems for differential inclusi ons with Caputo fractional derivative, Topol. Meth. Nonlinear Anal., 32 (1) (2008), 115-130.

[10] M. Benchohra, J. Henderson and D. Seba, Boundary value problems for fractional differential inclusions in Banach spaces, Frac. Differ. Calc. (to appear).

[11] M. Benchohra, and D. Seba, Impulsive partial hyperbolic fractional order differential equations in Banach spaces.Vol. 1. July 2011, No.4, pp. 1-12.

[12] M. Benchohra and D. Seba, Impulsive fractional differential equations in Banach spaces. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2009, Special Edition I, No. 8, 14 pp.

[13] L. Byszewski and V. Lakshmikantham, Theorem about the existen ce and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space, Appl. Anal. 40 (1991), 11-19.

[14] L. Byszewski, Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semilin- ear evolution nonlocal Cauchy problem, J. Math. Anal. Appl. 162 (1991), 494-505.

[15] L. Byszewski, Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilin- ear functional-differential evolution nonlocal Cauchy problem. Selected problems of mathematics, 25-33, 50th Anniv. Cracow Univ. Technol. Anniv. Issue, 6, Cracow Univ. Technol., Krakow, 1995.

[16] K. Deimling, Multivalued differential equations, Walter De Gruyter, Berlin-New York, 1992.

[17] K. Deng, Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions, J. Math. Anal. Appl. 179 (1993), 630-637.

[18] S. Dugowson. Les Différentielles Métaphysiques : Histoire et Philosophie de la Généralisation de l'Ordre de Dérivation. PHD thesis, Université de Paris XIII, Villetaneuse , France, 1994.

[19] K. Diethelm and A.D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in " Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties" (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), pp 217-224, Springer- Verlag, Heidelberg, 1999.

[20] V. Gafiychuk, B. Datsun, V. Meleshko, Mathematical modeling of time fractional reactiondiffusion systems. J. Comp. Appl. Math. 220 (2008), 215-225.

[21] H.P. Heinz, On the behaviour of measures of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector-valued functions, Nonlinear Anal. 7 (1983), 1351-1371.

[22] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, Singapore, World Scientific, 2000.

[23] S. Hu, N. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis, Kluwer*, Dordrecht, Boston, 1997.

[24] A. Lasota, Z. Opial, An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser.Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1965), 781-786.

[25] K.S. Miller and B. Ross. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.

[26] H. Monch, Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces. Nonlinear Anal. 4 (5) (1980), 985-999.

[27] D.O'Regan, R. Precup, Fixed point theorems for set-valued maps and existence principles for integral inclusions, J. Math. Anal. Appl. 245 (2000), 594-612.

[28] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, San Diego, 1999.

[29] B. N. Sadovskii, On a fixed point principle. Funct. Anal. Appl. 1 1967 pp. 74-76.

[30] S. Szufla, On the application of measure of noncompactness to existence theorems. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 75 (1986), 1-14.

[31] K. Yosida, Fonctional Analysis, 6th edn. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[32] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations, Electron. J. Differential Equations 2006, No. 36, 12 pp.

<u>ملخص</u>

المعادلات التفاضلية ذات رتبة ناطقة في فضاء بناخ

في هذه المذكرة تطرقنا الى دراسة وجود حلول بعض انواع المعادلات التفاضلية ذات رتبة ناطقة بمفهوم **كابيتو** بشروط محلية وغير محلية وذلك باستعمال تقنية نظرية النقطة الثابتة **لمونك** مقترنة بالقياس لـ **كراوشكي**.

الكلمات والجمل الافتتاحية :المعادلات التفاضلية ذات رتبة ناطقة، وجود الحلول، الاشتقاقية ذات رتبة ناطقة حسب كابيتو، التكامل ذو رتبة ناطقة، النقطة الثابتة، فضاء بناخ، قياس غير متراص.

التصنيفات: 26**A**33, 34**A**37, 34**A**60, 34**B**15, 34**G**20

Abstract

Differential Equations With Fractional Order On Banach Spaces

*In this paper, we present several existence results for certain classes of differential equations of fractional order in the sense of **Caputo** with non local conditions and local on Banach spaces of infinite dimension.*

*These results were obtained by using the fixed point theorem **Monch** combined with the measure of non-compactness of **Kuratowski**.*

Key words and phrases:: *fractional differential equations, existence of solutions, caputo fractional derivative, the fractional order integral, fixed point, Banach space, measure of noncompactness.*

A.M.S Subject Classifications:: 26**A**33, 34**A**37, 34**A**60, 34**B**15, 34**G**20

Résumé

Équations Différentielles D'Ordre Fractionnaires Dans Des Espaces De Banach

*Dans ce mémoire, nous présentons plusieurs résultats d'existence pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de **Caputo** avec des conditions locales et non locales dans des espaces de Banach de dimension infinie.*

*Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe de **Mönch** combiné avec la mesure de non compacité de **Kuratowski.***

Phrases et mots clés : *Équations différentielles, fractionnaires, existence de solutions, dérivée fractionnaire de type Caputo, intégral fractionnaire, point fixe, espaces de Banach, mesure de non compacité.*

Classifications A.M.S : 26**A**33, 34**A**37, 34**A**60, 34**B**15, 34**G**20.