République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté de Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Équations aux dérivées partielles
présenté par

Chetti Nacer

Soutenu le : 27/ 09/ 2023

Quelques résultats d'existence pour un problème anisotrope non local

Soutenu devant le jury composé de :

M. S. E. Miri	Professeur	U. Tlemcen	Président
M. A. Bensedik	Maître de Conférences A	U. Tlemcen	Examinateur
M. A. Attar	Maître de Conférences A	U. Tlemcen	Examinateur
M. R. Bentifour	Maître de Conférences A	U. Tlemcen	Encadrant

Année Universitaire :2022-2023

Dédicace

A ma femme, pour son accompagnement et ses sacrifices durant la préparation de ce master...

A ma petite fille Sodfa...

A mon petit fils Malek...

A mes neveux... Nidal, Khadem, Youness, Ayoub...

Remerciements

Mes remerciements a tous les membres de l'équipe pédagogique du master

EDP (2021-2022/2022-2023)

Mes remerciements également aux chefs de département de mathématiques successivement :

Mr. M.Mebkhout
Mr. A.Allam
Mr. R.Bentifour

Mes respects et ma gratitude à mon directeur du mémoire Mr.Rachid Bentifour.

Je tiens à remercier également Mr S.E.Miri pour l'honneur d'avoir accepter de présider le jury.

Je tiens à remercier Mr A.Bensedik pour l'honneur d'avoir accepter d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Je tiens à remercier Mr A.Attar pour l'honneur d'avoir accepter d'examiner ce travail et faire partie du jury, ainsi pour son aide intensive durant la réalisation de ce travail.

En enfin, je tiens à remercier Meryem et Abdelhadi les deux jeunes doctorants qui m'ont aidé dans la rédaction de ce travail en Latex.

Notations

$\mathbb{R}^N$:	Espace euclidien de dimension N ($N \in \mathbb{N}$).
E' :	Dual topologique de E.
$\|E\|$:	Mesure de Lebesgue d'un ensemble E.
Ω :	Partie ouvert de $\mathbb{R}^N$.
$< \cdot, \cdot >$:	Crochet de dualité .
D^α :	La dérivée au sens faible d'ordre α.
∂^α :	La dérivée partielle d'ordre α.
$\hookrightarrow$:	Injection continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$:	Injection compacte.
q :	Conjugué de Hölder de p : $\begin{cases} q = \frac{p}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ q = \infty & \text{si } p = 1 \end{cases}$
∇u	Gardian de u
pp :	Presque par tout.
$L^{(p_i)}(\Omega)$	$= \prod_{i=1}^{N} L^{p_i}(\Omega)$.
$\bar{P}$	La moyenne harmonique des p_i.
p_i :	Un nombre réel supérieur ou égale à 1 pour tout $i = 1, ..., N$.
(p_i)	$= (p_1, p_2, ..., p_N)$ tel que $1 \leq p_1 \leq p_2 ... \leq p_N \leq +\infty$
p^*	$= \dfrac{Np}{N-p} \quad P < N$.
$\bar{p}*$	$= \dfrac{N\bar{p}}{N-\bar{p}}, \quad \bar{p} < N$
$\rho(p_i)$:	Permutation de (p_i).
$u^+(x)$:	$= \max(u(x)), 0)$.
$\rightharpoonup$:	Convergence faible.

Table Des Matières

Introduction

Dans sa forme classique, l'inégalité de Sobolev fournit une estimation de la norme L^{p*}, d'une fonction u régulière appartient à $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ à support compact dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en termes de norme L^p du gradient de u c'est à dire, si $1 \leq p < N$ alors :

$$|| u||_{L^{p*}(\Omega)} \leq k||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$$

avec :$\dfrac{1}{p*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$
où k constante dépend que de p et N.

Le but de ce mémoire est d'étudier un problème elliptique de type Kirchhoff dans le cas anisotrope où la fonction inconnue u du problème et ses différentes dérivées partielles $\partial_i u$ doivent appartenir à des espaces de Lebesgue différents $L^{p_i}(\Omega)$, pour $i = 1, \ldots, N$ c'est a dire :

$$u \in L^{p_i}(\Omega) \ \ et \ \ \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega) \ \ pour \ \ i = 1, ..., N.$$

Et l'inégalité de Sobolev dans ce cas est de la forme :

$$|| u||_{L^{\bar{p}*}(\Omega)} \leq k \sum_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)}$$

avec :
k : constante indépendante de u,
$\bar{p}$: la moyenne harmonique des p_i, tel que : $\dfrac{1}{\bar{p}*} = \dfrac{1}{\bar{p}} - \dfrac{1}{N}$,

cette inégalité s'appelle inégalité anisotrope de Sobolev, car les différents normes de L^{p_i} pour les dérivées, dans les différentes directions, sont employées dans l'estimation de $L^{\bar{p}^*}$

et le problème qu'on veut traiter est donné par :

$$(P_2) : \begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{N} \Big[(a + b\int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i} dx)\partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u)\Big] = \dfrac{f(x)}{u^{\gamma}} + g(x)u^{q-1} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec des conditions spécifiques sur f, g, q, u et a, b.

Description du mémoire

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est constitué de deux parties, la première est réservée à la présentation de préliminaires nécessaires pour la bonne compréhension du sujet, le lecteur trouvera des résultats plus ou moins connu concernant les espaces de Lebesgue et Sobolev usuel (isotrope) et quelques théorèmes utiles comme :
l'injection continue, l'injection compacte, lemme de Vitali, convergence dominée, point critique....
Et dans la deuxième partie on procède les définitions concernant les espaces $L^{(p_i)}(\Omega)$ *pour* $i = 1, ..., N$ et quelques lemmes utiles dans cet espace anisotrope par exemple :
l'inégalité de Sobolev anisotrope et cela comme un outil nécessaire pour traiter le problème principal indiqué précédemment.

Dans le deuxième chapitre on étudie un problème elliptique de type Kirchhoff mais isotrope comme une préparation à l'étude générale du problème principal (dans le cas anisotrope) , ce problème est de la forme :

$$(P_1) : \begin{cases} -\Big(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u = \dfrac{\lambda}{u^\gamma} + f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le dernier chapitre est dédié à prouver que le problème suivant :

$$(P_2) : \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \Big[(a + b\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} dx)\partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u)\Big] = \dfrac{f(x)}{u^\gamma} + g(x)u^{q-1} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\text{avec : } f \in L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*+\gamma-1}}(\Omega), \quad g \in L^{\bar{p}^*}(\Omega), \quad u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \;\; et \;\; a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

admet au moins deux solutions.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré à introduire les notions nécessaires et quelques outils d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans les différents chapitres de ce mémoire, et qui sont utiles pour l'étude des deux problèmes (P_1) et (P_2).

1.1 Rappels et quelques définitions

Dans tout ce qui suit, on considère Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, sa frontière $\partial\Omega$ et son adhérence $\overline{\Omega}$, la fonction $u = u(x_1, x_2, ..., x_N)$ définie dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Définition 1.1. *(L'espace $L^p(\Omega)$)*
L'espace $L^p(\Omega)$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \{u \text{ est musurable } / \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}$$

— *$L^p(\Omega)$ est un Banach.*

— *$L^p(\Omega)$ est réflexif, si $1 < p < +\infty$.*

— *$L^p(\Omega)$ est séparable, si $1 \leq p < +\infty$.*

Définition 1.2. *(L'espace des fonctions de tests)*
L'espace des fonctions de tests notés $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions :

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

indéfiniment différentiables (de classe $C^\infty(\Omega)$) et a support compact dans Ω.

Remarque 1.1.
. *$\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel.*

. *Si* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$: *supp* $\varphi = \overline{\{x \in \Omega,\ \varphi(x) \neq 0\}}$.

. $\mathcal{D}(\Omega) = C^{\infty}(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

Définition 1.3. *(Espace Séparable)*
Un espace de Banach E est séparable s'il existe un ensemble au plus dénombrable qui est dense dans E.

Définition 1.4. *(Espace Dual)*
Le dual topologique d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ est l'ensemble des formes linéaires continues de E, c'est à dire des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$, noté $E' = L(E, \mathbb{K})$.

$$\text{avec : } ||u||_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\|=1} |u(x)| = \sup_{\|x\|<1, x \in E} |u(x)| = \sup_{x \in E, \|x\| \neq 0} \tfrac{|u(x)|}{\|x\|}.$$

Proposition 1.1.
Soient E_1, E_2 deux espaces vectoriels, E_1', E_2' leurs espaces duals respectivement, alors :
1- $E_1 \subset E_2 \Longrightarrow E_2' \subset E_1'$.
2- $| < u, x >_{E',E} | \quad \leq \quad ||u||_{E'} ||x||_E$

Définition 1.5. *(Dérivée au Sens Faible)*
Soit u une fonction localement intégrable sur Ω, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et
$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.
On appelle dérivée au sens faible de u d'ordre α noté $\partial^\alpha u$:

$$< \partial^\alpha u, \varphi >= (-1)^\alpha < u, \partial^\alpha \varphi >,$$

$$= (-1)^\alpha \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi dx,\ \forall\ \varphi\ \in D(\Omega),$$

avec : $\partial^\alpha \varphi = \dfrac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .... \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Définition 1.6. *(Espace de Sobolev)*
Soit $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev noté $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}.$$

muni de la norme :

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|<m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty, \\ \\ \max\limits_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)} & p = +\infty. \end{cases}$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un Banach.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif, si $1 < p < \infty$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable, si $1 \leq p < +\infty$.

Remarque 1.2.

Dans le cas $p = 2$, l'espace de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ peut noté $H^m(\Omega)$.

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \quad \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| \leq m\}.$$

Proposition 1.2.

L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$< u, v >_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} < \partial^\alpha u, \partial^\alpha v >_{L^2(\Omega)}$$

et la norme

$$||u||_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1.3. *(Inégalité de Hölder)*

Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ alors $f.g \in L^1(\Omega)$, de plus on a :

$$||fg||_{L^1(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)} ||g||_{L^q(\Omega)}.$$

Si de plus $|\Omega| < \infty$ et $f \in L^q(\Omega)$ alors :

$$||f||_{L^p(\Omega)} \leq \; ||f||_{L^q(\Omega)} \; |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

Théorème 1.1. *(Inégalité de Hölder généralisé)[1]*

Soient $p_i \in [1, +\infty[$ des exposants avec $1 \leq i \leq n$ tel que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + ... + \dfrac{1}{p_n}$ alors pour toute fonction $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, nous avons $f = f_1 \times f_2 ... \times f_n \in L^p(\Omega)$ et l'inégalité de Hölder généralisée est donnée par :

$$||f||_{L^p(\Omega)} \leq \; ||f_1||_{L^{p_1}(\Omega)} ||f_2||_{L^{p_2}(\Omega)} ... ||f_n||_{L^{p_n}(\Omega)}$$

d'autre façon

$$\Big\|\prod_{k=1}^{n} f_k\Big\|_{L^p(\Omega)} \leq \prod_{k=1}^{n}\Big\|f_k\Big\|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

Théorème 1.2. *(Les injections continues)[4]*
Soit Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^N$ *de classe* C^1 *et* $1 \leq p < +\infty$ *on a :*
(i) Si $1 \leq p < N$*. Alors :*

$$W^{1,p}(\Omega) \underset{i.c}{\hookrightarrow} L^{p*}(\Omega) \quad avec \quad \frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

(ii) Si $p = N$*. Alors :*

$$W^{1,p}(\Omega) \underset{i.c}{\hookrightarrow} L^{q}(\Omega), \qquad \forall q \in [p, +\infty[$$

(iii) Si $p > N$*. Alors :*

$$W^{1,p}(\Omega) \underset{i.c}{\hookrightarrow} L^{\infty}(\Omega)$$

Définition 1.7. *(L'injection Compacte)[4]*
Soient X, Y *deux espace de Banach et* A *une application linéaire :*

$$A : X \longrightarrow Y$$

est dite compacte si pour toute suite $(u_n)_n \in X$ *bornée, il existe une sous suite* $(u_{\Phi(n)})_n$ *telle que :*

$$Au_{\Phi(n)} \quad converge\ dans\ \ Y$$

où $\quad \Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une application strictement croissante.*

Théorème 1.3. *(Théorème de Rellich-Kondrachov)*
Si Ω *est un ouvert borné régulier de classe* C^1*, alors de toute suite bornée de* $H^1(\Omega)$*, on peut extraire une sous suite convergente dans* $L^2(\Omega)$*(on dit que l'injection canonique de* $H^1(\Omega)$ *dans* $L^2(\Omega)$ *est compacte).*

Théorème 1.4. *(L'injection compacte)*

$$W^{1,p}(\Omega) \underset{injection}{\hookrightarrow}\underset{compacte}{\hookrightarrow} \begin{cases} L^q(\Omega) & \forall\ q \in [1, p^*[\quad p < N \\ \\ L^q(\Omega) & \forall\ q \in [1, +\infty[\quad p = N \\ \\ C(\bar{\Omega}) & p > N. \end{cases}$$

Théorème 1.5. *(L'inégalité de Sobolev)[4]*
Soit $1 \leq p < \infty$, alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \subset L^{p*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ et il existe une constante $C = C(P, N)$ telle que

$$||u||_{L^{p*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \leq \quad C||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \qquad \forall u \in \ W^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$$

où $p*$ est donné par :

$$\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

Théorème 1.6. *(L'inégalité de Poincaré)[4]*
Soit Ω un ouvert borné au moins dans une direction, alors il existe une constante positive $C = C(\Omega, p)$ telle que :

$$||u||_{L^p(\Omega)} \quad \leq \quad C||\nabla u||_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in \ W_0^{1,p}(\Omega)$$

pour $1 \leq p < \infty$.

1.2 Points Critiques

Soient X un espace de Banach, ω un ouvert de X et $J \in C^1(w, \mathbb{R})$.

Définition 1.8. *[9]*
On dit que $u \in \omega$ est un point critique de J si $J^{'}(u) = 0$, et on dit que $C \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de J, s'il existe un $u \in \omega$ tel que :

$$J(u) = C \quad et \quad J^{'}(u) = 0.$$

-Si u n'est pas un point critique on dit que u est un point régulier de J.
-On dit que J est faiblement semi continue inférieurement (f.s.c.i) si pour toute suite

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de* ω *converge faiblement vers* x *dans* ω*, et on a*

$$J(x) \leq \liminf J(x_n)$$

i.e

$$\lim_{n\to+\infty} J(x_n) \ \leq \ \liminf_{n\to+\infty} J(x_n).$$

Remarque 1.3.
Dans les espaces de Banach réflexifs, les fonctions s.c.i atteignent leurs minimums pourvu qu'elles soient coercives.

Proposition 1.4. *[9]*
Soient X *un Banach réflexif , et* $K \subset X$ *convexe fermé et* J *une fonctionnelle définie sur* K *et s.c.i et pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* K *telle que :* $J(x_n) \longrightarrow +\infty$ *quand* $||x_n|| \longrightarrow +\infty$.
Alors J *est bornée inférieurement et elle atteint son minimum.*
i.e :

$$\exists u \in K : J(u) = \inf_{v\in K} J(v) = \min_{v\in K} J(v)$$

Définition 1.9. *(la condition de Palais-Smale)[9]*
Soit E *un espace de Banach et* $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^1*. On dit que* J *vérifie la condition de Palais-Smale au niveau* C *si de toute suite* $(u_n)_n$ *de* E *telle que :*

$$J(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} C \quad dans \quad \mathbb{R}$$

$$J'(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad dans \quad E'$$

on peut extraire une sous suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente.*

Théorème 1.7. *(Théorème du Col)[9]*
Soit J *une fonctionnelle de classe* $C^1(E,\mathbb{R})$ *vérifiant la condition de Palais-Smale au niveau* C *tel que :*
. $J(0) = 0$.
. *Il existe* $\rho > 0$ *et* $\alpha > 0$ *tel que :*

$$J(u) \geq \alpha \quad pour\ tout \quad u \in E, \quad avec \quad ||u||_E = \rho$$

. Il existe $v \in E$, tel que :

$$J(v) < \alpha \quad \textit{pour} \quad ||v||_E > \rho$$

Alors J admet une valeur critique $C \geq \alpha$ où

$$C = \inf_{\gamma \ \in \Gamma,} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$$

et

$$\Gamma = \Big\{ \gamma \in C([0,1], E), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v \Big\}$$

Proposition 1.5.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un espace de Hilbert H, muni de la norme noté $||.||$, et qui converge faiblement vers $x \in H$. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans H et on a :

$$||x|| \leq \liminf_{n \to +\infty} ||x_n||$$

Définition 1.10. *(Suite Minimisante)*

On appelle suite minimisante pour le problème

$$(P) : \inf_{u \in K} J(u)$$

toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans K telle que

$$\lim_{n \to +\infty} J(u_n) = m = \inf_{u \in K} J(u)$$

1.3 Théorèmes Utiles

Définition 1.11. *(équi-intégrabilité)*

X ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$

On dit que la suite $\{f_n\}_n \subset L^p(X)$ est equi-intégrable si est seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall E \subset X \quad \textit{tel que} \quad |E| < \delta$$

On a :

$$\int_E |f_n(x)|^p dx \leq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

.

Théorème 1.8. *(Théorème de Vitali)*
X un ensemble de mesure finie pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^N$, soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(X)$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. *$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers f dans X.*
2. *$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est equi-intégrable.*

Alors : $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers f dans $L^1(X)$.

Théorème 1.9. *(Théorème de Convergence Dominée)*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, soient $p \in [1, +\infty[$ et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ qui converge presque partout vers une fonction mesurable f et on suppose qu'il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x)| \leq g(x) \quad p.p \ dans \ \Omega$$

Alors :

$$f \in L^p(\Omega) \ et \ on \ a \ :$$

$$\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{L^p(\Omega)} = 0$$

1.4 Espace de Sobolev anisotrope

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N(N \geq 2)$, et $p_1, p_2, ..., p_N; N$ nombres avec $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_N \leq +\infty$, on note :

. $(p_i) = (p_1, p_2, ..., p_N)$

. $\partial_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

. $\dfrac{1}{\bar{p}} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{p_i}$ $\quad \bar{p}$ la moyenne harmonique des p_i.

. $\bar{p}^* = \dfrac{N\bar{p}}{N - \bar{p}}$ $\quad (\bar{p} < N)$.

. $L^{p_i}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et $\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^{p_i} dx < \infty\}$.

L'espace $L^{p_i}(\Omega)$ muni de la norme :

$$||u||_{L^{p_i}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^{p_i} dx\Big)^{\frac{1}{p_i}}$$

et si :

$$p_i = +\infty : \quad ||u||_{L^\infty(\Omega)} = \sup \operatorname{ess} |u(x)|$$

Définition 1.12. *[3]*
Les espaces de Sobolev anisotropes sont définis comme suit

$$W^{1,(p_i)}(\Omega) = \Big\{u \in W^{1,1}(\Omega), \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega) \forall i = 1, ..., N\Big\}$$

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) = \{u \in W^{1,(P_i)}(\Omega) \quad tel\ que\ u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega\}.$$

muni de la norme :

$$||u||_{W_0^{1,(P_i)}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Pour plus de détails veillez consulter [7].

Remarque 1.4.

. $\bigcap\limits_{i=1}^{N} L^{p_i}(\Omega) = L^{p_N}(\Omega)$.

. $L^{p_i}(\Omega) = L^p(\Omega)$ *si* $p_i = p \quad \forall i = 1, ..., N.$

. $||u||_{L^{p_i}(\Omega)} = ||u||_\infty = \sup\limits_{x_i \in \Omega} \operatorname{ess} |u(x)|$ *si* $p_i = +\infty.$

.$||u||_{W^{1,(P_i)}(\Omega)} = \sum\limits_{i=1}^{N} \Big(||u||_{L^{p_i}(\Omega)} + ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)}\Big)$ *C'est une autre norme équivalente*

Lemme 1.1. *[12]*

$$W_0^{1,P_N}(\Omega) \subset W_0^{1,(P_i)}(\Omega) \subset W_0^{1,P_1}(\Omega)$$

Démonstration.
1- Pour montrer que $W_0^{1,(P_i)}(\Omega) \subset W_0^{1,P_1}(\Omega)$, Il faut montrer que :

$$||u||_{W_0^{1,P_1}(\Omega)} \leq C||u||_{W_0^{1,(P_i)}(\Omega)}.$$

tel que C est une constante strictement positive.

On a :

$$\begin{aligned}
||u||_{W_0^{1,P_1}(\Omega)} &= \Big(\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p_1} dx\Big)^{\frac{1}{p_1}} \\
&= \Big(\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^N |\partial_i u|^2\Big)^{\frac{p_1}{2}} dx\Big)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leq \bigg(\int_\Omega \Big(\big(\sum_{i=1}^N |\partial_i u|\big)^2\Big)^{\frac{p_1}{2}} dx\bigg)^{\frac{1}{p_1}}, \\
&\leq \Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^N |\partial_i u|^{p_1} dx\Big)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leq || \sum_{i=1}^N |\partial_i u| \, ||_{L^{p_1}(\Omega)}, \\
&\leq \sum_{i=1}^N ||\partial_i u \, ||_{L^{p_1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$||u||_{W_0^{1,p_1}(\Omega)} \leq \quad \sum_{i=1}^N \Big(\int_\Omega |\partial_i u|^{p_1} dx\Big)^{\frac{1}{p_1}}$$

et par l'inégalité de Hölder

$$||u||_{W_0^{1,p_1}(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^N \bigg[\bigg(\int_\Omega \Big(|\partial_i u|^{p_1} dx\Big)^{\frac{p_i}{p_1}}\bigg)^{\frac{p_1}{p_i}} \times \Big(\int_\Omega dx\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\bigg]^{\frac{1}{p_1}} \qquad \text{avec} \quad \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{p_1}{p_i}$$

$$\begin{aligned}
||u||_{W_0^{1,p_1}(\Omega)} &\leq C \sum_{i=1}^N \bigg[\Big(\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i}\Big)^{\frac{p_1}{p_i}}\bigg]^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leq C \sum_{i=1}^N \bigg[\Big(\int |\partial_i u|^{p_i} dx\Big)^{\frac{1}{p_i}}\bigg] \\
&\leq C' ||u||_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Donc :

$$||u||_{W_0^{1,p_1}(\Omega)} \leq C' ||u||_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}$$

i.e

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \subset W_0^{1,p_1}(\Omega)$$

2- Montrons que :

$$||u||_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} \leq C||u||_{W_0^{1,p_N}(\Omega)}$$

Soit $u \in W^{1,p_N}(\Omega)$, on a :

$$|\partial_i u|^{p_i} \leq |\partial_i u|^{p_N} + 1 \qquad \text{puisque} \quad p_i \leq p_N$$

donc

$$|\partial_i u|^{p_i} \leq |\nabla u|^{p_N} + 1$$

c.a.d

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} dx &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p_N} dx + \int_\Omega 1 dx \\ &\leq ||u||^{p_N}_{W_0^{1,p_N}(\Omega)} + |\Omega|\end{aligned}$$

donc

$$\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} dx \leq C$$

$$\Big(\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} dx\Big)^{\frac{1}{p_i}} \leq C^{\frac{1}{p_i}}$$

$$\sum_{i=1}^N \Big(\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} dx\Big)^{\frac{1}{p_i}} \leq k \quad \forall u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$$

d'où

$$W_0^{1,p_N}(\Omega) \subset W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$$

Conclusion

$$W_0^{1,p_N}(\Omega) \subset W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \subset W_0^{1,p_1}(\Omega)$$

□

Lemme 1.2. *[13] Il existe une constante c qui dépend de i telle que :*

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p_i}(\Omega) \;\; : \quad ||\varphi||_{L^{p_i}(\Omega)} \leq c_i ||\partial_i \phi||_{L^{p_i}(\Omega)} \qquad \textit{pour tout} \quad i = 1, ..., N.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in D(\Omega)$.

On peut écrire

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i \varphi(x_1, x_2, .., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_N) dt$$

Pour $x \in \operatorname{supp}(\varphi)$, $(\operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]^N = R_a, a \in \mathbb{R}^*)$.

On pose :

$$X_i(t) = (x_1, x_2, .., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_N)$$

Donc

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_i} |\partial_i \varphi(X_i(t))| dt$$

$$|\varphi(x)| \leq \int_{-a}^{x_i} |\partial_i \varphi(X_i(t))| dt$$

$$|\varphi(x)| \leq \int_{-a}^{a} |\partial_i \varphi(X_i(t))| dt$$

On applique l'inégalité de Hölder

$$|\varphi(x)| \leq \Big(\int_{-a}^{a} |\partial_i \varphi(X_i(t))|^{p_i} dt\Big)^{\frac{1}{p_i}} \Big(\int_{-a}^{a} 1 dt\Big)^{1-\frac{1}{p_i}}$$

$$\leq c_i \Big(\int_{-a}^{a} |\partial_i \varphi(X_i(t))|^{p_i} dt\Big)^{\frac{1}{p_i}}$$

Ce qui donne

$$|\varphi(x)|^{p_i} \leq c_i' \int_{a}^{a} |\partial_i \varphi(X_i(t))|^{p_i} dt \qquad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

On intègre sur R_a

$$\int_{R_\alpha} |\varphi(x)|^{p_i} dx \leq c_i' \int_{R_\alpha} |\partial_i \varphi(x)|^{p_i} dx$$

Ce qui implique

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^{p_i} dx \leq c_i' \int_{\Omega} |\partial_i \varphi(x)|^{p_i} dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

et par la densité de $D(\Omega)$ dans $W_0^{1,(P_i)}(\Omega)$, il résulte

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^{p_i} dx \leq c_i' \int_{\Omega} |\partial_i \varphi(x)|^{p_i} dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,(P_i)}(\Omega).$$

C.a.d

$$\forall \varphi \in W_0^{1,(P_i)}(\Omega), \quad ||\varphi||_{L^{p_i}(\Omega)} \leq C||\partial_i \varphi||_{L^{p_i}(\Omega)}$$

$\square$

Lemme 1.3. *(L'inégalité de Hölder)[13]*
Soit :

$$(p_i) = (p_1, p_2, .., p_N), \qquad 1 \leq p_i \leq +\infty, \qquad i = 1, ..., N$$
$$et$$
$$(q_i) = (q_1, q_2, .., q_N), \qquad 1 \leq q_i \leq +\infty, \qquad i = 1, ..., N.$$

Alors pour tout $u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$, $\quad v \in L^{q_i}(\mathbb{R}^N)$ *et* $(r_i) = (r_1, r_2, .., r_N)$ *avec*

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} \tag{1.2}$$

On a :

$$||uv||_{L^{(r_i)}(\mathbb{R}^N)} \leq ||u||_{L^{(p_i)}(\mathbb{R}^N)} ||v||_{L^{(q_i)}(\mathbb{R}^N)} \tag{1.3}$$

Démonstration.

1) le cas : p_i, q_i, sont finis

on applique l'inégalité de Hölder pour $u.v$ avec $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}$, on obtient

$$||uv||_{L^{r_1}(\mathbb{R}^N)} \leq ||u||_{L^{p_1}(\mathbb{R}^N)}||v||_{L^{q_1}(\mathbb{R}^N)}$$

et encore :

$$\left|\left| \; ||uv||_{L^{r_1}(x_1)} \; \right|\right|_{L^{r_2}(x_2)} \leq \left|\left| ||u||_{L^{p_1}(x_1)}||v||_{L^{q_1}(x_2)} \right|\right|_{L^{r_2}(x_2)}$$

on utilise l'inégalité de Hölder de nouveau, on obtient :

$$\left|\left| ||uv||_{L^{r_1}(x_1)} \right|\right|_{L^{r_2}(x_2)} \leq \left|\left| ||u||_{L^{p_1}(x_1)} \right|\right|_{L^{p_2}(x_2)} \quad . \quad \left|\left| ||v||_{L^{q_1}(x_1)} \right|\right|_{L^{q_2}(x_2)}$$

par récurrence on peut démontrer :

$$||uv||_{L^{(r_i)}(x_i)} \leq ||u||_{L^{(p_i)}(x_i)}||v||_{L^{(q_i)}(x_i)} \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{r_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}$$

2) le cas : un composant infini :

soit $p_{i_0} = +\infty$ et q_{i_0} finie

dans ce cas $r_{i_0} = q_{i_0}$

$$||uv||_{L^{r_{i_0}}(x_{i_0})} \leq ||u||_{L^{+\infty}(x_{i_0})}||v||_{L^{q_{i_0}}}(x_{i_0})$$

3) le cas $p_{i_0} = q_{i_0} = +\infty$

$$||uv||_{L^{\infty}(x_{i_0})} \leq ||u||_{L^{+\infty}(x_{i_0})}||v||_{L^{\infty}}(x_{i_0}).$$

Donc le lemme est prouvé □

Corollaire 1.1. *(L'inégalité de Hölder généralisée)[1]*

Soit

$$(r_i) = (r_1, r_2, .., r_N) \quad et \quad (p^i) = (p^i_1, p^i_2, .., p^i_N)$$

tel que

$$1 \leq r_i \leq +\infty \quad et \quad 1 \leq p^i_j \leq +\infty$$

et

$$\frac{1}{r_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p^i_j} \qquad j = 1, ..., N$$

Alors

$$\|\prod_{i=1}^{k} u_k\|_{L^{(r_i)}(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{k} \|u_k\|_{L^{(p_i)}(\Omega)}$$

Lemme 1.4. *(Inégalité de Minkowski)[13]*
Pour $r \geq 1$ et pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$:

$$\|\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_1\|_{L^r(dx_2)} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|u(x_1, x_2)\|_{L^r(dx_2)}dx_1$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $r \geq 1$ et comme $\operatorname{supp}(u) \subset [-a, a]^2, a > 0$:
on peut écrire :

$$I = \|\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_1\|_{L^r(dx_2)} = \|\int_{-a}^{a} u(x_1, x_2)dx_1\|_{L^r(dx_2)}$$

on utilise la formule d'intégration de Riemann

$$I = \|\lim_{n\to+\infty} \frac{2a}{n} \sum_{k=1}^{n} u(-a + k\frac{2a}{n}, x_2)\|_{L^r(dx_2)}$$

$$I \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{2a}{n} \sum_{k=1}^{n} \|u(-a + k\frac{2a}{n}, x_2)\|_{L^r(dx_2)}$$

$$I \leq \int_{-a}^{a} \|u(x_1, x_2)\|_{L^r(dx_2)}dx_1$$

$$I \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|u(x_1, x_2)\|_{L^r(dx_2)}dx_1$$

d'où

$$\|\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_1\|_{L^r(dx_2)} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|u(x_1, x_2)\|_{L^r(dx_2)}dx_1$$

□

Théorème 1.10. *(L'injection de Sobolev anisotrope)[13]*
Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ régulier. Alors
1. Si $\bar{p} < N$, on a :

$$W^{1,(p_i)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\bar{p}^*}(\Omega) \quad et \quad W^{1,(p_i)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [1, \bar{p}^*[$$

2. Si $\bar{p} = N$, on a :

$$W^{1,(p_i)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[$$

3. Si $\bar{p} > N$*, on a :*

$$W^{1,(p_i)} \hookrightarrow C^{0,B}(\bar{\Omega}) \quad avec \quad 0 < B = \frac{\alpha}{\frac{N}{p_1} + \alpha} \qquad et \quad \alpha = 1 - \frac{N}{\bar{p}}$$

Corollaire 1.2. *(L'injection Compacte)*

pour $1 < p_i < \dfrac{\bar{p}(N+1)}{N}$

$$W^{1,(p_i)}(\Omega) \ \hookrightarrow\hookrightarrow \ L^{p_i}(\Omega) \qquad \forall i = 1,..,N$$

1.5 Norme Mêlée

Soit u une fonction réelle mesurable sur $\mathbb{R}^N$ tel que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1,...,x_N)|^{p_i} dx_i < +\infty & 1 \leq p_i < +\infty \\ \\ \displaystyle\sup_{x_i \in \mathbb{R}} \mathrm{ess}\, |u(x_1,...,x_N)| < +\infty & p_i = +\infty \end{cases}$$

On peut calculer la norme de u par rapport à x_1 dans $L^{p_1}(\mathbb{R})$ puis par rapport à x_2 dans $L^{p_2}(\mathbb{R})$ ...jusqu'à la norme par rapport à x_N dans $L^{p_N}(\mathbb{R})$

On obtient un nombre réel qu'on le note :

$$||u||_{L^{(p_i)}(\mathbb{R}^N)} = \Big|\Big|\Big|....\Big|\Big|||u||_{L^{p_1}(x_1)}\Big|\Big|_{L^{p_2}(x_2)} ...\Big|\Big|_{L^{p_{N-1}}(x_N-1)}\Big|\Big|_{L^{p_N}(x_N)}$$

pour p_i finis alors

$$||u||_{L^{(p_i)}(\mathbb{R}^N)} = \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} ...\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1,...,x_2)^{p_1} dx_1\Big]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2\Big]^{\frac{p_3}{p_2}} ...dx_N\Big]^{\frac{1}{p_N}}$$

Notons par $L^{(p_i)} = L^{(p_i)}(\mathbb{R}^N)$, L'ensemble des fonctions mesurable définis de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$||u||_{L^{(p_i)}(\mathbb{R}^N)} < +\infty$$

L'espace $L^{(p_i)}$ est un espace de Banach muni de la norme $||.||_{L^{(p_i)}}$.

Le lecteur est invité à voir [1].

Exemple 1.1.

1. $(P_i) = (2,5,7), \quad N = 3,$

$$||u||_{(2,5,7)} = \Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x_1,x_2,x_3|^2 dx_1\Big]^{\frac{5}{2}}dx_2\Big]^{\frac{7}{5}}dx_3\Big]^{\frac{1}{7}}$$

2. $(p_i) = (p_1, p_2, +\infty).$

$$||u||_{(p_i)} = \sup_{x_3\in\mathbb{R}}\text{ess}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x_1,x_2,x_3)|^{p_1}dx_1\Big]^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\Big]^{\frac{1}{p_2}}$$

La définition de $||u||$ exige des normes successives L^{p_i} d'être calculées dans l'ordre de l'aspect des variables dans la forme de la fonction u.
Mais cet ordre peut être changé en permutant l'ordre des intégrales et les réels associées.
Soit ρ une permutation de $\{1,2,...,n\}$

$$\rho x = (x_{\rho(1)}, x_{\rho(2)}, .., x_{\rho(n)})$$

$$\rho(p_i) = (p_{\rho(1)}, p_{\rho(2)}, .., p_{\rho(n)})$$

et ρu définie par :

$$\rho(\rho u) = u(x) \quad i.e \ \ \rho u(x) = u(\rho^{-1}x)$$

$||\rho u||_{\rho(p_i)}$ s'appelle une norme mêlées de la fonction u.

Exemple 1.2. $N = 3$ *soit*

$$\rho(1) = 2, \quad \rho(2) = 1, \quad \rho(3) = 3$$

$$\rho u(x_1,x_2,x_3) = u(x_2,x_1,x_3)$$

$$\rho(\rho u) = u(x_1,x_2,x_3)$$

$$\rho(u(x)) = u(\rho^{-1}x) = u(x_1,x_2,x_3)$$

Exemple 1.3. $(p_i) = (p_1, p_2),\ N = 2$

$$||u||_{(L^{(p_i)})} = \Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(|u(x_1,x_2)|^{p_1}dx_1\Big]^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\Big]^{\frac{1}{p_2}}.$$

$$||u||_{(L^{(\rho p_i)})} = \Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(|u(x_1,x_2)|^{p_2}dx_2\Big]^{\frac{p_1}{p_2}}dx_1\Big]^{\frac{1}{p_1}}.$$

Remarque 1.5.

$||u||_{L^{(p_i)}}$ *et* $||u||_{L^{\rho(p_i)}}$ *contient les même variables, seulement l'ordre de l'évaluation qui se change*

Lemme 1.5. *[1]*

$$\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{p_1}dx_1\Big]^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\Big]^{\frac{1}{p_2}} \le \Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{p_2}dx_2\Big]^{\frac{p_1}{p_2}}dx_1\Big]^{\frac{1}{p_1}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} I &= \Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{p_1}dx_1\Big]^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\Big]^{\frac{1}{p_2}} \\ &= \Big(\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{p_1}dx_1\Big]^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\Big]^{\frac{p_1}{p_2}}\Big)^{\frac{1}{p_1}} \\ &= ||\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{p_1}dx_1||^{\frac{1}{p_1}}_{L^{\frac{p_2}{p_1}}(x_2)} \end{aligned}$$

par l'inégalité de Minkowski

$$\Big\|\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{p_1}dx_1\Big\|^{\frac{1}{p_1}}_{L^{\frac{p_2}{p_1}}(x_2)} \le \Big(\int_{-\infty}^{+\infty}||\ |u|^{p_1}\ ||_{L^{\frac{p_2}{p_1}}(x_2)}dx_1\Big)^{\frac{1}{p_1}}$$

Par conséquent

$$I \le \Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\big(|u|^{p_1}\big)^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\Big]^{\frac{p_1}{p_2}}dx_1\Big]^{\frac{1}{p_1}}.$$

donc

$$I \le \Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{p_2}dx_2\Big]^{\frac{p_1}{p_2}}dx_1\Big]^{\frac{1}{p_1}}.$$

Si p_1 fini et $p_2 = +\infty$, on écrivant :

$$\sup_{x_2}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x_1,x_2)|^{p_1}dx_1\Big)^{\frac{1}{p_1}} \le \Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|\sup_{x_2}u(x_1,x_2)|^{p_1}dx_1\Big)^{\frac{1}{p_1}}$$

Si $p_1 = p_2 = +\infty$.

$$\sup_{x_2}\Big(\sup_{x_1}|u(x_1,x_2)|\Big) \le \sup_{x_1}\Big(\sup_{x_2}u(x_1,x_2)\Big)$$

□

Remarque 1.6.
Si ρ_* permutation croissante et ρ^* permutation décroissante, Alors :

$$||\rho_* u||_{L^{\rho_*(p_i)}} \le ||u||_{L^{(p_i)}} \le ||\rho^* u||_{L^{\rho_*(p_i)}} \tag{1.4}$$

1.6 Inégalité de Sobolev anisotrope

Soit $u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$ et $\partial_i u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $i = 1, 2, ..., N$, l'inégalité de la forme

$$||u||_{L^{\bar{p}^*}} \leq k \sum_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}}, \quad k \text{ constante}, \tag{1.5}$$

s'appelle inégalité de Sobolev anisotrope car les différentes normes de L^{p_i} des dérivées dans différentes directions sont employées pour estimer la norme de u dans $L^{\bar{p}^*}(\Omega)$.

Lemme 1.6. *[1] S'il existe une constante k telle que pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a*

$$||u||_{L^q} \leq k \sum_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)} \quad \textit{alors} \quad q = \bar{p}^*.$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que :

$$||u||_{L^q} \leq k \sum_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)},$$

soit

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \text{ tel que } 0 < \lambda_i < +\infty, \ i = 1, ..., N.$$

En introduisant la fonction u_λ (la dilatation anisotrope) définie comme suit :

$$u_\lambda(x_1, x_2, ..., x_N) = u(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_N x_N) \ \ \forall (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

On a

$$||u_\lambda||_{L^q}^q = \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_N x_N)|^q dx,$$

on pose

$$y_i = \lambda_i x_i, \quad \forall i = 1, ..., N,$$

c à d

$$y = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_N x_N),$$

alors

$$dy = (\lambda_1 dx_1, \lambda_2 dx_2, ..., \lambda_N dx_N),$$

$$||u_\lambda||_{L^q}^q = \int_{\mathbb{R}^N} |u(y_1, y_2, ..., y_N)|^q dx,$$

donc

$$||u_\lambda||_{L^q}^q = \int_{\mathbb{R}^N} |u(y_1, y_2, ..., y_N)|^q (\lambda_1.\lambda_2....\lambda_N)^{-1} dy,$$

d'où

$$||u_\lambda||_{L^q}^q = (\lambda_1.\lambda_2...\lambda_N)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y_1, y_2, ..., y_N)|^q dy,$$

c.a.d

$$||u_\lambda||_{L^q} = (\lambda_1.\lambda_2...\lambda_N)^{\frac{-1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(y_1, y_2, ..., y_N)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}},$$

donc

$$||u_\lambda||_{L^q} = (\lambda_1.\lambda_2...\lambda_N)^{\frac{-1}{q}} ||u||_q, \tag{1.6}$$

et d'autre part

$$||\partial_i u_\lambda||_{L^{p_i}}^{p_i} = \lambda_i^{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_N x_N)|^{p_i} dx,$$

$y_1 = \lambda_1 x_1, \qquad y_2 = \lambda_2 x_2,\ ...,\ y_N = \lambda_N x_N.$

$$||\partial_i u_\lambda||_{L^{p_i}}^{p_i} = \lambda_i^{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u(y_1, y_2, ..., y_N)|^{p_i} dx,$$

$$||\partial_i u_\lambda||_{L^{p_i}}^{p_i} = \lambda_i^{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u(y_1, y_2, ..., y_n)|^{p_i} (\lambda_1.\lambda_2...\lambda_N)^{-1} dy,$$

$$||\partial_i u_\lambda||_{L^{p_i}}^{p_i} = \Big(\lambda_1.\lambda_2...\lambda_n)^{-1} \lambda_i^{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u|^{p_i} dy,$$

$$||\partial_i u_\lambda||_{L^{p_i}}^{p_i} = (\lambda_1.\lambda_2...\lambda_n)^{-1} \lambda_i^{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u|^{p_i} dy.$$

$$||\partial_i u_\lambda||_{L^{p_i}} = (\lambda_1.\lambda_2...\lambda_N)^{\frac{-1}{p_i}} \lambda_i ||\partial_i u||_{L^{p_i}}. \tag{1.7}$$

On peut choisir λ telle que : $\lambda_i(\lambda_1, ..., \lambda_N)^{\frac{-1}{p_i}} = t^{-1}$.

On a :

$$\begin{gathered}
\lambda_1(\lambda_1....\lambda_N)^{\frac{-1}{p_1}} = t^{-1}. \\
\lambda_2(\lambda_1....\lambda_N)^{\frac{-1}{p_2}} = t^{-1}. \\
. \\
. \\
. \\
. \\
\lambda_N(\lambda_1....\lambda_N)^{\frac{-1}{p_N}} = t^{-1}.
\end{gathered}$$

On fait le produit membre à membre de (1 à N) :

$$\prod_{i=1}^{N}\lambda_i(\lambda_1.\lambda_2...\lambda_N)^{\frac{-1}{p_i}} = (\lambda_1...\lambda_N)(\lambda_1...\lambda_N)^{-\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}} = t^{-N},$$

d'où

$$(\lambda_1...\lambda_N)^{1-\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}} = t^{-N},$$

$$\lambda_1\times...\times\lambda_N = t^{\frac{-N}{1-\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}}},$$

et on a d'autre part :

$$\lambda_i = t^{-1}(\lambda_1...\lambda_N)^{\frac{1}{p_i}},$$

donc

$$\lambda_i = t^{-1}\Big(t^{\frac{N}{p_i\left(\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}-1\right)}}\Big),$$

Soit u_λ qui vérifie (1.5) et tenant compte (1.6), (1.7).

$$k\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}||\partial_i u||_{L^{p_i}}}{||u||_{L^q}} = \sum_{i=1}^{N}k\frac{||\partial_i u_\lambda||}{||u_\lambda||_q}\times\frac{\lambda_i^{-1}(\lambda_1...\lambda_N)^{\frac{1}{p_i}}}{(\lambda_1...\lambda_N)^{\frac{1}{q}}}$$

donc

$$k\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}||\partial_i u||_{L^{p_i}}}{||u||_{L^q}} \geq \frac{(\lambda_1...\lambda_N)^{-\frac{1}{q}}}{\lambda_i(\lambda_1...\lambda_N)^{-\frac{1}{p_i}}}$$

car

$$k\frac{||\partial_i u_\lambda||^{L^{p_i}}}{||u_\lambda||_q} > 1$$

ce qui implique

$$k\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}||\partial_i u||_{L^{p_i}}}{||u||_{L^q}} \geq \frac{t^{\frac{-1}{q}\left(\frac{N}{\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}-1}\right)}}{t^{-1}}$$

$$k\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}||\partial_i u||_{L^{p_i}}}{||u||_{L^q}} \geq t^{\frac{-N}{q\left(\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}-1\right)}+1} \qquad \forall t>0$$

d'où

$$\frac{-N}{q\Big(\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}-1\Big)}+1=0$$

et alors

$$N = q(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} - 1)$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{N}(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} - 1)$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} - \frac{1}{N}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N}$$

donc

$$q = \bar{p*}$$

□

Théorème 1.11. *[1] Si*

$$\bar{p} < N \quad avec \quad \frac{1}{\bar{p}^*} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N}$$

Alors il existe une constante positive k telle que l'inégalité de Sobolev anisotrope :

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq k \sum_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}} \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad avec \;\; q = \bar{p}^*.$$

Si $\bar{p} \geq N$ l'inégalité est aussi vraie pour tout $q \geq 1$ et k dépend de q et du supp(u).

Démonstration.

(1) Le cas : $\bar{p} < N$:

soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $s_i \geq 1$ pour $i = 1, ..., N$, comme la fonction u à support compact dans $\mathbb{R}^N$.

On peut écrire :

$$|u(x_1, x_2, .., x_N)|^{s_i} = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i |u(x_1, x_2, ...x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_N)|^{s_i} dt,$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_i |u(x_1, x_2, ...x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_N)|^{s_i} dt,$$

par conséquent :

$$\sup_{x_i \in \mathbb{R}} |u(x_1, x_2, ..., x_N)|^{s_i} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_i |u(x_1, x_2, ..., x_N)|^{s_i} dx_i,$$

en intégrant cette inégalité par rapport aux $(n-1)$ composantes $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N$, on obtient :

$$\left[\int_N \left[........ \int_{i+1} \sup_{x_i} \int_{i-1} .... \int_1 |u|^{s_1} dx_1\right].....\right] = ||u^{s_i}||_{L^{(1,1,...,+\infty,...,1)}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})},$$

donc :

$$|| \, |u|^{s_i}||_{L^{(1,1,...,+\infty,...,1)}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \leq ||\rho_i |u|^{s_i}||_{L^{(+\infty,1,1,....,1)}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \leq \quad ||\partial_i |u|^{s_i}||_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \tag{1.8}$$

où ρ_i une permutation définie par :

$$\rho_i(1) = i, \quad \rho_i(i) = 1, \text{ et } \quad \rho_i(j) = j \qquad \forall j \neq 1, i.$$

Posons :

$$(v_i) = (1, 1, ..., \underset{(i)}{+\infty}, 1, ..., 1)$$

$$= \Big(v_1^i = 1, v_2^i = 1, ..., v_i^i = +\infty, v_{i+1}^i = 1, ..., v_N^i = 1\Big)$$

C.à.d la composante d'ordre i du vecteur (v_i) égale à ∞ et les autres composantes prennent la valeur 1.
Revenons à (1.8) on peut l'écrire comme suit :

$$|| \, |u|^{s_i}||_{L^{(v_i)}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \leq \; ||\rho_i |u|^{s_i}||_{L^{\rho_i(v_i)}(\mathbb{R}^N)} \leq \quad ||\partial_i |u|^{s_i}||_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

car ρ_i est la permutation décroissante, donc :

$$||\rho_i |u|^{s_i}||_{L^{\rho_i(v_i)}(\mathbb{R}^N)} \leq ||\partial_i |u|^{s_i}||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \tag{1.9}$$

d'autre part

$$||\partial_i |u|^{s_i}||_{L^1(\mathbb{R}^N)} = s_i || |u|^{s_i - 1} \partial_i u||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \tag{1.10}$$

On applique Hölder à (1.10)

$$|| \, |u|^{s_i-1} \partial_i u||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \left(\int_\Omega (|u|^{s_i-1})^{\frac{p_i}{p_i-1}}\right)^{1-\frac{1}{p_i}} \times \left(\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}$$

$$\leq ||u^{s_i-1}||_{L^{p'_i}(\mathbb{R}^N)} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\mathbb{R}^N)}$$

On sait que

$$||u^{s_i-1}||_{L^{p'_i}} = ||u||^{s_i-1}_{L^{(s_i-1)p'_i}}$$

car en général

$$||u||^{\alpha}_{L^{\alpha\beta}} = ||u^{\alpha}||_{L^{\beta}} \tag{1.11}$$

donc

$$|||u|^{s_i}||_{L^{(v_i)}(\mathbb{R}^N)} \leq k||u||^{s_i-1}_{L^{(s_i-1)p'}(\mathbb{R}^N)}||\partial_i u||_{L^{p_i}(\mathbb{R}^N)} \tag{1.12}$$

avec

$$\begin{cases} p'_i = \dfrac{p_i}{p_i-1} & \text{si} \quad p_i \neq 1 \\ p'_i = +\infty & \text{si} \quad p_i = 1 \end{cases}$$

soit

$$s = \sum_{i=1}^{N} s_i \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \sum_{k=i,k\neq 1}^{N} \frac{1}{v_k^i} = N-1$$

car :

$$v_k^i = 1 \quad \text{pour} \quad k \neq i$$

d'où

$$\sum_{k=i,k\neq 1}^{N} \frac{1}{v_k^i} = N-1$$

et par suite

$$r = \frac{1}{N-1}$$

c.à.d

$$||.||_{L^{(r)}} = ||.||_{\frac{1}{N-1}} \quad \text{avec} \quad (r) = (r, r, ..., r)$$

En utilisant (1.11) pour écrire $||u||_{L^{\frac{s}{N-1}}(\mathbb{R}^N)}$

$$\begin{aligned} ||u||^{s}_{L^{\frac{s}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} &= ||\,|u|^{s}||_{L^{\frac{1}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \\ &= ||u^{s_1+s_2+....+s_N}||_{L^{(r)}(\mathbb{R}^N)} \\ &= \left|\left|\prod_{l=1}^{N} ||u||^{s_i}\right|\right|_{L^{(r)}(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de holder généralisée , on obtient :

$$||u||^{s}_{L^{\frac{s}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} ||\,|u|^{s_i}||_{L^{(v_i)}(\mathbb{R}^N)} \tag{1.13}$$

on utilise (1.12)

$$||u||^s_{L^{\frac{s}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq k^N \prod_{i=1}^{N} ||u||^{S_i-1}_{L^{(s_i-1)p'_i}(\mathbb{R}^N)} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\mathbb{R}^N)} \tag{1.14}$$

On choisit s de telle sorte que

$$s = \frac{N(N-1)}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} - 1} \quad \text{et} \quad s_i = \frac{N(p_i - 1)}{(\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} - 1)p_i} + 1$$

ce choix est possible car la condition $\bar{p} < N$ puisque

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} > 1$$

car

$$\frac{N}{\bar{p}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} > 1 \qquad \text{sachant que} \quad p_i \geq 1 \quad \forall i = 1, ..., N$$

Si on pose :

$$q = \frac{s}{N-1}$$

calculons $(s_i - 1)p'_i$:

$$\begin{aligned}
(s_i - 1)p'_i \quad &= (s_i - 1)\frac{p_i}{p_i - 1} \\
&= \frac{N(p_i - 1)}{(\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} - 1)p_i} . \frac{p_i}{p_i - 1} \\
&= \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} - 1} \\
&= q
\end{aligned}$$

de (1.14) on peut écrire

$$||u||^s_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq k^N \prod_{i=1}^{N} ||u||^{s_i-1}_{L^q(\mathbb{R}^N)} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\mathbb{R}^N)}$$

$$\leq k^N ||u||^{s-N}_{L^q} \prod_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\mathbb{R}^N)}$$

car

$$\prod_{i=1}^{N} ||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{s_i-1} = ||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{s-N}$$

donc

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{s} \leq k^N ||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{s} ||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{-N} \prod_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\mathbb{R}^N)}$$

d'où

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{N} \leq k^N \prod_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\mathbb{R}^N)}$$

i.e

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq k \Big[\prod_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\mathbb{R}^N)} \Big]^{\frac{1}{N}} \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

On sait que

$$\prod_{i=1}^{N} a_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{N} a_i \Big)^N \qquad \forall a_i > 0$$

c.à.d

$$\Big(\prod_{i=1}^{N} a_i \Big)^{\frac{1}{N}} \leq \sum_{i=1}^{N} a_i$$

donc

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq k \sum_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

vérifiant maintenant que : $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{\bar{p}} - \dfrac{1}{N}$

on a :

$$q = \frac{s}{N-1}$$

$$= \frac{N}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} - 1}$$

puisque $s = \dfrac{N(N-1)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i - 1}}$, alors

$$q = \frac{1}{\displaystyle\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} - \frac{1}{N}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\bar{p}} - \dfrac{1}{N}}$$

donc

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N} = \frac{1}{\bar{p}^*}$$

finalement on obtient l'inégalité anisotrope de Sobolev

pour le cas $\bar{p} \geq N$ et par méthode presque similaire à celle du cas précédent on obtient

$$||u||_q \leq k\Big(\prod_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}}\Big)^{\frac{1}{N}} \qquad \forall q \in [1, +\infty[$$

$\square$

Corollaire 1.3. *[12]*
Soit Ω *un ouvert borné régulier de* $\mathbb{R}^N$*,* u *est une fonction de* $E = \bigcap_{i=1}^{N} W_0^{1,p_i}(\Omega)$*.*
alors

$$||u||_{L^{\bar{p}^*(\Omega)}} \leq k\Big(\prod_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{N}} \qquad \forall u \in E \tag{1.15}$$

avec

$$\frac{1}{\bar{P}^*} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N} \qquad \textit{avec} \quad \bar{P} < N$$

Si $\bar{p} \geq N$ *: l'inégalité* (1.15) *est vraie pour tout* $\bar{p}^* \in [1, +\infty[$ *et la constante* k *dépend de* $|\Omega|$*.*

Chapitre 2

Étude d'un problème de type Kirchhoff

Dans ce chapitre nous allons voir l'étude d'un problème elliptique non-locale isotrope de type Kirchhoff de la forme

$$(P_1)\begin{cases} -M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u = f(x,u) & \text{dans } \ \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \ \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière $\partial\Omega$, f fonction qui sera spécifiée ultérieurement et M une application sur $\mathbb{R}^+$.
Ce problème est dit non local en raison de la présence du terme $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ qui indique que l'équation n'est plus une identité ponctuelle mais non locale, comme il est appelé dans [2].
Ce genre de problème est l'un des sujets de grande importance de l'analyse variationnelle et qui est liée en physique par les études des vibrations et les déformations des plaques ou des cordes tendues.

2.1 Le problème de type Kirchhoff avec un terme singulier

Considérons Le problème singulier de type Kirchhoff :

$$(2.1): \begin{cases} -\Big(1+b\displaystyle\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx\Big)\Delta u = \dfrac{\lambda}{u^{\gamma}} + f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ \\ u>0 & \text{dans } \Omega \\ \\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda > 0$, $0 < \gamma < 1$ et $f:\ \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\ \to \mathbb{R}^+$ continue satisfait les hypothèses suivantes :

(f_1) : $f(x,t) \equiv 0$ pour tout $t \leq 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(x,t)}{t} = 0$ uniformément pour tout $x \in \Omega$

(f_2) : Il existe $l > \lambda_1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(x,t)}{t} = l$ avec λ_1 est la première valeur propre pour l'opérateur $(-\Delta)$ de Dirichlet comme étant la solution ϕ_1 du problème :

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1 &= \lambda_1\phi_1 & \text{dans} & \Omega, \\ \phi_1 &= 0 & \text{sur} & \partial\Omega, \\ \phi_1 &> 0 & \text{dans} & \Omega. \end{cases}$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.1. *[10] Supposons* $0 < \gamma < 1$*,* $b > 0$ *et* $f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ *continues satisfait* (f_1) *et* (f_2)*, alors il existe* $A_0 > 0$ *indépendant de* b *avec* $0 < \lambda < A_0$ *tel que :*
1. Le problème $(2,1)$ *admet au moins une solution positive*
2. de plus si $0 < b < b_*$ *le problème* $(2,1)$ *admet au moins deux solutions positives (*b_* *: une constante)*

Démonstration. Soit $H_0^1(\Omega)$ l'espace fonctionnel muni de la norme :

$$\| u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega}|\nabla u|^2dx$$

et on note par :

$$\overline{B_r} = \{ \ u \in \ H_0^1(\Omega) : \| \ u\| \ \leq r\}$$

$$\partial B_r = \{ \ u \in \ H_0^1(\Omega) : \| \ u\| \ = r\}$$

et la fonctionnelle $I_{b,0}$ définie par :

$$I_{b,0} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$I_{b,0}(u) = \frac{1}{2}||u||^2 + \frac{b}{4}||u||^4 - \frac{\lambda}{1-\gamma}\int_\Omega |u^+|^{1-\gamma}dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx$$

telle que :

$$F(x,t) = \int_0^t \ f(x,s)ds$$

$$u^+ = \max\{ \ u, 0\}$$

Il est bien connu que le terme singulier $\frac{\lambda}{u^\gamma}$ conduit à la non-différentiabilité de $I_{b,0}$ dans $H_0^1(\Omega)$ et par conséquent on peut pas utiliser la théorie des points critiques.
On considère dans ce cas le problème perturbé :

$$(2.2) : \begin{cases} -(1+b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta \ u = \dfrac{\lambda}{(u+\alpha)^\gamma} + f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Avec $\alpha > 0$
La fonctionnelle d'énergie associe au problème (2,2) est donnée par :

$$I_{b,\alpha} = \frac{1}{2}\|u\|^2 \ + \frac{b}{4}\|u\|^4 \ - \frac{\lambda}{1-\gamma}\int_\Omega [(u^+ + \alpha)^{1-\gamma} - \alpha^{1-\gamma}]dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx$$

□

Lemme 2.1. *[10]*
pour une donnée $0 < \alpha < 1$, supposons (f_1) et (f_2) sont vérifiées, alors $I_{b,\alpha}$ satisfait les conditions de Palais-smale.

Démonstration. Pour $c \in \mathbb{R}$, soit la suite $\{u_n\} \subset \ H_0^1(\Omega)$ suite de palais -smale pour $I_{b,\alpha}$ telle que :

$$I_{b,\alpha}(u_n) \to c, qd \ n \to +\infty$$

$$I'_{b,\alpha}(u_n) \to 0, qd\ n \to +\infty$$

On a

$$< I'_{b,\alpha}, u_n >= \|u_n\|^2 \ + \|u_n\|^4 \ - \lambda \int_\Omega [(u_n+\alpha)^{1-\gamma} dx - \int_\Omega f(x,u_n)dx$$

Quand $n \to +\infty$, $J'(u_n) \to 0$ alors

$$\|u_n\|^2 \ + b\|u_n\|^4 \ \leq \lambda \int_\Omega [(u_n+\alpha)^{1-\gamma} dx + \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx + o(1)\|u_n\|$$

et d'après les conditions (f_1), (f_2) :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = 0 \quad f(x,t) \leq \varepsilon t \quad \text{au} \quad \bar{V}(0)$$

et

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{f(x,t)}{t} = 0 \quad f(x,t) \leq lt \text{ au } \quad \bar{V}(+\infty)$$

donc on peut écrire

$$f(x,t) < \varepsilon t + ct^{p-1} \quad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$$

on applique Hölder et Poincaré

$$\int_\Omega |u_n|^{1-\gamma} dx \leq \left(\int_\Omega \left(|u_n|^{1-\gamma}\right)^{\frac{2}{1-\gamma}} \right)^{\frac{1-\gamma}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c||u_n||^{1-\gamma}_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq c_2||u_n||^{1-\gamma}_{H^1_0(\Omega)}$$

et

$$\int_\Omega f_n u_n dx < \int_\Omega (\varepsilon u_n + c_1 u_n^{p-1}) u_n dx$$

$$< c_2||u_n||^2 + c_3||u_n||^p$$

ce qui donne :

$$||u_n||^2 + b||u_n||^4 \leq c_2||u_n||^{1-\gamma} + c_3||u_n||^2 + c_4||u_n||^p \qquad c_2, c_3, c_4 > 0 \qquad (2.1)$$

d'où

$$b \leq c_2||u_n||^{-3-\gamma} + (c_3 - 1)||u_n||^{-2} + c_4||u_n||^{p-4}$$

Si on suppose que $\{u_n\}_n$ n'est pas bornée C.à.d

$$\lim ||u_n|| \to +\infty \quad \text{quand } n \to +\infty$$

on obtient

$$b \leq 0 \quad \text{pour} \quad 2 \leq p \leq 4$$

et cela contredit $b > 0$.

Donc $\{u_n\}_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et puisque $H_0^1(\Omega)$ Banach réflexif, alors il existe $\{u_{n_k}\}_n$ sous suite de $\{u_n\}_n$ telle que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u^* \quad \text{(convergence faible)} \qquad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega)$$

d'autre part, on applique le théorème de convergence dominée i.e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{u_n}{(u_n+\alpha)^\gamma} dx = \int_\Omega \frac{u*}{(u_*+\alpha)^\gamma} dx \quad \text{car} \quad \frac{u_n}{(u_n+\alpha)^\gamma} < 1$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega F(x,u_n)dx = \int_\Omega F(x,u_*^+)dx \quad \text{car} \quad F(x,u_n) = \int_0^{u_n} f(x,s)ds$$

On pose :

$$W_n = u_n - u_*$$

alors :

$$||W_n|| \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

sinon, il existe une sous suite noté encore $(W_n)_n$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} ||W_n|| = L > 0$$

A partir de la formulation variationnelle, il résulte que :

$$(1 + b||u_n||^2)||u_n||^2 = \lambda \int_\Omega \frac{u_n}{(u_n+\alpha)^\gamma} dx + \int_\Omega f(x,u_n)dx \tag{2.2}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}||u_n||^2 &= ||W_n+u^*||^2\\ &=< W_n+u^*, W_n+u^* >\\ &= ||W_n||^2+||u^*||^2+2 < W_n, u^* >\\ &= ||W_n||^2+||u^*||^2\\ &= L^2+||u^*||^2 \quad quand \quad n\to+\infty\end{aligned}$$

car :

$$< W_n, u^* >=< u_n-u^*, u^* >_{H_0^1(\Omega)}= 0$$

d'où l'expression (2.1) devient par le passage à la limite :

$$(1+bL^2+b||u^*||^2)||u^*||^2 = \lambda\int_\Omega \frac{u^*}{(u^*+\alpha)^\gamma}dx - \int_\Omega f(x,u^*)u^*dx \tag{2.3}$$

car

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} < -\Delta u_n, u^* > &=< -\Delta u^*, u^* >\\ &=< \nabla u^*, \nabla u^* >\\ &= \int_\Omega |\nabla u^*|^2dx\\ &= ||u^*||^2\end{aligned}$$

et d'autre part on a

$$(1+bL^2+b||u^*||^2)(L^2+||u^*||^2) - \lambda\int_\Omega \frac{u^*}{(u^*+\alpha)^\gamma}dx - \int_\Omega f(x,u^*)u^*dx = 0 \tag{2.4}$$

et par la combinaison de (2.3) et (2.4) on obtient (par la soustraction)

$$L^2+bL^4+bL^2||u^*||^2 = 0$$

donc $\qquad L = 0.$

en conséquence :

$$||W_n|| \to 0 \quad \text{i.e} \quad ||u_n-u^*||_{H_0^1(\Omega)} \to 0$$

d'où $I_{b,\alpha}$ satisfait les conditions de Palais-Smale □

Lemme 2.2. *[10] Supposons (f_1) et (f_2) sont satisfaites, alors il existe $A_0>0$ (indépendant de b) et $r,\rho>0$ tel que*

(i) $I_{b,\alpha}\mid_{\partial\bar{B}_\rho}>0$ et $\inf I_{b,\alpha}(u)<0$ pour $0<\lambda<1$

(ii) il existe $v\in H_0^1(\Omega)$ avec $||v||>\rho$ et $b_*>0$ tel que

$$I_{b,\alpha}(v)\le 0 \quad pour \quad 0<b<b_*$$

Démonstration.

(i) Supposons que (f_1) et (f_2) sont vérifies pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $D(\varepsilon, p), p > 2$ tel que

$$F(x,t) < \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + Dt^p \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^*$$

grâce à l'inégalité de Hölder et aussi le théorème des accroissements finis, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{b,\alpha}(u) &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{1-y}\int_\Omega [(u^* + \alpha)^{1-\gamma} - \alpha^{1-\gamma}]dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx \\
I_{b,\alpha} &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{1-\gamma}\int_\Omega C|u^*|^{1-\gamma}dx - \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\varepsilon|u|^2 + D|u|^p\Big)dx \\
&\geq \tfrac{1}{2}||u||^2 - C\lambda\Big(\int_\Omega (u^{1-\gamma})^{\frac{2}{1-\gamma}}\Big)^{\frac{1-\gamma}{2}} - \frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega u^2dx - D\int_\Omega u^p dx \\
&\geq \frac{1}{2}||u||^2_{H_0^1(\Omega)} - C\lambda||u||^{1-\gamma}_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\varepsilon||u||^2_{L^2(\Omega)} - CD||u||^p_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

On fait le passage de $L^2(\Omega)$ à $H_0^1(\Omega)$ par l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned}
I_{b,\alpha} &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - c_1\lambda||u||^{1-\gamma} - \frac{1}{2}c_2\varepsilon||u||^2 - c_3D||u||^p \\
I_{b,\alpha} &\geq ||u||^{1-\gamma}\Big(\frac{1}{2}||u||^{1+\gamma} - c_1\lambda - \frac{1}{2}c_2\varepsilon||u||^{1+\gamma} - c_3D||u||^{p-1+\gamma}\Big) \\
I_{b,\alpha} &\geq ||u||^{1-\gamma}\Big(\frac{1-c_2\varepsilon}{2}||u||^{1+\gamma} - c_3D||u||^{p-1+\gamma} - c_1\lambda\Big)
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2c_2}$

$$I_{b,\alpha} \geq ||u||^{1-\gamma}\Big(\frac{1}{4}||u||^{1+\gamma} - c_3D||u||^{p-1+\gamma} - c_1\lambda\Big)$$

On voit que : $I_{b,\alpha}(u) \geq r > 0$ a condition que $||u|| = \rho$ suffisamment petit et $\lambda \in]0, A_0[$ [1] de plus pour : $u \in H_0^1(\Omega)$, et par la condition (f_1) on aura :

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{I_{b,\alpha}(tu)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[\frac{t^2}{2}||u||^2 + bt^4||u||^4\Big] - \frac{\lambda}{1-\gamma}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_\Omega \Big((tu+\alpha)^{1-\lambda} - \alpha^{1-\lambda}\Big)dx$$

$$- \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\varepsilon t^2||u||^2 + Dt^p||u||^p\Big)dx$$

$$< -\frac{\lambda}{1-\gamma}\lim_{t\to 0^+}\int_\Omega [\frac{(tu+\alpha)^{1-\gamma} - \alpha^{1-\gamma})}{t}dx$$

1. L'étude de la fonction

$$h(\rho) = \frac{1}{4}\rho^{1-y} - A\rho^{p+y-1} - B \quad A, B > 0$$

montre l'existence de $r > 0$ tel que :

$$I_{b,\alpha}(u) \geq r > 0$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{I_{b,\alpha}(tu)}{t} < -\frac{\lambda}{1-\gamma}\int_\Omega \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(1-\gamma)\xi^{-\gamma}tudx$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{I_{b,\alpha}(tu)}{t} < -\frac{\lambda}{1-\gamma}\int_\Omega (1-\gamma)\xi^{-\gamma}udx \quad \alpha<\xi<tu+\alpha$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{I_{b,\alpha}(tu)}{t} < -\lambda\int_\Omega \xi^{-\gamma}udx \quad \text{quand} \quad t\to 0:\xi\to\alpha$$

d'où

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{I_{b,\alpha}(tu)}{t} < 0$$

donc il existe u assez petit tel que $I_{b,\alpha}(u)<0$.
ii) soit ϕ_1 la première fonction propre associée à la valeur propre λ_1 pour l'opérateur $(-\Delta)$ c.a.d :

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1 & \text{dans} \;\; \Omega \\ \phi_1 = 0 & \text{sur} \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

on multiplie l'équation par $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω , on obtient :

$$-\int_\Omega \Delta\phi_1\phi_1 = \lambda_1\int_\Omega \phi_1^2dx$$

$$\int_\Omega \nabla\phi_1\nabla\phi_1dx = \lambda_1\int_\Omega \phi_1^2dx$$

$$||\phi_1||^2 = \lambda_1\int_\Omega \phi_1^2dx$$

et on a aussi :

$$f(x,t)\backsim lt \qquad (V(+\infty)$$

$$F(x,t)\backsim \frac{lt^2}{2} \qquad (V(+\infty)$$

donc on a :

$$\lim_{t\to+\infty}\int_\Omega \frac{F(x,t\phi_1)}{(t\phi_1)^2}.\phi_1^2dx$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\int_\Omega \frac{l}{2}\frac{(t\phi_1)^2}{(t\phi)^2}\phi_1^2dx$$

$$=\frac{l}{2}\int_\Omega \phi_1^2dx$$

d'où

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{I_{0,\alpha}(t\phi_1)}{t^2} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}[\frac{1}{2}||t\phi_1||^2 - \frac{\lambda}{1-\gamma}\int_\Omega \Big[(t\phi_1+\alpha)^{1-\gamma}-\alpha^{1-\gamma}\Big]dx - \int_\Omega F(x,t\phi_1)dx]$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{I_{0,\alpha}(t\varphi_1)}{t^2}=\frac{1}{2}||\varphi_1||^2-\int_\Omega\frac{F(x,t\varphi)}{t^2\varphi_1^2}\varphi_1^2dx$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{I_{0,\alpha}(t\varphi_1)}{t^2}=\frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega\varphi_1^2dx-\frac{l}{2}\int_\Omega\varphi_1^2dx$$

$$=\frac{\lambda_1-l}{2}\int_\Omega\varphi_1^2dx$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{I_{0,\alpha}(t\varphi_1)}{t^2}<0\quad\text{car}\quad l>\lambda_1$$

Donc il existe $v\in H_0^1(\Omega)$ avec $||v||>\rho$ tel que :

$$I_{0,\alpha}(v)<0\quad puisque\quad I_{b,\alpha}\to I_{0,\alpha}\quad quand\quad b\to 0^+$$

on obtient l'existence de $b_*>0$ tel que

$$I_{b,\alpha}<0\quad\text{pour}\qquad 0<b<b_*$$

□

Lemme 2.3. *[10] Supposons les conditions* (f_1) *et* (f_2) *sont remplies et* $0<\lambda<A_0$, *le problème* (2.2) *a une solution positive* $u_\alpha\in H_0^1(\Omega)$ *qui vérifie* $I_{b,\alpha}(u_\alpha)<0$.

Lemme 2.4. *[10] Avec les conditions* (f_1) *et* (f_2) *et* $0<\lambda<A_0$ *et* $0<b<b_*$ *le problème* (2.2) *admet une solution* u_α *avec* $I_{b,\alpha}(u_\alpha)>0$.

Démonstration.
En tenant compte des lemmes (2.1), (2.2) on applique le théorème de col.
il existe une suite $(v_n)\subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$I_{b,\alpha}(v_n)\to C>r>0$$

et

$$I'_{b,\alpha}(v_n)\to 0$$

avec $c=\inf_{Y\in\Gamma\quad t\in[0,1]}\quad\max I_{b,\alpha}(Y(t))$

$$\Gamma=\{Y\in c\Big([0,1],H_0^1(\Omega)\Big):Y(0)=0,Y(1)=e\}$$

d'après (2.1), $\{v_n\}\subset(H_0^1)(\Omega)$ admet une sous suite convergente notée encore $\{v_n\}$,

$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v_\alpha$ dans $H_0^1(\Omega)$. par conséquent d'après (2,5) :

$$I_{b,\alpha}(v_\alpha) = \lim_{t\to+\infty} I_{b,\alpha}(v_n) = c > r > 0$$

$\square$

Lemme 2.5. *[10]*
Supposons $u_{\frac{1}{n}}$ *est une solution positive du problème* (2.2) *avec* $\alpha = \frac{1}{n}$ *alors pour tout* $k \subset\subset \Omega$ *il existe* $\delta > 0$ *et une sous suite* $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *de* $\mathbf{N}$ *telle que* $u_{\frac{1}{n_k}}(x) \geq \delta$ *pour tout* $x \in k$.

Démonstration.
Posons $u_{\frac{1}{n}}$ est la solution positive du problème (2.2) avec $\alpha = \frac{1}{n}$, la suite $\{u_{\frac{1}{n}}\}$ bornée dans $H_0^1(\Omega)$, en effet si $||u_{\frac{1}{n}}|| \longrightarrow +\infty$ quand $n \to +\infty$ ça contredit (2.1) donc elle est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} ||u_{\frac{1}{n}}|| = A$.
On considère $\psi_n \in H_0^1(\Omega)$ une solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta\psi_n = \dfrac{\lambda}{\left(1+b||u_{\frac{1}{n}}||^2\right)(\psi_n^+ + 1)^\gamma} & \text{dans } \Omega \\ \\ \psi_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

évidemment $\{\psi_n\}$ bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
ainsi il existe $\psi_n \in H_0^1(\Omega)$ tel que la sous-suite notée encore ψ_n :

$$\psi_n \rightharpoonup \psi \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega)$$

et

$$\psi_n(x) \to \psi(x) \quad \text{p.p dans} \quad \Omega$$

Posons

$$h_n(x) = \frac{\lambda}{(1 + b||u_{\frac{1}{n}}||^2)(\psi_n^+(x) + 1)^\gamma}$$

il est clair que $\{h_n\}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et par conséquent elle est bornée dans $L^2(\Omega)$ $(L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega))$, donc

$$h_n \rightharpoonup h \;\; \text{dans} \;\; L^2(\Omega)$$

$$h_n(x) \longrightarrow h(x) \;\; \text{dans} \;\; \Omega$$

oú

$$h_n(x) = \frac{\lambda}{(1+bA^2)(\psi_n(x)+1)^\gamma}$$

par le passage à la limite , on obtient :

$$\begin{cases} -\triangle\psi = h(x) & \text{dans } \Omega \\ \psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ce qui implique $\psi \in c(\bar{\Omega})$ (résulte de la régularité) et $\psi(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$ de plus $\psi_n \to \psi$ dans $c(\bar{\Omega})$.
fixons le compact $k \subset \Omega$, donc :

$$\exists\ \delta > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall\ n \geq n_0 \ \ \psi_n(x) \geq \rho \tag{2.5}$$

et d'autre part, puisque $u_{\frac{1}{n}}$ solution positive du problème (2.2), il vient

$$-\triangle u_{\frac{1}{n}} = \frac{\lambda}{(1+b||u_{\frac{1}{n}}||^2)(u^+_{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n})^\gamma} + \frac{f(x,u_{\frac{1}{n}})}{1+b||u_{\frac{1}{n}}||^2}$$

et

$$-\Delta\psi_n = \frac{\lambda}{(1+b||u_{\frac{1}{n}}||^2)(\psi^+_n(x)+1)^\gamma}$$

d'où

$$-\Delta(\psi_n - u_{\frac{1}{n}}) = \frac{\lambda}{(1+b||u_{\frac{1}{n}}||^2)(\psi_n(x)+1)^\lambda} - \frac{\lambda}{(1+b||u_{\frac{1}{n}}||^2)(u_{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f(x,u_{\frac{1}{n}})}{1+b||u_{\frac{1}{n}}||^2}$$

c.à.d

$$-\Delta(\psi_n - u_{\frac{1}{n}}) \leq \frac{\lambda}{(1+b||u_{\frac{1}{n}}||^2)}\Big[\frac{1}{(\psi+\frac{1}{n})^\gamma} - \frac{1}{(u_{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n})^\gamma}\Big]$$

finalement

$$-\Delta(\psi_n - u_{\frac{1}{n}}) \leq \frac{\lambda}{(1+b||u_{\frac{1}{n}}||^2)}\Big[\frac{1}{(\psi+\frac{1}{n})^\gamma} - \frac{1}{(u_{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n})^\gamma}\Big]$$

si on prend $(\psi_n - u_{\frac{1}{n}})^+$ comme fonction de test on obtient :

$$\int |(\nabla(\psi_n - u_{\frac{1}{n}}))|^2 dx \leq 0$$

donc $u_{\frac{1}{n}}(x) \geq \psi_n(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et d'après résultat (2.3), il vient que $u_{\frac{1}{n}}(x) > \delta$

pour tout $x \in K$ et $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ □

Preuve du Théorème 2.1. Soit $u_{\frac{1}{n}}$ solution du problème (2.2) avec $\alpha = \frac{1}{n}$ par la même manière du lemme (2.5) on peut montrer que la suite $\{u_{\frac{1}{n}}\}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et donc la sous-suite $\{u_{\frac{1}{n_k}}\} \subset \{u_{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{+\infty}$ converge faiblement vers $u \in H_0^1(\Omega)$.

$$u_{\frac{1}{n_k}} \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega)$$

$$u_{\frac{1}{n_k}}(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{p.p} \;\; \text{dans} \quad \Omega$$

Par le lemme (2.5) on obtient pour chaque $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, il résulte :

$$\left(1 + b \lim_{k \to +\infty} ||u_{\frac{1}{n_k}}||^2\right) \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \lambda \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma} dx - \int_\Omega f(x,u)\varphi dx = 0 \tag{2.6}$$

cas $u_{\frac{1}{n_k}} = u_\alpha$, par (2.6) et similaire-ment au lemme (2.1) on conclure :

$$u_{\frac{1}{n_k}} \longrightarrow u \text{ dans} \qquad H_0^1(\Omega)$$

avec u est la solution positive de (2.1) et :

$$I_{b,0}(u) = \lim_{k \to +\infty} I_{b,\frac{1}{n_k}}(u_{\frac{1}{n_k}}) < 0 \quad \textit{par le} \;\; \textit{lemme}(2,3).$$

cas $u_{\frac{1}{n_k}} = v_\alpha$ et similaire-ment, on déduit

$$u_{\frac{1}{n_k}} \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega)$$

avec u est la solution positive de (2.1)

$$I_{b,0}(u) = \lim_{k \to +\infty} I_{b,\frac{1}{n_k}}(u_{\frac{1}{n_k}}) > 0 \;\; \textit{par le lemme}(2,4)$$

□

Conclusion :

donc le problème (2,2) admet au moins deux solutions positives pour : $0 < b < b_*$

Chapitre 3

L'étude d'un problème elliptique anisotrope de type Kirchhoff

Dans ce chapitre on traite un problème elliptique de type kirchhoff anisotrope, dont toutes les dérivées partielles peuvent avoir des puissances différentes dans l'opérateur différentiel .

3.1 le problème

soit le problème :

$$(3.1) : \begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \Big[(a + b \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i} dx) \partial_i (|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u) \Big] = \dfrac{f(x)}{(u)^{\gamma}} + g(x) u^{q-1} & \text{dans } \Omega \\ \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $f \in L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^* + \gamma - 1}}(\Omega), \quad g \in L^{\bar{p}^*}(\Omega), \quad u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega).$

3.2 La fonctionnelle d'énergie

La fonctionnelle d'énergie $J(u)$ est définit par :

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{a}{p_i} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i} dx + \frac{b}{2p_i} \Big(\int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i} dx \Big)^2 \right] - \frac{1}{1-\gamma} \int_{\Omega} f u^{1-\gamma} dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} g u^q dx$$

Lemme 3.1. *[3]*
Il existe une fonction $\varphi \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ *non-identiquement nulle, telle que* $J(t\varphi) < 0$ *pour tout* $t > 0$ *assez petit.*

Démonstration.

$$J(t\varphi) = \sum_{i=1}^{N} \Big[\frac{at^{p_i}}{p_i} \int_\Omega |\partial_i \varphi|^{p_i} dx + \frac{bt^{2p_i}}{2p_i} \Big(\int_\Omega |\partial_i \varphi|^{p_i} dx\Big)^2\Big] - \frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \int_\Omega f\varphi^{1-\gamma} dx - \frac{t^q}{q} \int_\Omega g\varphi^q dx$$

$$J(t\varphi) \leq \frac{at^{p_1}}{p_1} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i \varphi|^{p_i} dx + \frac{bt^{2p_1}}{2p_1} \sum_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega |\partial_i \varphi|^{p_i} dx\Big)^2\Big] - \frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \int_\Omega f\varphi^{1-\gamma} dx - \frac{t^q}{q} \int_\Omega g\varphi^q dx$$

car $p_1 < p_i$, $\forall i = 1, ..., N$ et $t > 0$ assez petit.

$$J(t\varphi) \leq \frac{t^{p_1}}{p_1} \Big[a \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i \varphi|^{p_i} dx + \frac{b}{2} \sum_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega |\partial_i \varphi|^{p_i} dx\Big)^2\Big] - \frac{1}{1-\gamma} \int_\Omega f\varphi^{1-\gamma} dx$$

car $t < 1$.
Pour que $J(t\varphi)$ soit négative il suffit :

$$t^{p_1-(1-\gamma)} < p_1 \frac{\dfrac{1}{1-\gamma} \displaystyle\int_\Omega f\varphi^{1-\gamma} dx}{a \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i \varphi|^{p_i} dx + \frac{b}{2} \sum_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega |\partial_i \varphi|^{p_i} dx\Big)^2}$$

On choisit

$$t < T^{\frac{1}{p_1-(1-\gamma)}}$$

avec

$$0 < T < \min\left\{1, \frac{\dfrac{1}{1-\gamma} \displaystyle\int_\Omega f\varphi^{1-\gamma} dx}{a \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i \varphi|^{p_i} dx + \frac{b}{2} \sum_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega |\partial_i \varphi|^{p_i} dx\Big)^2}\right\}$$

pour que t soit proche de 0.
Donc avec cette condition de t, on obtient $J(t\varphi) < 0$. □

Lemme 3.2. *[3]*
Il existe $r > 0$ *et* $\rho \geq 0$ *tel que* $J(u) \geq r$ *pour* $||u|| = \rho$.

Démonstration.
On a

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \Big[\frac{a}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} dx + \frac{b}{2p_i} \Big(\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} dx\Big)^2\Big] - \frac{1}{1-\gamma} \int_\Omega f u^{1-\gamma} dx - \frac{1}{q} \int_\Omega g u^q dx$$

pour $||u|| = \rho > 0$ sans qu'on perde la généralité , on peut prendre :

$$||\partial_i u|| < 1, \quad \forall i = 1, ..., N$$

$$J(u) \geq \frac{a}{2p_N}\sum_{i=1}^{N}||\partial_i u_n||^{p_N}_{L^{p_i}(\Omega)} + \frac{b}{2p_N}\sum_{i=1}^{N}||\partial_i u_n||^{2p_N}_{L^{p_i}(\Omega)} - \frac{1}{1-\gamma}||f||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*+\gamma-1}}(\Omega)}||u||^{1-\gamma}_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} - ||u||^q_{L^{p^*}(\Omega)}||g||^{\frac{p^*-q}{p^*}}$$

car

$$\int_\Omega |fu^{1-\gamma}|dx \leq \left(\int_\Omega (u^{1-\gamma})^{\frac{\bar{p}^*}{1-\gamma}}dx\right)^{\frac{1-\gamma}{\bar{p}^*}}\left(\int_\Omega |f|^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-(1-\gamma)}}dx\right)^{1-\frac{1-\gamma}{\bar{p}^*}}$$

$$\leq ||u||^{1-\gamma}_{L^{\bar{p}^*}}. \ \ ||f||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-(1-\gamma)}}}$$

et

$$\int_\Omega gu^q dx \leq \left(\int_\Omega (u^q)^{\frac{\bar{p}^*}{q}}dx\right)^{\frac{q}{\bar{p}^*}}\left(\int_\Omega |g|^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-q}}dx\right)^{1-\frac{q}{\bar{p}^*}}$$

$$\leq ||u||^q_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)}. \ \ ||g||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-q}}(\Omega)}$$

et par suite

$$J(u) \geq \frac{a}{p_N}\sum_{i=1}^{N}||\partial_i u_n||^{p_N}_{L^{p_i}(\Omega)} + \frac{b}{2p_N}\sum_{i=1}^{N}||\partial_i u_n||^{2p_N}_{L^{p_i}(\Omega)} - C_1||u||^{1-\gamma} - C_2||u||^q$$

$$J(u) \geq K_1||u||^{p_N} + K_2||u||^{2p_N} - C_1||u||^{1-\gamma} - C_2||u||^q$$

puisque :

$$||u||_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N}||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)}$$

$$||u||^{p_N}_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{N}||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)}\right)^{p_N} \geq \sum_{i=1}^{N}||\partial_i u||^{p_N}_{L^{p_i}(\Omega)}$$

□

et par l'inégalité de Sobolev anisotrope

$$||u||_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} \leq C||u||_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = C||u||$$

Conclusion : il existe $r > 0$ tel que $J(u) \geq r$ pour $||u|| = \rho$.

Lemme 3.3. *[3]*

La fonctionnelle J est coercive.

Démonstration.

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{a}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} + \frac{b}{2p_i}.\left(\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i}\right)^2\right] - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega fu^{1-\gamma}dx - \frac{1}{q}\int_\Omega gu^q dx$$

$$J(u) \geq \sum_{i=1}^{N} \frac{b}{2p_N}\Big(\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i}\Big)^2 - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f u^{1-\gamma}dx - \frac{1}{q}\int_\Omega g u^q dx$$

$$J(u) \geq \frac{b}{2p_N}\sum_{i=1}^{N}\Big(\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i}\Big)^2 - \frac{1}{1-\gamma}||f||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*+1-\gamma}}(\Omega)}||u||^{1-\gamma}_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} - c||u||^q_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)}||g||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-q}}(\Omega)}$$

car

$$\int_\Omega f u^{1-\gamma}dx \leq \Big(\int_\Omega |u^{1-\gamma}|^{\frac{\bar{p}^*}{1-\gamma}}dx\Big)^{\frac{1-\gamma}{\bar{p}^*}}\Big(\int_\Omega (f)^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-(1-\gamma)}}dx\Big)^{1-\frac{1-\gamma}{\bar{p}^*}}$$

$$\int_\Omega f u^{1-\gamma}dx \leq ||u||^{1-\gamma}_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)}.||f||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-(1-\gamma)}}(\Omega)}$$

et

$$\int_\Omega g u^q dx \leq \Big(\int_\Omega |g|^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-q}}dx\Big)^{1-\frac{q}{\bar{p}^*}}\Big(\int_\Omega |u^q|^{\frac{\bar{p}^*}{q}}dx\Big)^{\frac{q}{\bar{p}^*}}$$

$$\leq ||g||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-q}}(\Omega)}.||u||^q_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)}$$

Posons :

$$\int_\Omega |\partial_j u|^{p_j} = \max\Big\{\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i}, \quad i=1,...,N\Big\} \tag{3.1}$$

et

$$\Big(\int_\Omega |\partial_k u|^{p_k}\Big)^{\frac{1}{k}} = \max\Big\{\Big(\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i}\Big)^{\frac{1}{i}}, \quad i=1,...,N\Big\} \tag{3.2}$$

i.e

$$\forall i=1,...,N \qquad ||u||_{L^{p_k}((\Omega)} \leq ||\partial_i u_i||_{L^{p_i}(\Omega)}$$

donc

$$J(u) \geq \frac{b}{2p_N}\Big(\int_\Omega |\partial_j u|^{p_j}\Big)^2 - \frac{1}{1-\gamma}||f||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*+1-\gamma}}(\Omega)}||u||^{1-\gamma}_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} - c||u||^q_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)}||g||_{L^{\frac{\bar{p}^*-q}{\bar{p}^*}}(\Omega)} \tag{3.3}$$

En utilisant les suppositions (3.3),(3.1) on obtient les inégalités suivantes

$$\Big(\int_\Omega |\partial_j u|^{p_j}dx\Big)^{p_j} \leq \Big(\int_\Omega |\partial_k u|^{p_k}dx\Big)^{\frac{1}{p_k}} \leq ||u||_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}$$

$$||u||_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} \leq N\Big(\int_\Omega |\partial_k u|^{p_k}dx\Big)^{\frac{1}{p_k}} \leq N\Big(\int_\Omega |\partial_j u|^{p_j}dx\Big)^{\frac{p_j}{p_k}}$$

d'où

$$\frac{1}{N^{2p_k}}||u||^{N^{2p_k}} \leq \Big(\int_\Omega |\partial_k u|^{p_k}dx\Big)^2 \tag{3.4}$$

et on a

$$\int_\Omega |\partial_k u|^{p_k}dx \leq \int_\Omega |\partial_j u|^{p_j}dx$$

par hypothèse du max (3.1) et

$$\int_\Omega |\partial_k u|^{p_k} dx \leq \Big(\int_\Omega |\partial_j u|^{p_j} dx \Big)^2$$

et de (3.2) on obtient

$$\frac{1}{N^{2p_k}} ||u||^{2p_k} \leq \Big(\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} dx \Big)^2$$

On remplace dans (3.3)

$$J(u) \geq \frac{b}{2p_N} \Big(\int_\Omega |\partial_j u|^{p_j} dx \Big)^2 - \frac{1}{1-\gamma} ||f||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*+1-\gamma}}(\Omega)} .||u||^{1-\gamma}_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} - c||u||^q_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} .||g||_{L^{(\bar{p}^*)'}(\Omega)}$$

On obtient

$$J(u) \geq \frac{b}{2p_N} \Big(\frac{1}{N^{2p_k}} ||u||^{2p_k} \Big) - \frac{1}{1-\gamma} ||f||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-1+\gamma}}(\Omega)} .||u||^{1-\gamma}_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} - c||u||^q_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} .||g||_{L^{(\bar{p}^*)'}(\Omega)}$$

et puisque $q \geq 1$ on a

$$\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^* - 1} \leq \frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^* - q}$$

ce qui implique

$$L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-q}}(\Omega) \subset L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-1}}(\Omega) \qquad (\Omega \ \text{ bornée})$$

$$L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-q}}(\Omega) \subset L^{(\bar{p}^*)'}(\Omega) \quad \text{car} \quad (\frac{1}{\bar{p}^*})' = \frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^* - 1}$$

donc si :

$$g \in L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-q}}(\Omega) \ \text{ alors } \ g \in L^{(\bar{p}^*)'}(\Omega)$$

d'où

$$J(u) \geq \frac{b}{2p_N} \Big(\frac{1}{N^{2p_k}} ||u||^{2p_k} \Big) - \frac{1}{1-\gamma} ||f||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-1+\gamma}}(\Omega)} .||u||^{1-\gamma}_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} - c||u||^q_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} .||g||_{L^{(\bar{p}^*)'}(\Omega)}$$

et encore

$$J(u) \geq \frac{b}{2p_N} . \frac{1}{N^{2p_k}} ||u||^{2p_k} - \frac{1}{1-\gamma} ||f||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-1+\gamma}}(\Omega)} .||u||^{1-\gamma}_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} - c'||u||^q_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)}$$

et grâce à l'inégalité anisotrope de Sobolev

$$||u||_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} \leq K ||u||_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}$$

C.à.d

$$||u||_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} \leq K||u||$$

On arrive à

$$J(u) \geq \frac{b}{2p_N}.\frac{1}{N^{2p_k}}||u||^{2p_k} - C_1||u||^{1-\gamma} - C_2||u||^q$$

il résulte en fin que

$$J(u) \longrightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad ||u|| \to +\infty,$$

donc : J est coercive pour $2p_k > q$. □

Théorème 3.1. *[3]*

Sous les hypothèses suivantes :

. $1 < p < p_N$ *et* $0 < \gamma < 1$.

. $f \in L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*+\gamma-1}}$ *et* $g \in L^{p_N}(\Omega)$.

. a, b *positive.*

La fonctionnelle J *atteint son minimum dans* $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$

Démonstration.

On pose

$$m = \min_{u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} J(u)$$

m est bien défini d'après les calculs précédents. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante tel que

$$J(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m$$

On a

$$\begin{aligned} ||u_n||_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} &\leq N\Big(\int_\Omega |\partial_k u|^{p_k} dx\Big)^{\frac{1}{p_k}} \\ &\leq N.M = C \end{aligned}$$

avec : $\quad M = \max\left\{ \displaystyle\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i}, i = 1, ..., N \right\}$

d'où $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$.

Donc il existe une sous-suite $\{\ u_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ noté encore $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$.

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ dans } \ W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$$

par le théorème de Rellich-Kondrachov on a :

$$u_n \longrightarrow u \;\; \text{dans} \;\; L^r(\Omega) \;\; \forall r \in [1, \bar{p}^*[$$

$$u_n \longrightarrow u \;\; \text{p.p dans} \;\; \Omega$$

La convergence faible $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'écrire

$$||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)} \leq \liminf ||\partial_i u_n||_{L^{p_i}(\Omega)} \quad \forall i = 1, ..., N$$

On considère la fonction M telle que $M(t) = a + bt, t > 0$
donc

$$\widetilde{M} = at + \frac{b}{2}t^2 \quad (\; fonction\ primitive).$$

Puisque $\widetilde{M}$ est croissante on obtient :

$$\widetilde{M}\Big(||\partial_i u||^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)}\Big) \leq \widetilde{M}\Big[(\liminf ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)})^{p_i}\Big] \quad \forall i = 1, ..., N$$

et aussi $\widetilde{M}$ est continue donc

$$\widetilde{M}\Big(||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)}\Big) \leq \liminf \widetilde{M}\Big(||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)}\Big) \;\; \forall i = 1, ..., N$$

$$\widetilde{M}\Big(||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)}\Big) \leq \liminf \Big[\frac{a}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} + \frac{b}{2p_i}.\Big(\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i}\Big)^2\Big]$$

pour le deuxième terme

$$\int_\Omega f u_n^{1-\gamma} dx \leq \Big(\int_\Omega \Big(|u_n|^{1-\gamma}\Big)^{\frac{\bar{p}^*}{1-\gamma}} dx\Big)^{\frac{1-\gamma}{\bar{p}^*}} \Big(\int_\Omega |f|^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-1+\gamma}}\Big)^{1-\frac{1-\gamma}{\bar{p}^*}}$$

$$\leq ||u_n||^{1-\gamma}_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} \cdot ||f||^{\frac{\bar{p}^*-1+\gamma}{\bar{p}^*}}_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*-1+\gamma}}(\Omega)}$$

$$\leq C^{1-\gamma}.C_1$$

car $f \in L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*+1-\gamma}}$ et $||u_n|| \in L^{\bar{p}^*}(\Omega)$ puisque

$$||u_n|| \in L^{\bar{p}^*}(\Omega) \leq C||u_n||_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} \leq C'$$

par le théorème de convergence dominée on voit que

$$\int_\Omega f u_n^{1-\gamma} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f u^{1-\gamma}$$

et

$$\int_\Omega g u_n^{q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega g u^{q}$$

En conclusion J est faiblement semi continue inférieurement donc

$$m \leq J(u) \leq \liminf J(u_n) = m$$

C.à.d

$$J(u) = m$$

d'où :

$$u \ \text{ solution du } \ (3.1)$$

$\square$

3.3 Résultat du Multiplicité

On considère le problème d'approximation

$$(3.2) \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Big[(a + b\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} dx)\partial_i(|\partial_i u_n|^{p_i-2}\partial_i u_n) \Big] = \dfrac{f(x)}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma} + g(x)u_n^{q-1} & \text{dans } \Omega \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Puisque on a évité la singularité par le terme $\dfrac{1}{n}$.
La fonctionnelle d'énergie associé au problème (3.2) est différentiable

$$J(u_n) = \sum_{i=1}^{N} \Big[\frac{a}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} dx + \frac{b}{2p_i}.\Big(\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} dx\Big)^2 \Big] - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f\Big((u_n+\frac{1}{n})^{1-\gamma} - (\frac{1}{n})^{1-\gamma}\Big)dx - \frac{1}{q}\int_\Omega g u_n^q dx$$

avec $u^+ = \max\{u, 0\}$

Lemme 3.4. *[3]*
Il existe $r > 0$ et $\rho > 0$ tel que $J(u) \geq r$ pour $||u|| = \rho$.

Démonstration.

$$J(u_n) = \sum_{i=1}^{N}\Big[\frac{a}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i}dx + \frac{b}{2p_i}.\Big(\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i}dx\Big)^2\Big] - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f\Big((u_n+\frac{1}{n})^{1-\gamma} - (\frac{1}{n})^{1-\gamma}\Big)dx - \frac{1}{q}\int_\Omega g u_n^q dx$$

comme $||u|| = \rho$ avec $\rho > 0$ on peut prendre $||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)} \leq 1,\ \forall i = 1, ..., N$ sans perte de généralité appliquant l'inégalité de Hölder.

$$J(u_n) \geq \frac{a}{p_N}\sum_{i=1}^{N}||\partial_i u_n||^{p_N}_{L^{p_i}(\Omega)} + \frac{b}{2p_N}\sum_{i=1}^{N}||\partial_i u_n||^{2p_N}_{L^{p_i}(\Omega)}$$

$$-\frac{1}{1-\gamma}||f||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*+\gamma-1}}(\Omega)}||u_n||^{1-\gamma}_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} + \frac{1}{1-\gamma}(\frac{1}{n})^{1-\gamma}||f||_{L^1(\Omega)} - ||u_n||^q_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)}.||g||^{\frac{\bar{p}^*-q}{\bar{p}^*}}_{L^{(\bar{p}^*)'}(\Omega)}$$

car

$$\int_\Omega f(u_n + \frac{1}{n})^{1-\gamma}dx \leq \int_\Omega f u_n^{1-\gamma}dx + \int_\Omega f(\frac{1}{n})^{1-\gamma}dx \quad [1]$$

D'ou

$$\int_\Omega f(u_n + \frac{1}{n})^{1-\gamma}dx \leq ||f||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^*+\gamma-1}}(\Omega)}||u_n||^{1-\gamma}_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} + (\frac{1}{n})^{1-\gamma}||f||_{L^1(\Omega)}$$

puisque $0 < 1-\gamma < 1$, donc

$$J(u_n) \geq \frac{a}{p_N}\sum_{i=1}^{N}||\partial_i u||^{p_N}_{L^{p_i}(\Omega)} + \frac{b}{2p_N}\sum_{i=1}^{N}||\partial_i u||^{2p_N}_{L^{p_i}(\Omega)} - C_1||u_n||^{1-\gamma} - C_2||u_n||^q + (\frac{1}{n})^{1-\gamma}\frac{1}{1-\gamma}||f||_{L^1(\Omega)}$$

et par l'inégalité anisotrope

$$J(u_n) \geq k_1||u_n||^{p_N} + k_2||u_n||^{2p_N} - C_1||u_n||^{1-\gamma} - C_2||u_n||^q$$

$$\Big(||u||_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} \leq \ C\ ||u||_{W_0^{1,(p_i)}}\ \text{ C.à.d }\ ||u||_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} \leq \ C\ ||u||\Big).$$

donc pour $||u|| = \rho$ il existe $r > 0$ tel que $J(u) \geq r$ □

Lemme 3.5. *[3]*
Il existe $\varphi \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $\varphi \neq 0$ tel que $J(t\varphi) < 0$ pour tout $t > 0$ assez petit.

Démonstration.

$$J(t\varphi) = \sum_{i=1}^{N}\Big[\frac{at^{p_i}}{p_i}\int_\Omega |\partial_i\varphi|^{p_i}dx + \frac{bt^{2p_i}}{2p_i}.\Big(\int_\Omega |\partial_i\varphi|^{p_i}dx\Big)^2\Big] - \frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\int_\Omega f\varphi^{1-\gamma}dx - \frac{t^q}{q}\int_\Omega g\varphi^q dx + \frac{1}{n}.\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f dx$$

1. $\forall a, b > 0 \quad (a+b)^q \leq a^q + b^q$ avec $0 < q < 1$

$$J(t\varphi) \leq \frac{at^{p_1}}{p_1}.\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i\varphi|^{p_i}dx+\frac{bt^{2p_i}}{2p_i}\sum_{i=1}^{N}\Big(\int_\Omega |\partial_i\varphi|^{p_i}dx\Big)^2-\frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\int_\Omega f\varphi^{1-\gamma}dx+\frac{1}{n}.\frac{1}{1-\gamma}||f||_{L^1(\Omega)}$$

pour que $J(t\varphi) < 0$ on peut choisir φ tel que $||\varphi||_{L^{+\infty}(\Omega)} > \frac{1}{nt^{1-\gamma}}$ donc

$$\frac{1}{n}\frac{1}{1-\gamma}||f||_{L^1(\Omega)} \leq \frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}||f||_{L^1(\Omega)}||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}$$

et par suite

$$\frac{t^{p_1}}{p_1}\Big[a\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i\varphi|^{p_i}dx+\frac{b}{2}\sum_{i=1}^{N}\Big(\int_\Omega |\partial_i\varphi|^{p_i}dx\Big)^2\Big]-\frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\int_\Omega f\varphi^{1-\gamma}dx+\frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}||f||_{L^1(\Omega)}||\varphi||_{L^\infty(\Omega)} < 0$$

d'où

$$t^{p_1-(1-\gamma)} < p_1\frac{\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f\varphi^{1-\gamma}dx - \frac{1}{1-\gamma}||f||_{L^1(\Omega)}||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}}{a\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i\varphi|^{p_i}dx + \frac{b}{2}\sum_{i=1}^{N}\Big(\int_\Omega |\partial_i\varphi|^{p_i}dx\Big)^2}$$

Posons :

$$T = t^{p_1-(1-\gamma)}$$

Donc : $J(t\varphi) < 0$ pour

$$0 < T < \min\left\{1, p_1\frac{\frac{1}{1-\gamma}[\int_\Omega f\varphi^{1-\gamma}dx - ||f||_{L^1(\Omega)}||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}]}{a\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i\varphi|^{p_i}dx + \frac{b}{2}\sum_{i=1}^{N}\Big(\int_\Omega |\partial_i\varphi|^{p_i}dx\Big)^2}\right\}$$

□

Lemme 3.6. *[3]*

J satisfait les conditions de Palais-Smale sous l'hypothèse $q < p_1$.

Démonstration.

Soit $\{u_k\}_k$ une suite de Palais-Smale C.à.d

$$J(u_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} C$$

et

$$J'(u_k) \to 0 \text{ dans } (W_0^{1,(p_i)})'(\Omega)$$

$$J(u_k) = \sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{a}{p_i}\int_\Omega |\partial u_k|^{p_i}dx+\frac{b}{2p_i}\Big(\int_\Omega |\partial u_k|^{p_i}dx\Big)^2\Big]-\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f\Big((u_k-\frac{1}{n})^{1-\gamma}-(\frac{1}{n})^{1-\gamma}\Big)-\frac{1}{q}\int_\Omega gu_k^q dx$$

la suite $\{u_k\}_k$ est bornée dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$.

En effet on a :

du fait que

$$< J'(u_k, u_k) >= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(a + b \int_\Omega |\partial_i u_k|^{p_i} dx \right) \int_\Omega |\partial_i u_k|^{p_i} dx \right] - \int_\Omega f((u_k + \frac{1}{n})^{1-\gamma} dx - \int_\Omega g u_k^q dx$$

et $< J'(u_k, u_k) > \longrightarrow 0$.

Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(a + b \int_\Omega |\partial_i u_k|^{p_i} dx \right) \int_\Omega |\partial_i u_k|^{p_i} dx \right] \leq \int_\Omega f(u_k + \frac{1}{n})^{1-\gamma} dx + \int_\Omega g u_k^q dx + o(1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(a + b \int_\Omega |\partial_i u_k|^{p_i} dx \right) \int_\Omega |\partial_i u_k|^{p_i} dx \right] \leq \int_\Omega f u_k^{1-\gamma} dx + (\frac{1}{n})^{1-\gamma} \int_\Omega f dx + \int_\Omega g u_k^q dx + o(1)$$
$$\leq \int_\Omega f u_k^{1-\gamma} dx + \int_\Omega g u_k^q dx + o(1) \tag{3.5}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et Sobolev

$$\int_\Omega f u_k^{1-\gamma} dx \leq c_1 \Big(\int_\Omega u_k^{\bar{p}^*} dx \Big)^{\frac{1-\gamma}{\bar{p}^*}} . \int_\Omega (f)^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^* - (1-\gamma)}} dx$$
$$\leq C_1 ||u_k||^{1-\gamma}_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} . ||f||_{L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^* - (1-\gamma)}}(\Omega)}$$
$$\leq K_1 ||u_k||^{1-\gamma}$$

$$\int_\Omega g u_k^q dx \leq c_2 \Big(\int_\Omega g^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^* - q}} dx \Big)^{1 - \frac{q}{\bar{p}^*}} . (\int_\Omega (|u_k|^{\bar{p}^*})^{\frac{q}{\bar{p}^*}} dx$$
$$\leq C_2 ||g||_{L^{(\bar{p}*)'}(\Omega)} \quad ||u_k||^q_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)}$$

car si $u \in L^{\frac{\bar{p}^*}{\bar{p}^* - q}}$ alors $u \in L^{(\bar{p}*)'}$

Donc

$$\int_\Omega g u_k^q dx \leq K_2 ||u_k||^q$$

On remplace dans (3.2) on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\left(a + b \int_\Omega |\partial_i u_k|^{p_i} dx \right) \int_\Omega |\partial_i u_k|^{p_i} dx \right] \leq K_1 ||u_k||^{1-\gamma} + K_2 ||u_k||^q$$

Quand $u_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

nécessairement il existe l tel que

$$\int_\Omega |\partial_l u_k|^{p_l} dx \longrightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad k \to +\infty$$

tel que

$$b\Big(\int_\Omega |\partial_l u_k|^{p_l} dx\Big)^2 \leq ||u_k||^q$$

Donc

$$\sqrt{b}\int_\Omega |\partial_l u_k|^{p_l} dx \leq ||u_k||^{\frac{q}{2}}$$

C à d

$$(\sqrt{b})^{\frac{1}{p_l}}\Big(\int_\Omega |\partial_l u_k|^{p_l} dx\Big)^{\frac{1}{p_l}} \leq ||u_k||^{\frac{q}{2p_l}}$$

D'où

$$N(\sqrt{b})^{\frac{1}{p_l}}\Big(\int_\Omega |\partial_l u_k|^{p_l} dx\Big)^{\frac{1}{p_l}} \leq N||u_k||^{\frac{q}{2p_l}}$$

et

$$(\sqrt{b})^{\frac{1}{p_l}}||u_k|| < N(\sqrt{b})^{\frac{1}{p_l}}\Big(\int_\Omega |\partial_l u_k|^{p_l} dx\Big)^{\frac{1}{p_l}} \leq N||u_k||^{\frac{q}{2p_l}}$$

d'où

$$(\sqrt{b})^{\frac{1}{p_l}}||u_k|| \leq N||u_k||^{\frac{q}{2p_l}}$$

$$(\sqrt{b})^{\frac{1}{p_l}} \leq N||u_k||^{\frac{q}{2p_l}-1}$$

donc il faut que

$$\frac{q}{2p_l} - 1 > 0$$

C.à.d

$$q > 2p_l$$

i.e

$$q > 2p_l > p_l \geq p_1$$

Ceci contredit l'hypothèse $q < p_1$.

Donc la suite $\{u_k\}_k$ est bornée dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, par suite il existe une sous suite notée encore $\{u_k\}_k$ telle que

$$u_k \rightharpoonup u_n \quad \text{dans} \quad W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$$

$$u_k \longrightarrow u_n \quad \text{fortement dans} \quad L^r(\Omega) \quad \text{pour tout } r \in [1, \overline{p}^*[$$

$$u_k \longrightarrow u_n \quad \text{P.P dans} \quad \Omega$$

On achève la preuve de la même manière précédente $\square$

Conclusion :

Comme conséquence directe des trois lemmes (3.4), (3.5)et (3.6) et $J(0) = 0$ le problème (3.2) possède une solution u_n telle que $J(u_n) < 0$.

Lemme 3.7. *[3]*
Le problème (3.2) admet une solution V_n telle que $J(V_n) > 0$.

Démonstration.
a partir des lemmes précédentes et par l'application du théorème de Col, on déduit qu'il existe une sous-suite $\{V_k\}_k \subset W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ tel que

$$J(V_k) \to C > r \quad \text{et} \quad J'(V_k) \to 0$$

avec $C = \inf\limits_{\beta \in \Gamma, t \in [0,1]} \max J(\beta(t))$ et

$$\Gamma = \{\beta \in C\Big([0,1], W_0^{1,(p_i)}(\Omega)\Big) : \beta(0) = 0, \beta(1) = \rho\}$$

et similaire-ment à la preuve précédente on déduit que $\{V_k\}_k$ converge vers V_n dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ quand $k \to +\infty$ est solution du problème (3.2) tel que

$$J(V_n) > r > 0$$

En conclusion , le problème (3.2) admet au moins deux solutions.

$\square$

Bibliographie

[1] Adams, Robert A., *Anisotropic Sobolev inequalities*,Casopis pro pèstovàni matematiky 113.3 (1988) :276-279.

[2] Bensedik, Ahmed, *sur quelques problèmes elliptiques de kirchhoff et dynamique des fluides*, these doctorat UAAB et université de Saint-Étienne, halid, 2014.

[3] Bentifour, Rachid, and Sofiane.El-Hadi Miri. some existence Results for a nonlocal non isotropic problem, Opuscula Mathematica 41.1 (2021).

[4] Brezis, H, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris.

[5] D Castro, A Elliptic problems for some anisotropic operators [Ph. D. Thesis]. Rome : University of Rome Sapienza, ay (2009).

[6] Dicastro, A, *Anisotropics elleptic problems with natívals growth terms*, manuscripta math 135, 2011.

[7] El Hamidi, A Rakotoson, J, M, *Extremals functions for the anisotropic Sobolev inequalities immumales pour des inégalités Sobolev anisotropiques*, Ann.I.N, Poincaré, 24, 2007.

[8] Jmg Zhong, X, Chun-Leitang, *Multiple positive solution to a Kirchhof type problème inwoling a critical non linearity*, computers and mathematics with applications 72, 2016.

[9] Leggat, Ahmed Réda, and Soufiane El-Hadi Miri.Anisotropic problem with singular nonlinearity.Complex variables and elliptic equations 61.4(2016) :496-509.

[10] Lei, Chun-Yu, Jia-Feng Liao, Chun-Lei Tang. *multiple positive solution for Kirchhoff type of problems with singularitié and critical exponents.*Journal of Mathematical Analysis and Applications 421.1(2015) :521-528.

[11] Miri, Soufiane El-Hadi On an anisotropic problem with singular nonlinearity having variable exponent.Ricerche di Matematica 66 (2017) :415-424

[12] R.Mecheter, *étude d'un problème parabolique anisotrope à données mesures*, université de M'sila. Algerie(2009).

[13] THANG CHUNG, N, *Multiple solutions for anisotropic elleptic equation of Kirchhoff type unbounded domaine*, RNA 1, 2018.

Abstract

The purpose of this thesis ,is to study of anisotropic kirchhoff elleptic problem type where the unknown fonction u of the problem and its different derivations belong to different Lesbegue spaces $L^{p_i}(\Omega), \forall i = 1, .., N$, more precisely If :

$$u \in \ L^{p_i}(\Omega) \ \ et \ \ \partial_i \ u \in \ L^{p_i}(\Omega), \forall i = 1, .., N$$

The issue at hand is of form

$$-\sum_{i=1}^{N}\left[(a + b\int_{\Omega}|\partial_i u|^{p_i}dx)\partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u)\right] = \frac{f(x)}{u^{\gamma}} + g(x)u^{q-1}$$

with the sobolev inequality in this case is given as

$$|| \ u||_{L^{\bar{p}*}(\Omega)} \leq \ k \ \sum_{i=1}^{N}||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)}$$

$$\text{With : } \tfrac{1}{\bar{p}*} = \tfrac{1}{\bar{p}} - \tfrac{1}{N}$$

Where k is an independant constant of Ω and $\bar{p}$ is the harmonic mean .

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier un problème elliptique de type Kirchhoff anisotrope où la fonction inconnue u du problème et ses différentes dérivées partielles $\partial_i u$ doivent appartenir a des espaces de Lebesgue différents $L^{p_i}(\Omega), \forall i = 1, .., N$ Plus précisément si $p_i \geq 1$

$$u \in L^{p_i}(\Omega) \ \ et \ \ \partial_i \ u \in L^{p_i}(\Omega), \forall i = 1, .., N$$

Le problème considéré est de la forme :

$$-\sum_{i=1}^{N} \left[(a + b \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i} dx) \partial_i (|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u) \right] = \frac{f(x)}{u^{\gamma}} + g(x) u^{q-1}$$

Avec l'inégalité de Soboleve dans ce cas est donné par :

$$|| \ u||_{L^{\bar{p}*}(\Omega)} \leq \ k \ \sum_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)}$$

$$\text{tel que : } \tfrac{1}{\bar{p}*} = \tfrac{1}{\bar{p}} - \tfrac{1}{N}$$

où k est une constante indépendante de Ω et $\bar{p}$ la moyenne harmonique des p_i.

الملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة مسألة تناقصية من نوع كيرشوف غير متماثلة حيث الدالة u المطلوب تعيينها من المسألة وكذلك مشتقاتها الجزئية $\partial_i u$ تنتمي الى فضاءات لوباغ متعددة $L^{p_i}(\Omega)$ حيث من اجل $p_i \geq 1$ لدينا $u \in L^{p_i}(\Omega)$ و $\partial_i u \in L^{p_i}(\Omega)$ مع $i = 1, .., N$ وبشكل ادق المسألة المطروحة هي من الشكل :

$$-\sum_{i=1}^{N}\left[(a + b\int_{\Omega}|\partial_i u|^{p_i}dx)\partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u)\right] = \frac{f(x)}{u^{\gamma}} + g(x)u^{q-1}$$

مع متباينة صوبولاف في هذه الحالة تعطى ب :

$$||\, u||_{L^{\bar{p}*}(\Omega)} \leq \; k \; \sum_{i=1}^{N}||\partial_i u||_{L^{p_i}(\Omega)}$$

و

$$\frac{1}{\bar{p*}} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N}$$

حيث ثابت k مستقل عن Ω و $\bar{p}$ المتوسط التوافقي للاعداد p_i.