République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire de Statistique et Modélisations Aléatoires

Mémoire De Master

En vue de l'obtention du Diplôme :
Master en Mathématiques.

Option : Statistiques et Probabilités Approfondies.

présenté par : DJAOUANI Samia

Soutenu le : 20 juin 2023

Théme :

Étude autour des lois des grands nombres

Soutenu devant le jury composé de :

Mme. DALI YOUCEF Malika	MCA UABB Tlemcen	Présidente
Mr. BOUKHARI Fakhr eddine	Prof UABB Tlemcen	Examinateur
Mme. ABI AYAD Ilham	MCB USTO	Encadrante

Année universitaire : 2022 - 2023

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents, pour l'amour qu'ils m'ont toujours donné, leurs encouragements et leur aide qu'ils m'ont donnés pendant mes études, aucun dévouement ne pouvait exprimer mon respect, ma considération et mon amour pour les sacrifices qu'ils ont faits pour mon éducation au cours de mes études.

À mes chers frères et sœurs, pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

À ma grande famille chacun son nom.

À mes chers amies, et enseignants.

Remerciements

Tout d'abord je remercie ALLAH, tout puissant de m'avoir accordé la force pour dépasser toutes les difficultés et réaliser ce mémoire.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, Mme I. ABI-AYAD. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J'exprime également ma gratitude à Mme M. DALI YOUCEF de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens à remercier Mr F. BOUKHARI d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et faire partie du jury.

Enfin, je remercie sincèrement tous mes professeurs à l'Université de Tlemcen département de mathématiques qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

Table des matières

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$	: Espace probabilisé
X, Y, Z	: Variables aléatoires.
$\mathbb{N}$	: Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}$	: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{1}_{\{A\}}$	: La fonction indicatrice de l'ensemble A.
$\mathbb{E}(X)$	: Espérance mathématique de X.
$Var(X)$	: Variance mathématique de X.
$Cov(X, Y)$	: Covariance mathématique entre X et Y
A^c	: Complémentaire de A.
$\|.\|_r$	: La norme L^r.
$\mathscr{C}_b$	: L'ensemble des fonctions continues bornées.
$X \stackrel{\mathscr{L}}{=} Y$	: X et Y ont la même loi.
v.a.	: Variable aléatoire.
i.i.d.	: Indépendantes et identiquement distribuées.
LFGN	: La loi forte des grands nombres.
u.i	: Uniformément intégrable.
p.s	: Presque sûre.

Introduction

Les lois des grands nombres sont un outil puissant qui peut être utilisé pour faire des prédictions sur l'avenir et analyser les données de grandes populations (échantillons). Cette loi énonce que la fréquence d'apparition d'un résultat, lorsque l'on répète la même expérience aléatoire un nombre de fois suffisamment grand et de manière indépendante, se rapproche d'un nombre précis.
En effet, étant donnés une suite $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de variables aléatoires réelles indépendantes, notons S_n la somme partielle de rang n associée à $(X_k)_{k\geqslant 1}$: $S_n = \sum X_k$, alors la suite $\{S_n/n,\ n \geqslant 1\}$ converge ; sous certains conditions suffisantes ; lorsque $n \to +\infty$ vers une valeur limite $\mathbb{E}(X_1)$ au sens de l'un des types de convergence.

La loi des grands nombres a été mentionnée pour la première fois au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, bien qu'aucune preuve rigoureuse n'ait été donnée. Ce n'est qu'au XX$^{\text{ème}}$ siècle qu'on a eu les autres nécessaires pour pouvoir construire des preuves.

Dans le premier chapitre de ce document, nous rappelons les différents modes de convergence de suites de variables aléatoires, et mentionnons la relation entre ces convergences ainsi que quelques exemples. Enfin, nous citons quelques théorèmes très utiles sur la convergence presque sûre ou la convergence en probabilité des séries de variables aléatoires indépendantes (Critère de convergence de Kolmogorov...).

Le deuxième chapitre est composé de trois parties. Dans la première partie, nous citons et démontrons les lois des grands nombres de Kolmogorov et Marcinkeiwicz-Zygmund.
La deuxième partie est consacrée à une notions très importante en probabilités qui est l'intégrabilité uniforme. Nous rappelons sa définition, nous citons quelques exemples et nous donnons ses principaux résultats.

Nous terminons ce chapitre par des résultats de convergence de séries de variables aléatoires uniformément intégrables.

Dans le troisième et dernier chapitre, on étudie deux généralisations des lois des grands nombres. La première est un résultats de R.Jajte [7] sur des variables aléatoires iid pondérées. Le second, un résultat de D.Landers et L.Rogge [9] sur des variables aléatoires uniformément intégrables deux à deux indépendantes .

Chapitre 1

Généralités

1.1 Quelques modes de convergence

Il existe plusieurs types de convergence pour suite de variable aléatoire $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ vers une autre variable aléatoire X définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Dans la suite on va définir quelque types usuelles :

Définition 1.1.1 (Convergence presque sûre)**.** *On dit qu'une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ **converge presque sûrement** vers une v.a X si :*

$$\exists\ \Omega^* \in \mathscr{F}\ ,\ \mathbb{P}(\Omega^*) = 1\ ,\ \forall \omega \in \Omega^*\ ,\ \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \tag{1.1}$$

c'est à dire :

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega,\ \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1. \tag{1.2}$$

et on note :

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} X$$

Rappel. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathscr{F}$. On définit la limite supérieure et inférieure de la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k \quad , \quad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} A_k$$

Il est clair que :

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$$

de plus, on a les égalités :

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c \quad , \quad (\liminf_{n\to\infty} A_n)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c$$

Ces ensembles jouent un grand rôle dans l'étude des convergences de suites de variables aléatoires, l'outil fondamental étant le lemme de Borel-Cantelli.

Théorème 1.1.1 (Borel-Cantelli)**.** *Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements ;*

1. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ *, alors* $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.
2. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$*, et si les événements A_n sont indépendants, alors*

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$$

.

Corollaire 1.1.1. *Soit $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ;*

$$X_n \overset{\mathbb{P}.ps}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) < \infty \qquad \forall \epsilon > 0.$$

Exemple 1.1.1.

Soit $a > 1$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ suite de v.a indépendantes à valeurs 0 ou 1 tel que :

$\forall n \geqslant 1$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(X_n = 1) = n^{-a}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - n^{-a}$.

Alors $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers 0 en effet :

Pour $0 < \epsilon \leqslant 1$

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n^a}\ .$$

On déduit de la convergence des sommes de Riemann ($a > 1$) que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ converge,

Ainsi :

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(X_n > \epsilon) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}\ <\ \infty.$$

Alors d'après le théorème de Borel-Cantelli on aura :

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{X_n > \epsilon\}) = 0.$$

D'où la convergence presque sûre.

Définition 1.1.2 (Convergence en Probabilité)**.** *On dit qu'une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$* ***converge en probabilité*** *vers la v.a X si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega;\ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0 \tag{1.3}$$

et on note :

$$X_n \overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow} X.$$

Exemple 1.1.2.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a de Bernoulli de paramètre p_n tel que : $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$.

Alors la suite (X_n) converge en probabilité vers 0, en effet on a :

Pour $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} p_n \ = \ 0.$$

Théorème 1.1.2 (Inégalité de Markov)**.** *Pour $p > 0$, supposons que $\mathbb{E}|X|^p < \infty$,*

$$\forall \epsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X| > \epsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}|X|^p}{\epsilon^p} \tag{1.4}$$

On définit l'espace L^r pour $r > 0$:

$$L^r := \{X : \Omega \to \mathbb{R}\ ;\ \mathbb{E}(|X|^r) < \infty\}$$

et pour $r \geqslant 1$, on pose :

$$\|X\|_r = (\mathbb{E}(|X|^r))^{1/r}.$$

Définition 1.1.3 (Convergence dans L^p)**.** *Pour $p \geqslant 1$, supposons que $X_n \in L^p$, $\forall n \geqslant 1$. On dit que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$* ***converge dans*** *L^p vers la v.a $X \in L^p$ si :*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0 \tag{1.5}$$

et on note :

$$X_n \xrightarrow{L^p} X.$$

Remarque 1.1.1. *Pour $p = 2$, on dit que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en moyenne quadratique vers X.*

Définition 1.1.4 (Convergence en Loi)**.** *On dit que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$* ***converge en loi*** *vers X si :*

$$\forall h \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})\ ,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(h(X_n)) = \mathbb{E}(h(X)) \tag{1.6}$$

Où, $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions réelles continues et bornées. On note :

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X.$$

Exemple 1.1.3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a de loi exponentielle de paramètre λ_n tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$.

Alors (X_n) converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre λ, en effet :

Pour $h \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^+)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(X_n)) &= \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{X_n}(x)\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \lambda_n\ e^{-\lambda_n x}\ h(x)\ dx\end{aligned}$$

Ainsi, par théorème de convergence dominé

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(h(X_n)) &= \int_{\mathbb{R}^+} \lambda\ e^{-\lambda x}\ h(x)\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x)\ dx \\ &= \mathbb{E}(h(X))\end{aligned}$$

Où : X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Il existe cependant une relation entre ces convergences. On peut la résumer dans la proposition suivante :

Proposition 1.1.1 (Relations entre les types de convergences)**.** *Soit* $\{X, X_n,\ n \geqslant 1\}$ *suite des variables aléatoires, On a les relations suivantes :*

$$\begin{array}{ccccc} & & X_n \xrightarrow{\mathbb{P}p.s} X & \Rightarrow & X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X & \Rightarrow & X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X \\ & & & & \Uparrow & & \\ X_n \xrightarrow{L^p} X\ \ (p>1) & \Rightarrow & & & X_n \xrightarrow{L^1} X & & \end{array}$$

Les implications sont strictes, les réciproque ne sont pas toujours vraie. On illustre ceci par les exemples suivants :

Exemple 1.1.4.

1. **La convergence en probabilité n'implique pas la convergence presque sûr :**

   On considère une suite de v.a réelles indépandantes $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.

   Alors pour tout $\epsilon \in [0, 1]$ on a :

   $$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$$

   la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

   Or à l'aide du Théorème 1.1.1 on montre que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas presque sûrement vers 0, en effet :

   $$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\ =\ +\infty$$

2. **La convergence en probabilité n'implique pas la convergence dans L^p :**

   Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ suite de v.a à valeurs dans $\{0, n\}$ avec :

   $\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \dfrac{1}{n}$.

   Alors pour tout $\epsilon \in [0, n]$ on aura :

$$\mathbb{P}(X_n > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$$

   la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

   Cependant pour $p \geqslant 1$:

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = \sum_{k\in\{0,n\}} k^p \mathbb{P}(X_n = k) \ = 0.\mathbb{P}(X_n = 0) + n^p \mathbb{P}(X_n = n) = n^{p-1}.$$

   Ainsi, quand $n \to +\infty$ la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas en moment d'ordre p.

3. **La convergence en loi n'implique pas la convergence en probabilité :**

   Soit X v.a suit la loi de Bernoulli de paramètre 1/2, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $X_n = X$.

   On pose $Y = 1 - X$, alors Y est de même loi que X.

   Donc :

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X \ \text{ encore } \ X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y.$$

   Par contre, puisque $|X_n - Y| = |2X - 1| = 1$ $\mathbb{P}.ps$, donc pour $\epsilon \in]0, 1[$ on obtient :

$$\mathbb{P}(|X_n - Y| > \epsilon) = 1.$$

   Alors la suite $(X_n)_n$ ne converge pas en probabilité vers Y.

Théorème 1.1.3. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$,$(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suite de variables aléatoires tel que :*

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X \ \textit{et}\ Y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Y,$$

presque sûre, en probabilité, ou en moyenne d'ordre r, respectivement;

Alors :

$$X_n + Y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X + Y,$$

presque sûre, en probabilité, ou en moyenne d'ordre r, respectivement.

1.2 Convergence des Séries de variables aléatoires

Théorème 1.2.1 ([13], p.261)**.** *Soit $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de nombres réelles tel que $a_n \uparrow +\infty$.*

Posons pour $n \geqslant 1$

$$Y_{k,n} = X_k \mathbb{1}\{|X_k| \leqslant a_n\}, \qquad k = 1, 2, ..., n$$

Alors pour que :

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \tag{1.7}$$

il faut et il suffit que :

$$(i) \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_k| > a_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad\qquad (ii) \ \frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^{n} Var(Y_{k,n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$(iii) \ \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_{k,n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Théorème 1.2.2 (Critère des deux séries de Kolmogorov [6], p.286)**.** *Soit* $(X_n)_{n \geqslant 1}$ *suite de variables aléatoires indépendantes ;*

Alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} Var(X_n) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \mathbb{E}(X_n)) < \infty \ \textit{converge} \ \mathbb{P}.p.s.$$

Si, de plus :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n) < \infty$$

Alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \ \textit{converge} \ \mathbb{P}.p.s.$$

Théorème 1.2.3 (Critère des trois séries de Kolmogorov [6], p.289)**.** *Soit* $(X_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes ;*

On pose pour $c > 0$ *:*

$$\widetilde{X}_n = X_n \mathbb{1}\{|X_n| \leqslant c\}, \qquad \forall n \geqslant 1$$

La série $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ *converge* $\mathbb{P}.p.s$ *si et seulement si :*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \neq \widetilde{X}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > c) \ < \infty,$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\widetilde{X}_n)$ *converge,*

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} Var(\widetilde{X}_n) \ < \infty.$

Lemme 1.2.1 (Kronecker aléatoire)**.** *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a, et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante des réels strictement positifs divergeant vers l'infini, alors :*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{b_k}\ \textit{converge}\ \mathbb{P}.p.s \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0.$$

Définition 1.2.1 (Deux suites équivalentes)**.** *Deux suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ sont dites équivalentes si*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_n\neq Y_n)<\infty.$$

Remarque 1.2.1. *Si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de variables aléatoires équivalentes, le lemme de Borel-Cantelli assure que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} X_n\neq Y_n)=0$,*
Donc $\mathbb{P}(\sum_n X_n$ converge$)=1$ si et seulement si $\mathbb{P}(\sum_n Y_n$ converge$)=1$.

Proposition 1.2.1. *Soit $\{X,X_n,\ n\geqslant 1\}$ suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées tel que $\mathbb{E}(|X|^r)<\infty$ pour $r>0$, et on définit :*

$$Y_n=X_n\mathbb{1}_{\{|X_n|\leqslant n^{1/r}\}},\qquad n\geqslant 1$$

Alors $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux suites équivalentes.

Proposition 1.2.2 ([6], p.267)**.** *Soit $r>0$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, alors les propositions suivantes sont équivalents :*

(i) $\mathbb{E}(|X_1|^r)<\infty$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n|>n^{1/r}\epsilon)<\infty\quad\forall\epsilon>0$,

(iii) $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}|X_n|>n^{1/r}\epsilon)=0\quad\forall\epsilon>0$,

(iv) $\frac{X_n}{n^{1/r}}\xrightarrow{\mathbb{P}.ps}0$ *quand* $n\to\infty$.

Lemme 1.2.2 ([13], p.273)**.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de nombres positifs ;*
Si

$$\frac{S_n}{a_n}\xrightarrow{\mathbb{P}.ps}0\quad\textit{et}\quad\frac{a_{n-1}}{a_n}=O(1).$$

Alors :

$$\sum_n\mathbb{P}(|X_n|\geqslant a_n)<\infty.$$

Lemme 1.2.3.

- *Pour* $\alpha > 0, n \geqslant 2$ *on a :*

$$\frac{1}{\alpha n^{\alpha}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}} \leqslant \frac{1}{\alpha(n-1)^{\alpha}} \leqslant \frac{2^{\alpha}}{\alpha n^{\alpha}}.$$

- *Soit* $\beta > 0$ *:*

$$\frac{n^{\beta}}{\beta} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1} \leqslant \frac{n^{\beta}}{\beta} + n^{\beta-1} \leqslant \left(\frac{1}{\beta}+1\right) n^{\beta}.$$

Lemme 1.2.4 ([6], p.294)**.** *Soit* $0 < r < 2$, *et* $\{X, X_n,\ n \geqslant 1\}$ *suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, on définit :*

$$Y_n = X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \leqslant n^{1/r}\}}, \qquad n \geqslant 1\,;$$

Si $\mathbb{E}(|X|^r) < \infty$ *alors :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} Var\left(\frac{Y_n}{n^{1/r}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(Y_n)}{n^{2/r}} \ < \infty \tag{1.8}$$

Démonstration.

Pour $n \geqslant 1$ et $r \in]0, 2[$, On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} Var\left(\frac{Y_n}{n^{1/r}}\right) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{n^{2/r}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^2 \mathbb{1}_{\{|X| \leqslant n^{1/r}\}})}{n^{2/r}} \\
&= \mathbb{E}\left[X^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\{|X|^r \leqslant n\}}}{n^{2/r}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2 \sum_{n \geqslant |X|^r \vee 1} \frac{1}{n^{2/r}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2 \sum_{n \geqslant |X|^r} \frac{\mathbb{1}_{\{1 \leqslant |X|^r \leqslant 2\}}}{n^{2/r}}\right] + \mathbb{E}\left[X^2 \sum_{n \geqslant |X|^r} \frac{\mathbb{1}_{\{2 \leqslant |X|^r\}}}{n^{(2/r)-1+1}}\right] \\
&\overset{(*)}{\leqslant} 2^{2/r} \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{2/r}} + \frac{2^{(2/r)-1}}{(2/r)-1}\, \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{(|X|^r)^{(2/r)-1}}\right)
\end{aligned}$$

On a utilisé le premier point du Lemme 1.2.3 pour obtenir $(*)$ (avec $\alpha = \frac{2}{r} - 1$). Ainsi, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{2/r}}$ converge car $\frac{2}{r} > 1$ (série de Riemann), Donc on aura :

$$2^{2/r} \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{2/r}} + \frac{2^{(2/r)-1}}{(2/r)-1}\, \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{(|X|^r)^{(2/r)-1}}\right) \leqslant C_1 + C_2 \mathbb{E}|X|^r$$

Et puisque $\mathbb{E}|X|^r < \infty$ alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} Var\left(\frac{Y_n}{n^{1/r}}\right) < \infty$$

$\square$

Lemme 1.2.5. *Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ suite de nombres réelles ;*

Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$$

Théorème 1.2.4 ([5], Theorem 1)**.** *Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires positives avec $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ tels que :*

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n) < \infty$ *;*

(b) $\mathbb{E}(X_i X_j) \leqslant \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$, $\quad j > i$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty.$

Alors :

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0$$

Corollaire 1.2.1 ([5], Corollary 1)**.** *Soit $\{X_n, \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendants avec $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ tels que :*

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)|) < \infty$ *;*

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty.$

Alors :

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0$$

Définition 1.2.2. *Soit X et Y deux v.a indépendantes telles que $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$. On note par $X^s = X - Y$ la variable aléatoire symétrique.*

Théorème 1.2.5. *Soit $r > 0$, supposons que $\mathbb{E}(|X|^r) < \infty$ et $\mathbb{E}(|Y|^r) < \infty$, alors :*

$$\mathbb{E}(|X + Y|^r) \leqslant c_r(\mathbb{E}(|X|^r) + \mathbb{E}(|Y|^r)) \tag{1.9}$$

Où :

$$c_r = \begin{cases} 1 & si \quad r \leqslant 1, \\ 2^{r-1} & sinon. \end{cases}$$

Proposition 1.2.3. *Soient $r \geqslant 1$ et X, Y deux v.a indépendants, supposons que $\mathbb{E}|X|^r < \infty$, $\mathbb{E}|Y|^r < \infty$ et $\mathbb{E}(Y) = 0$. Alors :*

$$\mathbb{E}|X|^r \leqslant \mathbb{E}|X + Y|^r.$$

En particulier, si $\mathbb{E}(X) = 0$, et X^s v.a symétrique alors :

$$\mathbb{E}|X|^r \leqslant \mathbb{E}|X^s|^r.$$

Théorème 1.2.6 (Inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund [6], p. 150)**.**
Soit $p \geqslant 1$, et $\{X, X_n,\ n \geqslant 1\}$ suite de variables aléatoires indépendantes de moyennes nulles, telle que $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$, et $\{S_n, n \geqslant 1\}$ désigne la somme partielle associée ;
Alors il existe deux constantes A_p et B_p (ne dépendant que de p) telles que :

$$A_p \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{p/2} \leqslant \mathbb{E}(|S_n|^p) \leqslant B_p \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{p/2} \tag{1.10}$$

De manière équivalente,

$$(A_p)^{1/p} \|Q_n(X)\|_p \leqslant \|S_n\|_p \leqslant (B_p)^{1/p} \|Q_n(X)\|_p \tag{1.11}$$

Où :

$$Q_n(X) = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{1/2}$$

est la variation quadratique des sommes.

Pour montrer cette inégalité nous avons besoin du lemme de Khintchine.
$(r_n)_{n\geqslant 1}$ représente la suite des fonctions de Rademacher (suite de v.a indépendantes prenant les valeurs $\{1, -1\}$ avec probabilité $1/2$).

Lemme 1.2.6 (Inégalité de Khintchine [6], p.147)**.** *Soit $\{a_n,\ n \geqslant 1\}$ suite de nombres réelles ;*
Alors pour $p > 0$, il existe des constantes A_p^*, B_p^* ne dépendant que de p tels que :

$$A_p^* \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{p/2} \leqslant \int_0^1 |f_n(t)|^p dt \leqslant B_p^* \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{p/2}$$

Où :

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t).$$

Démonstration du Théorème 1.2.6 :

Posons, pour $n \geqslant 1$ et $t \in [0,1]$:

$$S_n^s = \sum_{k=1}^{n} X_k^s$$

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^{n} X_k r_k(t) \quad , \quad T_n^s(t) = \sum_{k=1}^{n} X_k^s r_k(t)$$

par la symétrie il s'ensuit que :

$$S_n^s \overset{\mathscr{L}}{=} T_n^s(t)$$

Ainsi par la Proposition 1.2.3 et Théorème 1.2.5 on aura :

$$\mathbb{E}|S_n|^p \leqslant \mathbb{E}|S_n^s|^p = \mathbb{E}|T_n^s(t)|^p \leqslant 2^p \mathbb{E}|T_n(t)|^p. \tag{1.12}$$

En intégrant et en intervertissant les intégrations, il vient que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\mathbb{E}|S_n|^p = \int_0^1 \mathbb{E}|S_n|^p dt \leqslant 2^p \mathbb{E} \int_0^1 |T_n(t)|^p dt$$

d'après l'inégalité de Khintchine il existe une constante B_p^* tel que :

$$2^p \mathbb{E} \int_0^1 |T_n(t)|^p dt \leqslant 2^p B_p^* \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \right)^{p/2}$$

alors pour $B_p = 2^p B_p^*$ on a :

$$\mathbb{E}|S_n|^p \leqslant B_p \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \right)^{p/2}$$

De même, si on inverse entre S_n et $T_n(t)$ dans (1.12) on obtient :

$$\mathbb{E}|T_n(t)|^p \leqslant 2^p \mathbb{E}|S_n|^p$$

et à l'aide de l'autre inégalité de Khintchine, il existe une constante A_p^* tel que :

$$2^{-p} A_p^* \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \right)^{p/2} \leqslant \mathbb{E}|S_n|^p$$

enfin, pour $A_p = 2^{-p} A_p^*$ on a :

$$A_p \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \right)^{p/2} \leqslant \mathbb{E}(|S_n|^p) \leqslant B_p \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \right)^{p/2}$$

□

Lemme 1.2.7 ([13], p.278)**.** *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres positives, on pose* $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *telle que :* $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$*, alors :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{A_n\psi(A_n)} \text{ converge,}$$

Pour tout fonctions ψ *vérifiait les conditions suivantes :.*

(i) $\psi(x)$ *est positif croissant sur* $]x_0, \infty[$ *pour certains* x_0*.*

(ii) La série $\sum_{n} \frac{1}{n\psi(n)}$ *converge.*

Théorème 1.2.7 (Loi du zéro-un de Kolmogorov)**.** *Soit* $\mathscr{X} = \{X_n, n \geqslant 1\}$ *suite de variables aléatoires indépendantes, on note par* $\mathscr{F}_\infty$ *la tribu asymptotique associée à* $\mathscr{X}$ *i.e.*

$$\mathscr{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \sigma\{X_i \ , \ i \geqslant n\}$$

Alors :

$$\forall A \in \mathscr{F}_\infty \qquad \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } 1.$$

Théorème 1.2.8 (Burkholder [1], Theorem 9)**.** *Soit* $\{(X_n, \mathscr{F}_n),\ n \geqslant 1\}$ *une martingale et on note par* $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ *la suite des accroissements associée à* $(X_n)_n$ *définit par :*

$$Y_1 = X_1 \quad \text{et} \quad Y_n = X_n - X_{n-1}, \quad n \geqslant 2$$

Alors pour $p > 1$*, il existe deux constantes* A_p *et* B_p *ne dépendent que de* p *telles que :*

$$A_p\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2\right)^{p/2} \leqslant \mathbb{E}|X_n|^p \leqslant B_p\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2\right)^{p/2} \tag{1.13}$$

Chapitre 2

Théorèmes Limites et Intégrabilité Uniforme

2.1 Lois de Kolmogorov - Marcinkiewicz-Zygmund

Théorème 2.1.1 (LFGN de Kolmogorov [6], p.295). *Soit $\{X, X_n,\ n \geqslant 1\}$ suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d),*
on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\ ,\quad n \geqslant 1\,;$

(a) Si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ *et* $\mathbb{E}(X) = \mu$ *alors :*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}.p.s} \mu \qquad qd\ n \to +\infty$$

(b) Si $S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} c$ *(constante) alors :*

$$\mathbb{E}(|X|) < \infty \quad et \quad c = \mathbb{E}(X)$$

(c) Si $\mathbb{E}(|X|) = \infty$ *alors :*

$$\limsup_{n \to +\infty} \left|\frac{S_n}{n}\right| = +\infty$$

Démonstration.

(a) Posons :

$$Y_n = X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \leqslant n\}}\ , \qquad n \geqslant 1$$

Comme $\mathbb{E}|X| < \infty$ et par la Proposition 1.2.1, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites équivalentes ce qui implique :

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > 1\right) < \infty.$$

donc la première somme du Théorème 1.2.3 des trois séries de Kolmogorov est convergente, de plus, par Lemme 1.2.4 on a :

$$\sum_{n\geqslant 1} Var\left(\frac{Y_n}{n}\right) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{Var(Y_n)}{n^2} < \infty$$

la troisième somme du Théorème 1.2.3 des trois séries de Kolmogorov est convergente.

D'autre part, on applique le critère de convergence de Kolmogorov Théorème 1.2.2 aux variables aléatoires $\{Y_n/n,\ n \geqslant 1\}$, on obtient :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{Y_n - \mathbb{E}(Y_n)}{n} \quad \text{converge } \mathbb{P}.p.s.$$

par Lemme de Kronecker 1.2.1 on aura :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mathbb{E}(Y_i)) \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0$$

Ensuite,

$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{|X_n|\leqslant n\}}) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{|X|\leqslant n\}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X) = \mu$, par théorème de convergence dominé. Ainsi, à l'aide du Lemme 1.2.5 on trouve :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Y_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$$

On conclure de ce qui précède que :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$$

et puisque les deux suites $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ sont équivalentes alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$$

(b) Supposons que $S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}.p.s} c$,

Ainsi, d'après le Théorème 1.1.3 on aura :

$\forall n \geqslant 2,$

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} c - 1.c = 0$$

et par la Proposition 1.2.2 ($vi \Leftrightarrow i$), on obtient :

- $\mathbb{E}(|X|) < \infty$,
- $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathbb{E}(X) = c \;\; \mathbb{P}.ps.$

(c) Si $\mathbb{E}|X| = \infty$, la Proposition 1.2.2 donne :

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} |X_n| > n\epsilon) = 1 \ , \quad \forall\ \epsilon > 0$$

et comme $|X_n| \leqslant |S_n| + |S_{n-1}|$, Alors :

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} |S_n| > n\epsilon/2) = 1 \ , \quad \forall\ \epsilon > 0$$

Ce qui équivalent à :

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{S_n}{n}\right| = +\infty.$$

□

Remarque 2.1.1. *La limite en (b) ne peut être qu'une constante. Ceci découle de la loi zéro-un de Kolmogorov.*

Théorème 2.1.2 (La loi forte de Marcinkiewicz-Zygmund [6], p.298)**.** *Soit $0 < r < 2$, et $\{X, X_n,\ n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, avec $\mathbb{E}(|X|^r) < \infty$*

- *Si $\mathbb{E}(X) = 0$ pour $1 \leqslant r < 2$, alors :*

$$\frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{\mathbb{P}.p.s} 0 \qquad qd\ n \to +\infty.$$

- *Inversement ; si on a la convergence $\mathbb{P}.p.s$ de $\{n^{-1/r}.S_n,\ n \geqslant 1\}$ alors :*

$$\mathbb{E}(|X|^r) < \infty \ \text{et}\ \mathbb{E}(X) = 0 \ \text{lorsque}\ 1 \leqslant r < 2.$$

Démonstration.

1. Commençons par la condition suffisante, on pose :

$$Y_n = X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \leqslant n^{1/r}\}} \ \text{et} \ \ S'_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \ , \quad n \geqslant 1$$

Comme $\mathbb{E}(|X|^r) < \infty$ et par la Proposition 1.2.1 les deux suites $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ sont équivalentes, ainsi :

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n^{1/r}}\right| > 1\right) < \infty.$$

de plus, par Lemme 1.2.4 :

$$\sum_{n\geqslant 1} Var\left(\frac{Y_n}{n^{1/r}}\right) < \infty.$$

Or l'application du critère de convergence de Kolmogorov Théorème 1.2.2, donne :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{Y_n}{n^{1/r}} \quad \text{converge } \mathbb{P}.p.s.$$

par Lemme 1.2.1 :

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mathbb{E}(Y_i)) \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0$$

Dans la suite, nous souhaitons prouver que :

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

afin de conclure que :

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{i=1}^{n} Y_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On va donc traiter deux cas :

(i) Pour $0 < r < 1$ **:**

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(S'_n)| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|X_k| \mathbb{1}\{|X_k| \leqslant k^{1/r}\}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|X_k| \mathbb{1}\{|X_k| \leqslant k^{1/2r}\}] + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|X_k| \mathbb{1}\{k^{1/2r} < |X_k| \leqslant k^{1/r}\}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|X_k|^{1-r+r} \mathbb{1}\{|X_k| \leqslant k^{1/2r}\}] + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|X_k|^{1-r+r} \mathbb{1}\{k^{1/2r} < |X_k| \leqslant k^{1/r}\}] \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} (k^{1/2r})^{1-r} \mathbb{E}[|X|^r \mathbb{1}\{|X| \leqslant k^{1/2r}\}] + \sum_{k=1}^{n} (k^{1/r})^{1-r} \mathbb{E}[|X|^r \mathbb{1}\{k^{1/2r} < |X| \leqslant k^{1/r}\}] \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{(1-r)/2r} \mathbb{E}(|X|^r) + \sum_{k=1}^{n} k^{(1/r)-1} \mathbb{E}(|X|^r \mathbb{1}\{|X| > k^{1/2r}\})
\end{aligned}$$

d'après deuxième point du Lemme1.2.3 pour $\beta = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2}$ et sans préciser la constante :

$$\leqslant C\ n^{(1+r)/2r}\ \mathbb{E}(|X|^r) + \sum_{k=1}^{n} k^{(1/r)-1} \mathbb{E}(|X|^r \mathbb{1}\{|X| > k^{1/2r}\}).$$

Ainsi :

$$\frac{|\mathbb{E}(S'_n)|}{n^{1/r}} \leqslant n^{(1/2)-(1/r)} \mathbb{E}(|X|^r) + n^{-1/r} \sum_{k=1}^{n} k^{(1/r)-1} \mathbb{E}(|X|^r \mathbb{1}\{|X| > k^{1/2r}\})$$

qui converge vers 0 quand $n \to +\infty$, en effet :

puisque $\frac{1}{2} - \frac{1}{r} < 0$ et $\mathbb{E}(|X|^r) < \infty$ alors :

$$n^{1/2-1/r} \mathbb{E}(|X|^r) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

de plus, à l'aide du Lemme 1.2.5 on aura :

$$\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{r}-1}\mathbb{E}(|X|^r\mathbb{1}\{|X|>k^{1/2r}\}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(ii) Pour $1 \leqslant r < 2$ **:**

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(S'_n)| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k\mathbb{1}\{|X_k|\leqslant k^{1/r}\}]\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)-\mathbb{E}[X_k\mathbb{1}\{|X_k|>k^{1/r}\}]\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[|X_k|\mathbb{1}\{|X_k|>k^{1/r}\}] \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}(k^{1/r})^{1-r}\mathbb{E}[|X|^r\mathbb{1}\{|X|>k^{1/r}\}] \\
&= \sum_{k=1}^{n}k^{(1/r)-1}\mathbb{E}[|X|^r\mathbb{1}\{|X|>k^{1/r}\}]
\end{aligned}$$

Ainsi, à l'aide du Lemme 1.2.5 on a :

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathbb{E}(S'_n)|}{n^{1/r}} &\leqslant \frac{1}{n^{1/r}}\sum_{k=1}^{n}k^{(1/r)-1}\mathbb{E}(|X|^r\mathbb{1}\{|X|>k^{1/r}\}) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Ce qui équivalent à dire pour les deux cas que :

$$\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Y_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'ou :

$$\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{i=1}^{n}Y_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et du fait que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ soient équivalentes alors :

$$\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{i=1}^{n}X_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Pour la condition nécessaire, supposons que : $n^{-1/r}.S_n \overset{\mathbb{P}.p.s}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $\forall\ n \geqslant 2$

$$\frac{X_n}{n^{1/r}} = \frac{S_n}{n^{1/r}} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/r}\frac{S_{n-1}}{(n-1)^{1/r}}$$

Ce qui implique :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n^{1/r}} = 0 \ \mathbb{P}.ps$$

Donc $\mathbb{E}(|X|^r) < \infty$ d'après la Proposition 1.2.2, de plus si $1 \leqslant r < 2$ on a :

$$\frac{S_n}{n} = n^{(1/r)-1} \frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0$$

donc $\mathbb{E}(X) = 0$ par LFGN Kolmogorov (b) 2.1.1 .

□

2.2 Suite de variables aléatoires uniformément intégrable

Cette section est consacrée à la notion d'intégrabilité uniforme pour une famille de variables aléatoires réelles. Cette notion jouera un rôle crucial dans l'étude de la convergence dans L^r pour une suite qui converge presque sûrement (la suite des moyennes arithmétique).

Soit $\mathscr{X} = \{X_i, i \in I\}$ une famille de variables aléatoires réelles, indexée par un ensemble I non vide, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Définition 2.2.1. *On dit que $\mathscr{X}$ est uniformément intégrable (u.i) si*

$$\lim_{a\to+\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i|>a\}}] = 0 \tag{2.1}$$

Exemple 2.2.1.

• Une famille réduite à un singleton est uniformément intégrable, plus généralement, tout sous-ensemble fini de L^1 est u.i.

• Soit Y une variable aléatoire réelle intégrable i.e $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$. Alors $\{Y\}$ est uniformément intégrable, en effet :

Pour $a > 0$,

$\mathbb{E}[|Y| \mathbb{1}_{\{|Y|>a\}}] = \mathbb{E}[|Y|] - \mathbb{E}[|Y| \mathbb{1}_{\{|Y|\leqslant a\}}] \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, D'après théorème de convergence dominée.

Théorème 2.2.1 (Caractérisation de l'intégrabilité uniforme)**.** *Une famille de variables aléatoires réelles $\mathscr{X}$ est uniformément intégrable (u.i) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) $\mathscr{X}$ est bornée dans L^1 (ie $\sup_{i\in I} \mathbb{E}(|X_i|) < \infty$) ;

(b) $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ et $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \sup_{i\in I} \int_A |X_i| d\mathbb{P} \leqslant \epsilon$.

Exemple 2.2.2.

Soit $\{X_i,\ i \in I\}$ et $\{Y_i,\ i \in I\}$ des familles de v.a réelles telle que : $|X_i| \leqslant Y_i, \forall i \in I$.

Si $\{Y_i,\ i \in I\}$ est uniformément intégrable, alors $\{X_i,\ i \in I\}$ l'est également.

En particulier, si $|X_i| \leqslant Y, \forall i \in I$, où Y est une v.a. positive intégrable, alors $\{X_i,\ i \in I\}$ est uniformément intégrable, en effet :

$$\mathbb{E}|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>a\}} \leqslant \mathbb{E}Y\mathbb{1}_{\{Y>a\}} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Théorème 2.2.2. *Soit $\mathscr{X} = \{X_n, n \in I\}$ une famille de variables aléatoires, et g une fonction croissante positive telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$.*
Si $\sup\limits_{n\in I} \mathbb{E}g(|X_n|) < \infty$, alors : $\mathscr{X}$ est uniformément intégrable.

En particulier, si $\mathscr{X}$ est bornée dans L^r avec $r > 1$ (on prend $g(x) = x^r$) ; ie il existe une constante finie C telle que $\|X_n\|_r \leqslant C$ pour tout $n \in I$, alors $\mathscr{X}$ est uniformément intégrable.

Remarque 2.2.1. *Ce dernier résultat n'est pas vrai pour $r = 1$ en effet ;*
Considérons une suite de variable aléatoire $(X_n)_{n\geqslant 1}$ avec

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \ \ et\ \ \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

alors :

$$\sup_{n\geqslant 1} \mathbb{E}(|X_n|) = 1 \quad \textit{(la suite est bornée dans } L^1\textit{)}.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$ et $a > 0$;

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_{\{X_n>a\}}) &= \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_{\{X_n>a\}\cap\{X_n=n\}})\\ &= n\ \mathbb{P}(X_n > a)\\ &= n.\frac{1}{n} \ = \ 1 \neq 0\end{aligned}$$

Donc, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas uniformément intégrable.

Lemme 2.2.1.

Si $\{X_i, i \geqslant i_0\}$ $(i_0 \in I)$ est uniformément intégrable, alors $\mathscr{X} = \{X_i, i \in I\}$ est aussi uniformément intégrable.

Théorème 2.2.3. *Soit* $\{X, X_n,\ n \geqslant 1\}$ *suite de variables aléatoires réelles, et supposons que* $X_n \overset{\mathbb{P}.p.s}{\longrightarrow} X$*, alors les propositions suivantes sont équivalentes pour tout* $r > 0$ *:*

(a) $\{|X_n|^r, n \geqslant 1\}$ *est uniformément intégrable ;*

(b) $X_n \overset{L^r}{\longrightarrow} X$ *quand* $n \to +\infty$ *;*

(c) $\mathbb{E}(|X_n|^r) \longrightarrow \mathbb{E}(|X|^r)$ *quand* $n \to +\infty$.

De plus, si $r \geqslant 1$ *et l'une des conditions précédentes est vérifiée, alors* $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)$.

Convergence des moments

Les résultats sur les lois des grands nombres peuvent être étendus aux cas où les variables aléatoires sont à valeurs dans un espace de Banach $(L^r, \|.\|_r)$ pour tout $r \geqslant 1$. Dans la suite, on va étudier une version de LFGN celle nommée loi forte de Kolmogorov dans L^r.

Théorème 2.2.4 ([6], p.309)**.** *Soit* $\{X, X_n,\ n \geqslant 1\}$ *suite de variables aléatoires i.i.d avec une moyenne finie* $\mathbb{E}(X) = \mu$ *;*
Alors

$$\frac{S_n}{n} \overset{L^1}{\longrightarrow} \mu \qquad qd\ n \to +\infty$$

Démonstration.
Pour montrer que $S_n/n \overset{L^1}{\longrightarrow} \mu$, nous devons d'abord prouver l'intégrabilité uniforme, et ensuite la joindre au Théorème 2.2.3. Pour cela on propose trois preuve déférentes :

Preuve 1 : Par LFGN Kolmogorov Théorème 2.1.1 on a, $S_n/n \overset{\mathbb{P}.p.s}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X) = \mu$ et du Théorème 2.2.3 nous devons prouver que la suite des moyennes arithmétique $\{S_n/n, n \geqslant 1\}$ est uniformément intégrable, et pour cela nous appuyons sur le Théorème 2.2.1,

(i) La première relation découle de l'inégalité triangulaire :

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(|X_i|) = \mathbb{E}(|X|).$$

donc $\left\{\frac{S_n}{n}, n \geqslant 1\right\}$ bornée dans L^1.

(ii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, et $A \in \mathscr{F}$ tel que $\int_A |X| d\mathbb{P} < \epsilon$ chaque fois que $\mathbb{P}(A) < \delta$, en effet :

(a) soit $M > 0$;

$\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|X|>M\}}] = \mathbb{E}[|X|] - \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant M\}}] \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, D'après théorème de convergence dominé.

(b) Et si $\mathbb{P}(A) < \dfrac{\epsilon}{2M} = \delta$.

alors :

$$\begin{aligned}
\int_A |X|d\mathbb{P} &= \int_{A\cap\{|X|\leqslant M\}} |X|d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{|X|>M\}} |X|d\mathbb{P} \\
&\leqslant M\mathbb{P}(A) + \int_{\{|X|>M\}} |X|d\mathbb{P} \\
&\overset{(a),(b)}{\leqslant} M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_A \left|\frac{S_n}{n}\right| d\mathbb{P} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_A |X_i|d\mathbb{P} = \int_A |X|d\mathbb{P} < \epsilon.$$

Donc $\left\{\frac{S_n}{n}, n \geqslant 1\right\}$ est uniformément intégrable.

<u>*Preuve 2*</u> : On utilise la Définition 2.2.1 ;

Soit $a > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n}\right|\mathbb{1}_{\left\{|\frac{S_n}{n}|>a\right\}} &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_{\left\{|\frac{S_n}{n}|>a\right\}} \\
&= \mathbb{E}|X|\mathbb{1}_{\left\{|\frac{S_n}{n}|>a\right\}} \\
&= \mathbb{E}|X|\mathbb{1}_{\left\{\left\{|\frac{S_n}{n}|>a\right\}\cap\{|X|\leqslant\sqrt{a}\}\right\}} \\
&+ \mathbb{E}|X|\mathbb{1}_{\left\{\left\{|\frac{S_n}{n}|>a\right\}\cap\{|X|>\sqrt{a}\}\right\}} \\
&\leqslant \sqrt{a}\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > a\right) + \mathbb{E}|X|\mathbb{1}_{\{|X|>\sqrt{a}\}}
\end{aligned}$$

par l'Inégalité de Markov :

$$\begin{aligned}
\sqrt{a}\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > a\right) + \mathbb{E}\left[|X|\mathbb{1}_{\{|X|>\sqrt{a}\}}\right] &\leqslant \sqrt{a}\frac{\mathbb{E}(|X|)}{a} + \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|X|>\sqrt{a}\}}] \\
&\underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Donc $\{S_n/n, n \geqslant 1\}$ est uniformément intégrable.

<u>*Preuve 3*</u> : On définit $B_n = \left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| > \epsilon\right\}$, et par LFGN de Kolmogorov 2.1.1 on a $\mathbb{P}(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc pour n_0 suffisamment grand :

$$\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{B_n\}}] < \epsilon \ , \qquad n > n_0$$

il s'ensuit que, pour $n > n_0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n}\right|\mathbb{1}_{\{B_n\}} &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{\{B_n\}}] \\ &= \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{B_n\}}] \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\{S_n/n,\ n \geqslant n_0\}$ est uniformément intégrable (par Définition 2.2.1) Ainsi par Lemme 2.2.1, $\{S_n/n,\ n \geqslant 1\}$ est uniformément intégrable.

On conclut que :

- $\{S_n/n, n \geqslant 1\}$ est uniformément intégrable ;
- $S_n/n \overset{\mathbb{P}.p.s}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X) = \mu$ (LFGN)

et d'après Théorème 2.2.3 (pour $r = 1$) on a :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^1} \mu$$

□

Or s'il existe les moments d'ordre supérieur, on peut prouver la convergence en L^r, et on a le théorème suivant :

Théorème 2.2.5 ([6], p.310)**.** *Soit $r \geqslant 1$, et $\{X, X_n,\ n \geqslant 1\}$ suite des variables aléatoires i.i.d avec $\mathbb{E}(X) = \mu$ (finie),*
Si $\mathbb{E}(|X|^r) < \infty$, alors :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^r} \mu \quad et \quad \mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n}\right|^r \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu^r.$$

Démonstration.
Nous souhaitons prouver que $\left\{\left|\frac{S_n}{n}\right|^r, n \geqslant 1\right\}$ est u.i, pour cela on vérifie les deux conditions du Théorème 2.2.1 en effet :

(i)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n}\right|^r &\leqslant \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|\right)^r \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[|X_i|^r] \\ &= \mathbb{E}[|X|^r] < \infty\end{aligned}$$

$(*)$ Soient $r > 0$, et $(x_n)_{n\geqslant 1}$ suite de réelles positives. Alors, par convexité de la fonction $x \mapsto x^r$ on a :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^r \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^r.$$

(ii) Étant donné ϵ,δ et A comme requis :

$\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \mathbb{E}[|X|^r \mathbb{1}_{\{A\}}] < \epsilon$. Ainsi ;

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^r \mathbb{1}_{\{A\}}\right] \leqslant \mathbb{E}[|X|^r \mathbb{1}_{\{A\}}] < \epsilon.$$

Donc d'après Théorème 2.2.3 on a :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^r} \mu$$

De plus,

$$\mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n}\right|^r \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu^r$$

□

2.3 Sur la convergence L^r

Dans cette section, on va étudier la convergence dans L^r $0 < r < 2$ de la suite de variables aléatoires $\{S_n/n^{1/r},\ n \geqslant 1\}$ en mentionnant deux théorèmes limites.

Théorème 2.3.1 ([6], p.311)**.** *Soit $0 < r < 2$, et $\{X, X_n,\ n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires i.i.d.*

Si $\mathbb{E}(|X|^r) < \infty$ et $\mathbb{E}(X) = 0$ pour $1 \leqslant r < 2$ alors :

$$\frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{L^r} 0 \qquad qd\ n \to +\infty$$

Démonstration.

Soit $\epsilon > 0$, $M > 0$ alors

$$\mathbb{E}(|X|^r \mathbb{1}_{\{|X|>M\}}) < \epsilon$$

ce qui est possible car $\mathbb{E}|X|^r < \infty$.

Posons :

$$Y_k = X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| \leqslant M\}} \quad , \quad Z_k = X_k \mathbb{1}_{\{|X_k|>M\}}; \qquad k \geqslant 1.$$

- Pour $0 < r < 1$ **:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|S_n|^r) &= \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n Y_i + Z_i\right|^r\right) \\
&\leqslant \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n Y_i\right|^r\right) + \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n Z_i\right|^r\right) \qquad (2.2) \\
&\leqslant (nM)^r + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|Z_i|^r) \qquad (2.3) \\
&= (nM)^r + n\mathbb{E}(|Z_1|^r) \\
&\leqslant (nM)^r + n\epsilon.
\end{aligned}$$

On a utilisé deux fois le Théorème 1.2.5 pour (2.2) et (2.3) avec $c_r = 1$.

Ainsi :

$$\frac{\mathbb{E}(|S_n|^r)}{n} \leqslant n^{r-1}M^r + \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(|S_n|^r)}{n} \leqslant \epsilon\,; \;\; \text{puisque } r-1<0.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\frac{|S_n|^r}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Pour $1 \leqslant r < 2$ **:**

D'après l'Inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund (Théorème 1.2.6), il existe un constant B_r satisfaisant :

$$\mathbb{E}(|S_n|^r) \leqslant B_r \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i^2\right|^{r/2}\right)$$

en suite on utilise deux fois le Théorème 1.2.5 avec $c_r = 1$

$$\begin{aligned} B_r\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right|^{r/2}\right) &\leqslant B_r\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right|^{r/2}\right) + B_r\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right|^{r/2}\right) \\ &\leqslant B_r(nM^2)^{r/2} + B_r\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(|Z_i^2|^{r/2}) \\ &= B_r n^{r/2}M^r + B_r n\mathbb{E}(|Z_1|^r) \\ &\leqslant B_r n^{r/2}M^r + B_r n\epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\mathbb{E}(|S_n|^r)}{n} \leqslant B_r n^{\frac{r}{2}-1}M^r + B_r\epsilon$$

ce qui implique :

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(|S_n|^r)}{n} \leqslant B_r\epsilon \ \ ; \ \ \text{puisque } \tfrac{r}{2} - 1 < 0.$$

Donc :

$$\frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{L^r} 0.$$

□

Dans ce qui suit, on énonce un théorème limite pour des variables uniformément intégrable. Il s'agit d'un résultat de Y.S. Chow [2].

Théorème 2.3.2. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Supposons que $\{|X_n|^r, n \geqslant 1\}$ uniformément intégrable pour certain $0 < r < 2$, alors :*

$$\frac{S_n - a_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{L^r} 0 \qquad qd\ n \to +\infty$$

Où :

$$a_n = \begin{cases} 0 & si\ 0 < r < 1 \\ \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k|X_1, ..., X_{k-1}) & si\ 1 \leqslant r < 2. \end{cases}$$

Démonstration.

Définissons :

$$Y_k = \begin{cases} X_k & si\ 0 < r < 1 \\ X_k - \mathbb{E}(X_k|X_1, ..., X_{k-1}) & si\ 1 \leqslant r < 2. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\{|X_n|^r, n \geqslant 1\}$ est u.i, le Théorème 2.2.1 permet de choisir $\delta > 0$, pour tout $A \in \mathscr{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) < \delta$ on a :

$$\mathbb{E}\left[|X_n|^r \mathbb{1}_A\right] \leqslant \varepsilon, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Ensuite, pour tout $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\mathbb{E}(|X_n|^r|X_1, ..., X_{k-1}) > \alpha\right) &\leqslant \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(|X_n|^r|X_1, ..., X_{k-1})\right] \\ &= \frac{\mathbb{E}|X_n|^r}{\alpha}\end{aligned}$$

et pour α suffisamment grand on aura :

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{E}(|X_n|^r|X_1, ..., X_{k-1}) > \alpha\right) \leqslant \delta.$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(|X_n|^r|X_1, ..., X_{k-1})\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}(|X_n|^r|X_1,...,X_{k-1})>\alpha\}}\right] = \mathbb{E}\left[|X_n|^r \mathbb{1}_{\{\mathbb{E}(|X_n|^r|X_1,...,X_{k-1})>\alpha\}}\right] \leqslant \varepsilon.$$

alors $\{\mathbb{E}(|X_n|^r|X_1, ..., X_{n-1}), n \geqslant 1\}$ est uniformément intégrable,
Donc pour tout $0 < r < 2$, $\{|Y_n|^r, n \geqslant 1\}$ est uniformément intégrable, ce qui implique :
Pour $\epsilon > 0$; il existe $M > 0$ tel que $\int_{\{|Y_n|>M\}} |Y_n|^r d\mathbb{P} < \epsilon$, pour tout $n \geqslant 1$;
De plus posons ;

$$Y_n' = Y_n \mathbb{1}_{\{|Y_n| \leqslant M\}} \ , \ Z_n = Y_n - Y_n' = Y_n \mathbb{1}_{\{|Y_n|>M\}}.$$

(a) Pour $0 < r < 1$ **:**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|S_n|^r) &= \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Y_k' + Z_k\right|^r \\ &\leqslant \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Y_k'\right|^r + \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Z_k\right|^r && (2.4) \\ &\leqslant (nM)^r + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|Z_k|^r) && (2.5) \\ &\leqslant (nM)^r + n\epsilon.\end{aligned}$$

On a utilisé deux fois le Théorème 1.2.5 pour (2.4) et (2.5) avec $c_r = 1$.

Ainsi :

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(|S_n|^r) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Pour $1 < r < 2$ **:**

D'après l'inégalité de Burkholder (Théorème 1.2.8) , il existe un constant A_r positif satisfaisant :

$$A_r \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Y_k\right|^r \leqslant \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2\right)^{r/2} \quad , \qquad n \geqslant 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A_r \mathbb{E}|S_n - a_n|^r = A_r \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Y_k\right|^r &\leqslant \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2\right)^{r/2} \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k'^2 + Z_k^2\right)^{r/2} \\ &\leqslant \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k'^2\right)^{r/2} + \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k^2\right)^{r/2} \\ &\leqslant (nM^2)^{r/2} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|Z_k|^r) \\ &\leqslant (nM^2)^{r/2} + \ n\epsilon. \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(|S_n - a_n|^r) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(c) $r = 1$ **:**

Comme $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}\{Y_n' - \mathbb{E}(Y_n'|X_1, ..., X_{n-1})\}$ converge presque sûrement puisque $|Y_n'| \leqslant M$, ce qui implique à l'aide de Lemme de Kronecker 1.2.1 :

$$\sum_{k=1}^{n}\{Y_k' - \mathbb{E}(Y_k'|X_1, ..., X_{k-1})\} = \ o(n) \quad \mathbb{P}.ps$$

Ainsi, par le théorème de convergence Dominé :

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\{Y_k' - \mathbb{E}(Y_k'|X_1, ..., X_{k-1})\}\right| \ = \ o(n)$$

De plus ;

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Z_k - \mathbb{E}(Z_k|X_1, ..., X_{k-1})\right| &\leqslant \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}|Z_k| + \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}|\mathbb{E}(Z_k|X_1, ..., X_{k-1})| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|Z_k| + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[\mathbb{E}(|Z_k|/X_1, ..., X_{k-1})] \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(|Z_k|) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Z_k - \mathbb{E}(Z_k|X_1, ..., X_{k-1})\right| \leqslant 2n\epsilon,$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Y_k\right| &= \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Y'_k + Z_k - \mathbb{E}(X_k|X_1, ..., X_{k-1}) + \mathbb{E}(X_k|X_1, ..., X_{k-1})\right| \\
&= \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Y'_k + Z_k - \mathbb{E}[X_k - \mathbb{E}(X_k|X_1, ..., X_{k-1})|X_1, ..., X_{k-1}]\right| \\
&= \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Y'_k + Z_k - \mathbb{E}[Y_k|X_1, ..., X_{k-1}]\right| \\
&= \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Y'_k - \mathbb{E}[Y'_k|X_1, ..., X_{k-1}] + Z_k - \mathbb{E}[Z_k|X_1, ..., X_{k-1}]\right| \\
&\leqslant o(n) \ + \ 2n\epsilon.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}|S_n - a_n| = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Y_k\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Chapitre 3

Deux généralisation de la LFGN

Dans ce chapitre nous essayons d'analyser deux article qui traitent sur des lois fortes des grands nombres.

3.1 LFGN pondérée de Jajte

Cette partie est consacré à l'étude du papier de R.Jajte [7] qui date de 2003. Il donne une loi forte des grands nombres qui est très intéressante du fait qu'elle généralise la LFGN de Kolmogorov et de Marcinkiewicz-Zygmund ainsi que d'autres.

Hypothèses :

Avant d'énoncer le théorème, nous faisons l'hypothèse suivante :
Soit g une fonction positive croissante et h une fonction positive telle que

$$\phi(x) = g(x)h(x)$$

vérifie les conditions suivantes :

C1. Pour un certains $d \geqslant 0$, ϕ est positive strictement croissante sur $[d, \infty)$;

C2. Il existe C et un entier positif k_0 tel que :

$$\frac{\phi(x+1)}{\phi(x)} \leqslant C, \qquad x \geqslant k_0.$$

C3. Il existe des constantes a et b telles que :

$$\phi(s)^2 \int_s^\infty \frac{1}{\phi(x)^2} dx \leqslant as + b, \qquad s > d.$$

De plus, pour h et g comme ci-dessus, on définit la (h,g)-transformée d'une suite $\{\xi_n,\ n \geqslant 1\}$ par :

$$\sigma_n = \frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{h(k)} \xi_k \ , \qquad n \geqslant 1$$

Si $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \xi$, on dit que (ξ_n) converge vers ξ par la méthode (h,g) et on écrit

$$(h,g) - \lim \xi_k = \xi$$

Remarque 3.1.1. *On souligne ici que la classe ci-dessus de transformations d'une suite comprend plusieurs méthodes de somations régulières telles que :*
Les moyennes de Cesàro pour $h(x) = 1$ et $g(x) = x$ ou les moyennes logarithmiques $h(x) = x$ et $g(x) = \log x$, mais englobe également des transformations non régulières. Par exemple :
Le choix $h(x) = 1$, $g(x) = x^{1/r}$ pour $0 < r < 2$, $r \neq 1$ donne les moyennes liées au théorème de Marcinkiewicz-Zygmund.

Dans ce qui suit, on formule la loi forte des grands nombres pour les moyennes qui viennent d'être définies.

Théorème 3.1.1. *Soit $\{X, X_n,\ n \geqslant 1\}$ suite de variables aléatoires i.i.d, h et g deux fonctions définissent comme ci-dessus ;*
On pose :

$$m_k = \mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| \leqslant \phi(k)\}}]$$

Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$$(h,g) - \lim(X_k - m_k) = 0 \qquad \mathbb{P}.ps, \tag{3.1}$$

$$\mathbb{E}[\phi^{-1}(|X|)] < \infty, \tag{3.2}$$

où ϕ^{-1} est l'inverse de ϕ.

Démonstration.

1. Commençons par (3.1) $\Rightarrow$ (3.2) :
   - D'abord, la conditions (3.1) équivalent à

$$\frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - m_k}{h(k)} \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0 \ ;$$

Ce qui implique que :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{X_k}{\phi(k)} = 0 \quad \mathbb{P}.ps \tag{3.3}$$

puisque :

$$\begin{aligned}
\frac{m_k}{\phi(k)} &= \frac{\mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| \leqslant \phi(k)\}}]}{\phi(k)} \\
&\overset{i.i.d}{=} \mathbb{E}\left(\frac{X}{\phi(k)} \mathbb{1}_{\{-1 \leqslant \frac{X}{\phi(k)} \leqslant 1\}}\right) \\
&\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathbb{P}.ps.
\end{aligned}$$

d'après théorème de convergence Dominé et la condition *C1* pour ϕ.

Ainsi, d'après Corollaire 1.1.1 et (3.3) on aura :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{|X_k|}{\phi(k)} \geqslant 1\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X| \geqslant \phi(k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\phi^{-1}(|X|) \geqslant k\right) < \infty$$

Ce qui implique :

$$\mathbb{E}[\phi^{-1}(|X|)] < \infty.$$

2. Pour (3.2) $\Rightarrow$ (3.1), posons :

$$Y_n = X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \leqslant \phi(n)\}}, \quad n \geqslant 1$$

On a :

$$\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(X_k \neq Y_k) < \infty.$$

Car :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_k| \geqslant \phi(k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\phi^{-1}(|X|) \geqslant k\right) \leqslant \mathbb{E}[\phi^{-1}(|X|)] < \infty.$$

Alors, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ sont équivalentes. Il suffit donc de prouver que :

$$\frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k - m_k}{h(k)} \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0.$$

pour cela, nous devons connaître la nature du série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}Y_k^2}{\phi(k)^2} = \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^2}{\phi(k)^2} \mathbb{1}_{\{|X| \leqslant \phi(k)\}}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X^2}{\phi(k)^2}\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant\phi(k)\}} &= \sum_{k=1}^{k_0}\frac{X^2}{\phi(k)^2}\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant\phi(k)\}} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{X^2}{\phi(k)^2}\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant\phi(k)\}}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{k_0}\frac{\phi(k)^2}{\phi(k)^2} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{\phi(k+1)^2}{\phi(k)^2}\frac{X^2}{\phi(k+1)^2}\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant\phi(k)\}}\\
&\overset{(C2)}{\leqslant} k_0 + C^2\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{X^2}{\phi(k+1)^2}\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant\phi(k)\}}\\
&= k_0 + C^2X^2\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{\phi(k+1)^2}\mathbb{1}_{\{\phi^{-1}(|X|)\leqslant k\}}\\
&\overset{(*)}{\leqslant} k_0 + C^2\phi(\phi^{-1}(|X|))^2\int_{\phi^{-1}(|X|)}^{\infty}\frac{1}{\phi(x)^2}dx\\
&\overset{(C3)}{\leqslant} k_0 + C^2(a\phi^{-1}(|X|)+b)
\end{aligned}$$

$(*)$ puisque $|X| = \phi(\phi^{-1}(|X|))$.

Ainsi a l'aide d'hypothèse $(\mathbb{E}[\phi^{-1}(|X|)] < \infty)$, on aura :

$$\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X^2}{\phi(k)^2}\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant\phi(k)\}} \leqslant k_0 + C^2(a\mathbb{E}[\phi^{-1}(|X|)]+b) < \infty$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}Y_k^2}{\phi(k)^2} < \infty$$

ce qui implique :

$$\sum_{k=1}^{\infty}Var\left(\frac{Y_k}{\phi(k)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\frac{Y_k-m_k}{\phi(k)}\right]^2 < \infty$$

Par conséquent, (Théorème 1.2.2)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k-m_k}{\phi(k)} \quad \text{converge } \mathbb{P}.p.s.$$

et d'après Lemme 1.2.1 on a :

$$\frac{1}{g(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{Y_k-m_k}{h(k)} \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0$$

Finalement :

$$\frac{1}{g(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k-m_k}{h(k)} \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0 \Leftrightarrow (h,g)-\lim(X_k-m_k)=0 \qquad \mathbb{P}.ps.$$

□

Remarque 3.1.2. *Pour $\phi(x) = x^{1/r}$ alors ce théorème donne essentiellement le résultat classique de Marcinkiewicz-Zygmund.*

3.2 Lois des grands nombres pour les variables aléatoires deux à deux indépendantes

A présent, on étudie le papier de D.Landers et L.Rogge [9] qui donne des lois des grands nombres dans le cas où les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes.

Théorème 3.2.1. *Soit* $\mathscr{X} = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une famille de variables aléatoires deux à deux indépendants avec* $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *et* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *strictement croissante telle que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(t)/t = \infty$, *supposons que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\varphi(|X_n|)] < \infty \tag{3.4}$$

Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

Si de plus ;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)} < \infty \tag{3.5}$$

Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0$$

Démonstration.

Posons :

$$X_{i,n} = X_i \mathbb{1}_{\{|X_i|\leqslant n\}} \quad \text{et} \quad S_{n,n} = \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}\,; \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- Nous souhaitons prouver que $S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, en effet :

(1) Puisque $X_{1,n}, ..., X_{n,n}$ sont des v.a deux à deux indépendants alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}S_{n,n} - \mathbb{E}(S_{n,n})\right)^2\right] &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_{i,n}) + \frac{2}{n^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Cov(X_{i,n}, X_{j,n}) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_{i,n}) \\
&\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_{i,n}^2) \\
&\leqslant \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_{i,n}^2\mathbb{1}_{\{|X_{i,n}|\geqslant n^{1/4}\}}) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_{i,n}^2\mathbb{1}_{\{|X_{i,n}|<n^{1/4}\}})\right) \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(|X_{i,n}|\mathbb{1}_{\{|X_{i,n}|\geqslant n^{1/4}\}}) + \frac{1}{n^2}.n^{1/2}.n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(|X_{i,n}|\mathbb{1}_{\{|X_{i,n}|\geqslant n^{1/4}\}})+\frac{1}{\sqrt{n}}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{\{n^{1/4}\leqslant|X_i|\leqslant n\}})+\frac{1}{\sqrt{n}}\\&\leqslant\sup_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|\geqslant n^{1/4}\}})+\frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Puisque l'hypothèse (3.4) donne que la famille $\mathscr{X}$ est uniformément intégrable Théorème2.2.2 donc bornée dans L^1, ainsi par théorème de convergence Dominé on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}S_{n,n}-\mathbb{E}(S_{n,n})\right)^2\right]=0$$

Ensuite, par l'Inégalité de Tchebychev on a :

$\forall\epsilon>0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}|S_{n,n}-\mathbb{E}(S_{n,n})|\geqslant\epsilon\right)&\leqslant\frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}S_{n,n}-\mathbb{E}(S_{n,n})\right)^2\right]\\&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{n}[S_{n,n}-\mathbb{E}(S_{n,n})]\xrightarrow{\mathbb{P}}0\tag{3.6}$$

(2) On a $\mathbb{E}(X_i)=0,\quad\forall i\in\mathbb{N}$ (hypothèse), ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mathbb{E}(S_{n,n})&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i\mathbb{1}_{\{|X_i|\leqslant n\}})\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i-X_i\mathbb{1}_{\{|X_i|>n\}})\\&=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i\mathbb{1}_{\{|X_i|>n\}})\end{aligned}$$

Et comme $\mathscr{X}$ est uniformément intégrable et d'après théorème de convergence dominé on aura :

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(S_{n,n})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.\tag{3.7}$$

(3)

$$\mathbb{P}(S_n\neq S_{n,n})=\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n}|X_i|\geqslant n)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(|X_i|\geqslant n)$$

de plus par l'inégalité de Markov on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(|X_i|\geqslant n)&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(|X_i|)}{n}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{\mathbb{E}(|X_i|)}{n}\right)\end{aligned}$$

par l'inégalité de Jensen on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{\mathbb{E}(|X_i|)}{n}\right) \leqslant \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\varphi(|X_i|)]$$

et comme $\dfrac{t}{\varphi(t)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\varphi(|X_n|)] < \infty$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\varphi(|X_i|)] &\leqslant \frac{n}{\varphi(n)} \sup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\varphi(|X_i|)] \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Par conséquence :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}|S_n - S_{n,n}| \geqslant \epsilon\right) = 0. \tag{3.8}$$

On conclut, de (3.6) et (3.7) que :

$$\frac{1}{n} S_{n,n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

de plus, par (3.8) on obtient :

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

• Dans la suite, on va montrer que $S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0$, pour cela on va prouver d'abord que (3.4) et (3.5) impliquent :

$$(1)' \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{Var(X_{n,n})}{n^2} < \infty \qquad\qquad (2)' \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_{i,i}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$(3)' \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\{X_n \neq X_{n,n}\} < \infty$$

En effet :

$(1)'$

$$\begin{aligned}Var(X_{n,n}) &\leqslant \mathbb{E}(X_{n,n}^2) = \mathbb{E}(X_{n,n}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,n}|\geqslant n^{1/4}\}}) + \mathbb{E}(X_{n,n}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,n}|<n^{1/4}\}}) \\ &\leqslant \mathbb{E}(X_n^2 \mathbb{1}_{\{n^{1/4}\leqslant|X_n|\leqslant n\}}) + n^{1/2}.\end{aligned}$$

Puisque $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{3/2}} < \infty$ -série de Riemann- il suffit donc montrer que :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(X_n^2 \mathbb{1}_{\{n^{1/4}\leqslant|X_n|\leqslant n\}}) < \infty$$

Soit $z_n \in [n^{1/4}, n]$, tel que :

$$\frac{\varphi(z_n)}{z_n^2} \leqslant 2 \inf \left\{ \frac{\varphi(x)}{x^2}; \quad x \in [n^{1/4}, n] \right\}$$

Alors :

$$x^2 \leqslant 2\varphi(x) \frac{z_n^2}{\varphi(z_n)} \ , \qquad \text{pour } x \in [n^{1/4}, n] \ ;$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}(X_n^2 \mathbb{1}_{\{n^{1/4} \leqslant |X_n| \leqslant n\}}) \leqslant 2 \frac{z_n^2}{\varphi(z_n)} \mathbb{E}[\varphi(|X_n|)]$$

d'après (3.4), il existe $c > 0$ tel que :

$$2 \frac{z_n^2}{\varphi(z_n)} \mathbb{E}[\varphi(|X_n|)] \leqslant c \frac{z_n^2}{\varphi(z_n)}$$

Maintenant, on pose : $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{t}$ alors $\psi \uparrow \infty$;

D'ou :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2} \mathbb{E}(X_n^2 \mathbb{1}_{\{n^{1/4} \leqslant |X_n| \leqslant n\}}) &\leqslant \frac{c}{n^2} \frac{z_n^2}{\varphi(z_n)} = \frac{c z_n}{n^2 \psi(z_n)} \\
&\leqslant \frac{c}{n \psi(z_n)} \\
&\leqslant \frac{c}{n \psi(n^{1/4})}.
\end{aligned}$$

et comme $\sum_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{1}{n\psi(n)} < \infty$ par *(ii)* et $\psi \uparrow \infty$, on fait appelle au Lemme1.2.7 avec $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n^{1/4}$, et $a_n = A_n - A_{n-1} \geqslant \dfrac{1}{n^{3/4}}$, on obtient :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{A_n \psi(A_n)} < \infty$$

par conséquent :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n \psi(n^{1/4})} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{3/4} n^{1/4} \psi(n^{1/4})} \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n^{1/4} \psi(n^{1/4})} < \infty$$

Donc :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(X_n^2 \mathbb{1}_{\{n^{1/4} \leqslant |X_n| \leqslant n\}}) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{c}{n \psi(n^{1/4})} < \infty.$$

$(2)'$ Puisque la suite $\mathscr{X}$ est uniformément intégrable et $\mathbb{E}(X_i) = 0,\ \forall i \in \mathbb{N}$ alors

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(X_{i,i})| &\leqslant \mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|>i\}}) \\ &\underset{i\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

ce qui implique,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_{i,i}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$(3)'$ A l'aide de l'Inégalité de Markov on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_n \neq X_{n,n}\} = \mathbb{P}(|X_n| > n) &\leqslant \frac{\mathbb{E}(|X_n|)}{n} \\ &\leqslant \varphi\left[\frac{\mathbb{E}(|X_n|)}{n}\right] \end{aligned}$$

de plus par l'Inégalité de Jensen :

$$\varphi\left[\frac{\mathbb{E}(|X_n|)}{n}\right] \leqslant \frac{1}{\varphi(n)}\mathbb{E}[\varphi(|X_n|)]$$

en fin à l'aide de (3.4) et (3.5) on trouve :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}\{X_n \neq X_{n,n}\} < \infty$$

Pour conclure, on applique le Corollaire 1.2.1 aux variables aléatoires indépendantes deux à deux $(X_{n,n})$ tels que :

(a) Par hypothèse, la fonction φ croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x} = \infty$, alors :
Il existe $c > 0$ pour tout $x \geqslant c$ tel que $\varphi(x) \geqslant x$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}(|X_{n,n}|) &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|\leqslant n\}}) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{\{c\leqslant|X_i|\leqslant n\}} + |X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|\leqslant c\leqslant n\}}) \\ &\leqslant c\ + \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{\{c\leqslant|X_i|\leqslant n\}}) \\ &\leqslant c + \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}[\varphi(|X_{n,n}|)] \\ &\leqslant c + \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}[\varphi(|X_n|)] < \infty \end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{Var(X_{n,n})}{n^2} < \infty$

Donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{i,i}-\mathbb{E}[X_{i,i}]) \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0.$$

Ainsi par $(2)'$ on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{i,i} \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0$$

de plus, $(3)'$ implique que (X_n) , $(X_{n,n})$ soient équivalentes, alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{i} \xrightarrow{\mathbb{P}.ps} 0.$$

□

L'exemple suivant montre que la condition (3.5) du théorème précédent est nécessaire pour tenir le résultat de convergence presque sûrement, et on ne peut pas obtenir la convergence en Probabilité sous l'hypothèse (3.4) avec $\varphi(t) = t$.

Exemple 3.2.1. Soit $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires indépendants avec

$$\mathbb{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2\varphi(n)} \text{ et } \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\varphi(n)}\ ,\ (\varphi(n) \geqslant 1).$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k\in\mathscr{D}_x} k\mathbb{P}(X_n = k) = n.\frac{1}{2\varphi(n)} - n.\frac{1}{2\varphi(n)} + 0.(1-\frac{1}{\varphi(n)}) = 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(|X_n|)) &= \sum_{k\in\mathscr{D}_x}\varphi(|k|)\mathbb{P}(X_n = k)\\ &= \varphi(n).\frac{1}{2\varphi(n)} + \varphi(n).\frac{1}{2\varphi(n)} + \varphi(0).(1-\frac{1}{\varphi(n)})\\ &= 1.\end{aligned}$$

(a) Supposons que $\varphi(t) = t$, d'où l'hypothèse (3.4) est remplie,

Or

$$Var(X_n) = \sum_{k\in\mathscr{D}_x} k^2\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n^2}{\varphi(n)} = n.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i) = \frac{n+1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2.$$

Par conséquent, on ne peut pas obtenir la convergence en probabilité vers zéro de $n^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_i$, grâce au Théorème 1.2.1.

(b) Supposons que φ vérifiait les conditions suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\varphi(n)} = \infty \quad \text{et} \quad \varphi(n) \geqslant 1 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(|X_n| \geqslant n) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{2\varphi(n)} = \infty.$$

D'après Lemme 1.2.2, on conclut que LFGN pour $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ dans ce cas ne remplie pas.

Bibliographie

[1] Burkholder.D.L, *Martingale transforms.* Ann. Math. Statist 37 (1966) 1494-1504

[2] Chow. Y.S, *On the L_p convergence for $n^{-1/p}S_n$.* Ann. Math. Statist 42 (1971) 393-394.

[3] Chow.Y.S, Teicher. H, *Probability theory : Independence, Interchangeability, Martingales.* New York 1997

[4] Jean-François Delmas, *Introduction au calcul de probabilités et à la statistique*, 2005

[5] Etemadi.N, *On the laws of large numbers for nonnegative random variables*, J. of Multivariate analysis 13 (1983) 187-193

[6] Gut. A, *Probability : a graduate course.* Springer texts in statistics. USA 2005

[7] Jajte. R, *On the strong law of large numbers,* Ann. Proba 31 (2003) 409-412

[8] Corentin Kilque, *Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires Exemples et applications.* Mémoire, Université de Rennes1 2018.

[9] Landers. D, Rogge. L, *Laws of large numbers for pairwise independent uniformly integrable random variable,* Math. Nachr. 130 (1985) 189-192.

[10] Jean-François Le Gall, *Intégration, probabilités et processus aléatoires.* Paris(2006)

[11] Thierry Lévy, *Cours : probabilités approfonies (M1, UE 4M011).* (2017)

[12] Jean-yves Ouvrad, *Probabilités Tome2.* Cassini 2009

[13] Petrov.V.V, *Sums of independent random variables.* Springer-Verlag, Berlin 1975

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à deux notions importantes et liées, la convergence de séries de variables aléatoires et la notion d'intégrabilité uniforme.

On étudie principalement trois résultats. On commence par un résultat de Y.S. Chow sur des variables indépendantes identiquement distribuées uniformément intégrables qui assure une convergence dans L^r $0 < r < 2$. On passe ensuite au cas de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées pondérées par R. Jajte et on termine par un résultat sur des variables aléatoires deux à deux indépendantes obtenue par D. Landers et L. Rogge.

Abstract

In this master's thesis, we are interested in two important and related notions, the convergence of series of random variables and the notion of uniform integrability.

Three main results are studied. We start with a result of Y.S. Chow on independent, identically distributed uniformly integrable random variables, which ensures convergence in L^r $0 < r < 2$. Then we move to the case of independent, identically distributed random variables weighted by R. Jajte and we conclude with a result for pairwise independent, uniformly integrable random variables obtained by D. Landers and L. Rogge.