République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Option : Équations aux dérivées Partielles

présenté par

ARZAZI Abdelmalek

Soutenu le : 27-06-2023

Existence et non existence de solutions du système de Lane-Emden avec potentiel de Hardy

Soutenu devant le jury composé de :

M.S.E.MIRI	Professeur, Université de Tlemcen	Président
M.B.ABDELLAOUI	Professeur,Université de Tlemcen	Examinateur
M.M.INGREMEAU	MCA, Université Côte d'Azur de Nice	Co-encadrant
M.A. ATTAR	MCA, Université de Tlemcen	Encadrant

Année Universitaire : 2022-2023

Sommaire

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mon cher père,

le premier héros à mes yeux, son soutien a toujours été constant, il m'a incité à avoir confiance en moi et il m'a toujours encouragé tout au long de mes études. Merci Abi.

A ma chère mère,

mon guide, ma source de force et la personne qui a fait de la nuit un jour pour moi. Je salue son courage et son sacrifice. Merci Maman.

A ma chère Grand-mère,

Notre source de joie, que dieu la protège. Elle nous a jamais oublié dans ses prières, je lui souhaite une longue vie pleine de bonheur.

A mes chères sœurs "Zineb" et " Fatima zahra ",

ma source de vie et d'amour, ainsi qu'à leurs enfants " Samar-Leila, Sohaib-Khalil et Khadidja-Hadjer ", que Dieu les protège.

À tous mes amis et à tous ceux qui occupent une place dans mon cœur.

Je dédie ce travail à tous les membres de ma famille et mes proches et à tous ceux qui ont participé à ma réussite.

ARZAZI ABDELMALEK.

Remerciements

Tout d'abord, **" El Hamdoulillah "**, c'est grâce à **ALLAH** tout-Puissant qui m'a éclairé le chemin pendant toutes mes années d'études et surtout grâce aux prières de ma famille.

Je tiens d'abord à remercier **M.Touaoula Mohammed Tarik** et **M. Andreas Höring** pour leurs efforts de coordination qui nous ont facilité l'intégration au master international et bien suivre nos études avec l'université de Nice.

Je remercie **M. Attar Ahmed** et **M. Maxime Ingremeau** pour leur encadrement de qualité.

Je remercie également, **"M. S.Miri"** professeur à l'Université de Tlemcen pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à **"M. Boumediene Abdellaoui"**, professeur à l'Université de Tlemcen d'avoir accepté de participer à mon jury de mémoire et pour avoir fourni une formation de qualité tout au long de notre master.

Je remercie bien sûr **"M. Bentifour Rachid"**, chef du département de mathématiques et tous les enseignants, pour leur générosité et pour leur grande patience durant tout notre cursus universitaire, sans oublier également tous les membres du département de mathématiques.

Un grand merci à mes proches, en particulier ma mère et mon père, pour leur amour, leur patience infinie et surtout leur soutien moral lors des moments difficiles, en une seule phrase je vous dis : " vous êtes ma force et ma raison de vivre".

Je remercie aussi mes collègues qui ont rendu mes années d'études un parcours inoubliable avec tous ses moments de joie, tristesse, stress, ... Un grand merci et félécitations à mes collègues **M. Benmehdi Imed-eddine**, **M. Hadri Mohammed Walid** et **M. Salhi Ahmed**.

ARZAZI ABDELMALEK.

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles sont un outil classique pour étudier les modèles qui cherchent à expliquer le monde. Plusieurs phénomènes réels en particulier dans les domaines de la physique, de la biologie, et du traitement d'images,.., sont représentés par des équations aux dérivées partielles pour permettre la prédiction de comportements quantitatifs ou qualitatifs et la compréhension des phénomènes observés.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux systèmes non linéaires de Lane-Emden incluant des termes de potentiel. L'objectif est d'analyser le travail de [15] les auteurs qui ont étudié le système elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^2} + v^p \quad \text{dans } \Omega \setminus \{0\}, \\ -\Delta v &= \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^2} + u^q \quad \text{dans } \Omega \setminus \{0\}, \\ u = v &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

pour $p, q > 0, 0 < \lambda_1, \lambda_2 < \Lambda_N = \left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$ où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ contenant l'origine, avec $N \geq 3$. Le système (1) est lié à l'inégalité de Hardy classique. Plus précisément, il est bien connu que pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\Lambda_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 dx.$$

La constante $\Lambda_N = \left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$ est la valeur optimale, et elle n'est pas atteinte.

Soit le problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^2} + h \qquad \text{dans } \Omega \setminus \{0\} \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

En général, la présence du terme de réaction $\lambda \frac{u}{|x|^2}$ impose une régularité supplémentaire sur h pour obtenir l'existence d'une solution. Alors l'existence d'une solution positive est assurée sous la condition que h est un poids admissible dans le sens que $\int_\Omega h|x|^{-\alpha}dx < \infty$, pour $\alpha > 0$ dépendant de N et de λ.

En se basant sur cette condition d'existence des solutions, et en utilisant un processus d'itération, les auteurs [15] ont pu démontrer l'existence d'une courbe critique $\langle(p,q)$ telle que si la courbe qui dépend de $\langle(p,q) > 0$, alors le système (1) a une sur-solution non négative. En utilisant un calcul radial approprié, l'existence d'une solution si $\langle(p,q) < 0$.

Notre mémoire est structuré comme suit :

- **Chapitre 1** : présentation de quelques notions préliminaire et outils de base.
- **Chapitre 2** : analyse d'existence et de non-existence pour une équation ainsi que quelques résultats utiles pour la suite du mémoire.
- **Chapitre 3** : présentation du but principal de ce mémoire, il s'agit de traiter le système de Lane-Emden, on analyse l'existence, la non-existence des sur-solutions radiales en fonction de p, q.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction

Nous présentons quelques outils d'analyse non-linéaire qui seront utilisés au cours de ce mémoire.

1.2 Espaces de Lebesgues

Définition 1.2.1 *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}$, On appelle espaces de Lebesgue, les espaces suivants*

- *Si* $1 \leq p < \infty$

$$L^p(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;\; \textit{mesurable tel que} \;\; \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \Big\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- *Si* $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;\; \textit{mesurable et} \;\; \exists c > 0 \;\; \textit{telque} \;\; |v(x)| \leq c, \quad \textit{p.p dans} \;\; \Omega \Big\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c > 0 \;\; \textit{tel que} \;\; |v(x)| \leq c \;\; \textit{p.p dans} \;\; \Omega\}.$$

Proposition 1.2.1 *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert borné , $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.*

- *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*
- *$L^p(\Omega)$ est séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.*
- *$L^p(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.*

PREUVE. Voir [7]. ■

Remarque 1.2.1 *Si $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f g \, dx.$$

Proposition 1.2.2 *(Inégalité de Hölder)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N, 1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec p' le conjugué harmonique de p i.e :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Alors, on a :$fg \in L^1(\Omega)$, et

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Proposition 1.2.3 *Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, si Ω est de mesure finie alors :*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

En particulier :

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p-\varepsilon}(\Omega), \ \textit{pour tout } 1 < p \leqslant \infty \ (\textit{ pour tout } \ \varepsilon > 0).$$

Théorème 1.2.1 *(Inégalité d'interpolation)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ ouvert borné,$1 \leq p \leq q \leq +\infty$, si $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ alors $u \in L^r(\Omega)$ avec $p \leq r \leq q$, et :

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \ \ \forall \alpha \in [0,1].$$

1.3 Les espaces de Marcinkiewicz

Définition 1.3.1 *Soit $0 < q < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, on définit l'espace de Marcinkiewicz $\mathcal{M}^q(\Omega)$ comme suit :*

$$\mathcal{M}^q(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ , \exists C > 0 \ \textit{ telle que } \ mes\{x \in \Omega : |f(x)| > k\} \leq Ck^{-q}, \ \forall k > 0\},$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{M}^q(\Omega)} = \inf \{C : mes\{x \in \Omega : |f(x)| > k\} \leq Ck^{-q}, \ \forall k > 0\}.$$

Proposition 1.3.1 *Soit $0 < q < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné.*

- $\mathcal{M}^q(\Omega)$ *est un espace de Banach.*
- $\forall \epsilon > 0,\ \ L^q(\Omega) \subset \mathcal{M}^q(\Omega) \subset L^{q-\epsilon}(\Omega) \subset \mathcal{M}^{q-\epsilon}(\Omega).$

PREUVE. voir [4]. ■

Remarque 1.3.1 *Notons que si $f \in L^q(\Omega)$, on a*

$$\int_{|f|>k} dx \leqslant \int_\Omega \left|\frac{f}{k}\right|^q dx \leqslant k^{-q} \int_\Omega |f|^q dx,$$

donc

$$mes\{x \in \Omega : |f(x)| > k\} \leqslant k^{-q} \|f\|_q^q,$$

et comme conclusion directe on a l'inclusion $L^q(\Omega) \subset M^q(\Omega)$.

Proposition 1.3.2 *Si $f \in L^q(\Omega)$ alors*

$$\int_\Omega |f(x)|^q dx = q \int_0^{+\infty} t^{q-1} mes\{x \in \Omega : |f(x)| > t\} dt.$$

PREUVE. Voir [4]. ■

1.4 Résultats d'intégration

Théorème 1.4.1 *(Convergence monotone)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions positives intégrables telles que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n < +\infty.$$

Alors $(f_n)_n$ converge p.p dans Ω vers f. De plus $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x) dx = \int_\Omega f(x) dx.$$

Théorème 1.4.2 *(Théorème de Fatou)*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ et f définie par $f(x) = \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \geq 0$ *p.p sur* Ω.

- $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n < +\infty$.

Alors $f \in L^1(\Omega)$ *avec :*

$$\int_\Omega f(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x).$$

Définition 1.4.1 *(Fonctions équi-intégrables)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *de mesure finie (i.e* $|\Omega| < \infty$*), on dit qu'une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *est équi-intégrable si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta_\epsilon > 0$ *tel que* $|E| < \delta$ *entraîne pour tout n,*

$$\int_E |f_n(x)|dx \ \leqslant \ \varepsilon$$

Théorème 1.4.3 *(Lemme de Vitali)*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *est équi-intégrable, et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque partout vers* f*. Alors* $f \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Théorème 1.4.4 *(Théorème de convergence dominée)*
Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions intégrables telles que :*

- $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ *p.p sur* Ω.
- $\exists g \in L^1(\Omega)$ *telle que :* $\forall n \geqslant 1, |f_n(x)| \leqslant g(x)$ *p.p dans* Ω.

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Remarque 1.4.1
Si $f_n \longrightarrow f$ *dans* $L^1(\Omega)$*, alors en général on n'a pas* $f_n \longrightarrow f$ *p.p dans* Ω*. Mais on peut affirmer que la suite* $\{f_n\}_n$ *admet une sous suite qui converge presque partout vers* f *dans* Ω*.*
Soit $\{f_n\}_n$ *une suite de* $L^p(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$*, telles que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$*. Alors il existe une sous suite* $(f_{nk})_k$ *telle que*

- $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω.
- $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \ \forall k$ *et p.p sur* Ω*, avec* $h \in L^p(\Omega)$.

1.5 Espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N, p \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$.
On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}$:

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{u \in L^p(\Omega) | \forall \alpha \ \text{ tel que } \ |\alpha| \leq m, \ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\Big\}.$$

Où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ et $D^\alpha u$ est la dérivée de u d'ordre α au sens des distributions .
ie :

$\exists g_1, g_2, \cdots g_N \in L^p(\Omega)$ telles que $\displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} \varphi dx = (-1)^{\alpha_i} \int_\Omega g_i \varphi dx \ \forall i = 1, \cdots, N, \forall \varphi \in C_0^\infty.$

g_i est notée $D^{\alpha_i} u$ avec $Du = D^{\alpha_1} \cdots D^{\alpha_N}$.
En particulier pour $p = 2$ on note $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.
$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)},$$

ou de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on munit $W^{1,\infty}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Proposition 1.5.1

- *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, réflexif si $1 < p < +\infty$, séparable si $1 \leqslant p < +\infty$.*
- *Pour $p = 2$, on pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.*
- *L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)}.$$

La norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

- *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.*
- *Pour $p = 2$, on note $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.*
- *L'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable pour $1 \leqslant p < +\infty$, il est réflexif si $1 < p < +\infty$.*
- *$H_0^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^m(\Omega)$.*

Proposition 1.5.2 *Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Théorème 1.5.1 *(Rellich-Kondrachov)*
Soit Ω un domaine borné de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

- *Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.*
- *Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.*
- *Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.*

avec injection compactes.

PREUVE. Voir [7]. ∎

Remarque 1.5.1 *Les injections précédentes sont vraies pour $W_0^{1,p}(\Omega)$ seulement si Ω est borné.*

1.6 Inégalités utiles

Théorème 1.6.1 *(Inégalité de Poincaré)*
Soit Ω ouvert borné dans une direction, $1 \leq p < +\infty$. Alors, $\exists C = C(\Omega, p)$ telle que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

PREUVE. Voir [7]. ∎

Théorème 1.6.2 *(Inégalité de Hardy-Sobolev)*
Soit $1 < p < N$, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ alors, $\dfrac{u}{|x|} \in L^p(\mathbb{R}^N)$
et on a :

$$\Lambda_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx, \tag{1.1}$$

Où $\Lambda_N = \left(\dfrac{N-p}{p}\right)^p$.
En particulier pour $p = 2, \Omega \subset \mathbb{R}^N$:

$$\Lambda_N \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \tag{1.2}$$

PREUVE. Voir [7]. ■

On présente une version améliorée de cette inégalité, on considère l'espace de Hilbert $\mathbb{H}$, que l'on définit comme la complétion de $C^{\infty}(\Omega)$, par rapport à la norme

$$\|\phi\|_{\mathbb{H}} = \left(\int_{\Omega}\left(|\nabla\phi|^2 - \Lambda\frac{|\phi|^2}{|x|^2}\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

et on note par $\mathbb{H}$ la complétion de $C_0^{\infty}(\Omega)$ par rapport à la norme $\|.\|_{\mathbb{H}}$.
Une version améliorée de l'inégalité Hardy-Sobolev :

Théorème 1.6.3 *Soit $N > 2$. Alors pour tout $1 < q < 2$, il existe une constante positive $C = C(N, q, \Omega)$ telle que pour tout $\phi \in \mathbb{H}$ on a*

$$\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2\,dx - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2\int_{\Omega}\frac{\phi^2}{|x|^2}dx \geq C\left(\int_{\Omega}|\nabla\phi|^q dx\right)^{\frac{2}{q}} \qquad \textit{avec } 1 < q < 2.$$

PREUVE. Voir [1]. ■

Théorème 1.6.4 *(Inégalité de Picone)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N, u \in W^{1,p}(\Omega), u \geq 0, -\Delta_p u =$ -div$(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \geq 0, u \geq 0$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ alors :

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx \geq \int_{\Omega}\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)(-\Delta_p u)\,dx. \tag{1.3}$$

PREUVE. Voir [3]. ■

1.7 Principe du maximum

Définition 1.7.1 *(Opérateur elliptique)*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, a_{ij} :

$$a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R} \ \ \big(i, j = 1, \cdots, N\big)$$

tel que :

- *a_{ij} borné $\forall i, j = 1, \cdots, N$.*

- *$\forall x \in \Omega,\ \forall i, j = 1, \cdots, N,\ a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$.*

- *Ellipticité :*

$$\exists(\alpha_0,\alpha_1) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ \alpha_0|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \alpha_1|\xi|^2,$$

où $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_N^2$.

On dit qu'un opérateur différentielle L d'ordre 2 est elliptique s'il est de la forme :

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right),$$

L est bien définit pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *au sens classique ou au sens distributionnelle pour tout* $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

Proposition 1.7.1 *Soit l'équation* $Lu = f$*. Où L est un opérateur elliptique*
Si

$$u \geq 0 \quad sur\ \partial\Omega\ et \quad f \geq 0 \quad sur\ \Omega,$$

alors

$$u \geq 0 \quad sur\ \Omega\,.$$

1.8 Méthodes de résolution des problèmes elliptiques

1.8.1 Méthode des sous et sur solutions

Soient Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, L est un opérateur elliptique,

$$f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

une fonction localement lipschitzienne
Soit le problème :

$$\begin{cases} Lu(x) &= f(x,u(x)) & \text{dans } \Omega \\ u(x) &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}. \tag{1.4}$$

Définition 1.8.1 *Une sur-solution (resp. sous-solution)* $\overline{u}$ *(resp.*$\underline{u}$*) est telle que* $Lu \geq f(x,u)$ *(resp.* $Lu \leq f(x,u)$*) dans* Ω *et* $\overline{u} \geq 0$ *(resp.*$\underline{u} \leq 0$*) sur* $\partial\Omega$.

Théorème 1.8.1 *Si le problème 1.4 a une sous-solution* $\underline{u}$ *et une sur-solution* $\overline{u}$ *telles que* $\overline{u} \geq \underline{u}$*. Alors 1.4 admet deux solutions maximales* $\overline{u}^*$ *et* $\underline{u}^*$ *telles que* $\forall u$ *solution de 1.4 on a* $\overline{u} \geq \overline{u}^* \geq u \geq \underline{u}^* \geq \underline{u}$ *dans* Ω.
En particulier, si $\underline{u}^* = \overline{u}^*$ *1.4 a une unique solution* $u = \underline{u}^* = \overline{u}^*$.

PREUVE. voir [29] . ■

Lemme 1.8.1
i) Soient $\overline{u}_n, \underline{u}_n$ suivants :

$$\overline{u}_n = \begin{cases} \overline{u}_0 = \overline{u} \\ L\overline{u}_{n+1} + M\overline{u}_{n+1} = f(x, \overline{u}_n) + M\overline{u}_n \ \ dans \ \ \Omega, \\ \overline{u}_{n+1} = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad sur \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

$$\underline{u}_n = \begin{cases} \underline{u}_0 = \underline{u} \\ L\underline{u}_{n+1} + M\underline{u}_{n+1} = f(x, \underline{u}_n) + M\underline{u}_n \ \ dans \ \ \Omega, \\ \underline{u}_{n+1} = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad sur \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

$\overline{u}_n$ (resp.$\underline{u}_n$) convergent simplement dans $\overline{\Omega}$ pour un certain $M > 0$ vers $\overline{u}^*$ resp.$\underline{u}^*$.
ii) $\overline{u}^*$ et $\underline{u}^*$ sont des solutions du problème 1.4 .
iii) $\forall u$ solution de 1.4 $\underline{u}^* \leq u \leq \overline{u}^*$.

PREUVE. voir [29]. ■

1.8.2 Théorème de Lax Milgram

Définition 1.8.2 *(Fonction coercive)*
Une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach E est dite coercive s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ telles que :

$$J(x) \ \geqslant \ \alpha \|x\|_E + \beta.$$

Il est évident de voir que si J est coercive, elle est bornée inférieurement et chaque suite minimisante est bornée.

Théorème 1.8.2 *Soient H un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue, et coercive, et L une forme linéaire continue sur H. Alors $\exists u \in H$ tel que :*

$$\forall v \in H, a(u, v) = L(v).$$

De plus si a est symétrique, alors u est caractérisé par :

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v).$$

Où

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - L(u).$$

1.8.3 Théorème de minimisation

Définition 1.8.3 *(Fonction faiblement semi continue inférieurement (faib.s.c.i))*
Soit J une fonction définie sur un espace de Banach E, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. J est dite faiblement semi

continue inférieurement (faib.s.c.i.) en x, si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers x, on a :

$$J(x) \leqslant \lim_{n\to+\infty} J(x_n).$$

Notons que J est (faib.s.c.i) si est seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |f(x)| \leqslant \lambda\}$est faiblement fermé dans E.
Notons aussi que si J est convexe et semi continue inférieurement, alors J est (faib.s.c.i).

Théorème 1.8.3 *Soient E est un espace de Banach réflexif, $J : E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction coercive faiblement semi-continue inférieurement sur E.*
Alors $\inf\limits_{u\in E} J(u) < \infty$ et il existe $u_0 \in E$, tel que $J(u_0) = \min\limits_{u\in E} J(u)$. De plus si J est strictement convexe, u_0 est unique. Si J est différentiable au sens de Gâteaux, alors $J'(u_0) = 0$.

PREUVE. Voir [28]. ■

1.8.4 Existence d'un point critique

En général, pour étudier la notion de compacité des suites minimisantes, on fait appel souvent à la condition de Palais Smale afin de démontrer l'existence d'un point critique.

Définition 1.8.4 *(Condition de Palais-Smale)*
Soient X un espace de Banach, et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c), si toute suite $(u_n)_n$ de X telle que

$$J(u_n) \longrightarrow c \ \ dans \ \ \mathbb{R} \ \ et \ \ J'(u_n) \longrightarrow 0 \ \ dans \ \ X'$$

contient une sous-suite $(u_{nk})_k$ convergente.

Théorème 1.8.4 *(Théorème du col)*
Soient X un espace de Banach, $J \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0) = 0$ et que :
i) Il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\| = R$, alors $J(u) \geqslant a$.
ii) Il existe $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| > R$ et $J(u_0) < a$.
Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geqslant a$. De façon plus précise, si on pose

$$B = \{\varphi([0,1]); \varphi \in \mathcal{C}([0,1], X),\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = u_0\},$$

et :

$$c := \inf_{A\in B} \max_{v\in A} J(v).$$

alors c est une valeur critique de J, et $c \geqslant a$.

PREUVE. Voir [28]. ■

Chapitre 2

Résultat d'existence pour une équation

2.1 Introduction

Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier la non-existence de sur-solutions positives pour une équation de Schrödinguer, on présente aussi quelques résultats qui nous seront utiles par la suite :

Soit $N \geq 3, \lambda \leq \Lambda_N := \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$.

On définit l'opérateur de type Schrödinguer par

$$\mathcal{L}_\lambda . = -\Delta . - \lambda \frac{\cdot}{|x|^2} \, .$$

Soit l'équation de Schrödinguer suivante :

$$\mathcal{L}_\lambda u = u^p \qquad \text{dans } \; B_R(0) \setminus \{0\}. \tag{2.1}$$

2.2 Existence d'une solution radiale

Considérons le problème de Hardy suivant :

$$\mathcal{L}_\lambda u = 0 \;\text{ dans }\; \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \tag{2.2}$$

Proposition 2.2.1 *Le problème (2.2) a deux branches de solutions radiales symétriques de cette forme :*

$$\Phi_\lambda(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha^+} & si \;\; \lambda \;<\; \Lambda_N \\ -|x|^{-\alpha^+}\ln(|x|) & si \;\; \lambda \;=\; \Lambda_N. \end{cases} \quad et \;\; \Gamma_\lambda(x) = |x|^{-\alpha^-} \tag{2.3}$$

Où

$$\alpha_{\pm} = \alpha_{\pm}(\lambda) := \frac{N-2}{2} \pm \sqrt{\Lambda_N - \lambda} \tag{2.4}$$

sont les racines de l'équation :

$$\mathcal{K}(\beta) = \beta^2 - (N-2)\beta - \lambda = 0.$$

Notons que $\alpha^- > 0$ pour tout $\lambda \in (0, \Lambda_N)$.

Remarque 2.2.1 *Si $\lambda = \Lambda_N$, alors $\Phi_\lambda(x)$ n'est définit que pour $x \in B_1(0)$.*

PREUVE. Posons $r = |x|$, la formulation radiale de $\mathcal{L}_\lambda$:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \;;\; \frac{\partial u}{\partial x_i} = u'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = u'(r)\frac{x_i}{r} \;;\; \frac{\partial^2 r}{\partial x_i} = \frac{1}{r}.$$

Et,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) = u''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 + u'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x_i} = u''(r)\frac{x_i^2}{r^2} - \frac{u'(r)}{r}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda u = -\Delta u - \lambda\frac{u}{|x|^2} &= -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \lambda\frac{u}{|x|^2} \\ &= -\sum_{i=1}^{N}\left(u''(r)\frac{x_i^2}{r^2} - \frac{u'(r)}{r}\right) - \lambda\frac{u(r)}{r^2} \\ &= -u''(r) - (N-1)\frac{u'(r)}{r} - \lambda\frac{u(r)}{r^2}. \end{aligned}$$

L'équation $\mathcal{L}_\lambda u = 0$ devient :

$$-u''(r) - \frac{N-1}{r}u'(r) - \frac{\lambda}{r^2}u(r) = 0.$$

Ce qui entraine que

$$r^2u''(r) + (N-1)ru'(r) + \lambda u(r) = 0. \tag{2.5}$$

Cette dernière est de la forme :

$$z^2y'' + azy' + by = 0.$$

C'est l'équation d'Euler et on la résout comme suit :
On pose $y(z) = z^{-\beta}$ et on remplace dans l'équation.

$$y'(z) = -\beta z^{-\beta-1}, \qquad y''(z) = \beta(\beta+1)z^{-\beta-2}.$$

Donc on obtient :

$$\left[\beta^2 + (1-a)\beta + b\right] z^{-\beta} = 0 \Rightarrow \beta^2 + (1-a)\beta + b = 0. \tag{2.6}$$

On discute l'existence des solutions suivant la valeur de $\Delta = (a-1)^2 - 4b$.

- Si $\Delta > 0$:
  On a deux solutions :
$$\alpha^- = \frac{a-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - b}, \qquad \alpha^+ = \frac{a-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - b}.$$
  La solution générale se présente comme suit :
$$y(z) = c_1 z^{-\alpha^-} + c_2 z^{-\alpha^+}. \tag{2.7}$$
- Si $\Delta = 0$,
  on a une solution double : $\alpha_0 = \dfrac{a-1}{2}$, et la solution générale se présente comme suit :
$$y(z) = c_1 z^{-\alpha_0} - c_2 z^{-\alpha_0} \ln z$$
- Si $\Delta < 0$,
  on obtient deux solutions complexes de la forme $\alpha \pm i\gamma$ et la solution générale se présente comme suit :
$$y(z) = c_1 z^{\alpha} \cos(\gamma \ln(z)) + c_2 z^{\alpha} \sin(\gamma \ln(z)).$$
  Revenant à notre cas de départ (2.6), le discriminant $\Delta = (N-2)^2 - 4\lambda$ où $0 < \lambda \leq \Lambda_N = \left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$ ce qui entraine que $\Delta \geq 0$.
  On aura donc comme solution :
$$u(r) = \begin{cases} c_1 r^{-\alpha^-} + c_2 r^{-\alpha^+} & \text{si } 0 < \lambda < \Lambda_N \\ c_1 r^{-\alpha^-} - c_2 r^{-\alpha^+} \ln(r) & \text{si } \lambda = \Lambda_N \end{cases}$$
  avec
$$\alpha^- = \frac{N-2}{2} - \sqrt{\Lambda_N - \lambda}, \qquad \alpha^+ = \frac{N-2}{2} + \sqrt{\Lambda_N - \lambda},$$
  et donc on a deux branches de solutions :
$$\Gamma_\lambda(x) = |x|^{-\alpha^-}, \qquad \Phi_\lambda(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha^+} & \text{si } \lambda < \Lambda_N \\ -|x|^{-\alpha^+} \ln(|x|) & \text{si } \lambda = \Lambda_N. \end{cases}$$

■

Pour $0 < \lambda < \Lambda_N, \Phi_\lambda$ est une solution régulière de (2.2) au sens que $\lambda |x|^{-2} \Phi_\lambda(.) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et :
$$\mathcal{L}_\lambda \Phi_\lambda = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}),$$

i.e :
$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\lambda \mathcal{L}_\lambda \varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}).$$

Ce sens distributionnel n'arrive pas à exprimer la singularité de Φ_λ.
Pour contourner cette difficulté, les auteurs de [17, 18] ont introduit un nouveau plan de travail :

Proposition 2.2.2 *La fonction Φ_λ est une solution distributionnelle de :*

$$\mathcal{L}_\lambda u = c_\lambda \delta_0 \ \ dans \ \ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}),$$

telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\lambda \mathcal{L}_\lambda^* \varphi d\gamma_\lambda = c_\lambda \varphi(0), \ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.8}$$

Où δ_0 est la masse de Dirac à l'origine, on note $d\gamma_\lambda(x) = \Gamma_\lambda(x)dx$, et

$$\mathcal{L}_\lambda^*. = -\Delta. + 2\frac{\alpha^-}{|x|^2} x \cdot \nabla., \tag{2.9}$$

et

$$c_\lambda = \begin{cases} 2|S^{N-1}|\sqrt{\Lambda_N - \lambda} & si \quad \lambda < \Lambda_N \\ |S^{N-1}| & si \quad \lambda = \Lambda_N \end{cases},$$

avec $|S^{N-1}| = N|B_1(0)|$ $\big($où $|B_1(0)|$ est la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^N\big)$.

PREUVE.
Posons $r = |x|$, alors :

$$\mathcal{L}_\lambda^* u = -u''(r) - \frac{N-1-2\alpha^-}{r} u'(r) = -u''(r) - \frac{2\sqrt{\Lambda_N - \lambda}+1}{r} u'(r).$$

On sépare l'étude en deux parties :

- Si $\lambda < \Lambda_N$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\lambda \mathcal{L}_\lambda^* \varphi d\mu &= |S^{N-1}| \int_0^{+\infty} r^{-\alpha^+} \left(-\varphi''(r) - \frac{2\sqrt{\Lambda_N - \lambda}+1}{r} \varphi'(r) \right) r^{-\alpha^-} r^{N-1} dr \\
&= -|S^{N-1}| \int_0^{+\infty} r^{N-2-\alpha^- - \alpha^+} \left(r\varphi''(r) + \left(2\sqrt{\Lambda_N - \lambda}+1\right) \varphi'(r) \right) dr \\
&= -|S^{N-1}| \left[\int_0^{+\infty} r\varphi''(r) dr + \left(2\sqrt{\Lambda_N - \lambda}+1\right) [\varphi(r)]_0^{+\infty} \right] \\
&= -|S^{N-1}| \left[\left[r\varphi'(r)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi'(r) dr - \left(2\sqrt{\Lambda_N - \lambda}+1\right) \varphi(0) \right] \\
&= 2\sqrt{\Lambda_N - \lambda} |S^{N-1}| \varphi(0).
\end{aligned}$$

- Si $\lambda = \Lambda_N$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\lambda \mathcal{L}_\lambda^* \varphi d\mu &= |S^{N-1}| \int_0^{+\infty} r^{-\alpha^+} (-\ln r) \left(-\varphi''(r) - \frac{\varphi'(r)}{r} \right) r^{-\alpha^-} r^{N-1} dr \\
&= |S^{N-1}| \int_0^{+\infty} \ln r \left(r\varphi''(r) + \varphi'(r) \right) dr \\
&= |S^{N-1}| \left[\left[r \ln r \varphi'(r) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (\ln r + 1)\, \varphi'(r) dr + \int_0^{+\infty} \ln r \varphi'(r) dr \right] \\
&= -|S^{N-1}| \int_0^{+\infty} \varphi'(r) dr \\
&= |S^{N-1}| \varphi(0).
\end{aligned}$$

■

Pour ce qui suit, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.2.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que : $T_k(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$*
Si

$$\frac{1}{k} \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2 dx \leq M \quad \forall k > 0. \tag{2.10}$$

Alors $u \in \mathcal{M}^p(\Omega)$ avec $p = \dfrac{N}{N-2}$,
où

$$T_k(u) = sign(u) \min\{|u|, k\} \tag{2.11}$$

PREUVE. voir [5] ■

Lemme 2.2.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que : $T_k(u)$ définie par (2.11) appartient à $W_0^{1,2}(\Omega)$ vérifiant (2.10)*
Alors $\nabla u \in \mathcal{M}^p(\Omega)$ avec $p = \dfrac{N}{N-1}$

PREUVE. voir [5] ■

Lemme 2.2.3 *Soit $f \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ pour un certain $\beta \in (0,1)$.*
Alors le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathcal{L}_\lambda u &=& f & \text{dans } \Omega \setminus \{0\} \\ u &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \lim\limits_{x \to 0} u(x) \Phi_\lambda^{-1}(x) &=& 0 & \end{array} \right. .$$

a une unique solution u_f satisfaisant :

$$\int_\Omega u_f \mathcal{L}_\lambda^*(\varphi) d\gamma_\lambda = \int_\Omega f \varphi d\gamma_\lambda \quad \forall \varphi \in C_0^{1,1}(\Omega).$$

PREUVE. Voir [17]. ■

2.2.1 Une autre manière de voir la singularité

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\lambda u &= f & \text{dans } \Omega \setminus \{0\} \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.12}$$

Où Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, $\lambda \leq \Lambda$.
On définit $v(x) = |x|^{\alpha^-} u(x)$, alors par un changement de variable v résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{-div}\left(|x|^{-2\alpha^-} \nabla v\right) &= f|x|^{-\alpha^-} & \text{dans } \Omega \setminus \{0\} \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.13}$$

Remarque 2.2.2 *D'après [21, Lemme 1.3] on obtient que : il existe une constante positive $C > 0$, telle que pour $f \in L^\infty(\Omega)$, alors*

$$u(x) \leq C|x|^{\alpha^-}. \tag{2.14}$$

Nous avons besoin des outils de base suivants : le principe de comparaison et l'estimation de base des singularités à l'origine.

Lemme 2.2.4 *Soient $\lambda \leq \Lambda_N$, $f_1 \geq f_2$ et $k_1 \geq k_2$, u_1 et u_2 telles que :*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\lambda u_1 &\geq f_1 & \textit{dans} \ \ \Omega \setminus \{0\}, \\ \liminf\limits_{|x|\to 0} u_1(x)\Phi_\lambda^{-1}(x) &\geq k_1, & \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\lambda u_2 &\leq f_2 & \textit{dans} \ \ \Omega \setminus \{0\}, \\ \liminf\limits_{|x|\to 0} u_2(x)\Phi_\lambda^{-1}(x) &\leq k_2. & \end{cases}$$

Si $u_1 \geq u_2$ sur $\partial\Omega$, alors $u_1 \geq u_2$ dans $\Omega \setminus \{0\}$

PREUVE. Soit $\omega := u_1 - u_2$ telle que u_1, u_2 vérifient les hypothèses du Lemme 2.2.4. Alors ω vérifie le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\lambda \omega &\geq 0 & \text{dans } \Omega \setminus \{0\}, \\ \omega &\geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \liminf\limits_{|x|\to 0} \omega(x)\Phi_\lambda^{-1}(x) &\geq 0. & \end{cases}$$

Donc, par le principe de Maximum :

$$\omega \geq 0 \text{ dans } \Omega.$$

Alors, $u_1 \geq u_2$ dans $\Omega \setminus \{0\}$. ■

Lemme 2.2.5 *Supposons que :* $\lambda \leq \Lambda_N, r_0 \in (0,1]$, *telle que* $B_{2r_0}(0) \subset \Omega$ *et* $u \in \mathcal{C}^{1,1}(\Omega \setminus \{0\})$ *telle que u solution classique positive de* (2.12) *avec* $f > 0$ *Alors, u positive dans* $\Omega \setminus \{0\}$, *et pour* $c_1 > 0$,

$$u(x) \geq c_1|x|^{-\alpha^-},\ \forall x \in B_{r_0}(0) \setminus \{0\}. \tag{2.15}$$

PREUVE. Par le principe du Maximum , on a $u > 0$ *dans* $\Omega \setminus \{0\}$, alors

$$u(x) \geq c_1 > 0 \ \text{ sur } \ \partial B_{r_0}(0),$$

et

$$\liminf_{|x|\to 0} u(x)\Phi_\lambda(x)^{-1} \geq 0.$$

Donc, il existe $c_2 > 0$ telle que $u(x) \geq c_2 r_0^{-\alpha^-} = c_2|x|^{-\alpha^-}$ sur $\partial B_{r_0}(0)$.

Alors, par Lemme 2.2.4, on a $u(x) \geq |x|^{-\alpha^-}$ dans $B_{r_0}(0) \setminus \{0\}$, ce qu'il fallait démontrer. ■

Une condition d'intégrabilité sur f près de l'origine est nécessaire pour assurer l'existence d'une solution distributionnelle.

Théorème 2.2.1 *Soit* f *une fonction de* $\mathcal{C}^{0,\beta}_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$ *pour un certain* $\beta \in (0,1)$.
(I) Supposons que :

$$\int_\Omega |f| d\gamma_\lambda < +\infty. \tag{2.16}$$

Alors le problème (2.12), *soumis de la condition* $\lim_{|x|\to 0} u(x)\Phi_\lambda^{-1}(x) = k$ *avec* $k \in \mathbb{R}$, *admet une unique solution* u_k, *vérifiant la formulation faible suivante :*

$$\int_\Omega u_k \mathcal{L}^*_\lambda(\varphi) d\gamma_\lambda = \int_\Omega f\varphi d\gamma_\lambda + c_\lambda k\varphi(0),\ \forall \varphi \in \mathcal{C}^{1,1}_0(\Omega). \tag{2.17}$$

(II) Supposons que f *vérifie* (2.16) *et u est une solution positive de* (2.12), *alors u satisfait* (2.17) *pour un certain* $k \geq 0$ *et vérifie :*

$$\lim_{|x|\to 0} u(x)\Phi_\lambda^{-1}(x) = k.$$

(III) Supposons que $f \geq 0$ *et*

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\Omega\setminus B_r(0)} f d\gamma_\lambda = +\infty. \tag{2.18}$$

Alors le problème (2.12) *n'admet pas de solution positive.*

PREUVE. [17] (I)-Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$ et $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega, d\gamma_\lambda)$.
Le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\lambda u_n = f_n & \text{dans } \Omega\setminus\{0\} \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.19}$$

Par le théorème 1.8.2 (Lax-Milgram), ce problème admet une unique solution $u_n \in H_0^1(\Omega)$.
Soit ψ_0 l'unique solution énergétique du problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\lambda \psi_0 = |x|^{-2} & \text{dans } \Omega\setminus\{0\} \\ \psi_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

De (2.14), on peut voir que $\psi_0(x) \le c|x|^{-\alpha^-}$.
On utilise donc ψ_0 comme fonction test dans (2.19) :

$$\int_\Omega u_n|x|^{-2}dx = \int_\Omega \mathcal{L}_\lambda u_n \psi_0 dx = \int_\Omega f_n\psi_0 dx \le c\int_\Omega f_n|x|^{-\alpha^-}dx < +\infty,$$

et donc

$$\|u_n|x|^{-2}\|_{L^1(\Omega)} \le C_1 \quad \text{où } \left(C_1 = c\int_\Omega f_n|x|^{-\alpha^-}dx\right).$$

Maintenant, on prend $T_k(u_n)$comme fonction test dans (2.19), on obtient :

$$\int_\Omega \left(-\Delta u_n - \lambda\frac{u_n}{|x|^2}\right)T_k(u_n)dx = \int_\Omega f_nT_k(u_n)\,dx.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2dx &= \int_\Omega f_nT_k(u_n)dx + \lambda\int_\Omega \frac{u_n}{|x|^2}T_k(u_n)dx \\ &\le k\left(\int_\Omega f_n dx + \lambda\int_\Omega \frac{u_n}{|x|^2}\,dx\right).\end{aligned}$$

Ce qui entraine que

$$\frac{1}{k}\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2\,dx \le \|f\|_{L^1(\Omega)} + \lambda C_1.$$

En appliquant le lemme 2.2.1, on obtient :

$$u_n \in \mathcal{M}^{p_1}(\Omega) \quad p_1 = \frac{N}{N-2}.$$

Alors

$$\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \le C'\|u_n\|_{L^{p_1-\alpha}(\Omega)} < C, \qquad \forall\alpha > 0.$$

En appliquant le lemme 2.2.2, on obtient :

$$\nabla u_n \in \mathcal{M}^{q_1}(\Omega), \;\; q_1 = \frac{N}{N-1}.$$

Donc
$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^1(\Omega),$$
et
$$\nabla u_n \rightharpoonup w = \nabla u \text{ faiblement dans } L^1(\Omega) \text{ (Par unicité de la limite).}$$
Alors, on a :
$$u_n \to u \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ et } \nabla u_n \to \nabla u \text{ dans } L^1(\Omega).$$
Et par le lemme de Vitali 1.4.3 on a :
$$\frac{u_n}{|x|^2} \to \frac{u}{|x|^2} \text{ dans } L^1(\Omega).$$

On conclut donc que u est bien une solution faible de (2.12).
Soit u_k l'unique solution de (2.12) avec la condition $\lim\limits_{|x|\to 0} u(x)\Phi_\lambda^{-1}(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$,

Soit $\psi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que :
$$\psi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

et soit $n_0 \geq 2R$ telle que $R = \sup\{r > 0,\ B_r(0) \subset \Omega\}$.
Notons $\psi_{n_0}(r) = \psi_1(n_0 r)$, avec $r = |x|$, $w_1 = k\Phi_\lambda\psi_{n_0}$ et $w_2 = u_k - k\Phi_\lambda\psi_{n_0}$.
Alors on a :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\lambda w_i &= (-1)^i k[2\nabla\psi_{n_0}\cdot\nabla\Phi_\lambda + \Phi_\lambda\Delta\psi_{n_0}] + (i-1)f & \text{dans } \Omega\setminus\{0\} \\ w_i &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \lim\limits_{x\to 0} w_i(x)\Phi_\lambda^{-1}(x) &= k(2-i) & \end{cases} \tag{2.20}$$

Ce qui donne

$$\int_\Omega w_1\mathcal{L}_\lambda^*(\varphi)d\gamma_\lambda = \int_{\{x\in\Omega\setminus|x|n_0\in[0,1]\}} k\Phi_\lambda\mathcal{L}_\lambda^*(\varphi)d\gamma_\lambda + \int_{\{x\in\Omega\setminus|x|n_0\in]1,2[\}} \mathcal{L}_\lambda w_1\varphi d\gamma_\lambda \tag{2.21}$$

de (2.8) on a
$$= c_\lambda k\varphi(0) - k\int_\Omega [2\nabla\psi_{n_0}\cdot\nabla\Phi_\lambda + \Phi_\lambda\Delta\psi_{n_0}]\,\varphi d\gamma_\lambda, \tag{2.22}$$

et de lemme 2.2.3
$$\int_\Omega w_2\mathcal{L}_\lambda^*(\varphi)d\gamma_\lambda = k\int_\Omega [2\nabla\psi_{n_0}\cdot\nabla\Phi_\lambda + \Phi_\lambda\Delta\psi_{n_0}]\,\varphi d\gamma_\lambda + \int_\Omega f\varphi d\gamma_\lambda. \tag{2.23}$$

Par (2.21) et (2.23), on aura
$$\int_\Omega u_k\mathcal{L}_\lambda^*(\varphi)d\gamma_\lambda = \int_\Omega f\varphi d\gamma_\lambda + c_\lambda k\varphi(0).$$

Ce qu'il fallait démontrer.
(II) voir [17].
(III) $f \geq 0$ et $\lim\limits_{r \to 0^+} \int_{\Omega \setminus B_r(0)} f \, d\gamma_\lambda = +\infty$.
Soit φ_0 la solution du problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\lambda \varphi_0 &= 1 \qquad \text{dans} \quad \Omega \\ \varphi_0 &= 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.24}$$

On a par le Lemme 2.2.5 que $\varphi_0(x) \geq c|x|^{-\alpha^-}$ dans un voisinage de $x_0 = 0$ avec $c > 0$.
On prend φ_0 comme fonction test dans (2.19), et soit u_n solution de (2.19)

$$\int_\Omega \mathcal{L}_\lambda u_n \varphi_0 dx = \int_\Omega f_n \varphi_0 \, dx.$$

Ce qui entraine

$$\int_\Omega u_n \mathcal{L}_\lambda \varphi_0 dx = \int_\Omega f_n \varphi_0 dx.$$

Alors

$$\int_\Omega u_n dx = \int_\Omega f_n \varphi_0 dx \geq c \int_\Omega f_n |x|^{-\alpha^-} dx.$$

On peut facilement voir que par le Lemme 2.2.4 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et donc $u_n \leq u = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
Ce qui implique que :

$$\int_\Omega u_n dx \geq \int_\Omega f_n |x|^{\alpha^-} dx.$$

Par le théorème de convergence dominée

$$\int_\Omega u dx \geq \int_\Omega f |x|^{\alpha^-} dx = +\infty,$$

et donc le problème (2.12) n'admet pas de solution. ■

Lemme 2.2.6 *Soient $\lambda \leq \Lambda_N$, f positive continue dans $\Omega \setminus \{0\}$ et vérifie :*

$$f(x) \geq c_3 |x|^{-\beta-2}, \ \forall x \in B_{r_0}(0) \setminus \{0\} \ \beta \in \mathbb{R}, \ \textit{avec} \ c_3 \geq 1. \tag{2.25}$$

Si $\beta \geq \alpha^+$, alors le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\lambda u &= f \qquad \textit{dans } \Omega \setminus \{0\} \\ u &= 0 \qquad \textit{sur } \partial\Omega \\ \lim\limits_{|x| \to 0} u(x) \Phi_\lambda^{-1}(x) &= 0 \end{cases}, \tag{2.26}$$

n'admet pas de solution positive.
Si $\beta < \alpha^+$ et $f \in L^1(\Omega, d\gamma_\lambda)$, (2.12) admet une unique solution u_f, qui est positive et vérifie :
Pour $\alpha^- < \beta < \alpha^+$,

$$u_f(x) \geq c_4 |x|^{-\beta}, \ \forall x \in B_{r_0}(0) \setminus \{0\}. \tag{2.27}$$

Pour $\beta = \alpha^-$,

$$u_f(x) \geq c_4|x|^{-\beta}(-\ln|x|),\ \forall x \in B_{r_0}(0) \setminus \{0\}. \tag{2.28}$$

Pour $\beta < \alpha^-$,

$$u_f(x) \geq c_4|x|^{-\alpha^-},\ \forall x \in B_{r_0}(0) \setminus \{0\}, \tag{2.29}$$

où $c_4 \geq 1$.

PREUVE. Le cas $\beta \geq \alpha^+$ La non existence de solution et le cas d'existence pour $\beta < \alpha^+$ est un résultat direct du théorème 2.2.1.
En effet, si $\beta \geq \alpha^+$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f d\gamma_\lambda &\geq \int_\Omega |x|^{-\beta-2}|x|^{-\alpha^-}dx = c_1\int_0^{r_0} r^{-\beta-2-\alpha-+N-1}dr \\
&= c_2\left[r^{-\beta-2-\alpha^-+N}\right]_0^{r_0} = c_3 - \lim_{r\to 0} r^{-\beta-2-\alpha^-+N} = +\infty \\
&\Leftrightarrow -\beta-2-\alpha^-+N < 0 \Leftrightarrow \beta > N-2-\alpha^- = \alpha^+.
\end{aligned}$$

Si $\beta = \alpha^+$ on aura :

$$\int_\Omega f d\gamma_\lambda \geq \int_\Omega |x|^{-\alpha^+-2}|x|^{-\alpha^-}dx = c_1\int_0^{r_0}\frac{1}{r}dr = +\infty\ .$$

Pour le comportement asymptotique à l'origine, on doit construire de bonnes bornes pour u_f.
Dans cette preuve on suppose que $r_0 = 1$, sinon on fait une normalisation.
Pour $\alpha^- < \beta < \alpha^+$, on a

$$\mathcal{L}_\lambda|x|^{-\beta} = \mathcal{K}(\beta)|x|^{-\beta-2}.$$

Où $\mathcal{K}(\beta) > 0$. De (2.25), il existe $t_1 > 0$ telle que :

$$\mathcal{L}_\lambda(t_1|x|^{-\beta}) = t_1\mathcal{K}(\beta)|x|^{-\beta-2} \leq c_3|x|^{-\beta-2} \leq f(x),\ \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Alors, par Lemme 2.2.4, en prenant la borne inférieure $u_1(x) = t_1|x|^{-\beta}$, et $u_2(x) = u_f(x)$ la borne supérieure dans $B_1(0) \setminus \{0\}$, on obtient donc le résultat :

$$u_f(x) \geq c_4|x|^{-\beta},\ \forall x \in B_{r_0} \setminus \{0\} \text{ où } c_4 = t_1 \text{ telle que } t_1\mathcal{K}(\beta) \leq c_3.$$

Pour $\beta = \alpha^-$

$$\mathcal{L}_\lambda\left(|x|^{-\beta}(-\ln|x|)\right) = \left(-2\alpha^- + N - 2\right)|x|^{-\alpha^--2}.$$

Alors, il existe $t_2 > 0$ telle que $t_2\left(-2\alpha^- + N - 2\right) \leq c_3$, donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\lambda\left(t_2\left(|x|^{-\beta}(-\ln|x|)\right)\right) &= t_2\left(-2\alpha^- + N - 2\right)|x|^{-\alpha^--2} \\
&\leq c_3|x|^{-\alpha^--2} \\
&\leq f(x), \qquad \forall x \in B_{r_0}(0) \setminus \{0\},
\end{aligned}$$

et donc par le Lemme 2.2.4, en prenant la borne inférieure $t_2\left(|x|^{-\beta}(-\ln|x|)\right)$ on obtient :

$$u_f(x) \geq c_4|x|^{-\beta}(-\ln|x|)$$

avec $c_4 = t_2$.
Pour $\beta < \alpha^-$

$$\mathcal{L}_\lambda |x|^{-\beta} = \mathcal{K}(\beta)|x|^{-\beta-2},$$

avec $\mathcal{K}(\beta) < 0$, et donc par le Lemme 2.2.4, en prenant la borne inférieure $|x|^{-\beta}$ et $|x|^{-\alpha^-}$ comme borne supérieure puis comme borne inférieur on obtient :

$$|x|^{-\beta} \leq |x|^{-\alpha^-} \leq u_f(x),\ \forall x \in B_{r_0}(0) \setminus \{0\}.$$

et la preuve est terminée. ■

2.3 Cas d'une donnée potentiel

Soit le problème de Hardy suivant :

$$\mathcal{L}_\lambda u = u^p \qquad \text{dans } B_R(0) \setminus \{0\}. \tag{2.30}$$

Où Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ et $p > 1$ et $R > 0$.

2.3.1 Résultat d'existence :

L'existence d'une solution radiale de (2.30) *:*
Notons

$$p^- = 1 + \frac{2}{\alpha^+} < p < 1 + \frac{2}{\alpha^-} = p^+.$$

On observe que :

$$1 < p^- < \frac{N+2}{N-2} < p^+,$$

pour tout $0 < \lambda < \Lambda_N$ et

$$\lim_{\lambda\to 0} p^- = \lim_{\lambda\to 0}\left[1+\frac{2}{\alpha^+}\right] = \frac{N}{N-2},\ \lim_{\lambda\to\Lambda_N} p^- = \lim_{\lambda\to 0}\left[1+\frac{2}{\alpha^+}\right] = \frac{N+2}{N-2}$$
$$\lim_{\lambda\to 0} p^+ = \lim_{\lambda\to 0}\left[1+\frac{2}{\alpha^-}\right] = +\infty,\ \lim_{\lambda\to\Lambda_N} p^+ = \lim_{\lambda\to\Lambda_N}\left[1+\frac{2}{\alpha^-}\right] = \frac{N+2}{N-2}.$$

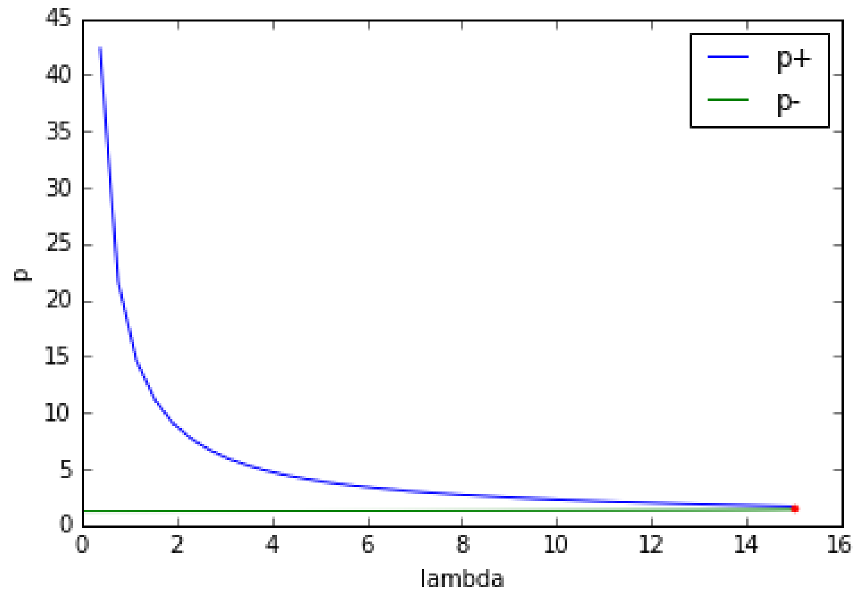

FIGURE 2.1 – p^+ et le p^- en fonction de λ

Théorème 2.3.1 *Soit $0 < \lambda \leq \Lambda_N$. Il existe une solution non triviale u de l'équation* (2.30) *avec u^p et $\frac{u}{r^2}$ appartenant à $L^1(B_R(0))$, pour tout $p \in (1, p^+)$.*

PREUVE. On distingue deux cas :

- **Si $\lambda < \Lambda$ et $p < 2^* - 1 = \dfrac{N+2}{N-2}$:**

  l'existence d'une solution positive $u \in H_0^1(B_R(0))$ de (2.30) est une conséquence standard et directe du théorème du col de la montagne 1.8.4. En fait, on peut de trouver une solution radiale. (Pour plus de détail voir [20]).

- **Si $\lambda < \Lambda$ et $p^- < p < p^+$:**

  Posons $u(x) = c_1|x|^{-\beta}$ comme solution du problème (2.30), alors, pour $\alpha^- < \beta < \alpha^+$.

$$\mathcal{L}_\lambda u(x) = -\Delta u(x) - \lambda \frac{u(x)}{|x|^2} = u(x)^p.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\mathcal{K}(\beta) r^{-\beta-2} = \Big(-\beta^2 + (N-2)\,\beta - \lambda\Big)\, c_1\, r^{-\beta-2} \geq c_1^p\, r^{-\beta p}.$$

Alors, nécessairement $\beta + 2 \geq \beta p$, ce qui implique que $\beta \geq \dfrac{2}{p-1}$, et $\mathcal{K}(\beta) \geq c_1^{p-1} > 0$, avec $\mathcal{K}(\beta) = -\beta^2 + (N-2)\,\beta - \lambda > 0$ si et seulement si $\alpha^- < \beta < \alpha^+$. Ce qui est équivalente à

$$p^- = 1 + \frac{2}{\alpha^+} < p < 1 + \frac{2}{\alpha^-} = p^+.$$

Alors, il existe une solution radiale du problème (2.30).

- **Si** $\lambda = \Lambda$ **et** $1 < p < p^+ = \dfrac{N+2}{N-2}$ **:**
  En utilisant l'inégalité de Hardy-Sobolev améliorée théorème 1.6.3, il en résulte que

$$\|u\|_{\mathbb{H}}^2 = \int_{B_r(0)} |\nabla u|^2 dr - \Lambda \int_{B_r(0)} \frac{u^2}{|x|^2} \geq \|u\|^2_{W_0^{1,q}(B_r(0))}.$$

  Où $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert.
  On procède comme dans le cas précédent, on démontre par le théorème du col de la montagne 1.8.4 l'existence d'un point critique u solution du problème (2.30) (Pour plus de détail voir [20]).

■

2.3.2 Résultat de non-existence :

Pour la non existence on a le théorème suivant :

Théorème 2.3.2 *Soit* $0 < \lambda \leq \Lambda_N$*. Si* $p \geq p^+$ *alors le problème* (2.30) *ne possède pas de solution non triviale.*

PREUVE. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une solution positive de (2.30). En utilisant $\dfrac{\varphi^2}{u}$ comme fonction test dans (2.30) et en appliquant l'inégalité de Picone 1.6.4 :

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_0}(0)} \frac{u^p}{u}\varphi^2 dx &= \int_{B_{r_0}(0)} \left(-\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2}\right) \frac{\varphi^2}{u}\, dx \leq \int_{B_{r_0}(0)} (-\Delta u) \frac{\varphi^2}{u}\, dx \\ &\leq \int_{B_{r_0}(0)} |\nabla \varphi|^2\, dx.\end{aligned}$$

Alors, en utilisant le lemme 2.2.5, nous obtenons

$$\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq \int_{B_r(0)} u^{p-1}\varphi^2\, dx \geq C \int_{B_r(0)} \varphi^2 |x|^{-(p-1)\alpha^-} \geq \frac{C}{r_0^{(p-1)\alpha^- - 2}} \int_{B_r(0)} \frac{\varphi^2}{|x|^2}\, dx.$$

On a $p > 1 + \frac{2}{\alpha^-} = p^+$ donc $(p-1)\alpha^- - 2 > 0$ car. En choisissant r suffisamment petit, nous obtenons une contradiction avec l'inégalité de Hardy (théorème 1.2).

■

Chapitre 3

Résultats d'existence et non existence pour un système

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie l'existence et la non-existence de sur-solutions positives pour le système de Lane-Emden avec potentiel de Hardy suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^2} + f(x,v) \quad \text{dans } \Omega \setminus \{0\}, \\ -\Delta v &= \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^2} + g(x,u) \quad \text{dans } \Omega \setminus \{0\}, \\ u = v &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \cdot \tag{3.1}$$

Où

$$f(x,v) = v^p \qquad \text{et} \qquad g(x,v) = u^q,$$

pour $p, q > 0, 0 < \lambda_1, \lambda_2 < \Lambda_N = \left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$ où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ contenant l'origine, avec $N \geq 3$.

On rappelle l'opérateur de Schrödinguer par

$$\mathcal{L}_\lambda = -\Delta - \lambda |x|^{-2}.$$

le système (3.1) est équivalent à :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\lambda_1} u &= v^p \quad \text{dans } \Omega \setminus \{0\}, \\ \mathcal{L}_{\lambda_2} v &= u^q \quad \text{dans } \Omega \setminus \{0\}, \\ u = v &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

Où $p, q > 0, 0 < \lambda_1, \lambda_2 < \Lambda_N$, Ω est un domaine borné de classe $\mathbb{C}^2(\Omega)$ de $\mathbb{R}^N$ contenant l'origine.

Remarque 3.1.1 *On note :*

$$\alpha_1^{\pm} = \alpha_{\pm}(\lambda_1) = \frac{N-2}{2} \pm \sqrt{\Lambda_N - \lambda_1}, \quad \alpha_2^{\pm} = \alpha_{\pm}(\lambda_2) = \frac{N-2}{2} \pm \sqrt{\Lambda_N - \lambda_2},$$

Avec

$$\mathcal{L}_\lambda |x|^{-\beta} = \mathcal{K}(\beta)|x|^{-\beta-2} = \mathcal{K}(\beta)|x|^{-\beta-2} \quad \mathcal{K}(\beta) > 0 \Leftrightarrow \alpha^- < \beta < \alpha^+.$$

Et

$$\mathcal{L}_\lambda |x|^{-\beta}(-\ln|x|) = 2\sqrt{\Lambda_N - \lambda}|x|^{-\beta-2} \quad si\ \beta = \alpha^- \ ou\ \beta = \alpha^+.$$

3.2 Non existence

3.2.1 Propriété primaire de non existence :

Rappelons que $d\gamma_\lambda(x) = \Gamma_\lambda(x)dx$.

Théorème 3.2.1 *Soient* $0 < \lambda_2, \lambda_1 \leq \Lambda_N$*, et* $p, q > 0$ *tels que :*

$$p \geq \overline{p} = \frac{N - \alpha_1^-}{\alpha_2^-} \ \ ou\ q \geq \overline{q} = \frac{N - \alpha_2^-}{\alpha_1^-} \tag{3.3}$$

Alors le système (3.2) n'admet pas de sur-solution positive.

PREUVE.

Par l'absurde, on suppose que (u, v) est une solution du système (3.2), avec $p \geq \bar{p}$ donc par Lemme 2.2.5 u, v positives et :

$$u(x) \geq c_1|x|^{-\alpha_1^-} \text{ et } v(x) \geq c_1|x|^{-\alpha_2^-}, \ \forall x \in B_{r_0}(0) \setminus \{0\}. \tag{3.4}$$

D'où :

$$u(x)^q \geq c_1^q|x|^{-\alpha_1^- q} \text{ et } v(x)^p \geq c_1^p|x|^{-\alpha_2^- p}, \ \forall x \in B_{r_0}(0) \setminus \{0\}.$$

Où on rappelle que $r_0 \in (0, 1]$ tel que $B_{2r_0}(0) \subset \Omega$. On a $\alpha_1^-, \alpha_2^- > 0$,
Alors

$$\mathcal{L}_\lambda u \geq v^p \notin L^1(\Omega, d\gamma_{\lambda_1}).$$

Puisque pour $p > \bar{p}$ on a :

$$\int_\Omega v^p(x)|x|^{-\alpha_1^-}dx \geq \int_0^{r_0} r^{-\alpha_2^- p - \alpha_1^-} r^{N-1} dr = c\left[r^{-\alpha_2^- p - \alpha_1^- + N}\right]_0^{r_0}$$

$$\lim_{r \to 0} r^{-\alpha_2^- p - \alpha_1^- + N} = +\infty \ \text{ car } \ -\alpha_2^- p - \alpha_1^- + N < 0.$$

Et pour $p = \bar{p}$ on a :

$$\int_\Omega v^p(x)|x|^{-\alpha_1^-}dx \geq \int_0^{r_0} \frac{1}{r} dr = +\infty.$$

Ce qu'il fallait démontrer.
D'où, par le théorème 2.2.1 partie (III) une telle fonction u n'existe pas .
Si $\alpha_1^- q + \alpha_2^- \geq N$, alors on a $\mathcal{L}_{\lambda_2} v \geq u^q \notin L^1(\Omega, d\gamma_{\lambda_2})$ et de même une telle fonction v n'existe pas par le théorème 2.2.1 partie (III). ■

3.2.2 Non existence par méthode d'itération :

Théorème 3.2.2 *Soient* $0 < \lambda_2, \lambda_1 \leq \Lambda_N$, *et* $p, q > 0$ *satisfont l'une des hypothèses suivantes :*

(i)
$$\frac{2+\alpha_2^-}{\alpha_1^-} = q^+ \leq q < \overline{q} = \frac{N-\alpha_2^-}{\alpha_1^-} \;\; et \;\; -\alpha_1^-(pq-1)+2p+2<0;$$

(ii)
$$\frac{2+\alpha_1^-}{\alpha_2^-} = p^+ \leq p < \overline{p} = \frac{N-\alpha_1^-}{\alpha_2^-} \;\; et \;\; -\alpha_2^-(pq-1)+2p+2<0.$$

Alors le système (3.2) *n'admet pas de sur-solution positive.*

PREUVE. On résonne par absurde, posons (u, v) une sur-solution positive de (3.2).
Cas (i)
Notons :
$$\beta_1^{(0)} = \alpha_1^- \text{ et } \beta_2^{(0)} = \alpha_2^-.$$

Donc par le lemme 2.2.5 on a :

$$\mathcal{L}_{\lambda_2} v(x) \geq u(x)^q \geq c_1^q |x|^{-\beta_1^{(0)} q}, \; \forall x \in B_{r_0}(0) \setminus \{0\}.$$

On applique le Lemme 2.2.6 pour $-\beta - 2 = -\beta_1^{(0)} q$ ce qui entraîne que $\beta = \beta_1^{(0)} q - 2$
Posons
$$\beta_2^{(1)} = \max\{\beta_1^{(0)} q - 2, \beta_2^{(0)}\} = \beta_1^{(0)} q - 2.$$

En effet, on a l'hypothèse : $\dfrac{2+\alpha_2^-}{\alpha_1^-} \leq q < \dfrac{N-\alpha_2^-}{\alpha_1^-}$,

il en résulte que,

$$\begin{aligned} \alpha_2^- \leq \alpha_1^- q - 2 < N - 2 - \alpha_2^- &= N - 2 - \left(\frac{N-2}{2} - \sqrt{\Lambda_N - \lambda} \right) \\ &= \frac{N-2}{2} + \sqrt{\Lambda_N - \lambda} = \alpha_2^+. \end{aligned}$$

Alors $\beta_2^{(1)} \in [\alpha_2^-, \alpha_2^+)$,
et on obtient
$$v(x) \geq c_2 |x|^{-\beta_2^{(1)}}, \; \forall x \in B_{\frac{1}{2}} \setminus \{0\},$$

Maintenant, on utilise l'inégalité

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} u(x) \geq v(x)^p \geq c_2^p |x|^{-\beta_2^{(1)} p}.$$

On applique le lemme 2.2.6 avec $-\beta - 2 = -\beta_2^{(1)} p$ ce qui entraine que$\beta = \beta_2^{(1)} p - 2$.
Posons

$$\beta_1^{(1)} = \max\{\beta_2^{(1)} p - 2, \beta_1^{(0)}\} = \beta_2^{(1)} p - 2 = \left(\beta_1^{(0)} q - 2\right) p - 2 = \beta_1^{(0)} pq - 2p - 2.$$

On a par hypothèse :

$$-\alpha_1^- (pq - 1) + 2p + 2 < 0 \text{ alors } -\alpha_1^- pq + 2p + 2 < \alpha_1^-.$$

Donc

$$\beta_1^{(1)} = \alpha_1^- pq - 2p - 2 > \alpha_1^-.$$

Si $\beta_1^{(1)} \geq \alpha_1^+$, alors on obtient une contradiction avec le théorème 2.2.1 partie (III).
Sinon on obtient

$$u(x) \geq c_3 |x|^{-\beta_1^{(1)}}, \ \forall x \in B_{\frac{1}{2}} \setminus \{0\},$$

et on utilise $\beta_1^{(1)}$ comme donnée initiale et on répète le processus.
On aura pour $j \geq 2$

$$v(x) \geq c_{j-1,1} |x|^{-\beta_2^{(j-1)}}, \ u(x) \geq c_{j-1,2} |x|^{-\beta_1^{(j-1)}}, \ \forall x \in B_{\frac{1}{2}} \setminus \{0\}.$$

Où

$$\beta_1^{(j-1)} \in (\alpha_1^-, \alpha_1^+) \text{ et } \beta_2^{(j-1)} \in (\alpha_2^-, \alpha_2^+).$$

De la même façon qu'au dessus ,on obtient

$$\beta_2^{(j)} = \beta_1^{(j-1)} q - 2 = \beta_2^{(j-1)} pq - 2q - 2 > \alpha_2^-.$$

Si $\beta_2^{(j)} \geq \alpha_2^+$,alors on obtient une contradiction avec le théorème 2.2.1 partie (III).
Sinon on aura

$$v(x) \geq c_{j,1} |x|^{-\beta_2^{(j)}}, \ \forall x \in B_{\frac{1}{2}} \setminus \{0\},$$

et on continue à déduire

$$\beta_1^{(j)} = \beta_2^{(j)} p - 2 = \beta_1^{(j-1)} pq - 2p - 2.$$

Si $\beta_1^{(j)} \geq \alpha_1^+$, alors on obtient une contradiction avec le théorème 2.2.1 partie (III).
Sinon on aura $u(x) \geq c_{j,2} |x|^{-\beta_1^{(j)}}, \ \forall x \in B_{\frac{1}{2}}(0) \setminus \{0\}$
et on utilise $\beta_1^{(j)}$ comme donnée initiale et on répète le processus.

Affirmation :
Supposons qu'il existe $j_0 \geq 1$ telle que :

$$\beta_1^{(j_0)} > \beta_1^{j_0-1)} \text{ et } \beta_2^{(j_0)} > \beta_2^{(j_0-1)}. \tag{3.5}$$

Posons

$$s_j = \beta_1^{(j)} - \beta_1^{(j-1)} \text{ et } t_j = \beta_2^{(j)} - \beta_2^{(j-1)}.$$

On a

$$\begin{aligned} s_j &= \beta_1^{(j)} - \beta_1^{(j-1)} \\ &= \beta_1^{(j-1)}(pq-1) - 2p - 2 \\ &= \left(\beta_1^{(j-2)}pq - 2p - 2\right)(pq-1) - 2p - 2 \\ &= \beta_1^{(j-2)}pq(pq-1) - pq(2p+2) + 2p + 2 - 2p - 2 \\ &= pq\left[\beta_1^{(j-2)}(pq-1) - 2p - 2\right] \\ &= pqs_{j-1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} t_j &= \beta_2^{(j)} - \beta_2^{(j-1)} \\ &= \beta_2^{(j-1)}(pq-1) - 2q - 2 \\ &= \left(\beta_2^{(j-2)}pq - 2q - 2\right)(pq-1) - 2q - 2 \\ &= \beta_2^{(j-2)}pq(pq-1) - pq(2q+2) + 2q + 2 - 2q - 2 \\ &= pq\left[\beta_2^{(j-2)}(pq-1) - 2q - 2\right] \\ &= pqt_{j-1}. \end{aligned}$$

Alors on a

$$s_j = pqs_{j-1} = \cdots = (pq)^{j-1}s_{j_0} \text{ et } t_j = pqt_{j-1} = \cdots = (pq)^{j-1}t_{j_0}$$

De l'hypothèse $-\alpha_1^-(pq-1) + 2p + 2 < 0$ on obtient que :

$$pq - 1 > \frac{2p+2}{\alpha_1^-} > 0 \Rightarrow pq > 1,$$

et les suites $(\beta_1^{(j)})_{j\geq 0}$ et $(\beta_2^{(j)})_{j\geq 1}$ sont strictement croissantes.
s_j et t_j sont des suites géométrique de rayon $pq > 1$ et donc on déduit que :

$$\beta_1^{(j)} \to +\infty \text{ et } \beta_2^{(j)} \to +\infty \text{ quand } j \to +\infty. \tag{3.6}$$

Donc d'après claim, il existe $j_1 \geq j_0$ telle que :

$$\beta_1^{(j_1)} \geq \alpha_1^+ \text{ ou } \beta_2^{(j_1)} \geq \alpha_2^+$$

D'où, la non existence viens par contradiction avec le théorème 2.2.1 partie (III). ■

3.3 Existence

Théorème 3.3.1 *Soit* $\Omega = B_1(0), 0 < \lambda_1, \lambda_2 < \Lambda_N$ *et* $p, q > 1$ *satisfaisant l'une des conditions suivantes :*

$$
\begin{aligned}
&\textit{(a.1)} \quad q \in \left(\frac{2+\alpha_2^-}{\alpha_1^-}, \frac{N-\alpha_2^-}{\alpha_1^-}\right) \quad \textit{et} \quad -\alpha_1^-(pq-1)+2p+2>0,\\
&\textit{(a.2)} \quad q \leq \frac{2+\alpha_2^-}{\alpha_1^-} \qquad\qquad \textit{et} \quad p < \frac{2+\alpha_1^-}{\alpha_2^-},\\
&\textit{(b.1)} \quad p \in \left(\frac{2+\alpha_1^-}{\alpha_2^-}, \frac{N-\alpha_1^-}{\alpha_2^-}\right) \quad \textit{et} \quad -\alpha_2^-(pq-1)+2q+2>0,\\
&\textit{(b.2)} \quad q < \frac{2+\alpha_2^-}{\alpha_1^-} \qquad\qquad \textit{et} \quad p \leq \frac{2+\alpha_1^-}{\alpha_2^-}.
\end{aligned}
$$

Alors, le problème (3.2) *admet au moins une sur-solution positive.*

La figure suivante montre les régions d'existence et la non existence de solutions radiales pour le problème (3.2) selon les exposants p, q.
La région de (p, q) en rouge représente la non-existence, les points en blanc sont encore ouverts.
Les régions A,B,C d'existence sont comme suit :

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{(p,q) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ : p < p^+ \text{ et } q < q^+\right\}\\
B &= \left\{(p,q) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ : q^+ < q < \overline{q} \text{ et } -\alpha_1^-(pq-1)+2p+2>0\right\}\\
C &= \left\{(p,q) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ : p^+ < p < \overline{p} \text{ et } -\alpha_2^-(pq-1)+2q+2>0\right\}
\end{aligned}
$$

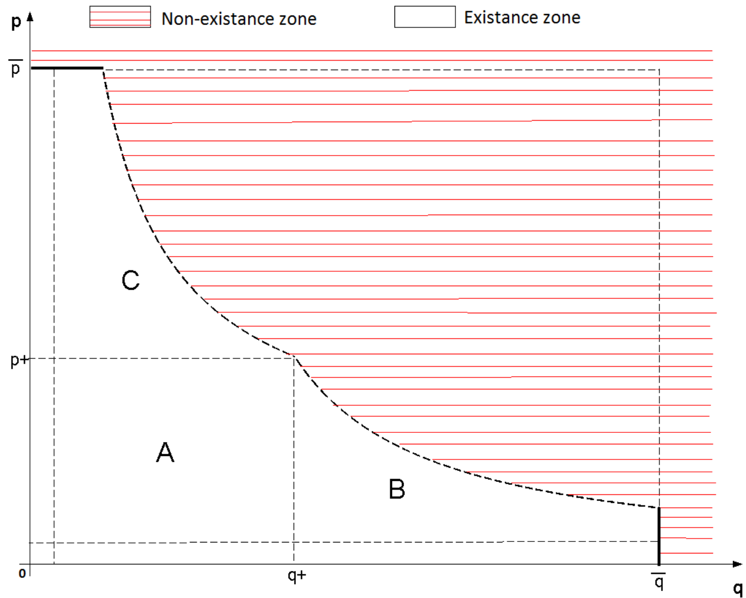

FIGURE 3.1 – Zones d'existence-Non-existence du problème (3.2)

PREUVE. (Théorème 3.3.1)
On construit des sur-solutions positives du système (3.2) en considérant des fonctions radiales symétriques spécifiques :
Soient $0 < \lambda_1, \lambda_2 \leq \Lambda_N$ et $p, q > 1$.
Cas 1 : $q \in \left(\dfrac{2+\alpha_2^-}{\alpha_1^-}, \dfrac{N-\alpha_2^-}{\alpha_1^-}\right)$ et $-\alpha_1^-(pq-1)+2p+2>0$.
La construction d'une sur-solution positive par le couple $t(u_1, v_1)$, où $t>0$,
Posons :

$$\beta_3 = (\alpha_1^- q - 2)p - 2 \quad \text{et} \quad \beta_4 = \alpha_1^- q - 2.$$

Observons que :

$$\beta_3 < \alpha_1^- \text{ et } \alpha_2^- < \beta_4 < \alpha_2^+.$$

puisqu'on a :

$$q \in \left(\frac{2+\alpha_2^-}{\alpha_1^-}, \frac{N-\alpha_2^-}{\alpha_1^-}\right) \Rightarrow \alpha_2^- < \alpha_1^- q - 2 < N-2-\alpha_2^- = \alpha_2^+,$$

et :

$$-\alpha_1^-(pq-1)+2p+2 > 0 \Rightarrow \alpha^- = (\alpha_1^- q-2)p-2 < \alpha_1^-.$$

Donc

$$\mathcal{L}_{\lambda_1}|x|^{-\beta_3} = K(\beta_3)|x|^{-\beta_3-2} = K(\beta_3)|x|^{-(\alpha_1^- q-2)p} < 0,$$

et on a que :$|x|^{-\beta_3} < |x|^{-\alpha_1^-}$ car $\beta_3 < \alpha_1^-$ et $|x| < 1$.
On sait que : $\mathcal{L}_{\lambda_1}|x|^{-\alpha_1^-} = 0$.
Posons

$$u_1(x) = |x|^{-\alpha_1^-} - |x|^{-\beta_3} \;;\; v_1(x) = |x|^{-\beta_4}.$$

Alors on obtient :

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} u_1(x) = c_4 |x|^{-(\alpha_1^- q - 2)p} = c_4 |x|^{-\beta_4 p} \geq c_4 v_1(x)^p, \ \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

et

$$\mathcal{L}_{\lambda_2} v_1(x) = c_5 |x|^{-\alpha_1^- q} \geq c_5 \left(|x|^{-\alpha_1^-} - |x|^{-\beta_3} \right)^q \geq c_5 u_1(x)^q, \ \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Où $c_4 = -K(\beta_3) > 0$ et $c_5 = \mathcal{K}(\beta_4) > 0$.
D'où, $t(u_1, v_1)$ est une solution positive du système (3.2) dans $B_1(0) \setminus \{0\}$ pour $t \in (0,1)$ assez petit.

Cas 2 : $q < \dfrac{2+\alpha_2^-}{\alpha_1^-}$ et $p < \dfrac{2+\alpha_1^-}{\alpha_2^-}$.
Posons :

$$\beta_5 = \alpha_2^- p - 2 \text{ et } \beta_6 = \alpha_1^- q - 2.$$

Observons que :

$$\beta_5 < \alpha_1^- \text{ et } 0 < \beta_6 < \alpha_2^-.$$

On pose alors :

$$u_2(x) = |x|^{-\alpha_1^-} - |x|^{-\beta_5} \text{ et } v_2(x) = |x|^{-\alpha_2^-} - |x|^{-\beta_6} \ \textit{pour } |x| > 0.$$

Alors on obtient :

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} u_2(x) = c_6 |x|^{-\alpha_2^- p} \geq c_6 v_2(x)^p, \ \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\},$$

et

$$\mathcal{L}_{\lambda_2} v_2(x) = c_7 |x|^{-\alpha_1^- q} \geq c_7 u_2(x)^q, \ \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Où $c_6 = -\mathcal{K}(\beta_5) > 0$ et $c_7 = -\mathcal{K}(\beta_6) > 0$.
D'où, $t(u_2, v_2)$ est une solution positive du système (3.2) dans $B_1(0) \setminus \{0\}$ pour $t \in (0,1)$ assez petit.

Cas 3 : $q = \dfrac{2+\alpha_2^-}{\alpha_1^-}$ et $p < \dfrac{2+\alpha_1^-}{\alpha_2^-}$.
Posons :

$$\beta_7 = \alpha_2^- p - 2 - \epsilon_0 < \alpha_1^-, \ \text{ et } \ \beta_8 = \alpha_1^- q - 2 = \alpha_2^-,$$

et :

$$u_3(x) = |x|^{-\alpha_1^-} - |x|^{-\beta_7} \text{ et } v_3(x) = |x|^{-\beta_8} (-\ln |x|) \ \textit{ pour } x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Alors on obtient :

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} u_3(x) = c_8 |x|^{-\alpha_2^- p + \epsilon_0} \geq c_8 v_3(x)^p, \ \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\},$$

et

$$\mathcal{L}_{\lambda_2} v_3(x) = c_9 |x|^{-\alpha_1^- q} \geq c_9 \left(|x|^{-\alpha_1^-} - |x|^{-\beta_5} \right)^q \geq c_9 u_3(x)^q, \ \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Où $c_8 = -\mathcal{K}(\beta_7) > 0$ et $c_9 = 2\sqrt{\Lambda_N - \lambda_2} > 0$.

D'où, $t(u_3, v_3)$ est une solution positive du système (3.2) dans $B_1(0) \setminus \{0\}$ pour $t \in (0,1)$ assez petit.

Cas 4 : $0 < q < \dfrac{2+\alpha_2^-}{\alpha_1^-}$, $p = \dfrac{2+\alpha_1^-}{\alpha_2^-}$.

Posons :

$$\beta_9 = \alpha_2^- p - 2 = \alpha_1^- \text{ et } \beta_{10} = \alpha_1^- q - 2 - \epsilon_1 < \alpha_2^-,$$

et on pose :

$$u_4(x) = |x|^{-\beta_9}(-\ln|x|) \text{ et } v_4(x) = |x|^{-\alpha_2^-} - |x|^{-\beta_{10}} \text{ } pour \ x \in B_1(0) \setminus \{0\},$$

Alors on obtient :

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} u_4(x) = c_{10}|x|^{-\alpha_2^- p} \geq c_{10} v_4(x)^p, \ \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\},$$

et

$$\mathcal{L}_{\lambda_2} v_4(x) = c_{11}|x|^{-\alpha_1^- q + \epsilon_1} \geq c_{11} u_4(x)^q, \ \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Où $c_{10} = 2\sqrt{\Lambda_N - \lambda_1}$ et $c_{11} = -\mathcal{K}(\beta_{10}) > 0$.

D'où, $t(u_4, v_4)$ est une solution positive du système (3.2) dans $B_1(0) \setminus \{0\}$ pour $t \in (0,1)$ assez petit.

Cas 5 : $p \in \left(\dfrac{2+\alpha_1^-}{\alpha_2^-}, \dfrac{N-\alpha_1^-}{\alpha_2^-}\right)$ et $-\alpha_2^-(pq-1) + 2q + 2 > 0$

La construction d'une sursolution positive par le couple $t(u_5, v_5)$, où $t > 0$.

Posons :

$$\beta_{11} = \alpha_2^- p - 2 \text{ et } \beta_{12} = (\alpha_2^- p - 2)q - 2.$$

Observons que :

$$\alpha_1^- < \beta_{11} < \alpha_1^+ \text{ et } \beta_{12} < \alpha_2^-,$$

alors on pose :

$$u_5(x) = |x|^{-\beta_{11}} \text{ et } v_5(x) = |x|^{-\alpha_2^-} - |x|^{-\beta_{12}} \text{ } pour \ x \in B_1(0) \setminus \{0\},$$

alors on obtient :

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} u_5(x) = c_{12}|x|^{-(\alpha_1^- q - 2)p} \geq c_{12} v_5(x)^p, \ \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\},$$

et

$$\mathcal{L}_{\lambda_2} v_5(x) = c_{13}|x|^{-\alpha_1^- q} \geq c_{13} u_5(x)^q, \ \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Où $c_{12} = \mathcal{K}(\beta_{11}) > 0$ et $c_{13} = -\mathcal{K}(\beta_{12}) > 0$.

D'où, $t(u_5, v_5)$ est une solution positive du système (3.2) dans $B_1(0) \setminus \{0\}$ pour $t \in (0,1)$ assez petit. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié la non-existence de super-solutions positives pour le système de Lane-Emden suivant avec des potentiels inversement carrés

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 \dfrac{u}{|x|^2} + v^p \quad \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v &= \lambda_2 \dfrac{v}{|x|^2} + u^q \quad \text{dans } \Omega, \\ u = v &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

pour $p, q > 0, 0 < \lambda_1, \lambda_2 < \Lambda_N = \left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$ où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ contenant l'origine, avec $N \geq 3$.

Précisément, nous avons trouvé des régions sur-critiques de (p, q) pour la non-existence de sur-solutions positives du système (3.7).

Due a l'explosion de la singularité à l'origine, on adapte une procédure d'itération dans le cas sur critique pour améliorer le taux d'explosion.

Dans le cas sous-critique, nous avons traité l'existence de sur solutions positives pour le système (3.7) par des fonctions spécifiques radialement symétriques.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons étudié la notion de l'existence et la non existence des solutions d'un système elliptique dite système de Lane-Emden.

En se basant sur une condition d'existence des solutions, et à l'aide d'un processus d'itération, on analyse l'existence d'une courbe critique $\widehat{h}(p,q)$ telle que si cette courbe $(\langle(p,q))$ est positive, alors le système (1) possède une sur-solution non négative. Par un calcul radial on montre que le système (1) possède une solution si la courbe $\langle(p,q)$ est négative.

Mots clés : système de Lane-Emden, Existence, courbe critique.

Abstract :

In this dissertation, we studied the notion of the existence and non-existence of solutions of an elliptic system, known as the Lane-Emden system.

Based on an existence condition for solutions, and using an iteration process, we analyze the existence of a critical curve $\widehat{h}(p,q)$ such that if this curve $(\langle(p,q))$ is positive, then the system (1) has a non-negative oversolution. A radial calculation shows that the system (1) has a solution if the curve $\langle(p,q)$ is negative.

Keywords : Lane-Emden system, Existence, critical curve.

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui, E. Colorado, I. Peral, SOME IMPROVED CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG INEQUALITIES, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, Spain, 23, 327-345 (2005).

[2] B. Abdellaoui, I. Peral, A NOTE ON A CRITICAL PROBLEM WITH NATURAL GROWTH IN THE GRADIENT, J. Eur. Math. Soc. 8, 157–170.

[3] B. Abdellaoui, I. Peral, ON A QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS RELATED TO SOME CAFFARELLI–KOHN–NIRENBERG INEQUALITIES. Comm. Pure Appl. Anal. 2, 539-566 (2003).

[4] B. Abdellaoui, Y.O. Boukarabila, S-E-H. Miri,INTRODUCTION AUX MÉTHODES VARIATIONNELLES ET APPLICATION À LA RÉSOLUTION DES EDP ELLIPTIQUES..

[5] P. Benilan, L. Boccardo, T. Gallouet, R. Gariepy, M. Pierre,J-L. Vasquez,AN L^1-THEORY OF EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS, Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa Classe di Scienze 4^e série, tome 22,n 2(1995),p.241-273.

[6] H. Brezis, IS THERE FAILURE OF THE INVERSE FUNCTION THEOREM ?, PROCCEDINGS OF THE WORKSHOP AT THE MORNING CENTER OF MATHEMATICS, Chinese Academy of Science, Beijing, june 1999.

[7] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle et application*, Ed, Masson, (1983).

[8] H. Brezis, X. Cabré, SOME SIMPLE NONLINEAR PDE'S WITHOUT SOLUTIONS, Bull UMI, 1 (1998), 223-262.

[9] H. Brézis, X. Carbé, Y.Martel and A.Ramiandrisoa, BLOW-UP FOR $u_t - \Delta u = g(u)$ REVISITED, Adv.Diff., 1 (1996), 73-90.

[10] H. Brezis, L. Dupaigne,ON A SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATION WITH INVERSE SQUARE POTENTIAL,Selecta Mathematica · November 2005.

[11] H. Brezis, L. Dupaigne, A. Tesei, ON A SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATION WITH INVERSE SQUARE POTENTIAL, 2008. hal-0028856 7.

[12] H. Brezis, P.L. Lions, A NOTE ON ISOLATED SINGULARITIES FOR LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS, Math. Suppl. Stud., 7a, Academic Press, New York-London, 1981, 263-266.

[13] H. Brezis, J.L. Vazquez, BLOW-UP SOLUTION OF SOME NONLINEAR ELLIPTIC PROBLEMS, Rev Mat. Univ. Complut. Madrid, 10 (1997), 443-469.

[14] C. Cazacu, J. Flynn, N. Lam, G. Lu,CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG IDENTITIES, INEQUALITIES AND THEIR STABILITIES,arXiv :2211.14622v1 [math.AP] 26 Nov 2022.

[15] H. Chen, V. D.Radulescu and B. Zhang,POSITIVE SUPERSOLUTIONS FOR THE LANE-EMDEN SYSTEM WITH INVERSE-SQUARE POTENTIALS,arXiv :22011.02074v1 [math.AP] 04 Nov 2020.

[16] H. Chen, S. Alhomedan, H. Hajaiej, P. Markowich,FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR SCHRODINGER OPERATORS WITH GENERAL INVERSE SQUARE POTENTIALS,arXiv :1703.04053v1 12 Mars 2017.

[17] H. Chen, A. Quaas, F. Zhou, ON NONHOMOGENEOUS ELLIPTIC EQUATIONS WITH THE HARDY-LERAY POTENTIALS, J. D'Analyse Mathématique, Vol. 144 (2021).

[18] H-Chen, L. Véron,WEAK SOLUTIONS OF SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH LERAY-HARDY POTENTIAL SINGULAR ON THE BOUNDARY, J.Differential Equations 269,2091-2131 (2020).

[19] J. Dávila, L. Dupaigne, COMPARISON PRINCIPLES FOR PDE'S WITH A SINGULAR POTENTIAL, Proc. Roy.Soc. Edinburgh, 133A (2003), 61-83.

[20] K. Djedid, SUR UNE ÉQUATION ELLIPTIQUE SEMI-LINÉAIRE AVEC POTENTIEL SINGULIER. Mémoire-Master.Université de Tlemcen.

[21] L. Dupaigne, LINEAR AND SEM ILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS W ITH A SINGULAR POTENTIAL, thesis, Graduate School— New Brunswick, Rutgers, The State University of New Jersey. 2013.

[22] L. Dupaigne, A NONLINEAR ELLIPTIC PDE WITH THE INVERSE-SQUARE POTENTIAL, J. D'Analyse Mathématique, 86 (2002), 359-398.

[23] L. Dupaigne, G. Nedev, SEMILINEAR ELLIPTIC PDE'S WITH SINGULAR POTENTIAL, Adv.Differential Equations, 7 (2002), 973-1002.

[24] L. C. Evans, PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, GRADUATE STUDIES IN MATHEMATICS,volume 19, Providence, R.I. : American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-4974-3, MR 2597943 American Mathematical Society.

[25] D .Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* .Springer 1998.

[26] L.L. Helms, INTRODUCTION TO POTENTIAL THEORY, New York, Wiley and Sons, 1969.

[27] T. Kato, SCHRÖDINGER OPERATORS WITH SINGULAR POTENTIALS, Israel J.Math., 13 (1972), 135-148.

[28] O. Kavian, INTRODUCTION À LA THÉORIE DES POINTS CRITIQUES ET APPLICATIONS AUX PROBLÈMES ELLIPTIQUES, Springer-Verlag 1993.

[29] M. Morton, MÉTHODE DES SUR ET SOUS SOLUTIONS POUR LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE TYPE NEUMAN FAISANT INTERVENIR LE P-LAPLACIEN,C. R. Acad. Sci. Paris,Ser. I 335 (2002) 341-344.

[30] S.I. Pohozaev, A. Teei, NONEXISTANCE OF LOCAL SOLUTIONS TO SEMILINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL INEQUALITIES, Nota Scientifica 01/28, Dip. Mat. Universitá "La Sapienza", Roma (2001).

[31] A.R. Primo, INFLUENCIA DEL POTENCIAL DE HARDY EN ECUACIONES ELIPTICAS Y PARABOLICAS, thesis. Universidad Autonoma de Madrid,(2008).

[32] M. Struwe, VARIATIONAL METHODS. APPLICATIONS TO NONLINEAR PDE AND HAMILTONAIN SYSTEMS, Edition : Springer ,(2000).

Annexe **A**

Annexe

Notation	**Définition**
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Elément de $\mathbb{R}^N$
$r = \|x\| = \sqrt{(x_1^2 + \cdots + x_N^2)}$	Module de x
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradient de u
Δu	Laplacien de u
$p' = \frac{p}{p-1}$	Exposant conjugué de p.
$p^* = \frac{Np}{(N-p)}$	Exposent critique de Sobolev
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
supp (u)	Support de la fonction u
$meas(A) = \|A\|$	Mesure de L'ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$
$\\| \cdot \\|_s$	Norme dans l'espace $L^s(\Omega)$
$\\| \cdot \\|_X$	Norme dans l'espace X
B_R	Boule de rayon R centrée à 0.
$B_R(x_0)$	Boule de rayon R centrée en x_0.
δ_0	est la masse de Dirac à l'origine,
$\|S^{N-1}\| = N\|B_1(0)\|$	la mesure de la boule unité.

Notation	**Définition**
X'	Espace dual de X
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$, crochet de dualité.
$\setminus$	Différence d'ensemble.
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Ω' sous ensemble ouvert de Ω avec $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.
δ_{x_0}	Mesure de Dirac centrée en x_0.
$p.p$	Presque partout.
s.c.i.	Semicontinue inférieurement.
s.c.s.	Semicontinue superieurement.
$\mathcal{C}(\Omega)$ ou $\mathcal{C}^0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω.
$\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega)$	Espace des fonctions Hölderiennes sur Ω.
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivable Ω.
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$	$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{D}^+(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ positives.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace dual de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.
$\mathcal{M}(\Omega)$	Espace de Marcinkiewicz Ω.